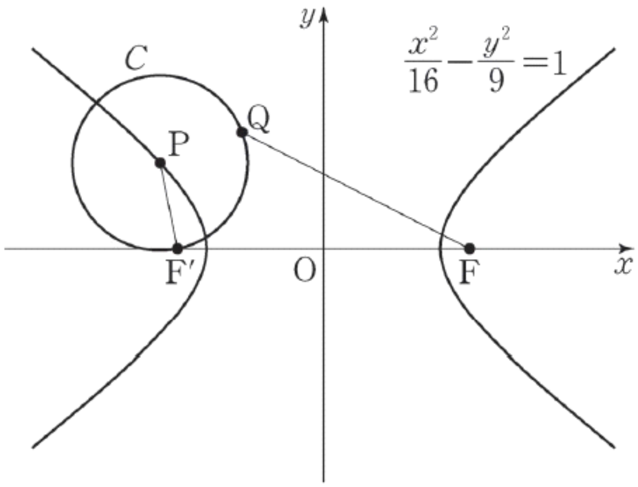
수학의 슈퍼파워 정병호/정병훈의
2017학년도 수능 대비 6월 평가원 모의고사 수학 가형
주요문제 긴급해설

18번

그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 F, F'이라 하고, 이 쌍곡선 위의 점 P를 중심으로 하고 선분 PF'을 반지름으로 하는 원을 C라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 선분 FQ의 길이의 최댓값이 14일 때, 원 C의 넓이는? (단, $\overline{PF'}<\overline{PF}$) [4점]



① 7π ② 8π ③ 9π ④ 10π ⑤ 11π

<해설> 직선 PF가 원 C와 만나는 두 점 중에 F에서 더 멀리 떨어진 점을 R이라고 하자. 그러면, 선분 FQ의 길이가 최대가 되는 경우는 점 Q가 점 R에 되는 경우다. 즉, $\overline{FR}=14$가 된다. $\overline{FR}=\overline{FP}+\overline{PR}=\overline{FP}+\overline{F'P}=14$ …… Ⓐ이다.

한편 쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$에서 주축의 길이가 8이므로, $\overline{FP}-\overline{F'P}=8$ …… Ⓑ이다.

Ⓐ식에서 Ⓑ식을 변변끼리 빼면, $2\overline{F'P}=6$이므로, $\overline{F'P}=3$이다. 따라서 원 C의 반지름의 길이가 3이므로, 원 C의 넓이는 9π이다.

정답 : ③

19번

각 면에 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 정사면체 모양의 상자를 던져 밑면에 적힌 숫자를 읽기로 한다. 이 상자를 3번 던져 2가 나오는 횟수를 m, 2가 아닌 숫자가 나오는 횟수를 n이라 할 때, $i^{|m-n|}=-i$일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

<해설> 상자를 3번 던져 2가 나오는 횟수와 2가 아닌 숫자가 나오는 횟수의 합은 3이다. 즉, $m+n=3$이므로, $n=3-m$이다.

$i^{|m-n|}=-i$에 대입하면, $i^{|m-(3-m)|}=-i$이므로, $i^{|2m-3|}=i^3$이다.

$i^4=1$임을 고려하면, $m=0$, 1, 2, 3 중에 $|2m-3|$을 4로 나누었을 때 나머지가 3이 되는 경우를 찾아야 한다. $m=0$인 경우와 $m=3$인 경우가 이 조건을 만족한다. 즉, 이 문제는 상자를 3번 던져서 2가 한 번도 나오지 않거나, 3번 모두 2가 나올 확률을 구하는 문제다.

i) 2가 한 번도 나오지 않을 확률은 $\left(\frac{3}{4}\right)^3$이다.

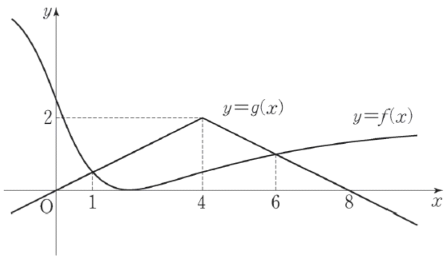
ii) 2가 3번 모두 나올 확률은 $\left(\frac{1}{4}\right)^3$이다.

$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{7}{16}$

정답 : ②

20번

함수 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x)=\frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$인 a에 대하여 $\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은? [4점]

① $14-5\ln 5$ ② $15-5\ln 10$ ③ $15-5\ln 5$
④ $16-5\ln 10$ ⑤ $16-5\ln 5$

<해설> $h(a)=\int_0^a f(x)dx+\int_a^8 g(x)dx$라고 하면, $h'(a)=f(a)-g(a)$이다.

문제의 그림에서 $0<a<1$일 때 $f(a)>g(a)$이므로 $h'(a)>0$이다.
따라서 $h(a)$는 $0 \le a \le 1$인 범위에서 증가한다.
$1<a<6$일 때 $f(a)<g(a)$이므로 $h'(a)<0$이다. 따라서 $h(a)$는 $1 \le a \le 6$인 범위에서 감소한다.
$6<a<8$일 때 $f(a)>g(a)$이므로 $h'(a)>0$이다. 따라서 $h(a)$는 $6 \le a \le 8$인 범위에서 증가한다.

이상의 결과로부터 $h(a)$의 최솟값은 $h(0)$ 또는 $h(6)$이 됨을 알 수 있다.

그런데, $h(0)=\int_0^8 g(x)dx=\frac{1}{2}\times 8\times 2=8$이다.

$$h(6)=\int_0^6 f(x)dx+\int_6^8 g(x)dx$$
$$=\int_0^6\left(\frac{5}{2}-\frac{10x}{x^2+4}\right)dx+\frac{1}{2}\times 2\times 1$$
$$=15-\int_0^6\frac{10x}{x^2+4}dx+1$$

$x^2+4=t$로 치환하면, $2xdx=dt$이다. $x=0$일 때 $t=4$이고, $x=6$일 때 $t=40$이다.

$$h(6)=16-\int_0^6\frac{10x}{x^2+4}dx$$
$$=16-5\int_4^{40}\frac{1}{t}dt$$
$$=16-5\left[\ln|t|\right]_4^{40}=16-5\ln 10$$

이 때, $2<e<3$이므로, $e^2<9$이므로, $\ln 9>2$이다. 따라서 $\ln 10>2$가 되어, $h(6)<6<h(0)$이 성립한다. 따라서 $h(6)=16-5\ln 10$이 최솟값이다.

정답 : ④

21번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x)+f(-x)=0$
(다) $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

<해설> ㄱ. 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq 1$이므로, 모든 실수 x에 대하여 $f(-x) \neq 1$이 성립한다. 조건 (나)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로, $-f(x) \neq 1$이 성립한다. 따라서 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \neq -1$이다.
∴ 참

ㄴ. 조건 (나)에 $x=0$을 대입하면, $f(0)+f(0)=0$이므로, $f(0)=0$이다.
$x_1 \neq 0$을 만족하는 어떤 실수 x_1에 대하여 $f(x_1)>1$이 성립한다고 가정하면
$f(x)$는 닫힌구간 $[0, x_1]$ 또는 닫힌구간 $[x_1, 0]$에서 연속이고, $f(0)=0<1$, $f(x_1)>1$이므로, 사이값의 정리에 의하여 $f(c)=1$을 만족하는 c가 열린구간 $(0, x_1)$ 또는 열린구간 $(x_1, 0)$에 존재한다. 이 결과는 조건 (가)에 모순이다. 이 모순은 $x_1 \neq 0$을 만족하는 어떤 실수 x_1에 대하여 $f(x_1)>1$이 성립한다고 가정했기 때문에 발생했으므로, 가정을 철회하여 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<1$임을 얻는다.

마찬가지 방법으로 하면, $x_1 \neq 0$을 만족하는 어떤 실수 x_1에 대하여 $f(x_1)< -1$이 성립한다고

가정하면 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, x_1]$ 또는 닫힌구간 $[x_1, 0]$에서 연속이고, $f(0)=0>-1$, $f(x_1)<-1$이므로, 사이값의 정리에 의하여 $f(c)=-1$을 만족하는 c가 열린구간 $(0, x_1)$ 또는 열린구간 $(x_1, 0)$에 존재한다. 이 결과는 조건 (가)에 모순이다. 이 모순은 $x_1 \neq 0$을 만족하는 어떤 실수 x_1에 대하여 $f(x_1)<-1$이 성립한다고 가정했기 때문에 발생했으므로, 가정을 철회하여 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>-1$임을 얻는다.

지금까지의 결론은 모든 실수 x에 대하여 $-1<f(x)<1$이 성립한다는 것이다. 조건 (다)에서 $1+f(x)>0$, $1+f(-x)>0$이므로, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이 성립한다. 따라서 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.
∴ 거짓

ㄷ. 조건 (다)에서 $f'(x)=\{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}=\{1+f(x)\}\{1-f(x)\}=1-\{f(x)\}^2$이다.
양변을 x에 관하여 미분하면, $f''(x)=-2f(x)f'(x)$이다.
그런데, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이고, $f(0)=0$이므로, $x>0$일 때 $f(x)>0$, $x<0$일 때 $f'(x)<0$이다. 따라서 $x<0$일 때 $f''(x)>0$, $x>0$일 때 $f''(x)<0$이 되어, 곡선 $y=f(x)$는 $x=0$에서만 변곡점을 갖는다.
∴ 거짓

<참고> $f'(x)=1-\{f(x)\}^2$로부터 $f(x)$는 다음과 같이 구할 수 있다.
$-1<f(x)<1$이므로, $\dfrac{f'(x)}{1-\{f(x)\}^2}=1$이다. 양변의 0에서 s까지의 정적분을 구하면,
$\displaystyle\int_0^s \frac{f'(x)}{1-\{f(x)\}^2}dx=\int_0^s dx$이다. $f(x)=t$로 치환하면, $f'(x)dx=dt$이다.
$x=0$일 때 $t=f(0)=0$이고, $x=s$일 때 $t=f(s)$이다.
$\displaystyle\int_0^{f(s)} \frac{1}{1-t^2}dt=[x]_0^s$로부터 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{f(s)}\left(\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=s$이다.
$\dfrac{1}{2}\left[\ln|1+t|-\ln|1-t|\right]_0^{f(s)}=s$이므로, $\ln\left|\dfrac{1+f(s)}{1-f(s)}\right|=2s$이다.
$\left|\dfrac{1+f(s)}{1-f(s)}\right|=e^{2s}$이고, $1-f(s)>0$, $1+f(s)>0$이므로, $\dfrac{1+f(s)}{1-f(s)}=e^{2s}$이다.
∴ $f(s)=\dfrac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1}$
즉, $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{e^{2x}+1}$이므로, $f'(x)=\dfrac{4e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}>0$이다.
또, $f''(x)=\dfrac{-8e^{2x}\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^3}$이므로, $x=0$에서만 변곡점이 된다.

정답 : ①

27번

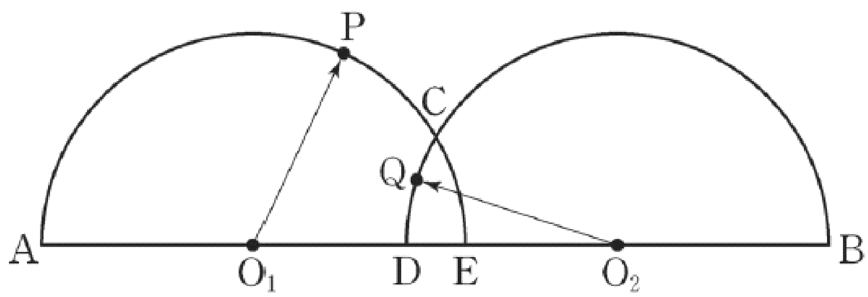
사과, 감, 배, 귤 네 종류의 과일 중에서 8개를 선택하려고 한다. 사과는 1개 이하를 선택하고, 감, 배, 귤은 각각 1개 이상을 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 각 종류의 과일은 8개 이상씩 있다.) [4점]

<해설> 선택할 사과, 감, 배, 귤의 개수를 각각 a, b, c, d라고 하자. 그러면, $a+b+c+d=8$을 만족해야 하고, $0 \leqq a \leqq 1$, $b \geqq 1$, $c \geqq 1$, $d \geqq 1$을 만족해야 한다.
$x=b-1 \geqq 0$, $y=c-1 \geqq 0$, $z=d-1 \geqq 0$이라고 하면, $a+x+y+z=5$를 만족한다.
이 문제는 $a+x+y+z=5$를 만족하는 0 이상의 정수 a, b, c, d의 순서쌍 중에서 $a \geqq 2$인 경우를 제외한 것의 개수를 구하는 문제가 되었다.
$a+x+y+z=5$를 만족하는 0 이상의 정수 a, b, c, d의 순서쌍의 개수는 ${}_4H_5={}_8C_5=56$이다.
이 중에 $a \geqq 2$인 것은 $(a-2)+x+y+z=3$으로 해석하여 0 이상의 정수 $a-2$, b, c, d의 순서쌍의 개수와 같으므로, ${}_4H_3={}_6C_3=20$이다.
$\therefore\ 56-20=36$

정답 : 36

28번

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE}=\overline{DB}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=1$인 두 점을 O_1, O_2라 하자.
호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1<\overline{O_1O_2}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



<해설> 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$와 $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|^2=\left|\overrightarrow{O_1P}\right|^2+\left|\overrightarrow{O_2Q}\right|^2+2\left|\overrightarrow{O_1P}\right|\left|\overrightarrow{O_2Q}\right|\cos\theta=2+2\cos\theta$이다.

$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$가 최소가 될 때는 θ가 최대가 될 때다. 이 경우는 $P=C$, $Q=D$인 경우가 되어, $\overrightarrow{O_2D}=\overrightarrow{O_1A}$임을 고려하자. 선분 AC의 중점을 M이라고 하면, $\left|\overrightarrow{O_1A}+\overrightarrow{O_1C}\right|=2\left|\overrightarrow{O_1M}\right|=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\overline{O_1M}=\frac{1}{4}$이다.

삼각형 AO_1M에서 피타고라스의 정리를 쓰면,

$\overline{AM}^2=\sqrt{\overline{O_1A}^2-\overline{O_1M}^2}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$이다. 따라서 $\overline{AC}=2\overline{AM}=\frac{\sqrt{15}}{2}$이다.

선분 AB의 중점을 N이라고 하면, 두 삼각형 AO_1M과 ACN이 닮음이므로,

$\overline{AO_1}:\overline{AM}=\overline{AC}:\overline{AN}$이다. 따라서 $1:\frac{\sqrt{15}}{4}=\frac{\sqrt{15}}{2}:\overline{AN}$이 되어, $\overline{AN}=\frac{15}{8}$이다.

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AN}=\frac{15}{4}$

$\therefore\ p=4,\ q=15$이므로, $p+q=19$이다.

정답 : 19

29번

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t\geq 1)$에서의 위치 (x,y)가

$$\begin{cases}x=2\ln t\\ y=f(t)\end{cases}$$

이다. 점 P가 점 $(0,f(1))$로부터 움직인 거리가 s가 될 때 시각 t는 $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$이고, $t=2$일 때 점 P의 속도는 $\left(1,\frac{3}{4}\right)$이다. 시각 $t=2$일 때 점 P의 가속도를 $\left(-\frac{1}{2},a\right)$라 할 때, $60a$의 값을 구하시오. [4점]

<해설> $t=\frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ …… Ⓐ로부터 $2t-s=\sqrt{s^2+4}$이다.

양변을 제곱하면, $(2t-s)^2=s^2+4$가 되어, $4t^2-4st=4$이다.

$\therefore\ s=t-\frac{1}{t}$이고, $t\geq 1$이므로 이 결과는 Ⓐ식을 만족한다.

점 P의 속도벡터를 $\vec{v}$라고 하면,

$x=2\ln t$, $y=f(t)$로부터 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2}{t}$, $\dfrac{dy}{dt}=f'(t)$이므로 $\vec{v}=\left(\dfrac{2}{t}, f'(t)\right)$이다.

시각 t에서 점 P의 속력은 $\dfrac{ds}{dt}=|\vec{v}|$로 나타낼 수 있다.

$\dfrac{ds}{dt}=1+\dfrac{1}{t^2}$, $|\vec{v}|=\sqrt{\left(\dfrac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}$ 이므로, $1+\dfrac{1}{t^2}=\sqrt{\left(\dfrac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2}$ 이다.

$1+\dfrac{1}{t^2}\geq 0$이 되어 양변을 제곱해도 필요충분조건을 만족한다.

$\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)^2=\left(\dfrac{2}{t}\right)^2+\{f'(t)\}^2$으로부터 $\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)^2=\{f'(t)\}^2$이다.

따라서 명제 "$t\geq 1$인 임의의 실수 t에 대하여 $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$ 또는 $f'(t)=-1+\dfrac{1}{t^2}$이다."가 성립한다. 이것은 $f'(t)=0$을 만족하는 t의 값은 1 뿐임을 의미한다. …… Ⓑ

$t=2$일 때 점 P의 속도가 $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$이므로, $f'(2)=\dfrac{3}{4}>0$이다.

$t_1>1$을 만족하는 어떤 실수 t_1에 대하여 $f'(t_1)=-1+\dfrac{1}{{t_1}^2}$이 성립한다고 가정하면

$f'(t_1)<0$이다. $t_1<2$일 때는 닫힌구간 $[t_1, 2]$에서, $t_1>2$일 때는 닫힌구간 $[2, t_1]$에서 $f'(t)$는 연속이므로, 사이값의 정리에 의하여 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 열린구간 $(t_1, 2)$ 또는 $(2, t_1)$에 적어도 하나 존재하게 된다. 이 결과는 Ⓑ에 모순이다. 이 모순은 $t_1>1$을 만족하는 어떤 실수 t_1에 대하여 $f'(t_1)=-1+\dfrac{1}{{t_1}^2}$이 성립한다고 가정했기 때문에 발생했으므로, 가정을 철회하여 $t>1$을 만족하는 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)=1-\dfrac{1}{t^2}$이 성립함을 얻는다. 양변을 다시 미분하면, $f''(t)=\dfrac{2}{t^3}$이다.

이제 점 P의 가속도는 $\left(-\dfrac{2}{t^2}, f''(t)\right)$이므로, $a=f''(2)=\dfrac{1}{4}$이다.

$\therefore\ 60a=15$

정답 : 15

30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 $a(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$
(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때 $abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

조건 (나)에서 $\int_{x}^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$의 양변을 x에 관하여 미분하면,

$f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ …… Ⓐ이다.

Ⓐ에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면, $f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

그런데, 조건 (가)에서 $f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$이므로 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$이다.

따라서 $-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수)가 되어, $a=-2n\pi-\frac{\pi}{3}$이다.

$0<a<2\pi$에 대입하면, $0<-2n\pi-\frac{\pi}{3}<2\pi$이다.

$-\frac{7}{6}<n<-\frac{1}{6}$이 되어, 이 범위의 정수 n의 값은 -1이다. 즉, $n=-1$이므로, $a=\frac{5}{3}\pi$이다.

조건 (나)에서 $\int_{x}^{x+\frac{5}{3}\pi} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

$x=-\frac{5}{6}\pi$를 대입하면, $\int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi} f(t)dt=\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$가 성립한다.

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로, $2\int_{0}^{\frac{5}{6}\pi} f(t)dt=-1$이다.

$2\int_{0}^{\frac{5}{6}\pi}\{b\cos(3t)+c\cos(5t)\}dt=-1$이므로, $2\left[\frac{1}{3}b\sin(3t)+\frac{1}{5}c\sin(5t)\right]_{0}^{\frac{5}{6}\pi}=-1$이 되어,

$\frac{1}{3}b+\frac{1}{10}c=-\frac{1}{2}$ …… Ⓑ이다.

한편 조건 (가)의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f'(x)=-f'(-x)$이다.

조건 (나)의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f'\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)-f'(x)=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

두 식 모두 $x=-\frac{5}{6}\pi$를 대입하면,

$f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)$, $f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)-f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right)=-\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)=1$이다.

두 식을 변변끼리 더하여 정리하면, $f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{2}$이다.

$g(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$라고 하면, $g'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$이다.

그런데, 닫힌구간 $\left[0, \frac{5}{6}\pi\right]$에서 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)=g(x)$이고,

$f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 미분가능하므로,

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\lim_{x\to\frac{5}{6}\pi-}\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x-\frac{5}{6}\pi}=\lim_{x\to\frac{5}{6}\pi-}\frac{g(x)-g\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x-\frac{5}{6}\pi}=g'\left(\frac{5}{6}\pi\right)$가 성립한다.

즉, $-3b-\frac{5}{2}c=\frac{1}{2}$ …… ⓒ이다.

ⓑ식의 25배와 ⓒ식을 변변끼리 더하면, $\frac{16}{3}b=-12$이므로, $b=-\frac{9}{4}$이다.

ⓑ에 대입하면, $-\frac{3}{4}+\frac{1}{10}c=-\frac{1}{2}$이므로, $c=\frac{5}{2}$이다.

$\therefore$ $abc=\frac{5}{3}\pi\times\left(-\frac{9}{4}\right)\times\frac{5}{2}=-\frac{75}{8}\pi$

$\therefore$ $p=8$, $q=75$이므로 $p+q=83$이다.

정답 : 83