[240905]

2025학년도 9월 모의평가
필연성 분석
같이 풀어보면 좋을 문항

김지석수학연구소

2025학년도 9모 10번

1. $\angle A > \dfrac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1,\ \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 일 때, 선분 BH 의 길이는?

① 6 ② $\dfrac{25}{4}$ ③ $\dfrac{13}{2}$

④ $\dfrac{27}{4}$ ⑤ 7

2025학년도 9모 10번 필연성 정리

도형의 필연성 02

수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용

도형의 필연성 08

각이 2개 이상

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]

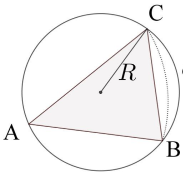
✓ 2변 1각 → 1각

✓ 1변 2각 → 1변

✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때



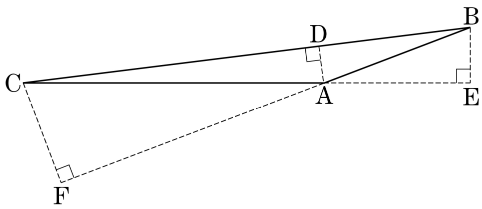
$a = 2RsinA$

같이 풀어보면 좋은 문항

[도형의 필연성 연습문항 16번]

[2014년 3월 (B)형 19번]

2. 그림과 같이 $A > 90°$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD} : \overline{BE} : \overline{CF} = 2 : 3 : 4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은?



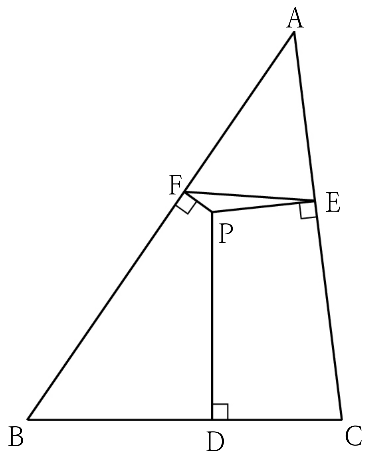
① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{41}{48}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{43}{48}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

같이 풀어보면 좋은 문항

[도형의 필연성 연습문항 17번]

[2012년 3월 30번]

3. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$ 인 삼각형 ABC 의 내부의 한 점 P 에서 세 변 BC, CA, AB 에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F 라 한다. $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ 일 때, 삼각형 EFP 의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



2025학년도 9모 12번

4. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은?

① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

2025학년도 9모 12번 필연성 정리

필연성

수열+ 새로운 규칙
→ 바로 규칙을 이해하려고 하지 말자.
수열의 본질은 나열+관찰!

등차수열

-등차중항
-등차수열의 합 기억해야 할 3가지
(1) 평균x개수
(2) 등차수열의 합 공식
(3) 이차함수

같이 풀어보면 좋은 문항

[2013년 사관학교 29번]

5. 첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이라 하자. $\sum_{k=1}^{20} b_k$의 값을 구하시오.

2025학년도 9모 13번

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+6 & (x<0)\\ -x^2+2x+6 & (x\geq 0)\end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 k $(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.)

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$

④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

2025학년도 9모 13번 필연성 정리

함수

고1 함수의 대칭이동
-Y축 대칭관계 ✔
-X축 대칭관계
-원점 대칭관계
-y=x 대칭관계

Y축 대칭관계
-x의 부호가 바뀐다
-$f(x,y)=0 \rightarrow f(-x,y)=0$

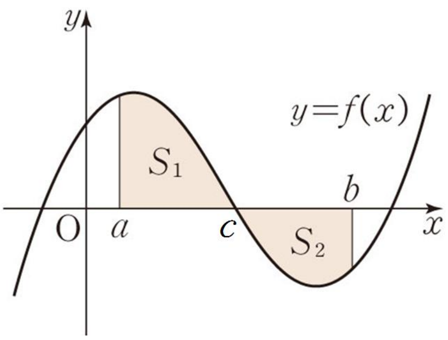
적분+대칭성

-퍼즐 맞추기처럼 문제풀기

문제 그래프 단서

-머리로 이해하려고 하지 말고 손으로 그래프를 그려보자.

적분 기본 개념



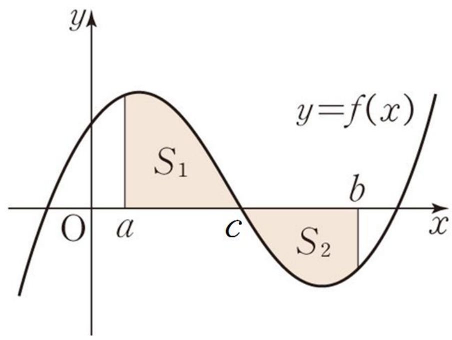
$\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$

적분 개념 채우기

수학의 단권화 p.174~

Check☑ □X □△ □○

7. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 값을 넓이 S_1과 S_2를 이용해 표현하시오.



① $\int_a^c f(x)dx=$

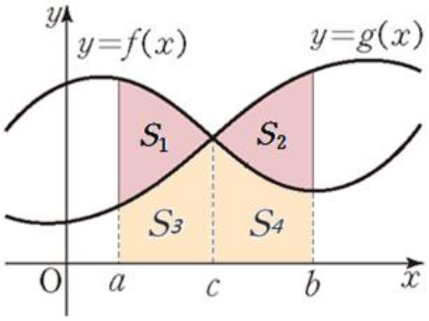
② $\int_c^b f(x)dx=$

③ $\int_a^b f(x)dx=$

④ $\int_a^b |f(x)|dx=$

Check☑ □X □△ □○

8. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대하여 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 값을 넓이 S_1, S_2, S_3, S_4를 이용해 표현하시오.



① $\int_a^c f(x)dx=$

② $\int_a^c g(x)dx=$

③ $\int_c^b f(x)dx=$

④ $\int_c^b g(x)dx=$

⑤ $\int_a^b f(x)dx=$

⑥ $\int_a^b g(x)dx=$

⑦ $\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx=$

⑧ $\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx=$

⑨ $\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx=$

⑩ $\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx=$

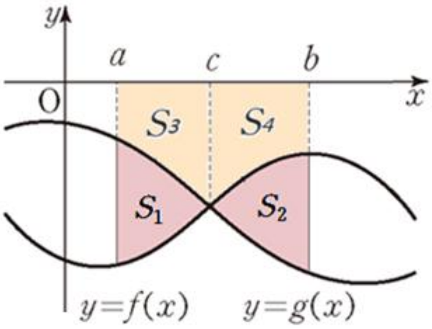
⑪ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=$

⑫ $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx=$

⑬ $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=$

Check☑ □X □△ □○

9. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대하여 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 값을 넓이 S_1, S_2, S_3, S_4를 이용해 표현하시오.



① $\int_a^c f(x)dx=$

② $\int_a^c g(x)dx=$

③ $\int_c^b f(x)dx=$

④ $\int_c^b g(x)dx=$

⑤ $\int_a^b f(x)dx=$

⑥ $\int_a^b g(x)dx=$

⑦ $\int_a^c \{f(x)-g(x)\}dx=$

⑧ $\int_a^c \{g(x)-f(x)\}dx=$

⑨ $\int_c^b \{f(x)-g(x)\}dx=$

⑩ $\int_c^b \{g(x)-f(x)\}dx=$

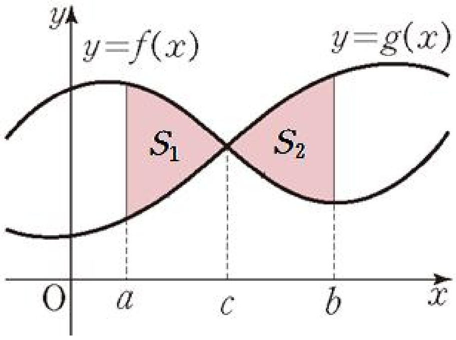
⑪ $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=$

⑫ $\int_a^b \{g(x)-f(x)\}dx=$

⑬ $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=$

Check☑ □X □△ □○

10. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$에 대하여 그래프가 아래 그림과 같을 때, 다음 값을 넓이 S_1과 S_2를 이용해 표현하시오.



$\int_a^b |f(x)-g(x)|dx=$

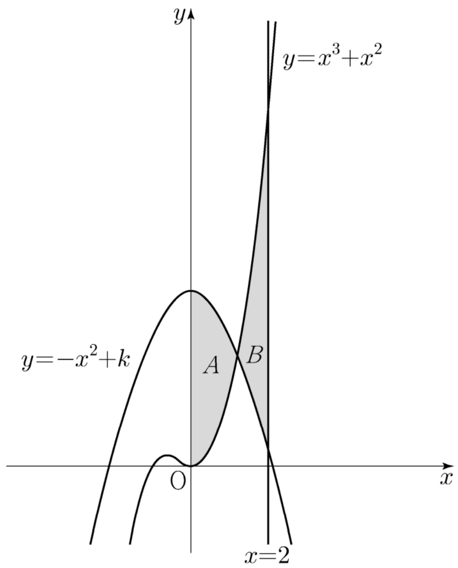
같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수Ⅱ 204번]

[2023년 수능 (공통) 10번] 대표 문항

11. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수II 206번]

[2023년 6월 (공통) 10번]

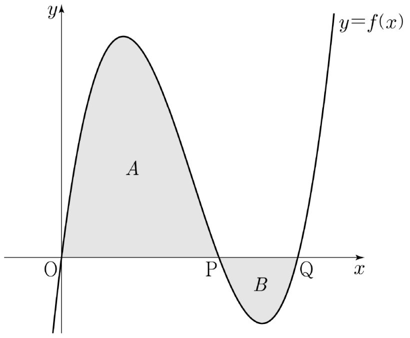
12. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q$(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$(A$의 넓이$)-(B$의 넓이$)=3$

일 때, k의 값은? [4점]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

2025학년도 9모 14번

13. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다. (나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$
④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

2025학년도 9모 14번 필연성 정리

기울기

- **직각삼각형**
  가로(x의 단서) 세로(y단서) 비율
  (도형적 접근)

- **x의 변화량 y의 변화량**

- **tanθ**

지수함수+ 로그함수

- **동시에 등장하였다면**
y=x 대칭관계 써먹을 생각!

지수함수+ 로그함수

- **동시에 등장하였다면**
y=x 대칭관계 써먹을 생각!

같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수 I 83번]

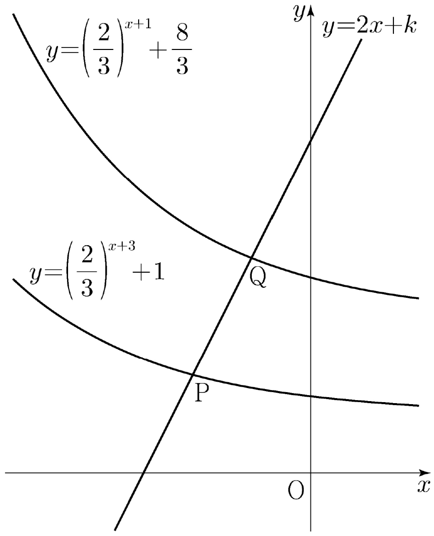
[2022년 수능 (공통) 9번] 대표 문항

14. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



같이 풀어보면 좋은 문항

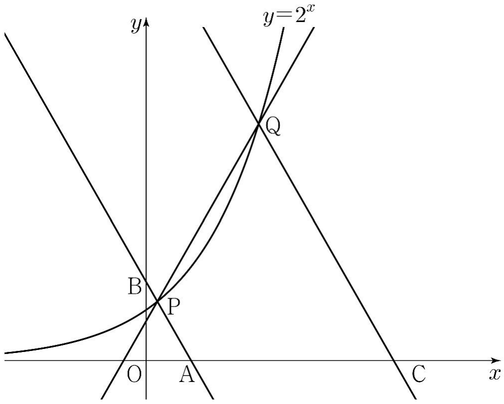
[수능한권 수 I 85번]

[2022년 9월 (공통) 21번]

15. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



같이 풀어보면 좋은 문항

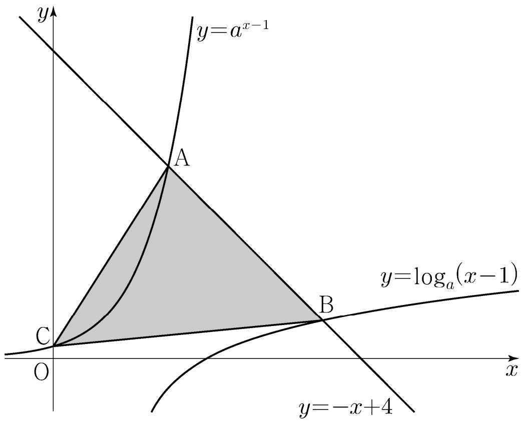
[수능한권 수 I 86번]

[2021년 9월 (공통) 21번]

16. $a>1$인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



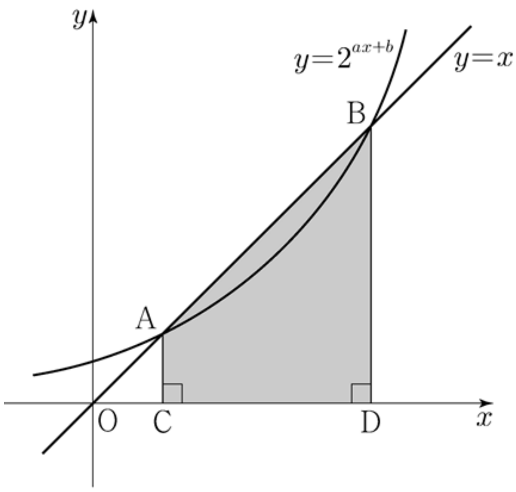
같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수 I 89번]

[2020년 9월 (가)형 13번& (나)형 15번]

17. 곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



2025학년도 9모 15번

18. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_{1}^{x} tf(t)\,dt + \int_{-1}^{x} tg(t)\,dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$

(나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)\,dx$ 의 값은?

① 72 ② 76 ③ 80
④ 84 ⑤ 88

2025학년도 9모 15번 필연성 정리

적분 항등식

$g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ **꼴이 등장하면**

꼭 해야 하는 것

① $x=a$ **대입 :** $g(a)=\int_a^a f(x)\,dx=0$

② **미분 :** $g'(x)=f(x)$

***이번 15번에서는 ①번은 쓰이지 않음**

같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수Ⅱ 191번]

[2023년 9월 (공통) 22번]

19. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x)-2x^2-1$
(나) $f(x)G(x)+F(x)g(x)=8x^3+3x^2+1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

2025학년도 9모 21번

20. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.

2025학년도 9모 21번 필연성 정리

부등식

부등식이 등장하면 '등호'를 주목하자.

$a \le x \le b$ **에서 a=b 가 될 때가 언제인지가 제일 중요하다.**

21번 방법1

-무작정 대입하여 계산하기

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

21번 방법2

문제에서 구하라고 하는 것은 무엇이지?

$f'(3)$

문제에서 제시된 단서는 무엇이지?

$\dfrac{f(k+2) - f(k)}{2}$

문제에서 구하라고 하는 것과 제시된 단서는 어떻게 연관시켜 생각할 수 있을까?

- $f'(a)$와 $f(k+2) - f(x)$는

F 프라임과 함수 값의 차이는

정적분과 연관시켜서 생각할 수 있음

$\therefore f(k+2) - f(k) = \int_k^{k+2} f'(x)\,dx$

$\int_k^{k+2} f'(x)\,dx$을 파악하면 문제에서 구하라고 하는 $f'(3)$을 파악할 수 있음

$\therefore\ 2k - 8 \le \dfrac{f(k+2) - f(k)}{2} \le 4k^2 + 14k$

$\Leftrightarrow\ 4k - 16 \le \int_k^{k+2} 3x^2 + ax + b \le 8k^2 + 28k$

부등식

양쪽이 같아지는 k=-1 , k=-2 대입

2025학년도 9모 22번

21. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

2025학년도 9모 22번 필연성 정리

점화식

점화식
1. 정주행
2. 역주행

22번은 정주행이 편함
*강의에서 이유 설명

수열

- 수열은 나열 해서 규칙을 찾자!

같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수Ⅰ 272번]

[2025학년도 수능 (공통) 15번] 대표 문항

22. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수Ⅰ 273번]

[2023년 수능 (공통) 15번] 대표 문항

23. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

(가) $a_7 = 40$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 3의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 3의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

같이 풀어보면 좋은 문항

[수능한권 수Ⅰ 274번]

24. [2023년 6월 (공통) 15번]

자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

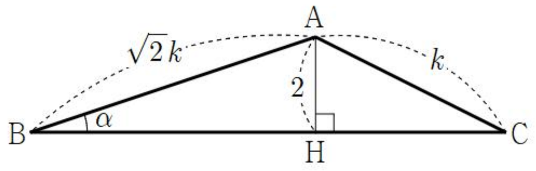
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

정답과 해설

1. [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 이므로
외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R=5\sqrt{2}$
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{AC}}=k$ $(k>0)$으로 놓고
$\angle\mathrm{ABC}=\alpha$라 하면 삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$k=2R\sin\alpha=10\sqrt{2}$ …… ㉠

직각삼각형 ABH 에서

$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{2}k}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$k^2=20$

직각삼각형 ABH 에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{2k^2-4}=6$

2. ④

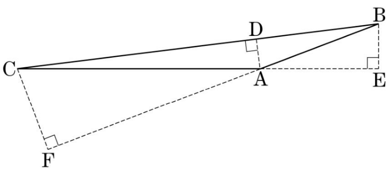
02 도형의 필연성 실전적용

Answer

[2014년 3월 (B)형 19번]

그림과 같이 $A > 90°$인 삼각형 ABC 의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.

$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{BE}} : \overline{\mathrm{CF}} = 2 : 3 : 4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은?



① $\frac{5}{6}$ ② $\frac{41}{48}$ ③ $\frac{7}{8}$ ④ $\frac{43}{48}$ ⑤ $\frac{11}{12}$

필연성 02

수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]

✓ 2변 1각 → 1변

✓ 3변 → 각

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

구하는 것 ‣ $\cos C$

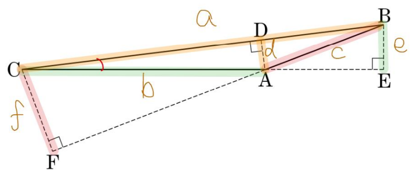
▪ 수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용

▪ 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

(step1) 수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용

$\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{CA}} = b$, $\overline{\mathrm{AB}} = c$,

$\overline{\mathrm{AD}} = d$, $\overline{\mathrm{BE}} = e$, $\overline{\mathrm{CF}} = f$라 하자.



$\triangle$ABC의 넓이$= \frac{1}{2}ad = \frac{1}{2}be = \frac{1}{2}cf$

$\Leftrightarrow$ $ad = be = cf$

$\therefore$ $a : b : c = 6 : 4 : 3$

($\because$ $d : e : f = 2 : 3 : 4$의 최소공배수 12를 기준으로 생각하자.)

(step2) 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{6^2 + 4^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{43}{48}$$

3. 103

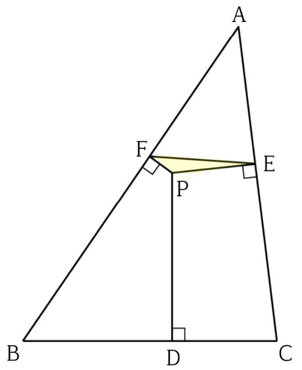
02 도형의 필연성 실전적용

Answer

[2012년 3월 30번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $\overline{\mathrm{CA}}=5$인 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다. $\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{7}$, $\overline{\mathrm{PE}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$일 때, 삼각형 EFP의 넓이는 $\dfrac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



필연성 02

수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용

필연성 09

코사인법칙 활용법 (변이 많을 때)

[단서] → [답]

✓ 2변 1각 → 1변

✓ 3변 → 각

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

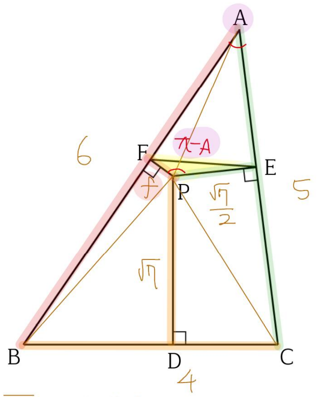
103

구하는 것 · △EFP의 넓이

→ $\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PF}}\cdot\sqrt{7}\cdot\sin(\pi-\mathrm{A})$

- 수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용
- 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

(step1) 수직 선분 → 높이 → 삼각형 넓이 활용



$\overline{\mathrm{PF}}=f$라 하면

△ABC의 넓이

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot f+\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{7}+\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\sin\mathrm{A}$

(step2) 변 길이에 대한 단서가 많다 → 코사인법칙

$\cos A=\dfrac{6^2+5^2-4^2}{2\times 6\times 5}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ \sin A=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot f+\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{7}+\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore\ f=\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

$\therefore$ △EFP의 넓이 $=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{6}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\sin(\pi-\mathrm{A})$

$=\dfrac{7\sqrt{7}}{96}$

$\therefore\ p+q=96+7=103$

4. ②

$b_2 = -2$에서 $\quad a_1 - a_2 = -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$b_3 + b_7 = 0$에서

$(a_1 - a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7) = 0$

$\cdots\cdots$ ㉡

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

㉠에서 $-d = -2$이므로 $\quad d = 2$

㉡에서 $\quad (a+d) + (a+3d) = 0$

$\therefore\ a = -4$

$b_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} a_k$에서

$b_1 = a_1 = a$

$b_2 = a_1 - a_2 = -d$

$b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a + d$

$\vdots$

b_9

$= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9$

$= a + 4d$

$b_2 + b_3 = b_4 + b_5 = b_6 + b_7 = b_8 + b_9 = a$이므로

$\therefore\ \sum_{k=1}^{9} b_k = 5a = -20$

5. 230

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 20이고 공차가 -3인 등차수열이므로

$b_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2k-1} - a_{2k})$

$= 3 + 3 + \cdots + 3$

$= 3k$

b_{2k-1}

$= a_1 + (-a_2 + a_3) + (-a_4 + a_5) + \cdots + (-a_{2k-2} + a_{2k-1})$

$= 20 + (-3) + (-3) + \cdots + (-3)$

$= 23 - 3k$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{20} b_k = \sum_{k=1}^{10} b_{2k-1} + \sum_{k=1}^{10} b_{2k}$

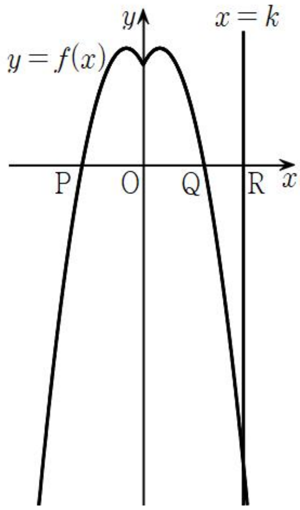
$= \sum_{k=1}^{10} (b_{2k-1} + b_{2k}) = \sum_{k=1}^{10} 23 = 230$

6. ④

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x + 6 & (x < 0) \\ -x^2 + 2x + 6 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(x+1)^2 + 7 & (x < 0) \\ -(x-1)^2 + 7 & (x \geq 0) \end{cases}$$

에서 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $x = k$ 및 세 점 P, Q, R는 다음과 같다.



함수 $y = f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프와 선분 OP 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y = f(x)$의 그래프와 선분 OQ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서 $A = 2B$, 즉 $\frac{A}{2} = B$에서

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6)\,dx = 0$$

$$\int_0^k (-x^2 + 2x + 6)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 6x\right]_0^k$$

$$= -\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k$$

$-\frac{1}{3}k^3 + k^2 + 6k = 0$에서

$-\frac{1}{3}k(k-6)(k+3) = 0$

$\therefore\ k = 6\ (\because\ k > 4)$

7.

① $\int_a^c f(x)dx = S_1$

② $\int_c^b f(x)dx = -S_2$

③ $\int_a^b f(x)dx = S_1 - S_2$

④ $\int_a^b |f(x)|dx = S_1 + S_2$

8.

① $\int_a^c f(x)dx = S_1 + S_3$

② $\int_a^c g(x)dx = S_3$

③ $\int_c^b f(x)dx = S_4$

④ $\int_c^b g(x)dx = S_2 + S_4$

⑤ $\int_a^b f(x)dx = S_1 + S_3 + S_4$

⑥ $\int_a^b g(x)dx = S_2 + S_3 + S_4$

⑦ $\int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx = S_1$

⑧ $\int_a^c \{g(x) - f(x)\}dx = -S_1$

⑨ $\int_c^b \{f(x) - g(x)\}dx = -S_2$

⑩ $\int_c^b \{g(x) - f(x)\}dx = S_2$

⑪ $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = S_1 - S_2$

⑫ $\int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = S_2 - S_1$

⑬ $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = S_1 + S_2$

(⑪ 유도)

$\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$

$= \int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx + \int_c^b \{f(x) - g(x)\}dx$

$= \int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx - \int_c^b \{g(x) - f(x)\}dx$

$= \left(\int_a^c f(x)dx - \int_a^c g(x)dx\right) - \left(\int_c^b f(x)dx - \int_c^b g(x)dx\right)$

$= S_1 - S_2$

9.

① $\int_a^c f(x)dx = -(S_1 + S_3)$

② $\int_a^c g(x)dx = -S_3$

③ $\int_c^b f(x)dx = -S_4$

④ $\int_c^b g(x)dx = -(S_2 + S_4)$

⑤ $\int_a^b f(x)dx = -(S_1 + S_3 + S_4)$

⑥ $\int_a^b g(x)dx = -(S_2 + S_3 + S_4)$

⑦ $\int_a^c \{f(x) - g(x)\}dx = -S_1$

⑧ $\int_a^c \{g(x) - f(x)\}dx = S_1$

⑨ $\int_c^b \{f(x) - g(x)\}dx = S_2$

⑩ $\int_c^b \{g(x) - f(x)\}dx = -S_2$

⑪ $\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx = S_2 - S_1$

⑫ $\int_a^b \{g(x) - f(x)\}dx = S_1 - S_2$

⑬ $\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = S_1 + S_2$

10.

$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx = S_1 + S_2$

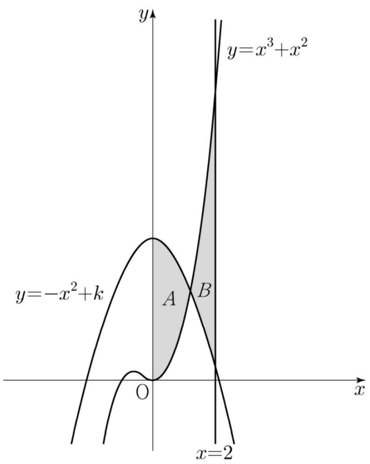
11.

경향12 대표문제분석 057

57. [2023년 수능 (공통) 10번]

두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$) [4점]

① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\int_0^2 \{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx = B-A=0$$

$$=\int_0^2 (x^3+2x^2-k)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$

$$=4+\frac{16}{3}-2k$$

$$=\frac{28}{3}-2k=0$$

$$\therefore k=\frac{14}{3}$$

12.

수학 Ⅱ 3. 적분법 경향12 적분법 그래프

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

205. [2023년 수능 (공통) 12번] 대표 문항

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $n-1 \le x < n$일 때,
> $|f(x)| = |6(x-n+1)(x-n)|$이다.
> (단, n은 자연수이다.)

열린구간 $(0,\ 4)$에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \int_x^4 f(t)dt$$

가 $x=2$에서 최솟값 0을 가질 때, $\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)dx$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

해설 바로가기 ▶ 대표문항 61번

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

206. [2023년 6월 (공통) 10번]

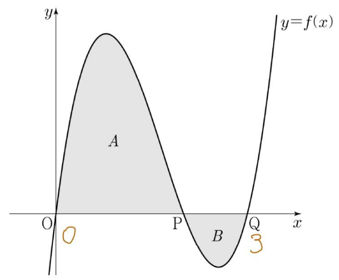
양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q($\overline{OP} < \overline{OQ}$)에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

(A의 넓이)$-$(B의 넓이)$=3$

일 때, k의 값은? [4점]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(A의 넓이)−(B의 넓이)=3

$$= \int_0^3 f(x)dx = k\int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx$$

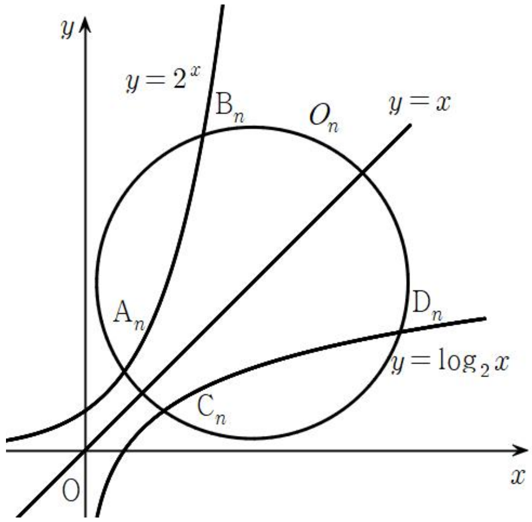
$$= k\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3$$

$$= \frac{9}{4}k = 3$$

$$\therefore\ k = \frac{4}{3}$$

13. ⑤

곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n 중 x좌표가 작은 점을 A_n이라 하고, 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원을 O_n이라 하자. 이 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 C_n, D_n이라 하고 이 두 점 중에서 x좌표가 큰 점을 D_n이라 하자. 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 원 O_n, 네 점 A_n, B_n, C_n, D_n은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=2^x$와 함수 $y=\log_2 x$은 서로 역함수 관계이므로 두 점 A_n과 C_n, 두 점 B_n과 D_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A_n의 x좌표를 α_n이라 하면,

$$\mathrm{A}_n\left(\alpha_n,\ 2^{\alpha_n}\right),\ \mathrm{C}_n\left(2^{\alpha_n},\ \alpha_n\right)$$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$이고, 조건 (가)에서 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이므로 점 B_n의 좌표는

$$\mathrm{B}_n\left(\alpha_n+n,\ 2^{\alpha_n}+3n\right)$$

이고, 두 점 B_n과 D_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 D_n의 좌표는

$$\mathrm{D}_n\left(2^{\alpha_n}+3n,\ \alpha_n+n\right)$$

이다. 또한 점 $\mathrm{B}_n\left(\alpha_n+n,\ 2^{\alpha_n}+3n\right)$은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$$2^{\alpha_n}+3n=2^{\alpha_n+n},\qquad 2^{\alpha_n}\times\left(2^n-1\right)=3n$$

$$\therefore\ 2^{\alpha_n}=\frac{3n}{2^n-1}$$

이때, 원 O_n이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점 중의 x좌표가 큰 점이 D_n이므로

$$x_n=2^{\alpha_n}+3n=\frac{3n}{2^n-1}+3n=\frac{3n\times 2^n}{2^n-1}$$

$$\therefore\ x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

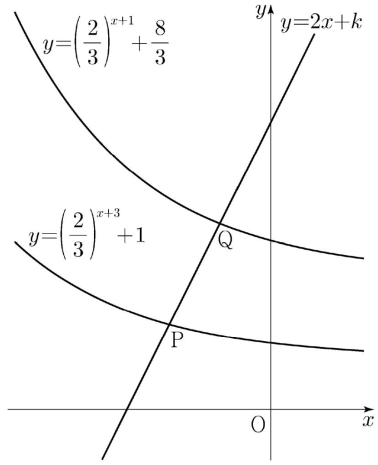
14.

경향05 대표문제분석 018

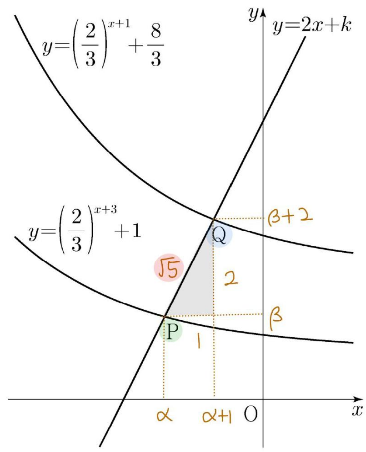
18. [2022년 수능 (공통) 9번]

직선 $y=2x+k$가 두 함수 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$ 과 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$

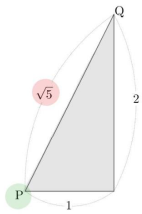


수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



기울기는 단순한 숫자가 아니라
기울기의 근본 개념을 활용하여
직각삼각형으로 해석할 수 있어야 한다!

직선 $y=2x+k$가 기울기가 2이므로
두 점 P, Q를 지나는 직각삼각형의 비율은 아래와 같다.



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=1$, $\overline{\mathrm{QH}}=2$

점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$를 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$에 대입하면

$$\beta=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1$$

점 $\mathrm{Q}(\alpha+1,\ \beta+2)$를 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$에 대입하면

$$\beta+2=\left(\frac{2}{3}\right)^{(\alpha+1)+1}+\frac{8}{3}$$

$$\beta+2-\beta=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}+\frac{8}{3}\right\}-\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1\right\}$$

$$\Leftrightarrow\ 2=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}\left(1-\frac{2}{3}\right)+\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}=1$$

$$\therefore\ \alpha=-2,\ \beta=\frac{5}{3}$$

직선 $y=2x+k$가 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$를 지나므로

$$\beta=2\alpha+k\ \Leftrightarrow\ \frac{5}{3}=2(-2)+k$$

$$\therefore\ k=\frac{17}{3}$$

15.

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

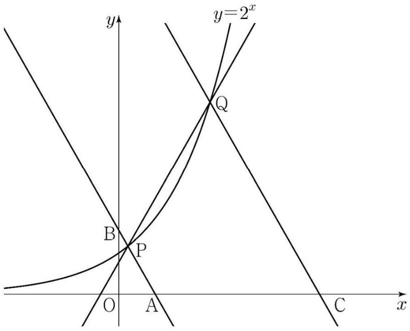
1등급

85. [2022년 9월 (공통) 21번]

그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}}$, $\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]

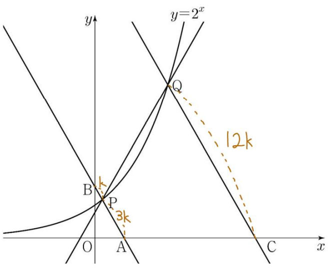


수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

220

기울기는 직각삼각형의 $\dfrac{\text{세로}}{\text{가로}}$ 비율임을 명심하자!

(step1) 변의 길이 관계 파악하기



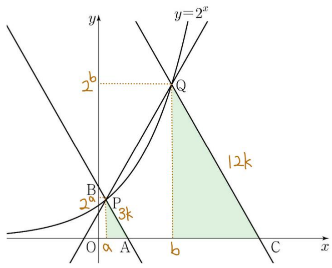
$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PB}}=k$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=4k$, $\overline{\mathrm{AP}}=3k$

$\overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{CQ}}=12k$

(step2) a, b 관계 파악하기



$\triangle\mathrm{PDA}$와 $\triangle\mathrm{QEC}$이 닮음이므로

$\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{QE}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=3k:12k=1:4$

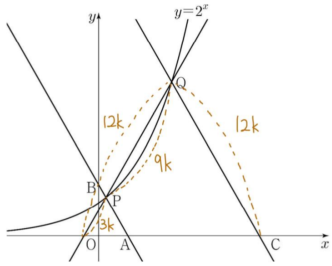
$\Leftrightarrow\ 2^a:2^b=1:4$

$\Leftrightarrow\ 2^b=4\times 2^a=2^{a+2}$

$\therefore\ b=a+2$

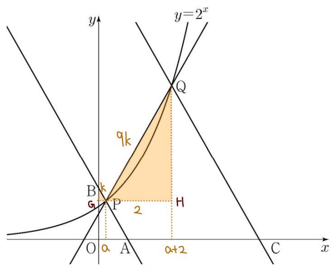
(step3) a의 값 구하기

a의 값을 구하려면 $\overline{\mathrm{PG}}$의 길이를 구할 생각을 할 수 있어야 한다.



$\overline{\mathrm{CQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}=12k$, $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{FP}}=3k$

$\overline{\mathrm{QP}}=12k-3k=9k$



$\triangle\mathrm{PBG}$와 $\triangle\mathrm{PQH}$가 닮음이므로

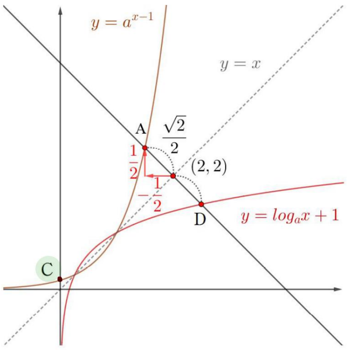
$\overline{\mathrm{PG}}:\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PQ}}=1:9$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PG}}=\dfrac{1}{9}\overline{\mathrm{PH}}=\dfrac{2}{9}$

$\therefore\ a=\dfrac{2}{9}$

$\therefore\ 90\times(a+b)=90\times\left\{\dfrac{2}{9}+\left(\dfrac{2}{9}+2\right)\right\}=220$

(Step3) 역함수의 대칭성 활용하기



∴ 점 A와 D는 $y=x$에 대하여 대칭이다.

∴ 점 A는 (2, 2)에서

x축 방향으로 $-\frac{1}{2}$만큼

y축 방향으로 $+\frac{1}{2}$만큼 평행이동한 점이다.

$\therefore\ A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right),\ \frac{5}{2}=a^{\frac{3}{2}-1} \Leftrightarrow a=\frac{25}{4}$

$\therefore\ C\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$

(Step4) 삼각형 넓이 구하기

점 C와 직선 $y=-x+4$ 사이의 거리를 h라 하면

$$h=\frac{\left|0+\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$$

$$\therefore\ 50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 OΔX					

87. [2020년 수능 (가)형 15번] 대표 문항

지수함수 $y=a^x\,(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 $B(4,\ 0)$에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $3^{\frac{1}{3}}$ ② $3^{\frac{2}{3}}$ ③ 3 ④ $3^{\frac{4}{3}}$ ⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

해설 바로가기 ▶ 대표문항 13번

16.

수학 Ⅰ 1. 지수로그 경향05 지수로그 그래프

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

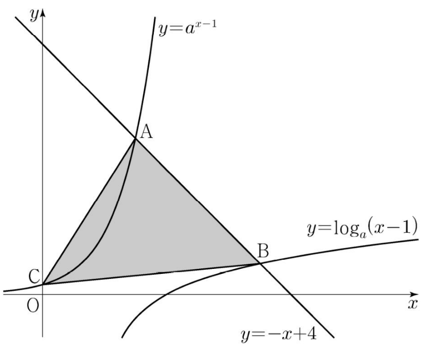
1등급

86. [2021년 9월 (공통) 21번]

$a>1$ 인 실수 a에 대하여 직선 $y=-x+4$가 두 곡선

$$y=a^{x-1},\quad y=\log_a(x-1)$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=a^{x-1}$이 y축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $50\times S$의 값을 구하시오. [4점]



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

192

지수함수와 로그함수가 함께 나오면
역함수관계를 꼭 확인하자!

(step1) 역함수의 평행이동 활용하기

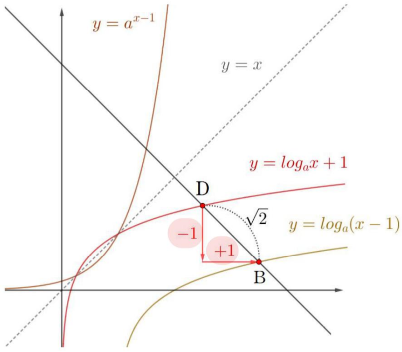
$y=a^{x-1}$의 역함수를 구해보면

$x=a^{y-1} \Leftrightarrow y=\log_a x+1$

$\therefore$ $y=\log_a(x-1)$는 $y=\log_a x+1$를

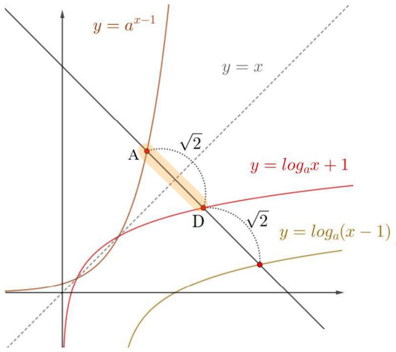
x축 방향으로 $+1$만큼

y축 방향으로 -1만큼 평행이동한 그래프



$\therefore$ $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{2}$

(step2) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$ 활용하기



$\therefore$ $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{2}$

17.

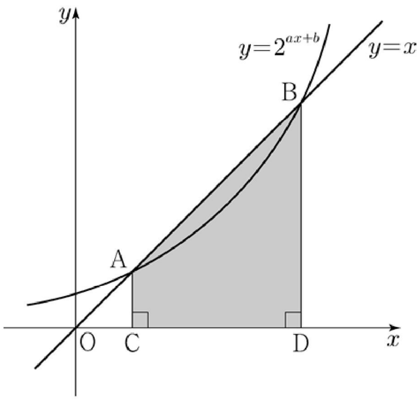
수학 Ⅰ 1. 지수로그 경향05 지수로그 그래프

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 ○△X					

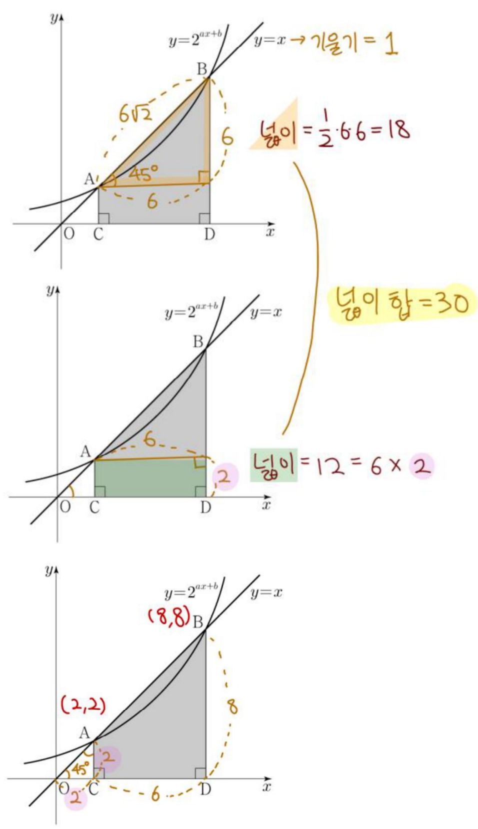
89. [2020년 9월 (가)형 13번 & (나)형 15번]

곡선 $y=2^{ax+b}$과 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때, 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AB}=6\sqrt{2}$이고 사각형 ACDB의 넓이가 30일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$



수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설



$y=2^{ax+b}$가 A$(2,\ 2)$와 B$(8,\ 8)$을 지난다.

A$(2,\ 2)$ 대입 : $2=2^{2a+b}$, $\therefore\ 2a+b=1$

B$(8,\ 8)$ 대입 : $8=2^{8a+b}$, $\therefore\ 8a+b=3$

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+b=\frac{2}{3}$

18. ①

조건 (가)에서 주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$x\{f(x)+g(x)\}=12x^3+24x^2-6x$$

$$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로

$$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$$

이때 $xg'(x)+g(x)=\{xg(x)\}'$이므로 위 식의 양변을 적분하면

$$xg(x)=4x^3+12x^2-6x+C$$ (C는 적분상수)

양변에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

$xg(x)=4x^3+12x^2-6x$에서

$g(x)=4x^2+12x-6$

$$\therefore \int_0^3 \left(4x^2+12x-6\right)dx=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3=72$$

19.

수학 II 3. 적분법 경향11 적분 항등식

수능 4점

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

1등급

191. [2023년 9월 (공통) 22번]
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$

(나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

10

(step1) 조건 (가) 분석하기

$\int_1^x f(t)dt = xf(x) - 2x^2 - 1$에서

❶ $x=1$ 대입

$0 = 1 \times f(1) - 2 - 1$

$\therefore f(1) = 3$

❷ 미분

$\cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 4x$

⇔ $xf'(x) = 4x$

$\therefore f'(x) = 4$

$\therefore f(x) = 4x + C = 4x - 1$ ($\because f(1) = 3$)

$\therefore F(x) = 2x^2 - x + a$

(step2) 조건 (나) 분석하기

$f(x)G(x) + F(x)g(x)$

$= F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$

$= \{F(x)G(x)\}' = 8x^3 + 3x^2 + 1$

$\therefore F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C_1$

$= (2x^2 - x + a)(x^2 + x + c)$

$\therefore G(x) = x^2 + x + c$

$\therefore \int_1^3 g(x)dx = [x^2 + x + c]_1^3 = 10$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

192. [2021년 9월 (공통) 11번]
다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)\,dt$

를 만족시킨다. $f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$일 때, $a + f(3)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)\,dt$

$x=1$을 대입하면

$f(1) = 2 + a + 3a + 0 = 2 + 4a$

$x=0$을 대입하면

$0 = 3a + \int_1^0 f(t)\,dt = 3a - \int_0^1 f(t)\,dt$

$\therefore \int_0^1 f(t)dt = 3a$

$f(1) = \int_0^1 f(t)\,dt$

⇔ $2 + 4a = 3a$

$\therefore a = -2$, $f(1) = -6$

$xf(x) = 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t)\,dt$를 미분하면

$\cancel{f(x)} + xf'(x) = 6x^2 + 2ax + \cancel{f(x)}$

$\therefore f'(x) = 6x + 2a = 6x - 4$

$f(x) = 3x^2 - 4x + C$ (C는 적분상수)

$f(1) = 3 - 4 + C = -6$

$\therefore C = -5$

$\therefore f(3) = 27 - 12 - 5 = 10$

$\therefore a + f(3) = -2 + 10 = 8$

20. 31

부등식 $2k-8 \le \dfrac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$ …… ㉠

에서 $2k-8=4k^2+14k$를 만족하는 k의 값을 구하면

$4k^2+12k+8=0$, $(k+1)(k+2)=0$

$k=-2$ 또는 $k=-1$

k의 값을 부등식 ㉠에 대입하면

$k=-2$일 때, $-12 \le \dfrac{f(0)-f(-2)}{2} \le -12$

$\therefore\ f(0)-f(-2)=-24$ …… ㉡

$k=-1$일 때, $-10 \le \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} \le -10$

$\therefore\ f(1)-f(-1)=-20$ …… ㉢

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)

라 하자. ㉡, ㉢에서

$f(0)-f(-2)=-4a+2b+8$이므로

$-4a+2b+8=-24$

$f(1)-f(-1)=2+2b$이므로 $2+2b=-20$

위 두 식을 연립하면 $a=\dfrac{5}{2}$, $b=-11$

$f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$이므로

$f'(x)=3x^2+5x-11$

$\therefore\ f'(3)=3\times3^2+5\times3-11=31$

21. 8

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$\left(a_{n+1}-a_n+\dfrac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$

이므로

$a_{n+1}-a_n=-\dfrac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$

$a_1=k$이고 $a_2\times a_3<0$이므로 $a_2=-k^2$이면

$a_3=k^3$이어야 하고, $a_2=\dfrac{k}{3}$이면 $a_3=-\dfrac{k^2}{3}$ 또는

$a_3=-\dfrac{k}{3}$이다. 따라서 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
k	$-k^2$	k^3	$-k^4$	0
k	$-k^2$	k^3	$k^3-\dfrac{2}{3}k$	0
k	$\dfrac{k}{3}$	$-\dfrac{k^2}{3}$	$\dfrac{k^3}{3}$	0
k	$\dfrac{k}{3}$	$-\dfrac{k^2}{3}$	$-\dfrac{k^2}{3}-\dfrac{2}{3}k$	0
k	$\dfrac{k}{3}$	$-\dfrac{k}{3}$	$\dfrac{k^2}{3}$	0
k	$\dfrac{k}{3}$	$-\dfrac{k}{3}$	$-k$	0

(ⅰ) $a_4=-k^4$일 때

$a_5=k^5$ 또는 $a_5=-k^4-\dfrac{2}{3}k$이므로 $a_5=0$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_4=k^3-\dfrac{2}{3}k$일 때

(a) $a_5=\left(k^3-\dfrac{2}{3}k\right)\times(-k)$인 경우

$-k^2\left(k^2-\dfrac{2}{3}\right)=0$ $\therefore\ k^2=\dfrac{2}{3}$

(b) $a_5=\left(k^3-\dfrac{2}{3}k\right)-\dfrac{2}{3}k$인 경우

$k^3-\dfrac{4}{3}k=0$ $\therefore\ k^2=\dfrac{4}{3}$

(ⅲ) $a_4=\dfrac{k^3}{3}$일 때

$\dfrac{k^3}{3}-\dfrac{2}{3}k=0$ $\therefore\ k^2=2$

(ⅳ) $a_4=-\dfrac{k^2}{3}-\dfrac{2}{3}k$일 때

$a_5=0$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ⅴ) $a_4=\dfrac{k^2}{3}$일 때

$\dfrac{k^2}{3}-\dfrac{2}{3}k=0$ $\therefore\ k^2=4$

(ⅵ) $a_4=-k$인 경우

$a_5=0$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합은

$\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}+2+4=8$

22.

경향 15 Minor Trend

경향15 대표문제분석 078

1등급

78. [2024년 수능 (공통) 15번]
첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_6+a_7=3$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 139 ② 146 ③ 153
④ 160 ⑤ 167

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

a_1이 자연수이고

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2^{a_n} & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

이므로 $a_2 \to a_3 \to a_4 \to \cdots$ 모두 자연수이다.
∴ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수이다.

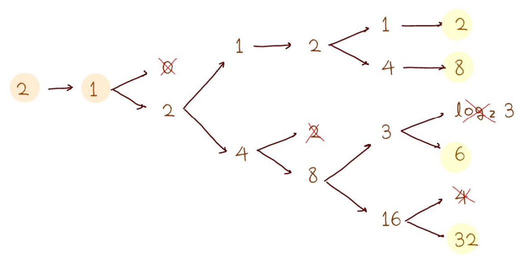
$a_6+a_7=3$에서
i) $a_6=1,\ a_7=2$인 경우
ii) $a_6=2,\ a_7=1$인 경우
두 가지 경우뿐이다.

점화식의 역주행 문제 → 역주행 최적화식 만들기

$$\begin{cases} \log_2 a_{n+1}=a_n & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ 2a_{n+1}=a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

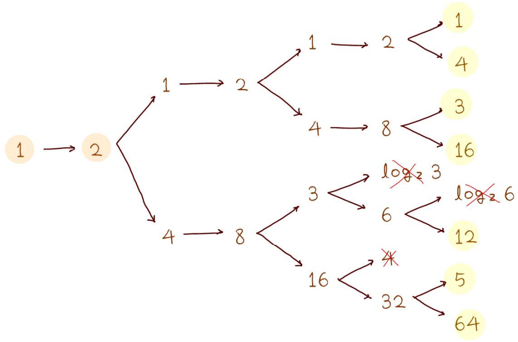
i) $a_6=1,\ a_7=2$인 경우

$a_7 \to a_6 \to a_5 \to a_4 \to a_3 \to a_2 \to a_1$



ii) $a_6=2,\ a_7=1$인 경우

$a_7 \to a_6 \to a_5 \to a_4 \to a_3 \to a_2 \to a_1$



∴ 모든 a_1의 값의 합은
$1+2+3+4+5+6+8+12+16+32+64=153$

Analysis

최근 유행하는 점화식의 역주행 문제.
평가원 모의고사에도 여러 차례 출제됐다.
후속 1등급 컨텐츠에서 논리적 접근법을 다룰 예정이니 꼭 참고하도록 하자.

23.

경향15 대표문제분석 077

1등급

77. [2023년 수능 (공통) 15번]
모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

> (가) $a_7=40$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+2}=\begin{cases} a_{n+1}+a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \dfrac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$
> 이다.

① 216 ② 218 ③ 220 ④ 222 ⑤ 224

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

[참고]
모든 항이 자연수이므로
$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ ⇔ $a_{n+1}\neq 3$의 배수 일 때
$a_{n+2}>a_{n+1}$, a_n이다.

(step1) a_9 최대 구하기

$a_9=a_8+a_7$ or $a_9=\dfrac{1}{3}a_8$
∴ a_8이 최대일 때를 찾아보자.
$a_7=40$이 3의 배수가 아니므로
$a_8=a_7+a_6=40+a_6$
∴ a_6이 최대일 때 a_8이 최대
$a_7=a_6+a_5$일 때 $a_6<a_7=40$이고
$a_7=\dfrac{1}{3}a_6$일 때, $a_6=3a_7=3\times 40=120$
∴ $a_6=120$

a_6	a_7	a_8	a_9
120	40	160	200

(step2) a_9 최소 구하기

$a_9=\dfrac{1}{3}a_8$인 경우 중 (⇔ $a_8=3$배수)
a_8이 최소일 때를 찾아보자.
$a_8=a_7+a_6=40+a_6=(3\times 13+1)+a_6$
∴ $a_6=3k-1$ (∵ $a_8=3$배수)
∴ $a_7=a_6+a_5=40$ (∵ $a_6\neq 3$배수)
∴ $a_5=3(13-k)+2\neq 3$배수
∴ $a_5<a_6<a_7$, $k>7$ $\underbrace{a_5 \quad a_6}_{합=40}$

k	a_4	a_5	a_6	a_7
i) 8 →	6	17	23	40
ii) 9 →	12	14	26	40
iii) 10 →	18	11	29	40
iv) 11 →	24	8	32	40
v) 12 →	30	5	35	40
vi) 13 →	36	2	38	40

$a_4=3$배수이므로
이중에서 $a_5=\dfrac{1}{3}a_4$가 성립하는 것은 iv)뿐이다.

k	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
iv)	24	8	32	40	72	24

∴ $M+m=200+24=224$

Analysis

무작정 문제의 단서를 변형해서 수열을 구하려는 마인드로는 풀 수 없다. 오직 문제에서 요구하는 바가 무엇인가에 확실한 Targeting을 해서 그에 맞춘 계산을 해야지만 해결할 수 있다.

24.

수학 Ⅰ 3. 수열 경향15 귀납적 정의

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

1등급

274. [2023년 6월 (공통) 15번]
자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

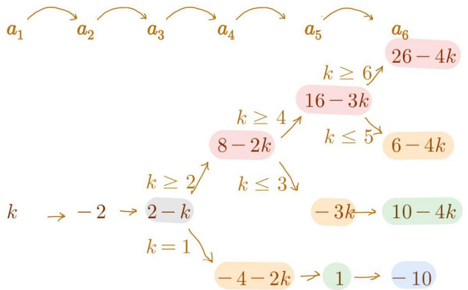
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 규칙대로 나열하기

$\pm 2 - k,\ \pm 4 - k,\ \pm 6 - k,\ \pm 8 - k,\ \pm 10 - k$



(Step2) k값에 따라 부호 판단하기

k	a_3	a_4	a_5	a_6	$a_3 a_4 a_5 a_6$
$k=1$	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
$k=2$	0				0
$k=3$	⊖	⊕	⊖	⊖	⊖
$k=4$	⊖	0			0
$k=5$	⊖	⊖	⊕	⊖	⊖
$k=6$	⊖	⊖	⊖	⊕	⊖
$k \ge 7$	⊖	⊖	⊖	⊖	⊕

∴ 모든 k값의 합은
$3+5+6=14$

복습	1회	2회	3회	4회	5회
채점 O△X					

275. [2023년 9월 (공통) 12번]
첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여
$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$
를 만족시킬 때, $a_2 + a_4 = 40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178
④ 181 ⑤ 184

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

▸ 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 자연수로 구성된다. (홀수 or 짝수)
▸ $a_2 + a_4 = 40$가 단서로 나왔으면
→ a_3에 대해서 파악할 생각을 해야 한다!

a_2	a_2	a_3	a_4
ⅰ)홀수	a_2	a_2+1	$\frac{1}{2}(a_2+1)$
ⅱ)4배수	a_2	$\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{4}a_2$
ⅲ)4배X 2배수	a_2	$\frac{1}{2}a_2$	$\frac{1}{2}a_2+1$

ⅰ) a_2가 홀수인 경우

$a_2 + a_4 = a_2 + \frac{1}{2}(a_2+1) = \frac{3}{2}a_2 + \frac{1}{2} = 40$

∴ $a_2 = \frac{79}{3}$ (자연수가 아니므로 모순)

ⅱ) a_2가 4배수인 경우

$a_2 + a_4 = a_2 + \frac{1}{4}a_2 = \frac{5}{4}a_2 = 40$

∴ $a_2 = 32$

∴ $a_1 = 31$ or 64

ⅲ) a_2가 4배수가 아닌 짝수인 경우

$a_2 + a_4 = a_2 + \left(\frac{1}{2}a_2 + 1\right) = \frac{3}{2}a_2 + 1 = 40$

∴ $a_2 = 26$

∴ $a_1 = 25$ or 52

모든 a_1의 값은 합은 $25+31+52+64=172$