제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

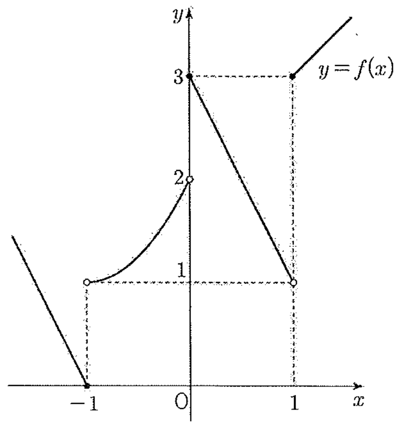
2. 함수 $f(x)=2x^2+5x-2$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$의 값은? [2점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

3. $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta=-2$일 때, $\sin(\pi+\theta)$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$　③ $-\frac{\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

5. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$$

를 만족시킬 때, $\int_1^2 f'(x)dx$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

6. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=4, \quad a_2a_4=1$$

일 때, a_6+a_7의 값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

7. 함수 $f(x)=x^3-3x+2a$의 극솟값이 $a+3$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

8. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$$

을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

9. 좌표평면 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(0,\,-\log_2 9)$, $\mathrm{B}(2a,\,\log_2 7)$, $\mathrm{C}(-\log_2 9,\,a)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(b,\,\log_8 7)$일 때, 2^{a+3b}의 값은? [4점]

① 63 ② 72 ③ 81 ④ 90 ⑤ 99

10. 양수 a에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t(a-t)$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 16이고, 시각 $t=2a$에서 점 P의 위치는 0이다. 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 54 ② 58 ③ 62 ④ 66 ⑤ 70

11. 공차가 $d\,(0 < d < 1)$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) a_5 는 자연수이다.
> (나) 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때, $S_8 = \frac{68}{3}$ 이다.

a_{16} 의 값은? [4점]

① $\frac{19}{3}$ ② $\frac{77}{12}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{79}{12}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

12. 두 상수 a, b 에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$ 일 때, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ 이다.
> (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+4) = f(x) + 16$ 이다.

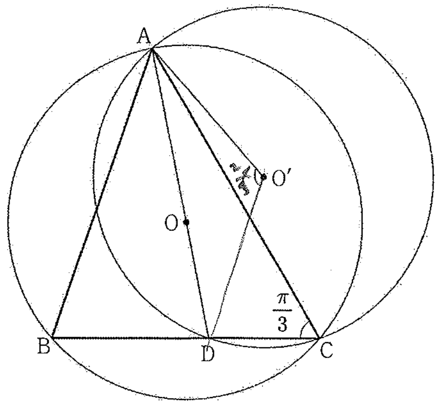
$\int_4^7 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

① $\frac{255}{4}$ ② $\frac{261}{4}$ ③ $\frac{267}{4}$ ④ $\frac{273}{4}$ ⑤ $\frac{279}{4}$

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\quad \sin(\angle BAC)=\frac{2\sqrt{7}}{7},\quad \angle ACB=\frac{\pi}{3}$$

인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{AO'}=5\sqrt{3}$ 이다. $\overline{OO'}^2$의 값은? (단, $0<\angle BAC<\frac{\pi}{2}$) [4점]



① 21　② $\frac{91}{4}$　③ $\frac{49}{2}$　④ $\frac{105}{4}$　⑤ 28

$\dfrac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}}=2R$　$R=9$　$\overline{AO}=9$　$\overline{AO'}=5\sqrt{3}$

$\angle AO'D=\frac{2}{3}\pi$　$\angle DAO'=\frac{\pi}{6}$

$\overline{OO'}^2=81+75-2\cdot 9\cdot 5\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=156-135=21$

14. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

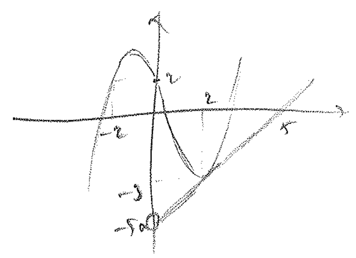
$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1)^2+4 & (x\le 0)\\ a(x-5) & (x>0)\end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $f(k)=g(k)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 k의 값이 $-2,\ 0,\ 2$일 때, $g(2a)$의 값은? [4점]

① 14　② 18　③ 22　④ 26　⑤ 30

$f(-2)=g(-2)=2$　$f(0)=g(0)=2$

$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$



$f(2)=g(2)$　$-3a=18-8t$

$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t$　$f'(2)=g'(2)$

$20-6t=a$　$-60+18t=18-8t$　$t=3$　$a=2$

$g(4)=26$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right)\\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right)\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

$a_7=1$ ∴ $a_6=0$ or 2

i) $a_6=0$

$a_5=1$ (a_4, a_3, a_2, a_1)

(6,1,0,1) (0,1,2,4) (2,4,3,6) (2,4,8,16)

ii) $a_6=2$

$a_5=4$ (a_4, a_3, a_2, a_1)

(3,6,12,24) (8,16,5,10) (8,16,32,64)

$1+4+6+16+24+10+64=125$

단답형

16. 방정식 $\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 11

17. 함수 $f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$에 대하여 $f'(5)$의 값을 구하시오. [3점] 50

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=45,\quad 2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$$

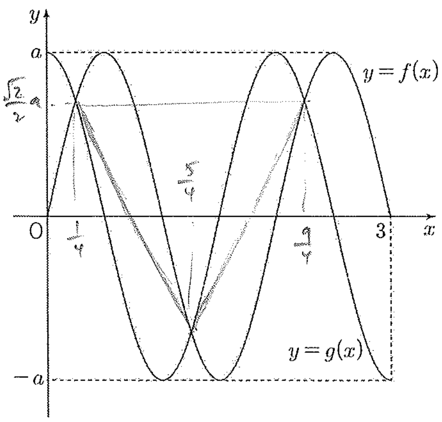
일 때, a_{15}의 값을 구하시오. [3점] 37

19. 양수 a에 대하여 $0\le x\le 3$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin\pi x,\quad g(x)=a\cos\pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

2



$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \sqrt{2}a=2 \quad a=\sqrt{2} \quad a^2=2$

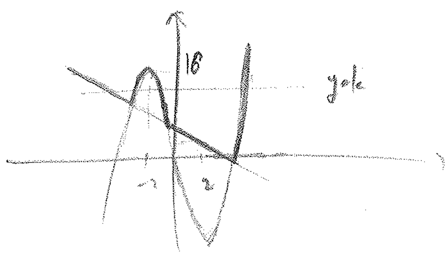
20. 두 함수 $f(x)=x^3-12x$, $g(x)=a(x-2)+2\ (a\neq 0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는 $m<a<M$이다.

> 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 실수 k가 존재한다.

$10\times(M-m)$의 값을 구하시오. [4점] 35



$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$

$g(-2)<16\ ,\quad a<0$

$-4a+2<16 \quad a>-\frac{7}{2} \quad \therefore -\frac{7}{2}<a<0$

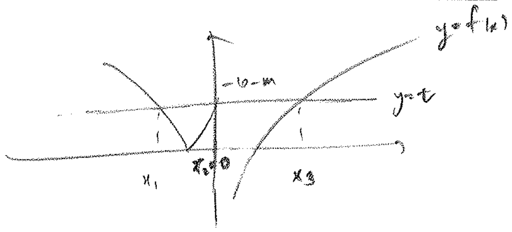
$\therefore 10(M-m)=35$

21. $m \le -10$ 인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오. [4점] 8

$t \ge a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.



$x_1+x_2+x_3=4$ $\quad -10-m=2 \quad m=-12$

$f(-12)=2$

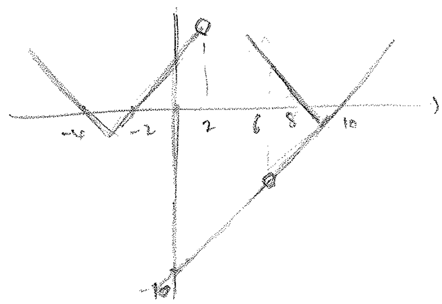
22. 두 자연수 a, $b\,(a<b<8)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<a) \\ x-10 & (a \le x < b) \\ |x-9|-1 & (x \ge b) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$와 양수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)f(x+k)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (나) $f(k)<0$

$f(a)\times f(b)\times f(k)$의 값을 구하시오. [4점] 96



$0<k<8$ $\quad k=4 \quad a=2 \quad b=6$

$-8\cdot 2\cdot(-6)=96$

* 확인 사항 ㅇ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ㅇ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{\ln 5}{3}$ ② $\dfrac{1}{\ln 5}$ ③ $\dfrac{2}{3}\ln 5$ ④ $\dfrac{2}{\ln 5}$ ⑤ $\ln 5$

24. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=3t-\frac{1}{t},\quad y=te^{t-1}$$

에서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{7}{6}$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\left\{a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)\right\}=6$$

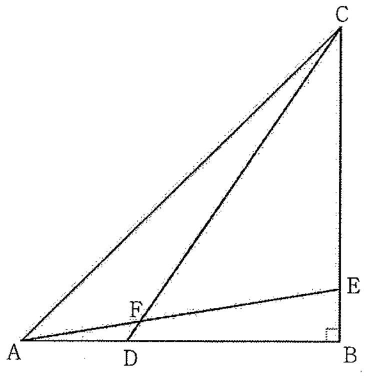
일 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

26. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E가

$$\overline{AD}=2\overline{BE}\quad(0<\overline{AD}<1)$$

을 만족시킬 때, 두 선분 AE, CD가 만나는 점을 F라 하자. $\tan(\angle CFE)=\frac{16}{15}$일 때, $\tan(\angle CDB)$의 값은? (단, $\frac{\pi}{4}<\angle CDB<\frac{\pi}{2}$) [3점]



① $\frac{9}{7}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

let $\overline{BE}=x$ $\overline{AD}=2x$ $\overline{DB}=1-2x$ let $\angle EAB=\alpha$, $\angle CDB=\beta$

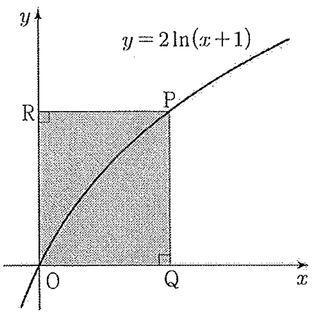
$\tan\angle CFE=\tan(\beta-\alpha)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\cdot\tan\alpha}=\dfrac{\frac{1}{1-2x}-x}{1+\frac{1}{1-2x}\cdot x}$

$=\dfrac{2x^2-x+1}{1-x}=\dfrac{16}{15}$ $30x^2+x-1=0$ $x=\frac{1}{6}$

$\therefore \tan\beta=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

27. 양수 t에 대하여 곡선 $y=2\ln(x+1)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ 2\ln(t+1))$에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라 할 때, 직사각형 OQPR의 넓이를 $f(t)$라 하자. $\displaystyle\int_1^3 f(t)dt$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $-2+12\ln 2$ ② $-1+12\ln 2$ ③ $-2+16\ln 2$
④ $-1+16\ln 2$ ⑤ $-2+20\ln 2$



$f(t)=2t\ln(t+1)$

$\int_1^3 f(t)dt = [t^2\ln(t+1)]_1^3 - \int_1^3 \frac{t^2}{t+1}dt$

$= [t^2\ln(t+1)]_1^3 - \int_1^3 \left((t-1)+\frac{1}{t+1}\right)dt$

$= 9\ln 4 - \ln 2 - [\frac{1}{2}t^2 - t + \ln(t+1)]_1^3$

$= 9\ln 4 - \ln 2 - (4-2+\ln 2)$

$= 16\ln 2 - 2$

28. 최고차항의 계수가 1이고 역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 실수 $k\,(k>0)$에 대하여 함수 $h(x)$는

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{g(x)-k}{x-k} & (x\neq k) \\ \dfrac{1}{3} & (x=k) \end{cases}$$

이다. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(0)$의 값이 최대일 때, k의 값을 α라 하자.

(가) $h(0)=1$ (나) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$k=\alpha$일 때, $\alpha\times h(9)\times g'(9)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{84}$ ② $\frac{1}{42}$ ③ $\frac{1}{28}$ ④ $\frac{1}{21}$ ⑤ $\frac{5}{84}$

$h(0)=1$ $g(0)=0$ $f(0)=0$ $g'(k)=\frac{1}{3}$

$g(k)=k$ $f(k)=k$ $f'(k)=3$

let $f(x)=x(x-k)(x-t)+x$

$f(x)=x^3-(k+t)x^2+(tk+1)x$

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1$ $f'(k)=3$

$t=k-\frac{2}{k}$ $f'(x)\geq 0$ $D/4=(k+t)^2-3(tk+1)\leq 0$

$(2k-\frac{2}{k})^2-3(k^2-2+1)=k^2-8+\frac{4}{k^2}+3\leq 0$

$k^4-5k^2+4\leq 0$ $1\leq k^2\leq 4$ $\therefore 1\leq k\leq 2$

$f'(0)=tk+1=k^2-1$ $k=2$ 때 $f'(0)=3$ $\therefore \alpha=2$, $t=1$

$h(9)=\frac{g(9)-2}{9-2}$ let $p=g(9)$ $f(p)=9$

$f(x)=x^3-3x^2+3x$ $p=3$ $f'(3)=12$

$\therefore h(9)=\frac{1}{7}$ $g'(9)=\frac{1}{f'(3)}=\frac{1}{12}$ $2\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{42}$

단답형

29. 첫째항이 1이고 공비가 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$$

이다. 첫째항이 0이 아닌 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}$이 수렴할 때, $b_1\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값을 구하시오. [4점] 12

$a_1=1$ $a_n=r^{n-1}$ $-1<r<1$ $(r\neq0)$

$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)=0$ ∴ $-1<r<0$

$\frac{20r}{1-r^2}+\frac{21|a_2|}{1-(-r^3)}$ $\frac{20r}{1-r^2}+\frac{-21(r)}{1+r^3}=0$

$20r^2+r-1=0$ $(5r-1)(4r+1)=0$ $r=-\frac{1}{4}$

∴ $a_n=(-\frac{1}{4})^{n-1}$

$\frac{3|a_n|+b_n}{a_n}\to0$ ∴ $b_n=(-3)\cdot(\frac{1}{4})^{n-1}$

$b_1=-3$ $-3\cdot\frac{-3}{1-\frac{1}{4}}=12$

30. 상수 $a\,(0<a<1)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\int_0^x\ln(e^{|t|}-a)dt$$

라 하자. 함수 $f(x)$와 상수 k는 다음 조건을 만족시킨다.

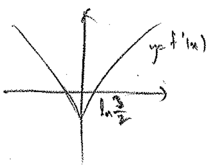
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=\ln\frac{3}{2}$에서 극값을 갖는다.
>
> (나) $f\left(-\ln\frac{3}{2}\right)=\frac{f(k)}{6}$

$\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=p$일 때, $100\times a\times e^p$의 값을 구하시오.

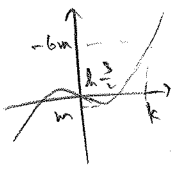
144 [4점]

$f'(x)=\ln(e^{|x|}-a)$ $f'(\ln\frac{3}{2})=0$ $f'(\frac{3}{2}-a)=0$

$a=\frac{1}{2}$ $f'(x)=\ln(e^{|x|}-\frac{1}{2})$ $f(0)=0$



$f'(x)$ 우함수, $f(x)$ 기함수



$\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx=\int_0^k\frac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$

$=\int_0^{\ln\frac{3}{2}}\frac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^k\frac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$

$=-[\ln|f(x)+f(k)|]_0^{\ln\frac{3}{2}}+[\ln|f(x)+f(k)|]_{\ln\frac{3}{2}}^k$

$=-[\ln(f(x)+f(k))]_0^{\ln\frac{3}{2}}+[\ln(f(x)+f(k))]_{\ln\frac{3}{2}}^k$

$=-\ln(m-6m)+\ln(0-6m)+\ln(-6m-6m)-\ln(m-6m)$

$=\ln\frac{-6m}{-5m}+\ln\frac{-12m}{-5m}=\ln\frac{6}{5}+\ln\frac{12}{5}=\ln\frac{72}{25}$

$100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{72}{25}=144$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.