[도형의 변화율]

강재욱

일산 나다어

6평에 도형의 변화율 안 나오면 평가원이 이상한거임

유튜브 [재육복음수학] 인스타 [dangerousunidentifiedcybermath]

한동훈

5A ACADEMY

6평에 삼도극 나오면 어쩌지..

유튜브 [미적부장관 한동훈] 인스타 [minister_cal]

한성은

5A ACADEMY

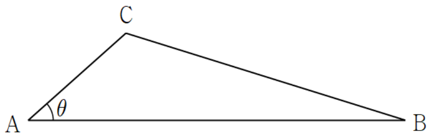
변화율 밟으실 수 있죠?ㅎ

유튜브 [한성은] 인스타 [hansungeun2]

CCL

[한성은 ZQ2116번]

1. $\overline{AB}=2$, $\overline{CB}=\sqrt{5}\times\overline{CA}$, $\angle CAB=\theta$를 만족시키는 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은?



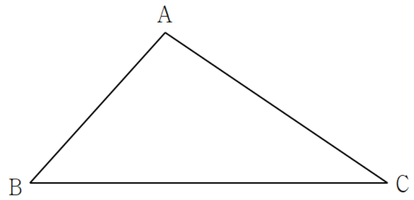
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[한성은 VA8719번]

2. $\overline{BC}=5$인 삼각형 ABC와 실수 x에 대하여

$$\overline{AB}=x,\quad \overline{AC}=x+1$$

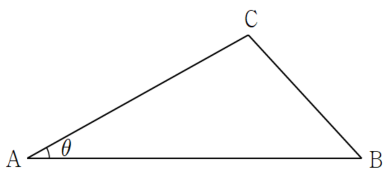
이다. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 할 때, $S'(3)$의 값은? (단, $x>2$)



① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[한성은 HV2898번]

3. $\overline{\text{AB}}=2$, $\overline{\text{BC}}=1$, $\angle\text{CAB}=\theta$, $\angle\text{CBA}<\frac{\pi}{2}$를 만족시키는 삼각형 ABC의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\tan\alpha=\frac{1}{2}$일 때, $S'(\alpha)$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이다.)



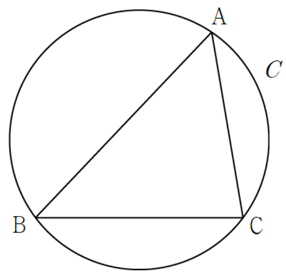
① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{8}{5}$ ④ 2 ⑤ $\frac{12}{5}$

[한성은 WT9929번]

4. 반지름의 길이가 5인 원 C 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$$\overline{\text{BC}}=8,\quad \overline{\text{AC}}=x$$

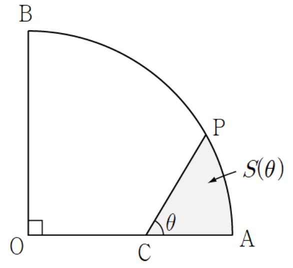
일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S'(5\sqrt{2})$의 값은?



① $\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{9\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{12\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

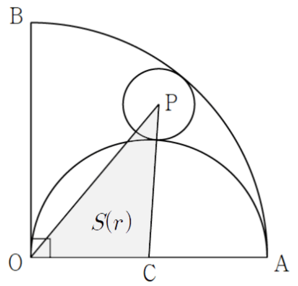
[한성은 UX4166번]

5. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 선분 OA 위의 점 C를 $\overline{OC}=1$이 되도록 잡고, 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle PCA=\theta$라 하자. 두 선분 AC, CP와 호 AP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $60\times S'\left(\frac{\pi}{3}\right)$의 값을 구하여라. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



[한성은 VU8723번]

6. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB와 선분 OA를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 OA의 중점 C, 호 AB와 호 OA에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 중심 P에 대하여 삼각형 OCP의 넓이를 $S(r)$이라 할 때, $S'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은?

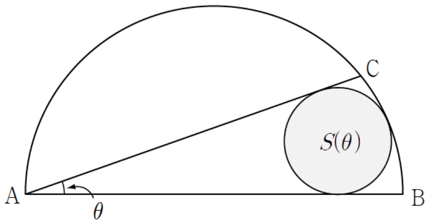


① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[한성은 OM8441번]

7. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 C를 잡고 $\angle BAC = \theta$라 하자. 호 BC와 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원의 넓이 $S(\theta)$에 대하여 $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$일 때, $S'(\alpha)$의 값은?

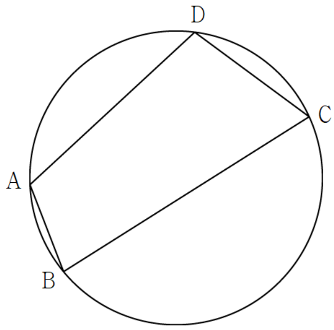
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이다.)



① $\frac{80\pi}{243}$ ② $\frac{82\pi}{243}$ ③ $\frac{28\pi}{81}$
④ $\frac{86\pi}{243}$ ⑤ $\frac{88\pi}{243}$

[한동훈 선생님]

8. $\overline{AB} + 2 = \overline{CD}$, $\overline{BC} = 10$, $\overline{DA} = 8$을 만족시키는 네 점 A, B, C, D가 한 원 위에 있다. $\overline{AB} = x$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 $S(x)$라 하자. $S'(3)$의 값은?



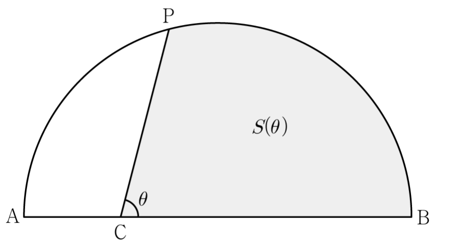
① $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ ③ $4\sqrt{3}$
④ $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{20\sqrt{3}}{3}$

[한성은 RN9787번]

9. 곡선 $x^2+y^2=25(x>0,\ y>0)$ 위의 점 P에서 그은 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 A$(1,\ 0)$에 대하여 $\angle \mathrm{PAQ}=\theta$라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=f(\theta)$이다. $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하여라. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

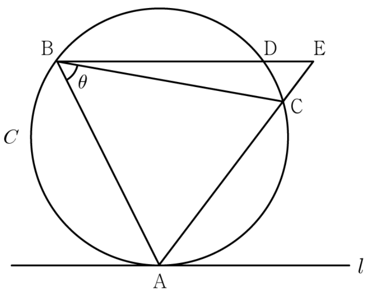
[강재욱 선생님]

10. 길이가 8인 선분 AB를 지름으로 하는 반원과 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AC}}=2$인 점 C가 있다. 이 반원의 호 AB 위의 점 P를 $\angle \mathrm{PCB}=\theta$가 되도록 잡는다. 선분 CP, CB와 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(\theta)$에 대하여 $\cos\alpha=\dfrac{1}{4}$일 때, $S'(\alpha)$의 값을 구하여라.



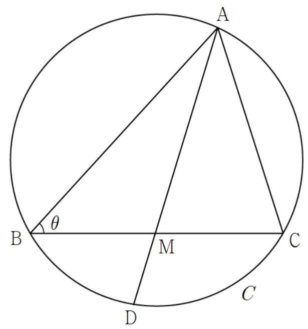
[강재욱 선생님]

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$인 원 C 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$이고 l은 원 C 위의 점 A에서의 접선이다. 점 B를 지나고 직선 l과 평행한 직선이 원 C와 만나는 점을 D, 직선 AC와 만나는 점을 E라 하자. $\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 할 때 $\overline{\mathrm{BE}}=f(\theta)$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=4$일 때의 θ의 값이 α이다. $-4\times f'(\alpha)$의 값을 구하여라.



[2023학년도 강재욱/한성은 모의고사]

12. 반지름의 길이가 6인 원 C 위의 세 점 A, B, C에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=6\sqrt{3}$이고 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 직선 AM과 원 C가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하고, $\angle \mathrm{ABC}=\theta$라 할 때, 선분 MD의 길이는 $l(\theta)$이다. $-\frac{7\sqrt{21}}{3}\times l'\left(\frac{\pi}{6}\right)$의 값을 구하여라.



[도형의 변화율 정답표]

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	②	02	④	03	⑤	04	④	05	30
06	①	07	①	08	④	09	431	10	8
11	25	12	18						

COMMENT 01

$\overline{\mathrm{CA}}=x$라 하자. 코사인법칙에서 $\cos\theta=-x-\dfrac{1}{x}$이고 $S(x)=x\sin\theta$이다.

$\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이고 $\left.\dfrac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

※ 두 점 A, B를 고정할 때, 점 C는 원 위의 점이다. (아폴로니우스의 원)

COMMENT 02

[풀이1] $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하자. 코사인법칙에서 $\cos\theta=\dfrac{12-x}{5x}$이고 $S(x)=\dfrac{5}{2}x\sin\theta$이다.

$x=3$일 때, $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$이고 $\left.\dfrac{d\theta}{dx}\right|_{x=3}=\dfrac{1}{3}$이다.

[풀이2] $\angle\mathrm{BAC}=\theta$라 하자. $S(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)\sin\phi$이다. $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이고,

$$S'(x)=\frac{1}{2}(2x+1)\sin\theta+\frac{1}{2}x(x+1)\cos\theta\times\frac{d\theta}{dx}$$

에서 $S'(3)=\dfrac{7}{2}$이다.

[풀이3] $\angle\mathrm{ABC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ACB}=\beta$라 하자. $\dfrac{x+1}{\sin\alpha}=\dfrac{x}{\sin\beta}=\dfrac{5}{\sin(\alpha+\beta)}$이고 $S(x)=\dfrac{5}{2}x\sin\alpha$이다.

$x=3$일 때 $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$이고 $(x+1)\sin(\alpha+\beta)=5\sin\alpha$에서

$$\sin(\alpha+\beta)+(x+1)\cos(\alpha+\beta)\times\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\right)=5\cos\alpha\times\frac{d\alpha}{dx}$$

이므로 $\left.\dfrac{d\alpha}{dx}\right|_{x=3}=\dfrac{1}{3}$이다. $S'(x)=\dfrac{5}{2}\sin\alpha+\dfrac{5}{2}x\cos\alpha\times\dfrac{d\alpha}{dx}$이므로 $S'(3)=\dfrac{7}{2}$이다.

[풀이4] 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{\mathrm{BH}}=y$라 하자.

$x^2-y^2=(x+1)^2-(5-y)^2$에서 $x+5y-12=0$이고, $S(x)=\dfrac{5}{2}\sqrt{x^2-y^2}$이다.

$x=3$일 때, $y=\dfrac{9}{5}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3}=-\dfrac{1}{5}$이고, $S'(x)=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2-y^2}}\times\left(x-y\times\dfrac{dy}{dx}\right)$이다.

[풀이5] 헤론의 정리에 의해 (또는 $\dfrac{1}{2}bc\sin A$에 의해)

$$S(x)=\sqrt{6(x-2)(x+3)}$$

이다.

※ [풀이1]이 의도였는데, [풀이2]가 더 좋아서 망한 문항. 그래도 연습용으로 괜찮은 것 같아서 그냥 뒀다.

※ [풀이5]와 같이 양함수로 나타낼 수 있지만 (헤론의 정리를 쓰지 않으면) 과정이 만만하지 않다.
양함수로 쓰는 것이 가능하지만 괴롭다는 것이 [2024학년도 9월 30번]이나 [2024년 5월 29번]과 비슷한 부분.

※ 두 점 B, C를 고정할 때, 점 A는 쌍곡선 위의 점이다.

COMMENT 03

$\overline{\mathrm{CA}}=x$라 하자. 코사인법칙에서 $x^2-4\cos\theta\times x+3=0$이고 $S(\theta)=x\times\sin\theta$이다.

$\theta=\alpha$일 때, $x=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$이고 $\left.\dfrac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$이다.

COMMENT 04

$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하자. α는 상수, θ는 x의 함수이다. $x=10\sin\theta$이고, $S(x)=4x\sin(\theta+\alpha)$이다.

$x=5\sqrt{2}$일 때, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\theta+\alpha)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$이고, $\dfrac{d\theta}{dx}=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$이다. $S'(x)=4\sin(\theta+\alpha)+4x\cos(\theta+\alpha)\times\dfrac{d\theta}{dx}$에 대입.

COMMENT 05

$\angle$POA$=\alpha$라 하자. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{1}{\sin(\theta-\alpha)}$이고, $S(\theta)=\dfrac{3}{2}\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$이다.

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$이고 $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=\dfrac{2}{3}$, $S'(\theta)=\dfrac{1}{2}$이다.

COMMENT 06

$\overline{\mathrm{OP}}=2-r$, $\overline{\mathrm{CP}}=1+r$이다. $\angle$POC$=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{2-3r}{2-r}$이고 $S(r)=\dfrac{1}{2}(2-r)\sin\theta$이다.

$r=\dfrac{1}{3}$일 때 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$이고, $\left.\dfrac{d\theta}{dr}\right|_{r=\frac{1}{3}}=\dfrac{9}{5}$이다.

※ 점 P의 자취는 타원이다.

COMMENT 07

작은 원의 반지름의 길이를 r, 선분 AB의 중점을 O, 작은 원의 중심을 P, 작은 원과 선분 AB의 교점을 H라 할 때,

$\overline{\mathrm{OP}}=1-r$, $\overline{\mathrm{PH}}=r$, $\overline{\mathrm{OH}}=\dfrac{r}{\tan\dfrac{\theta}{2}}-1$이다. 피타고라스 돌리면, $r=2\tan\dfrac{\theta}{2}-2\tan^2\dfrac{\theta}{2}$이다. $\theta=\alpha$일 때, $r=\dfrac{4}{9}$이고 $\dfrac{dr}{d\theta}=\dfrac{10}{27}$이다.

※ [2016학년도 6월 29번]에서 가져온 문항. 결론만 본다면 양함수로 나타내는 것이 편하지만,
작은 원의 반지름의 길이 r을 설정하고 r을 이용하여 식을 세우는 것이 이쪽 변화율 문항들과 공통점.

COMMENT 08

$\angle$ABC$=\theta$라 하자. $\angle$ADC$=\pi-\theta$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}^2=x^2+20-20x\cos\theta=x^2+4x+68+16(x+2)\cos\theta$, 정리하면 $8-x=(9x+8)\cos\theta$이다.

x에 대해 미분하면, $-1=9\cos\theta-(9x+8)\sin\theta\dfrac{d\theta}{dx}$이다. $S(x)=5x\sin\theta+4(x+2)\sin(\pi-\theta)=(9x+8)\sin\theta$를 x에 대하여 미분하면,

$S'(x)=9\sin\theta+(9x+8)\cos\theta\dfrac{d\theta}{dx}=9\sin\theta+\cos\theta\times\dfrac{9\cos\theta+1}{\sin\theta}=\dfrac{9+\cos\theta}{\sin\theta}$이다. $x=3$일 때, $\cos\theta=\dfrac{1}{7}$이고 $S'(3)=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$이다.

※ $\angle$DAB$=\theta$로 놓고 풀면 $\cos\theta=\dfrac{13}{37}$이 나와 계산이 힘들어진다.

※ 브라마굽타 공식을 이용하면 $S(x)=\sqrt{80x(x+2)}$로 나타낼 수 있다.

COMMENT 09

$\angle$POA$=\alpha$라 하자. $\dfrac{5}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{1}{\sin(\theta-\alpha)}$이므로 $5\sin(\theta-\alpha)=\sin\theta$이고, $f(\theta)=5\tan\alpha$이다.

① $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $\sin(\theta-\alpha)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$이고, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$이다.

② $5\cos(\theta-\alpha)\times\left(1-\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)=\cos\theta$이고, $f'(\theta)=5\sec^2\alpha\times\dfrac{d\alpha}{d\theta}$이다.

COMMENT 10

AB의 중점을 O, $\overline{\mathrm{CP}}=l$, $\angle$CPO$=\beta$라 하자. 삼각형 PCO에서

$l^2+4\cos\theta-12=0$ ⋯ ①

$\sin\theta=2\sin\beta$ ⋯ ②

이고, $S(\theta)$를 삼각형 PCO와 부채꼴 POB 넓이의 합으로 표현하면

$S(\theta)=l\sin\theta+8(\theta+\beta)$ ⋯ ③

이다.

$\theta=\alpha$를 ①에 대입하면 $l|_{\theta=\alpha}=4$,

$\theta=\alpha$를 ②에 대입하면 $\sin\beta|_{\theta=\alpha}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos\beta|_{\theta=\alpha}=\dfrac{7}{8}$이다.

①, ②, ③을 각각 θ에 대하여 미분하면

$$2l\frac{dl}{d\theta}+4\sin\theta\times l-4\cos\theta\times\frac{dl}{d\theta}=0 \ \cdots \ ④$$

$$\cos\theta=2\cos\beta\times\frac{d\beta}{d\theta} \ \cdots \ ⑤$$

$$S'(\theta)=\frac{dl}{d\theta}\sin\theta+l\cos\theta+8\left(1+\frac{d\beta}{d\theta}\right) \ \cdots \ ⑥$$

이다. $\theta=\alpha$를 각각 대입하면

$$\left.\frac{dl}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=-\frac{4}{7}\sqrt{15}, \quad \left.\frac{d\beta}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=\frac{1}{7}, \quad S'(\alpha)=8$$

이다.

COMMENT 11

$\angle$AEB$=\theta$이다. 선분 AC의 길이를 s, 선분 AB의 길이를 t, 선분 BE의 길이를 u라 하자.

$s=5\sin\theta \ \cdots \ ①$

$s^2=2t^2(1-\cos\theta) \ \cdots \ ②$

삼각형 ABC와 삼각형 BEA가 닮음이므로 $t^2=su \ \cdots \ ③$

이다. $s=4$를 ①, ②, ③에 각각 대입하면

$$\sin\theta|_{\theta=\alpha}=\frac{4}{5}, \quad \cos\theta|_{\theta=\alpha}=\frac{3}{5}, \quad t|_{\theta=\alpha}=2\sqrt{5}, \quad u|_{\theta=\alpha}=5$$

이다. ①, ②, ③을 각각 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{ds}{d\theta}=5\cos\theta \ \cdots \ ④$$

$$2s\frac{ds}{d\theta}=4t\frac{dt}{d\theta}(1-\cos\theta)+2t^2\sin\theta \ \cdots \ ⑤$$

$$2t\frac{dt}{d\theta}=\frac{ds}{d\theta}u+s\frac{du}{d\theta} \ \cdots \ ⑥$$

$\theta=\alpha$를 대입하면

$$\left.\frac{ds}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=3, \quad \left.\frac{dt}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=-\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=-\frac{25}{4}, \quad -4\left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta=\alpha}=25$$

이다.

COMMENT 12

삼각형 ABC에서 사인법칙, $\overline{\mathrm{AB}}=12\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)$, $\overline{\mathrm{AC}}=12\sin\theta$이다. $\overline{\mathrm{AM}}=x$라 하자.

할선정리로 $\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{MD}}=xl=27$이고 중선정리(또는 코사인법칙)에서 $144\left(\sin^2\theta+\sin^2\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)\right)=2(27+x^2)$이다.

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $x=3\sqrt{7}$이다. $72\left(2\sin\theta\cos\theta-2\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)\cos\left(\dfrac{2}{3}\pi-\theta\right)\right)=2x\dfrac{dx}{d\theta}$이므로 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때 $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$이다.

$x=3\sqrt{7}$일 때 $l=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$이고 $\dfrac{dx}{d\theta}\times l+x\times\dfrac{dl}{d\theta}=0$이므로 $\dfrac{dl}{d\theta}=-\dfrac{18\sqrt{3}}{7\sqrt{7}}$이다.