제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$(2^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5}$

2. 함수 $f(x) = x^2 + x + 2$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 2x+1$

$f'(2) = 5$

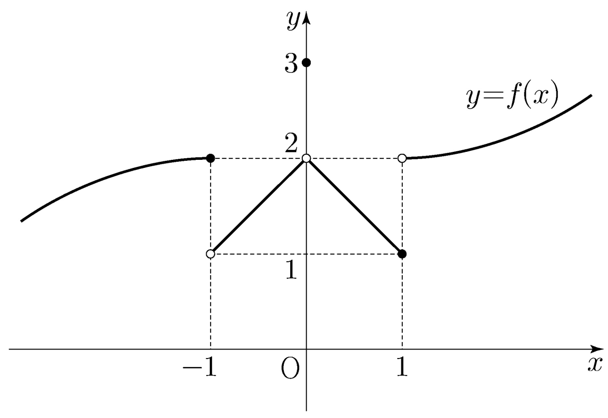
3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k + 1) = 9$ 이고 $a_6 = 4$ 일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}a_k$ 의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k = 4$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k + a_6 = 8$

4. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\displaystyle\lim_{x\to 0+}f(x) + \lim_{x\to 1-}f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$2+1 = 3$

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = (2x)(x^2+2x+2) + (x^2-1)(2x+2)$

$f'(1) = 2 \cdot 5 = 10$

6. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta = \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{3}{5}, \quad \sin\theta = -\frac{4}{5}$

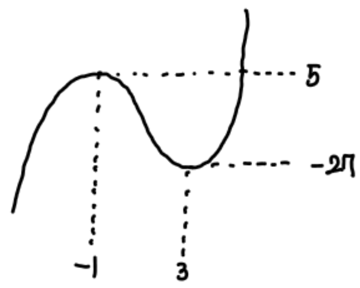
7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$= 3(x-3)(x+1)$



$f(x) = -k \leadsto k = -5, 27$

$\therefore 22$

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=16,\quad 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$2a_8-3a_7=32r^2-48r=32$

$2r^2-3r-2=0 \Rightarrow r=\cancel{2}$ or $-\frac{1}{2}$ $(\because a_1a_2<0)$

$a_9+a_{11}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x\ge 0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$(-\frac{1}{2}+a)^2=(3+a)^2$

$-\frac{1}{2}+a=-3-a$

$a=-\frac{5}{4}$

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

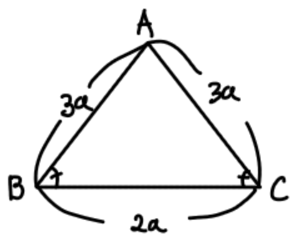
(가) $3\sin A=2\sin B$ (나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

외접원 $S=9\pi \Leftrightarrow$ 외접원 $R=3$

$3\sin A=2\sin B \Leftrightarrow \sin A:\sin B=2:3$

$\cos B=\cos C \Leftrightarrow B=C$



$\cos B=\frac{4+9-9}{2\times2\times3}=\frac{1}{3}$

$\sin B=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\frac{3a}{\sin B}=2R \Leftrightarrow \frac{9a}{2\sqrt{2}}=6 \Rightarrow a=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$\triangle S=\frac{1}{2}\times 6a^2\times\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{192}{9}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{64}{9}\sqrt{2}$

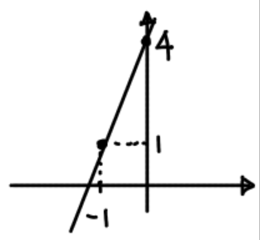
11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$f(a)=1,\ f'(a)=3 \Rightarrow$ 기울기 3 y절편 4 이므로 $a=-1$

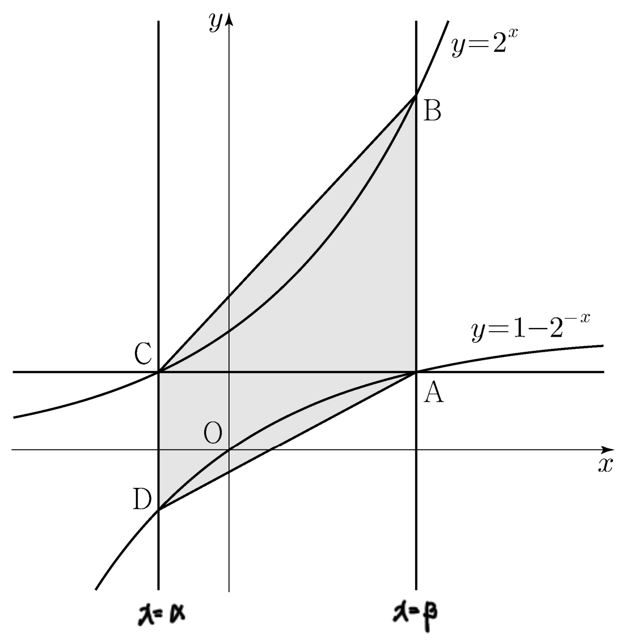


$f(x)=x^3+ax^2+bx,\ f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-1)=-1+a-b=1,\ f'(-1)=3-2a+b=3$

$\therefore f(x)=x^3-2x^2-4x,\ f(1)=-5$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

• $(2^\alpha-1+2^{-\alpha})\cdot 2=(2^\beta-1+2^{-\beta})$

• $2^\alpha=1-2^{-\beta}$

$\Rightarrow 2^\alpha=\frac{2}{3},\ 2^\beta=3$

$\alpha=1-\log_2 3,\ \beta=\log_2 3$

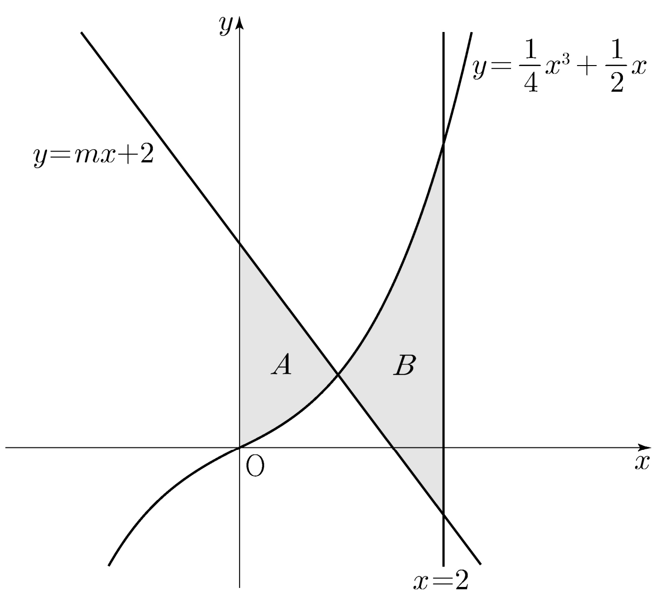
$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(\beta-\alpha)(2^\beta-1+2^{-\beta})\times\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}\times(2\log_2 3-1)(2+\frac{1}{3})\times\frac{3}{2}$

$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



$B-A=\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)dx-\int_0^2(mx+2)dx$

$=\left[\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2\right]_0^2-\left[\frac{1}{2}mx^2+2x\right]_0^2$

$=\frac{2}{3}$

$\therefore m=-\frac{4}{3}$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

- $-n^2+10n+75>0 \Rightarrow -5<n<15$
- $75-kn>0 \Rightarrow n<\frac{75}{k}$

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)=\log_4\frac{-n^2+10n+75}{75-kn}>0$

$\Rightarrow 0<n<10+k$

$k=3 \rightsquigarrow 0<n<13$

$k=6 \rightsquigarrow 0<n<\frac{75}{6}$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k \ge 0)$에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} 2x-k & (x \le k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt \ge 0$이고
> $\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt \ge 0$이다.

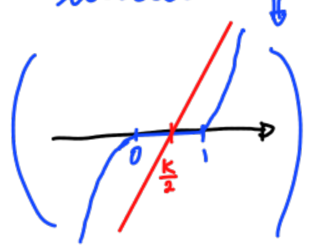
$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$ ④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

(가) $f(k)=k$, $f'(k)=2$ ⇒ $f(x)=(x-k)^2(x-\alpha)+(2x-k)$

(나)

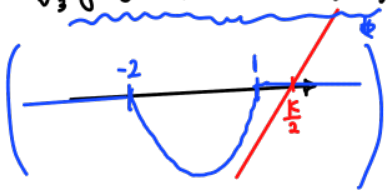
$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}dt \ge 0$



$(-\infty,0)$ ⊖

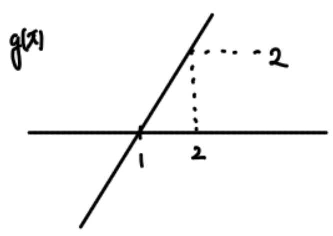
$(1,\infty)$ ⊕

$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}dt \ge 0$



$(-2,1)$ ⊖

⇒ $\frac{k}{2}=1$ ∴ $k=2$

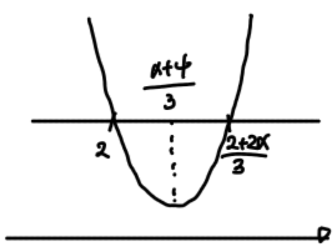


$f(x)=(x-2)^2(x-\alpha)+2(x-1)$

$f'(x)=2(x-2)(x-\alpha)+(x-2)^2+2$

$x\ge2$ 에서 양수

$=(x-2)(3x-2-2\alpha)+2$



$f'\left(\frac{\alpha+4}{3}\right)\ge0$ ⇒ $2-\sqrt{6}\le\alpha\le2+\sqrt{6}$

$g(3)=f(3)=7-\alpha$

$(7-\alpha \text{ min})=5-\sqrt{6}$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

7

• $(x+1)>0$, $(x-3)>0$

$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=5$

$x^2-2x-35=0$ ⇒ $x=7$ or $\cancel{-5}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

23

$f(x)=2x^3+2x+3$

$f(2)=16+4+3=23$

18. $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2

$$a\cdot\frac{9\cdot10\cdot19}{6}-10\cdot\frac{9\cdot10}{2}=120$$

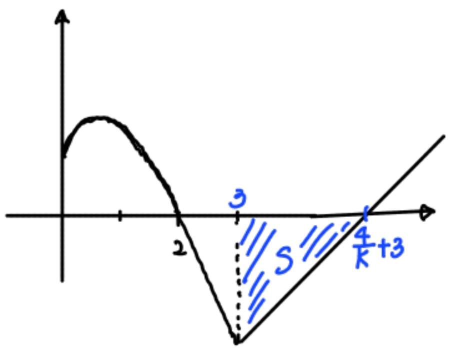
$\therefore a=2$

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

16

$$v(t)=\begin{cases}-t^2+t+2 & (0\le t\le 3)\\ k(t-3)-4 & (t>3)\end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

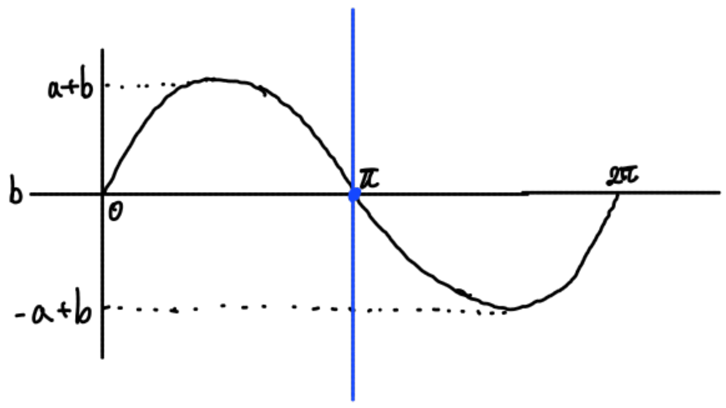


$\int_0^3(-t^2+t+2)\,dt=\frac{3}{2}$ 이므로 $S=\frac{1}{2}$

$S=\frac{1}{2}\times\frac{4}{k}\times4=\frac{1}{2}\Rightarrow k=16$

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\,2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\,b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

24



i) $\begin{cases}a+b=3\\-a+b=1\end{cases}\Rightarrow a=2,\ b=1$

ii) $b=3$

$-a+3<1\Rightarrow a>2\Rightarrow a=3,4,5$

iii) $b=1$

$a+1>3\Rightarrow a>2\Rightarrow a=3,4,5$

$a+b$ Max : 8

min : 3

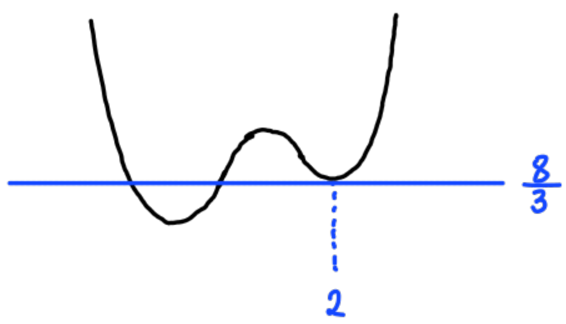
$\therefore 24$

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

15

> (가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x) = k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0) = 0$, $f'(1) = 0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]



$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2(x^2+ax+b) + \frac{8}{3}$

$f(0) = 4b + \frac{8}{3} = 0 \qquad \therefore b = -\frac{2}{3}$

$f'(x) = 2(x-2)(x^2+ax-\frac{2}{3}) + (x-2)^2(2x+a)$

$f'(1) = 2\cdot(-1)(\frac{1}{3}+a) + 2+a = 0 \qquad \therefore a = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2(x^2+\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}) + \frac{8}{3}$

$\therefore f(3) = 15$

22. 수열 $\{a_n\}$은

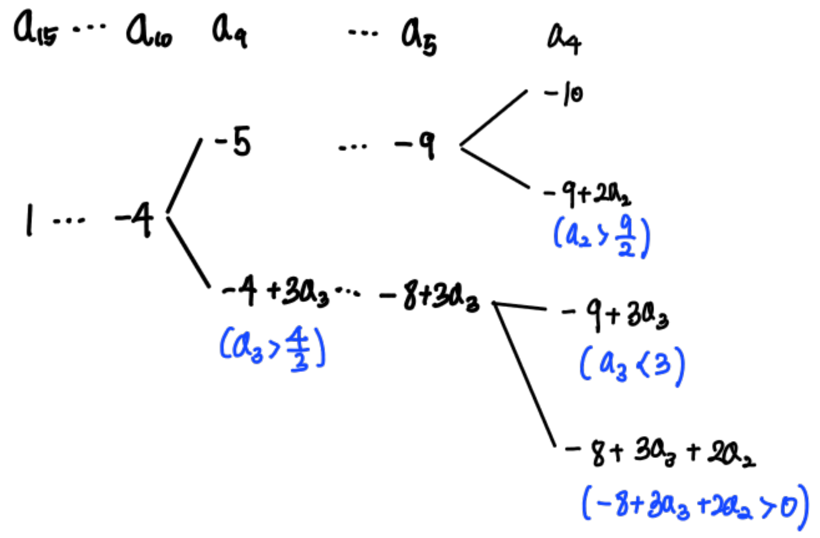
231

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]



a_4	a_3	a_2	a_1
-10	-11	-12	12
$-9+2a_2$	$-10+2a_2$	$-11+2a_2 = a_2 = 11$	-11
$-9+3a_3$	$-10+3a_3 = a_3 = 5$	$\frac{4}{3} < a_3 < 3$ 이므로 X	X
$-8+3a_3+2a_2$	$-9+3a_3+2a_2 = a_3$ $= -a_2+\frac{9}{2}$	$-a_2+\frac{7}{2} = a_2$ $= \frac{7}{4}$	$-\frac{7}{4}$

$\therefore 12 \times (-11) \times (-\frac{7}{4}) = 231$

> ※ 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.