著 : 雀
sukita1729@gmail.com

1. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★★☆☆]

$$\int_0^{\pi} x\sin^{2023}x dx$$

x에 $\sin x$에 관한 함수 $f(\sin x)$가 곱해진 $xf(\sin x)$ 형태의 함수를 적분할 때에는 다음과 같이 $\pi - x$ 치환을 통해 앞에 곱해진 x를 소거할 수 있다.

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \int_{\pi}^{0}(\pi - x)f(\sin(\pi - x))(-dx)$$

$$= \int_0^{\pi}(\pi - x)f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

따라서

$$\int_0^{\pi} x\sin^{2023}x dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\sin^{2023}x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2023}x dx$$

이고, 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx$$

라 하면 이는 Wallis' Integral로 유명한 $\sin x$의 거듭제곱의 정적분이다. (점화식을 이용하는 대표적인 예시로, 논술과 심층면접 빈출 소재이므로 꼭 기억하자. 참고로 x를 $\frac{\pi}{2} - x$로 치환하면 $\cos^n x$의 정적분과 동일하다는 것을 알 수 있다.) $\sin x$를 적분하는 부분적분을 하면

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x \cdot \sin x dx$$

$$= [-\cos x \cdot \sin^{n-1}x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(n-1)\sin^{n-2}x\cos x \cdot (-\cos x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-2}x - \sin^n x)dx$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

이므로

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}, \quad I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2}$$

이다. 한편 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = 1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2023}x dx = I_{2023} = \frac{2022}{2023}I_{2021} = \frac{2022\times 2020}{2023\times 2021}I_{2019}$$

$$= \cdots = \frac{2022\times 2020\times \cdots \times 2}{2023\times 2021\times \cdots \times 3}I_1$$

$$= \frac{(2^{1011}\times 1011!)^2}{2023!} = \frac{2^{2022}\times(1011!)^2}{2023!}$$

이고, 답은

$$\int_0^{\pi} x\sin^{2023}x dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2023}x dx = \pi I_{2023}$$

$$= \frac{2^{2022}\times(1011!)^2}{2023!}\pi$$

이다. ■

(참고) 위 점화식을 이용하면 임의의 음이 아닌 정수 p에 대하여 다음이 성립함을 보일 수 있다. 이 결과를 4번 문항에서 이용할 것이다.

$$I_{2p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p}x dx = \frac{(2p)!}{2^{2p+1}(p!)^2}\pi$$

$$I_{2p+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p+1}x dx = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

2. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★☆☆☆]

$$\int_0^1 (\ln x)^{1024} dx$$

음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n = \int_0^1 (-\ln x)^n dx$$

1을 적분하고 $(-\ln x)^n$을 미분하는 부분적분을 하면

$$I_n = \int_0^1 (-\ln x)^n dx$$

$$= \left[x(-\ln x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(-\ln x)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx$$

이다. 이때 $\left[x(-\ln x)^n\right]_0^1$에서 $\ln x$에 $x=0$을 대입할 수는 없으므로 이는 엄밀히는 잘못된 표기법이지만, x가 $0+$로 수렴할 때의 극한을 이렇게 표기하기로 하자. (피적분함수 자체가 $x=0$에서 정의되지 않으므로 이 적분 자체는 고등학교 교육과정을 벗어난 이상적분이긴 하다.)

$x = e^{-t}$, $t = -\ln x$로 치환하면 $x \to 0+$일 때 $t \to +\infty$이고 로피탈 정리에 의해

$$\lim_{x \to 0+} x(-\ln x)^n = \lim_{t \to \infty} (e^{-t} t^n) = 0$$

이므로

$$I_n = \left[x(-\ln x)^n\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot n(-\ln x)^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= n\int_0^1 (-\ln x)^{n-1} dx = nI_{n-1}$$

이다. 따라서 $I_n = nI_{n-1}$, $I_0 = 1$이고

$$I_n = n!$$

을 얻는다. 한편 1024는 짝수이므로 문제의 적분은 I_{1024}와 같고, 답은 $1024!$이다. ■

(참고, 교육과정 외) 감마함수의 적분 정의를 이용하여 간단하게 해결할 수도 있다. $x = e^{-t}$, $t = -\ln x$로 치환하면 $dx = -e^{-t}dt$이고

$$\int_0^1 (\ln x)^{1024} dx = \int_\infty^0 (-t)^{1024}(-e^{-t}dt) = \int_0^\infty (-t)^{1024} e^{-t} dt$$

가 성립하고, 감마함수의 적분 정의는

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx$$

이므로 문제의 적분식의 값은 $\Gamma(1025)$와 같다. 또한, n이 자연수일 때 $\Gamma(n)$은 $(n-1)!$과 같으므로 답은

$$\Gamma(1025) = 1024!$$

이다. (감마 함수는 음이 아닌 정수에 대해서만 정의된 계승함수 $n!$의 정의역을 0 이하의 정수를 제외한 모든 복소수로 확장한 함수이므로, 자연수에 대해서 계승함수의 성질이 여전히 성립한다.)

3. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★★★☆]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1024} x \cos(1024x)dx$$

적분 범위가 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지이고, 피적분함수에 삼각함수가 있으므로 x를 $\frac{\pi}{2} - x$로 치환하여 다음을 얻는다.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1024} x \cos(1024x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1024} x \cos(1024x)dx$$

이제 음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx)dx$$

이때

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(n+1-1)xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\{\cos(n+1)x\cos x + \sin(n+1)x\sin x\}dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} x\cos(n+1)xdx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(n+1)x\sin x\cos^n xdx$$

이다. 첫 번째 적분식은 I_{n+1}과 같고, 두 번째 식에서 $\sin(n+1)x$를 미분하고 $\sin x\cos^n x$를 적분하는 부분적분을 하면

$$I_n = I_{n+1} + \left[\sin(n+1)x \cdot \frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)\cos(n+1)x \cdot \frac{-1}{n+1}\cos^{n+1}xdx$$

$$= 2I_{n+1}$$

이다. 한편 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$이므로 $\{I_n\}$은 초항이 $\frac{\pi}{2}$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서

$$I_n = \frac{\pi}{2^{n+1}} \quad (n \geq 0)$$

이고 구하는 답은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{1024} x \cos(1024x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{1024} x \cos(1024x)dx$$

$$= I_{1024} = \frac{\pi}{2^{1025}}$$

이다. ■

4. 1번 문항을 이용하여 다음이 성립함을 증명하여라.
[★★★★☆]

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots$$

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 $0 \le \sin x \le 1$이므로

$$\sin^{2n+1}x \le \sin^{2n}x \le \sin^{2n-1}x$$

이고, 각 변을 0부터 $\frac{\pi}{2}$까지 적분하면 1번 문항에서 정의된 I_n에 대하여 다음이 성립한다.

$$I_{2n+1} \le I_{2n} \le I_{2n-1} \quad \cdots \quad [1]$$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n dx \ge 0$이고, $\frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1}$이므로 [1]의 각 변을 I_{2n+1}로 나누면

$$1 \le \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \le \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

이 성립한다. 이때 $\lim_{n \to \infty} \frac{2n+1}{2n} = 1$이므로 샌드위치 정리에 의해

$$\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$$

이 성립한다. 한편 1번 문항에서부터

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi,$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

이 성립함을 알 수 있으므로

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\pi \times \frac{(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}$$

이고,

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1) \times (2n-3) \times \cdots \times 1,$$

$$\frac{(2n+1)!}{2^n n!} = (2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 1$$

이므로

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2n)!(2n+1)!}{2^{4n}(n!)^4}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2^{2n}(n!)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2n+1)}{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2n)}$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n+1}{2n}$$

이다. 한편 $\lim_{n \to \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$이므로 위 식을 대입하면

$$1 = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n+1}{2n} \times \cdots$$

을 얻고, $\frac{\pi}{2}$를 우변에 남긴 채 나머지를 좌변으로 넘기면 다음이 성립하여 증명이 완료된다. ■

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \cdots$$

5. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★★★★]

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{(e^{x^7-\sin^{13}x}+1)\sin x}\,dx$$

괴상하게 생겼지만, 정적분 기법만 알고 있다면 전혀 어렵지 않은 문제이다. 적분 구간이 0에 대해 대칭이므로 $f(x)=x^7-\sin^{13}x$라 놓고 x를 $-x$로 치환하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{(e^{f(x)}+1)\sin x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(-2023x)}{(e^{f(-x)}+1)\sin(-x)}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{(e^{f(-x)}+1)\sin x}\,dx$$

이고, f는 기함수이므로 $f(-x)=-f(x)$가 성립하여

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{(e^{f(-x)}+1)\sin x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{(e^{-f(x)}+1)\sin x}\,dx$$

이다. 이제 분모와 분자에 $e^{f(x)}$을 곱하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{(e^{-f(x)}+1)\sin x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{f(x)}}{1+e^{f(x)}}\cdot\frac{\sin(2023x)}{\sin x}\,dx$$

가 되어 처음 적분과 더했을 때 $e^{f(x)}$ 항이 완전히 소거되는 것을 알 수 있다. 따라서 문제의 적분식의 값을 L이라 하면

$$L = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(2023)x}{\sin x}\,dx = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin(2023x)}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2023x)}{\sin x}\,dx \quad (x \mapsto \pi - x)$$

이다. 이제 음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\,dx$$

이때

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(n+2)x - \sin(nx)}{\sin x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cos(n+1)x}{\sin x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(n+1)x\,dx$$

$$= 2\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right)$$

이고, n이 홀수이면 $\frac{n+1}{2}$은 정수이므로

$$I_{n+2} - I_n = \frac{2}{n+1}\sin\left(\frac{n+1}{2}\pi\right) = 0$$

이다. 따라서 임의의 홀수 n에 대하여 다음이 성립한다.

$$I_n = I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

따라서 답은

$$L = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2023x)}{\sin x}\,dx = 2I_{2023} = \pi$$

이다. ■

6. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★★★★]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(2024x)}{\sin^2 x}\, dx$$

음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}\, dx$$

이때

$$I_{n+2} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(n+2)x - \sin^2(nx)}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin(n+2)x + \sin(nx)][\sin(n+2)x - \sin(nx)]}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(n+1)x\cos x \cdot 2\cos(n+1)x\sin x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin(2n+2)x\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)x + \sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)x}{\sin x}\, dx$$

이다. 한편 5번 문항에서 n이 홀수일 때

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

임을 보였으므로

$$I_{n+2} - I_n$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+3)x}{\sin x}\, dx = \pi$$

이다.

따라서 $I_{n+2} = I_n + \pi$이고,

$$I_{2024} = I_0 + 1012\pi = 1012\pi$$

이다. ■

7. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★☆☆☆]

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^{2022} dx$$

sol 1) x^e을 적분하고 $(\ln x)^{2022}$을 미분하는 부분적분을 하면

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^{2022} dx$$

$$= \left[\frac{1}{e+1} x^{e+1} (\ln x)^{2022} \right]_0^1 - \frac{2022}{e+1} \int_0^1 x^e (\ln x)^{2021} dx$$

$$= -\frac{2022}{e+1} \int_0^1 x^e (\ln x)^{2021} dx$$

$$= -\frac{2022}{e+1} \left[\frac{1}{e+1} x^{e+1} (\ln x)^{2021} \right]_0^1 + \frac{2022 \times 2021}{(e+1)^2} x^e (\ln x)^{2020} dx$$

$$= \cdots = \frac{2022!}{(e+1)^{2023}}$$

이다. 풀이의 엄밀성을 위해 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(e+1)^{n+1}}$$

임을 보이자. $n = 0$일 때

$$\int_0^1 x^e dx = \frac{1}{e+1} = (-1)^0 \frac{0!}{(e+1)^1}$$

이므로 성립하고, 음이 아닌 정수 k에 대하여

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^k dx = (-1)^k \frac{k!}{(e+1)^{k+1}}$$

이 성립한다고 가정하자. 이때

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^{k+1} dx$$

$$= \left[\frac{1}{e+1} x^{e+1} (\ln x)^{k+1} \right]_0^1 - \frac{k+1}{e+1} \int_0^1 x^e (\ln x)^k dx$$

$$= 0 - \frac{k+1}{e+1} \times (-1)^k \frac{k!}{(e+1)^{k+1}}$$

$$= (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(e+1)^{k+2}}$$

이므로 수학적 귀납법에 의해 임의의 음이 아닌 정수 n에 대하여

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n!}{(e+1)^{n+1}}$$

이 성립한다. ■

sol 2, **교육과정 외**)

$$\alpha > -1, \quad \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}$$

이므로 식의 양변을 α로 n번 미분하면

$$\frac{d^n}{d\alpha^n} \int_0^1 x^\alpha dx = \int_0^1 \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} x^\alpha dx = \int_0^1 x^\alpha (\ln x)^n dx$$

$$= (-1)^n \frac{n!}{(\alpha+1)^{n+1}}$$

이고, 여기서 n은 음이 아닌 정수이다. 따라서

$$\int_0^1 x^e (\ln x)^{2022} dx = \frac{2022!}{(e+1)^{2023}}$$

이다. ■

8. 다음 적분의 값을 구하여라. [★★★★★]

$$\int_0^1 \sqrt{x^{2023} - x^{2024}}\, dx$$

음이 아닌 정수 n에 대하여 I_n을 다음과 같이 정의하자.

$$I_n = \int_0^1 \sqrt{x^n - x^{n+1}}\, dx$$

1을 적분하고 $\sqrt{x^n - x^{n+1}}$을 미분하는 부분적분을 하면

$$I_n = \left[x\sqrt{x^n - x^{n+1}}\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{nx^{n-1} - (n+1)x^n}{2\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{nx^n - (n+1)x^{n+1}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \left(n\sqrt{x^n - x^{n+1}} - \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\right) dx$$

$$= -\frac{n}{2} I_n + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\, dx$$

이므로

$$(n+2)\, I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\, dx \quad \cdots \quad [1]$$

이다. n의 자리에 $n+2$를 대입하면

$$(n+4)\, I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+3}}{\sqrt{x^{n+2} - x^{n+3}}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\, dx \quad \cdots \quad [2]$$

이므로 $[1] - [2]$를 계산하면

$$(n+2)I_n - (n+4)I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x\,(x^n - x^{n+1})}{\sqrt{x^n - x^{n+1}}}\, dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{x^n - x^{n+1}}\, dx = I_{n+2}$$

이므로 $n \geq 0$에 대하여

$$I_{n+2} = \frac{n+2}{n+5}\, I_n$$

이다.

$$\int_0^1 \sqrt{x^{2023} - x^{2024}}\, dx = I_{2023}$$

이므로

$$I_{2023} = \frac{2023}{2026}\, I_{2021} = \frac{2023 \times 2021}{2026 \times 2024}\, I_{2019}$$

$$= \cdots = \frac{2023 \times 2021 \times \cdots \times 3}{2026 \times 2024 \times \cdots \times 6}\, I_1$$

$$= \frac{2023!}{2022 \times 2020 \times \cdots \times 2} \times \frac{1}{2^{1010} \times 1013!}\, I_1$$

$$= \frac{2023!}{1011!} \times \frac{1}{2^{2021} \times 1013!}\, I_1$$

이다. 한편

$$I_1 = \int_0^1 \sqrt{x - x^2}\, dx$$

에서 $y = \sqrt{x - x^2}$이라 하면

$$x^2 + y^2 = x, \quad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{2^2}$$

이므로 I_1은 중심이 점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 제 1사분면의 반원의 0부터 1까지 밑넓이와 같다. 따라서 $I_1 = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2^2} = \frac{\pi}{8}$이고

$$I_{2023} = \frac{2023!}{1011!} \times \frac{1}{2^{2021} \times 1013!}\, I_1 = \frac{2023!}{2^{2024}\, 1011!\, 1013!}\, \pi$$

$$= \frac{{}_{2024}\mathrm{C}_{1011}\, \pi}{2024 \times 2^{2024}}$$

이다. ■

9. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★☆☆]

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan^5 x dx\right]$$

(2023년 제 42회 MIT 적분대회 Quarterfinal #4
2번 문항, 제한 시간 2분)

$\tan^n x$의 다음 Reduction Formula를 이용한다.
($\tan^n x = \tan^{n-2}x(\sec^2 x - 1)$로 바꾸면 간단하게 유도된다.)

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x - \int \tan^{n-2} x dx$$

이를 이용하여 $\tan^5 x$의 부분적분을 전개하여 계산하면 다음을 얻는다.

$$\int \tan^5 x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\sec x| + C$$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$이므로

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left[\varepsilon^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \tan^5 x dx\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\varepsilon^4\left[\frac{1}{4}\cot^4\varepsilon - \frac{1}{2}\cot^2\varepsilon + \ln|\sec\varepsilon|\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\frac{\varepsilon^4}{4\tan^4\varepsilon} - \frac{\varepsilon^4}{2\tan^2\varepsilon} - \varepsilon^4\ln|\cos\varepsilon|\right] = \frac{1}{4}$$

이다. ■

10. (보너스 문제) 다음 적분의 값을 구하여라.
(단, $\lambda = \sqrt[2022]{7}$) [★★★★☆]

$$\int_1^{\lambda} \frac{1+2x^{2022}}{x(1+x^{2022})}\,dx$$

(2023년 제 42회 MIT 적분대회 Qualifying Exam(예선)
15번 문항)

주어진 적분식의 값을 I라 하고, 분모와 분자에 x^{2021}을 곱하면 다음과 같다.

$$I = \int_1^{\lambda} \frac{1+2x^{2022}}{x^{2022}(1+x^{2022})}\,x^{2021}dx$$

$u = x^{2022}$, $du = 2022x^{2021}dx$로 치환하면

$$I = \frac{1}{2022}\int_1^7 \frac{1+2u}{u(1+u)}\,dx = \frac{1}{2022}\left[\ln|u^2+u|\right]_1^7$$

$$= \frac{1}{1011}\ln 7$$

이다. ■