2025학년도 6월 대비 Prologue 모의고사
〈 정답과 해설 〉

〈 1회 〉

〈 공통과목 〉

1. ④ 2. ② 3. ④ 4. ④ 5. ①

6. ③ 7. ① 8. ① 9. ③ 10. ④

11. ⑤ 12. ② 13. ① 14. ② 15. ③

16. 4 17. 11 18. 3 19. 45 20. 183

21. 13 22. 52

〈 선택과목(미적분) 〉

23. ② 24. ① 25. ④ 26. ① 27. ③

28. ④

29. 27 30. 19

〈 공통과목 〉

1. $2^{\log_4 81} = 2^{\log_2 9} = 9$이고

$3^{\log_9 16} = 3^{\log_3 4} = 4$이므로

$9 \times 4 = 36$

2. $f(x) = x^3 - x$에서 $f'(x) = 3x^2 - 1$이고

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = f'(1)$이므로

$f'(1) = 3 - 1 = 2$

3. $a_n = a_1 \times r^{n-1} (a_1 \neq 0, r \neq 0)$으로 놓으면

$a_2 = a_1 \times r,\ a_8 = a_1 \times r^{7,}$

$a_3 = a_1 \times r^2,\ a_m = a_1 \times r^{m-1}$

에서 $(a_1)^2 \times r^8 = (a_1)^2 \times r^{m+1}$이므로

$m + 1 = 8,\ m = 7$

4.

$$f(x) = \begin{cases} -(x-a)^2 & (x \leq 1) \\ a - 1 & (x > 1) \end{cases}$$ 에서

$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1-} f(x) = f(1)$,

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

이므로

$-(1-a)^2 = a - 1,\ -2(1-a) = 0$

따라서 $a = 1$

5. 점 P가 제2사분면 위의 점이므로

$\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta = -2$

따라서 $\tan\theta \times \sin\theta = (-2) \times \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

6. $a_1 = 1, a_1 < 8$이므로 $a_2 = 2$,

$a_2 < 8$이므로 $a_3 = 4$, $a_3 < 8$이므로 $a_4 = 8$,

$a_4 \geq 8$이므로 $a_5 = 1$

즉 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4} = a_n$이고

$a_{15} = a_3 = 4,\ a_{25} = a_1 = 1$이므로

$4 + 1 = 5$

정답과 해설

7. $\lim_{x\to1+}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}+\dfrac{x+a}{x-1}\right\}$

$=\lim_{x\to1+}\left\{\dfrac{f(x)+x-f(1)+a}{x-1}\right\}$에서

분모에 영인자가 존재하므로

극한이 수렴하려면 분자 역시 영인자가 존재하여야 한다.

$\lim_{x\to1+}f(x)+x-f(1)+a$

$=2+1-1+a=2+a$

이므로 $a=-2$이고,

$\lim_{x\to1+}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=-1$, $\lim_{x\to1+}\dfrac{x-f(1)}{x-1}=1$이므로

$b=(-1)+1=0$이다.

따라서 $a+b=(-2)+0=-2$

8. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 모두 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

두 함수의 그래프가 오직 한 점에서만 만나기 위해서는

$x=\pi$에서 만나야 한다.

$f(\pi)=-1+a$, $g(\pi)=|-1-b|=1+b$

(b는 양수)이므로

$-1+a=1+b$

따라서 $a-b=2$

9. $\sum_{k=1}^{7}ka_k=a_1+2a_2+\cdots+7a_7$

$\sum_{k=1}^{7}S_k=S_1+S_2+\cdots+S_7$

$=7a_1+6a_2+\cdots+2a_6+a_7$

이므로 $\sum_{k=1}^{7}ka_k+\sum_{k=1}^{7}S_k=\sum_{k=1}^{7}8a_k$와 같다.

$\sum_{k=1}^{7}8a_k=120+120=240$이므로

$S_7=\sum_{k=1}^{7}a_k=30$

10. $\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)^n f'(x)}{f(x)-3}=3n$에서

다항식 $f(x)-3$이 $(x-3)^p$(p는 자연수)를

인수로 가질 경우

다항식 $f'(x)$은 $(x-3)^{p-1}$을 인수로 가지므로

극한이 0이 아닌 실수로 수렴하기 위해서는

(분모 영인자 개수) = (분자 영인자 개수)

에서 분자가 $(x-3)f'(x)$가 되어야 한다.

따라서 $n=1$이고,

$\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)f'(x)}{f(x)-3}=3$에서

$f(x)-3=(x-3)p(x)\,(p(3)\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=p(x)+(x-3)p'(x)$이므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{(x-3)p(x)+(x-3)^2p'(x)}{(x-3)p(x)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{p(x)}{p(x)}=1$이므로 모순

$f(x)-3=(x-3)^2q(x)\,(q(3)\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=2(x-3)q(x)+(x-3)^2q'(x)$이므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{2(x-3)^2q(x)+(x-3)^3q'(x)}{(x-3)^2q(x)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{2q(x)}{q(x)}=2$이므로 모순

$f(x)-3=(x-3)^3r(x)\,(r(3)\neq0)$로 놓으면

$f'(x)=3(x-3)^2r(x)+(x-3)^3r'(x)$이므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{3(x-3)^3r(x)+(x-3)^4r'(x)}{(x-3)^3r(x)}$

$=\lim_{x\to3}\dfrac{3r(x)}{r(x)}=3$

에서

$f(-1)-3=0$이므로 $r(-1)=0$

$f(x)-3$이 사차식이므로 $r(x)=ax+a$

(a는 상수)

함수 $f(x)$의 최솟값이 0이므로

$f(x)$가 최소가 되는 점의 x좌표를 α라고 하면

$f'(x)=ax(x-3)^2$에서 $x=0$의 좌우에서

$f'(x)$의 값의 부호가 $(-)\to(+)$으로 바뀌므로

$\alpha=0$이고,

$f(0)-3 = -27a = -3$에서

$a=\dfrac{1}{9}$이다.

따라서 $f(x)=(x-3)^3\left(\dfrac{1}{9}x+\dfrac{1}{9}\right)+3$이므로

$f(8)=5^3\times1+3=128$

11. a_n의 공차가 3이므로 $a_1=p$(p는 자연수)

라 하고 a_2, a_3, a_4, a_5를 각각

$p+3, p+6, p+9, p+12$로 놓고,

b_n의 공차가 1이므로 $b_1=q$(q는 자연수)

라 하고 b_2, b_3, b_4, b_5를 각각

$q+1, q+2, q+3, q+4$

으로 놓으면

$|a_2-b_2|=|a_4-b_4|$에서

$|p-q+2|=|p-q+6|$,

$p-q+2\neq p-q+6$이므로

$-(p-q)-2=p-q+6$,

$-2(p-q)=8$, $q-p=4$

따라서 $q=p+4$이므로 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5는 각각

$p+4, p+5, p+6, p+7, p+8$

임을 알 수 있다.

모든 자연수 n에 대하여

$$c_n=\frac{a_n+b_n+|a_n-b_n|}{2}=\begin{cases} a_n & (a_n\geq b_n) \\ b_n & (a_n<b_n)\end{cases}$$

이므로

$$c_n=\begin{cases} b_n & (n<3) \\ a_n & (n\geq 3)\end{cases}$$

이고, $\sum_{k=1}^{5}c_k=51$이므로

$b_1+b_2+a_3+a_4+a_5=5p+36=51$에서

$p=3$이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n=3n$, $b_n=n+6$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10}(2k-6)=110-60=50$$

정답과 해설

12. 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$(a,b,c,d는 임의의 실수, $a\neq 0$)의 모든 근의 합은 $-\dfrac{b}{a}$이고,

이는 삼차항의 계수와 이차항의 계수로 나타내어지므로 일차항과 상수항의 영향을 받지 않는다.

따라서, 문제에서 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근의 합과 같다.

방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 $0+a+10$이고, 점 B의 좌표를 $(\alpha,f(\alpha))$라고 하면 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근의 합은 $a+a+\alpha$

($\because$ a는 중근)이므로

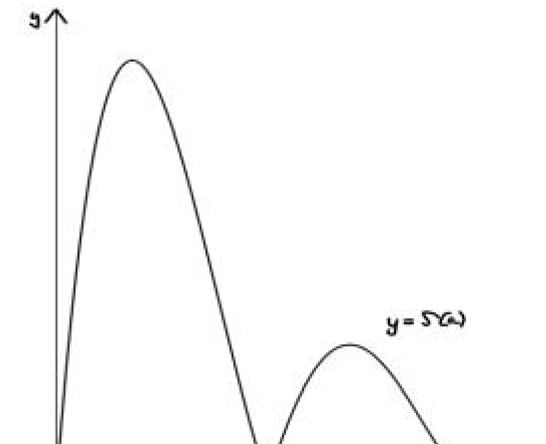
$a+10=2a+\alpha$, $\alpha=10-a$이다.

직선 $y=g(x)$와 두 점 B, C$(10,0)$을 지나는 직선 및 x축으로 둘러싸인 부분은 밑변의 길이가 $10-a$이고 높이가 $|f(10-a)|$인 삼각형이므로 삼각형의 넓이 $S(a)$는

$$\left|\frac{1}{2}\times(10-a)\times f(10-a)\right|$$

$$=\left|a(a-5)(a-10)^2\right|$$

이고, 함수 $S(a)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $S(a)$가 구간 $(0,5)$와 $(5,10)$에서 각각 극대가 되도록 하는 a의 값은

함수 $y=x(x-5)(x-10)^2$의 x좌표가 10이 아닌 두 극값의 x좌표와 같으므로,

위 식을 전개하면

$y=x^4-25x^3+200x^2-500x$

미분하면

$y'=4x^3-75x^2+400x-500$

에서 x에 대한 방정식 $y'=0$의 10이 아닌 두 실근과 같다.

방정식 $y'=0$의 한 실근이 10이므로

조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 10 & 4 & -75 & 400 & -500 \\ & & 40 & -350 & 500 \\ \hline & 4 & -35 & 50 & 0 \end{array}$$

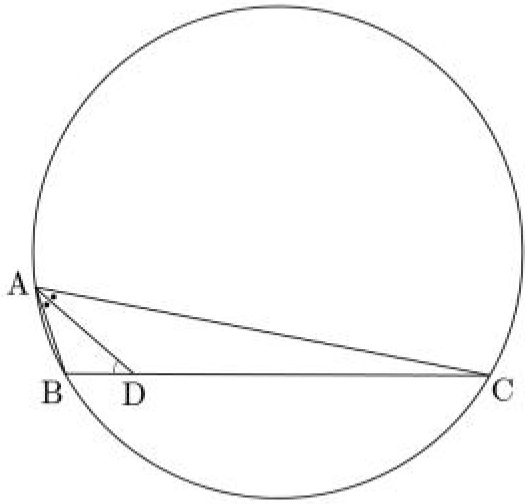
에서 $y'=(x-10)(4x^2-35x+50)$이다.

즉, x좌표가 10이 아닌 두 극값의 x좌표의 합은 $\dfrac{35}{4}$이다.

따라서 함수 $S(a)$가 구간 $(0,5)$와 $(5,10)$에서 각각 최대가 되도록 하는 두 값 α, β에 대하여

$$\alpha+\beta=\frac{35}{4}$$

13.



그림에서 선분 AC의 길이를 a라 하면
코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2 = 1^2 + a^2 - 2\times a \times \dfrac{1}{2} = a^2 - a + 1$,

$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{a^2 - a + 1}$
이고
각의 이등분선의 성질에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}$
이므로 $\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}} = 1 : a$이다.
따라서 선분 BD의 길이는
$\sqrt{a^2 - a + 1} \times \dfrac{1}{1+a}$로 나타낼 수 있고,
선분 DC의 길이는
$\sqrt{a^2 - a + 1} \times \dfrac{a}{1+a}$로 나타낼 수 있다.
삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\angle \mathrm{BAD}} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle \mathrm{ADB}}$이므로

$$\frac{\sqrt{a^2-a+1}\times\dfrac{1}{1+a}}{\dfrac{1}{2}} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{21}}{7}},$$

$$\sqrt{a^2-a+1} = \frac{7(1+a)}{2\sqrt{21}}$$

이 성립한다.

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - a + 1 = \frac{7}{12}(1+a)^2$$

$$\frac{5}{12}a^2 - \frac{26}{12}a + \frac{5}{12} = 0$$

$5a^2 - 26a + 5 = 0, (a-5)(5a-1) = 0$
에서 $\overline{\mathrm{AB}} < \overline{\mathrm{AC}}$이므로 $a = 5$이고,
선분 BC의 길이는 $\sqrt{21}$이다.

호 BC에 대한 원주각 중 작은 것의 크기가 $\dfrac{\pi}{3}$이므로 삼각형 ABC의 외접원에 내접하는 정삼각형의 밑변의 길이는 선분 BC의 길이와 같다.
따라서 삼각형 ABC의 외접원에 내접하는 정삼각형의 넓이는 $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{21})^2 = \dfrac{21\sqrt{3}}{4}$

14. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서
연속이므로

$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4-} f(x) = f(4)$
를 만족하여야 한다.

$\lim_{x\to 4-} f(x) = f(4) = 4$이고

$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) + a = a$이므로 $a = 4$이다.

$$|f(x)| - f(x) = \begin{cases} -2f(x) & (f(x) < 0) \\ 0 & (f(x) \ge 0) \end{cases}$$

에서 $x < 0$일 때 $f(x) < 0$이고 $x \ge 0$일 때 $f(x) \ge 0$이므로

$$\int_{-20}^{20} |f(x)| - f(x)dx$$

$$= \int_{-20}^{0} -2f(x)dx + \int_{0}^{20} 0\,dx$$

$= -2 \cdot \displaystyle\int_{-20}^{0} f(x)dx$이다.

정답과 해설

한편 $x^3-6x^2+9x=g(x)$라 하면
함수 $g(x)$는 점 $(2,2)$에 대하여 대칭이므로
$\int_0^4 g(x)dx=\int_0^4 4-g(x)dx$에서
$\int_0^4 g(x)dx=8$이고,
구간 $[-4,0]$에서 $f(x)=g(x+4)-4$
구간 $[-8,-4]$에서 $f(x)=g(x+8)-8$
구간 $[-12,-8]$에서 $f(x)=g(x+12)-12$
구간 $[-16,-12]$에서 $f(x)=g(x+16)-16$
구간 $[-20,-16]$에서 $f(x)=g(x+20)-20$
이므로

$$\int_{-20}^{0} f(x)dx=\int_{-20}^{-16} g(x+20)-20\,dx$$
$$+\int_{-16}^{-12} g(x+16)-16\,dx$$
$$+\int_{-12}^{-8} g(x+12)-12\,dx$$
$$+\int_{-8}^{-4} g(x+8)-8\,dx$$
$$+\int_{-4}^{0} g(x+4)-4\,dx$$
$$=5\cdot\int_0^4 g(x)dx$$
$$+4\cdot\{(-20)+(-16)+(-12)+(-8)+(-4)\}$$
$$=40-240=-200$$

따라서 $-2\cdot\int_{-20}^{0} f(x)dx=S=400$ 이고
$a+S=4+400=404$

15. $a_1=\alpha$
$a_2=2^{\alpha}+\alpha^2$
$a_3=2^{(2^{\alpha}+\alpha^2)}+(2^{\alpha}+\alpha^2)^2$
이고 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+3}=a_n$이므로
$\sum_{k=1}^{15}\sin\left(\frac{a_k}{2}\pi\right)=5\cdot\sum_{k=1}^{3}\sin\left(\frac{a_k}{2}\pi\right)$
즉 $\sum_{k=1}^{3}\sin\left(\frac{a_k}{2}\pi\right)=1$이 성립하도록 하는
α의 값을 구하면 된다.
모든 실수 x에 대하여
$\sin\left(x+\frac{4}{2}\pi\right)=\sin(x+2\pi)$
$=\sin x$이고
$\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)=1, \sin\left(\frac{2}{2}\pi\right)=0,$
$\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-1, \sin\left(\frac{4}{2}\pi\right)=0$
이므로
a_k의 값이 $1,5,9,\cdots,4p+1$
a_k의 값이 $2,6,10,\cdots,4p+2$
a_k의 값이 $3,7,11,\cdots,4p+3$
a_k의 값이 $4,8,12,\cdots,4p+4$ (p는 음이 아닌 정수)
즉 a_k의 값을 4로 나눈 나머지가 각각
$1,2,3,4$인 경우를 확인하면 된다.
α가 짝수이면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 짝수이므로
$\sum_{k=1}^{3}\sin\left(\frac{a_k}{2}\pi\right)=0$이고
α가 홀수이면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 홀수이므로
a_k의 값을 4로 나눈 나머지가 각각 1,3인 경우만
확인하면 된다.

정답과 해설

4로 나눈 나머지가 1인 수 $4p+1$의 제곱은

$(4p+1)^2 = 16p^2+8p+1$이므로

이 역시 4로 나눈 나머지가 1이고,

4로 나눈 나머지가 3인 수 $4p+3$의 제곱은

$(4p+3)^2 = 16p^2+24p+9$에서

이는 4로 나눈 나머지가 1이다.

$\alpha=1$일 때

$a_1=1, a_2=2^1+1^2=3, a_3=2^3+3^2=17$

$\sin\left(\frac{a_1}{2}\pi\right)=1, \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right)=-1, \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right)=1$

이므로 성립한다.

$\alpha=3$일 때

$a_1=3, a_2=2^3+3^2=17, a_3=2^{17}+17^2$

17을 4로 나눈 나머지가 1이므로 17^2을 4로 나눈 나머지는 1이다.

즉 $\sin\left(\frac{a_1}{2}\pi\right)=-1, \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right)=1, \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right)=1$

이므로 성립한다.

$\alpha=5$일 때

$a_1=5, a_2=2^5+5^2=57, a_3=2^{57}+57^2$

57을 4로 나눈 나머지가 1이므로 57^2을 4로 나눈 나머지는 1이다.

즉 $\sin\left(\frac{a_1}{2}\pi\right)=1, \sin\left(\frac{a_2}{2}\pi\right)=1, \sin\left(\frac{a_3}{2}\pi\right)=1$

이므로 성립하지 않는다.

α가 7 이상의 홀수일 때

α를 4로 나눈 나머지가 1인 경우 a_1, a_2, a_3을

4로 나눈 나머지는 각각 1,1,1이 되어

성립하지 않음을 알 수 있고,

α를 4로 나눈 나머지가 3인 경우 a_1, a_2, a_3을

4로 나눈 나머지는 각각 3,1,1이 되어

성립함을 알 수 있다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 20 이하의

α의 값은 1,3,7,11,15,19이므로

$1+3+7+11+15+19=56$

16. $24=2^3\times3^1$이므로

$a=3, b=1$

따라서 $a+b=3+1=4$

17. $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2+x+1\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\Big|_0^1$

$=\frac{11}{6}$

따라서 $p=\frac{11}{6}$이므로

$6p=11$

18. $\log_a b = \frac{\log_b c}{3} = \frac{\log_c a}{9} = k$라 하면

$a^k=b$

$b^k=c^{\frac{1}{3}}$, $b^k=a^{k^2}$

에서 $a^{3k^2}=c$

$c^k=a^{\frac{1}{9}}, c^k=a^{3k^3}$

에서 $a^{27k^3}=a$이므로 $27k^3=1, k=\frac{1}{3}$

따라서 $\log_a b=\frac{1}{3}$이므로

$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}=3$

19. $f\left(\frac{\pi}{4}x\right)=\sin\frac{\pi}{4}x-\cos\frac{\pi}{4}x=0$에서

$\sin\frac{\pi}{4}x=\cos\frac{\pi}{4}x$

$\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{5}{4}\pi=\cos\frac{5}{4}\pi$이고

$\sin\left(x+\frac{8}{4}\pi\right)=\sin(x+2\pi)$
$=\sin x,$
$\cos\left(x+\frac{8}{4}\pi\right)=\cos(x+2\pi)$
$=\cos x$

이므로

구하는 모든 0 이상 20 이하의 x의 값은

1,5,9,13,17

따라서 $1+5+9+13+17=45$

20. 점 P의 속력을 $v(t)$라 하면

$v(t)=3t^2-6at$

이고, 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=6t-6a$

이다.

$6f(a)-6a=0$에서

$f(a)=a$이고,

시각 $t=0$에서 $t=2f(a)$까지 점 P가

움직인 거리는

$\int_0^{2a}|v(t)|dt=4a^3$에서 $g(a)=4a^3$

이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{5}\frac{f(k)+g(k)}{5}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}(k+4k^3)$

$=\frac{1}{5}\times\frac{5\times6}{2}+\frac{4}{5}\times\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2$

$=3+180=183$

21. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\log_2|x| & (x<a, x>4)\\ mx+n & (a\le x\le 4)\end{cases}$$

에 대하여

$0\le a<4$이면 $f(x)$가 $x=0$에서

불연속이므로 $a<0$이고,

$m<0$이면 함수 $g(t)$가 $t<2$인 모든 t에

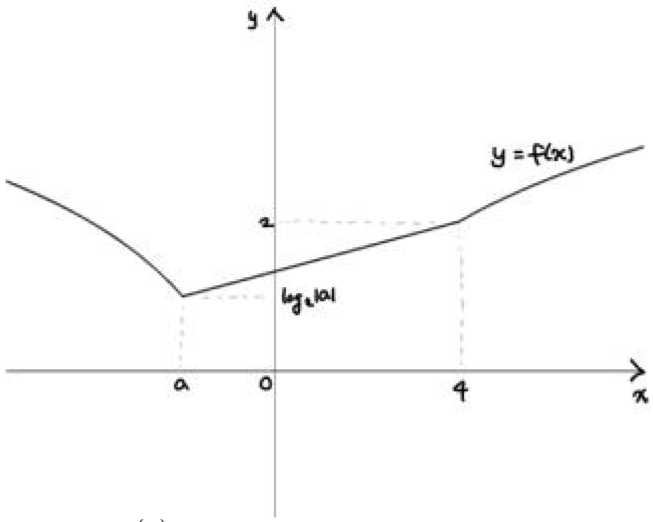
대하여 $g(t)=0$이므로

$t=1$을 포함하는 어떤 열린구간에 대하여

$g(1+t)+g(1-t)=2$을 만족시키지 못한다.

따라서 $m>0$이고, 함수 $f(x)$의 그래프의

개형은 다음과 같다.



함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<\log_2|a|)\\ 1 & (t=\log_2|a|)\\ 2 & (t>\log_2|a|)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 t에 대하여

$g(1+t)+g(1-t)=2$ 가 성립하려면

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<1)\\ 1 & (t=1)\\ 2 & (t>1)\end{cases}$$

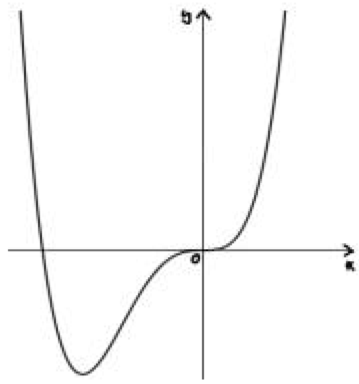
이 되어야 한다.

정답과 해설

$a<0$이므로 $\log_2|a|=\log_2(-a)=1$에서
$a=-2$이고,
$-2m+n=1,\ 4m+n=2$에서
$m=\dfrac{1}{6}, n=\dfrac{4}{3}$이다.
따라서 $|a\times m\times n|=|(-2)\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{4}{3}|$
$=\dfrac{4}{9}=\dfrac{q}{p},\ p=9, q=4$
$p+q=9+4=13$

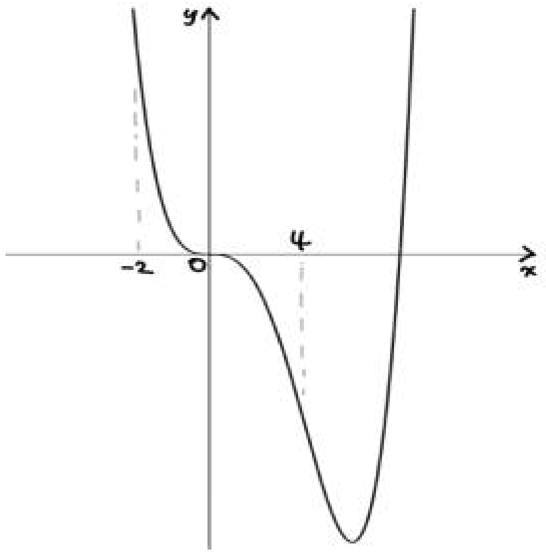
22. $a_n\times f(a_n)f'(a_n)\le 0$을 만족시키는
자연수 n이 존재하지 않으므로
$f(a_n)\neq 0, f'(a_n)\neq 0$이고
$a_n<0$이면 $f(a_n)f'(a_n)<0$,
즉 함수 $f(x)$가 함숫값이 양수인 구간에서
감소하거나 함숫값이 음수인 구간에서
증가하여야 하며
$a_n>0$이면 $f(a_n)f'(a_n)>0$,
즉 함수 $f(x)$가 함숫값이 양수인 구간에서
증가하거나 함숫값이 음수인 구간에서
감소하여야 한다.
$f'(-1)f'(1)<0$이고 방정식 $f'(x)=0$의
모든 실근이 정수이므로
사잇값의 정리에 의해 $f'(0)=0$이고,
$f'(4)<0$이므로 $f(4)<0$,
$f(-2)f(4)>0$이므로 $f(-2)<0$이다.
$-1<a_n<1$을 만족하는 수열 $\{a_n\}$의 값이
무수히 많으므로
함수 $f(x)$의 $x=0$을 포함하는
어떤 열린구간에서의 경향을 확인하면
된다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=0$을 포함하는 어떤 열린구간에서 증가하며, $x=0$에서 삼중근을 가지는 경우



$f'(x)$의 값이 $x=0$의 좌우에서 계속 양수이므로
$f(0)=0$이다.
따라서 $f'(4)>0$이므로 조건에 모순이다.

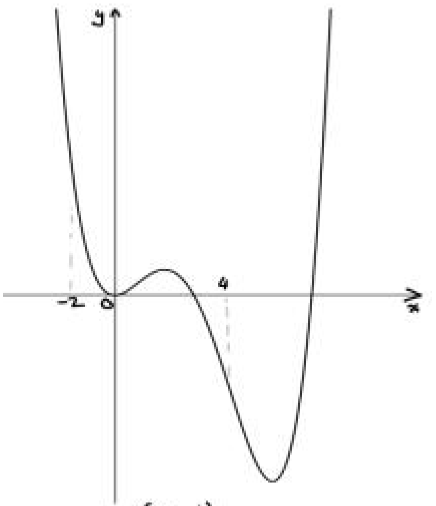
(2) 함수 $f(x)$가 $x=0$을 포함하는 어떤 열린구간에서 감소하며, $x=0$에서 삼중근을 가지는 경우



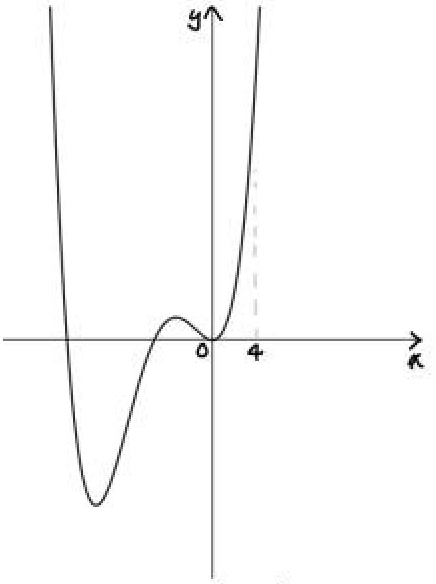
$f'(x)$의 값이 $x=0$의 좌우에서 계속 음수이므로
$f(0)=0$이다.
또한 $f'(4)<0$이므로
$f(-2)f(4)<0$이 되어 조건에 모순이다.

정답과 해설

(3) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극소인 경우



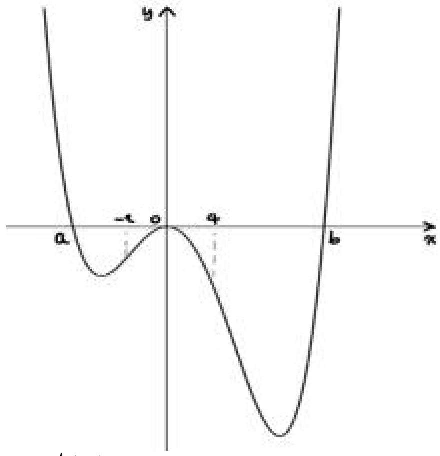
(3-1)



(3-2)

$(3-1)$의 경우 $f(-2)f(4)<0$이거나
$f(4)\geq 0$이므로 조건에 모순이고,
$(3-2)$의 경우 $f'(4)>0$이므로 조건에 모순이다.

(4) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극대인 경우



함수 $f'(x)$의 부호가 $x=0$의 좌우에서
$(+)\rightarrow(-)$으로 바뀌므로
$f(0)\leq 0$이다.
$f'(x)=4x(x-a)(x-b)$
(a는 음의 정수, b는 양의 정수,
$a\neq a_n$, $b\neq a_n$)으로 놓으면
$f'(-1)f'(1)<0$이고 $f(-2)<0$,
$f'(-2)>0$이므로
$a\leq -3(a\neq -8)$이고
$f'(4)<0$이므로 $b\geq 5(b\neq 16)$이다.
위 식을 전개하면
$4x^3-4(a+b)x^2+4abx$
부정적분하면

$$f(x)=x^4-\frac{4}{3}(a+b)x^3+2abx^2+c$$

$$=x^2\left\{x^2-\frac{4}{3}(a+b)x+2ab\right\}+c$$

에서 $f(0)\leq 0$이므로 $c\leq 0$이다.
함수 $f(x)$는 $x=0$에서 0 이하의 극댓값을 가지고
$x=b$에서 극소, $x>b$에서 증가하므로
$f(0)=0$이면서
$\int_0^b f'(x)dx$와 $\int_b^7 f'(x)dx$의 값이
각각 최소, 최대가 될 때
$f(7)$의 값이 최대이다.
따라서 $c=0, b=5$일 때 $f(7)$의 값이 최대이다.

$f(x)=x^2\left\{x^2-\frac{4}{3}(a+5)x+10a\right\}$에서

$f(7)=49\times\left(49-\frac{28}{3}a-\frac{140}{3}+10a\right)$

$=49\times\left(\frac{2}{3}a+\frac{7}{3}\right)$

이므로 $a=-3$일 때 $f(7)$의 최댓값은 $\frac{49}{3}$이다.

따라서 $\frac{q}{p}=\frac{49}{3}$이므로 $p=3, q=49$

$p+q=3+49=52$

(+Comment)
해당 문제의 경우,
$-2,\ 4$가 모두 수열 $\{a_n\}$의 항이므로
주어진 조건을 이용하여
$f(-2),\ f(4),\ f'(-2),\ f'(4)$의 부호를
바로 알아낼 수도 있다.

〈 선택과목(미적분) 〉

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}}$에서 분모와 분자에

각각 2^n을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$$

24. x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=\frac{2t+1}{t^2+t}$,

$\frac{dy}{dt}=\pi\times\cos\pi t\times e^{\sin\pi t}$

이고 $t=2$일 때 $\frac{dx}{dt}=\frac{5}{6}$,

$\frac{dy}{dt}=\pi$

이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\pi}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}\pi$

정답과 해설

25. $\lim_{h\to0}\frac{\ln f(2+h)-\ln f(2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{\ln f(2+h)-\ln f(2)}{f(2+h)-f(2)}\times\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=\frac{1}{f(2)}\times f'(2)=\frac{f'(2)}{f(2)}$

이다. $f(x)$가 증가함수이므로

$f(2)=g(2)$에서 $f(2)=2$이고,

$f'(2)=\frac{1}{g'(2)}=7$

이므로 $\frac{f'(2)}{f(2)}=\frac{7}{2}$

26. 점 P의 좌표를 $(s,\ln s)$라 하면 점 P에서 곡선 $y=\ln x$에 접하는 직선의 기울기가 t가 되어야 한다.

함수 $y=\ln x$를 x에 대하여 미분하면

$y'=\frac{1}{x}$

이므로 $\frac{1}{s}=t$에서 $s=\frac{1}{t}$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{t},\ln\frac{1}{t}\right)$이다.

점 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{t},\ln\frac{1}{t}\right)$를 지나고 기울기가 t인 직선의 방정식은

$y=t(x-\frac{1}{t})+\ln\frac{1}{t}$

이므로 이 직선의 x절편은

$\frac{1}{t}-\frac{\ln\frac{1}{t}}{t}=\frac{1+\ln t}{t}$이다.

따라서 $f(t)=\frac{1+\ln t}{t}$,

$f'(t)=-\frac{\ln t}{t^2}$

이므로 $f'(e)=-\frac{1}{e^2}$

27. 그림 R_2에서 새로 색칠한 정사각형 중 그 넓이가 가장 큰 것은 그림 R_1에 존재하는 정사각형 중 그 넓이가 16인 것의 $\frac{16}{25}$배이고,

그림 R_2에서 새로 색칠한 정사각형 중 그 넓이가 가장 작은 것은 그림 R_1에 존재하는 정사각형 중 그 넓이가 9인 것의 $\frac{9}{25}$배이다.

그림 R_n에 존재하는 모든 직각삼각형의 직각을 낀 두 변의 길이가 $4:3$이므로, 그림 R_n에 존재하는 모든 직각삼각형은 서로 닮음이다.

즉 모든 직각삼각형의 서로 대응하는 변의 길이의 비가 일정하고,

이 중 2 이상 n 이하의 모든 자연수 p에 대하여

p번째 과정에서 그려진 직각삼각형과

$p-1$번째 과정에서 그려진 직각삼각형의 길이비가 모두 일정한 직각삼각형들의 경우

이 직각삼각형들의 서로 대응되는 변을 한 변으로 하는 정사각형들의 길이비가 일정하므로

이 정사각형들의 넓이비가 모두 일정하다.

곧, $n(n\geq2)$번째 과정에서 구해지는 2^n개의 정사각형 중 넓이가 가장 큰 것의 넓이는 $n-1$번째 과정에서 구한 2^{n-1}개의 정사각형 중 그 넓이가 가장 큰 것의 넓이의 $\frac{16}{25}$배이고,

n번째 과정에서 구해지는 2^n개의 정사각형 중 넓이가 가장 작은 것의 넓이는 $n-1$번째 과정에서 구한 2^{n-1}개의 정사각형 중 그 넓이가 가장 작은 것의 넓이의 $\frac{9}{25}$배이다.

즉, S_n은 첫째항이 16이고 공비가 $\dfrac{16}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합인

$$\frac{16\left(1-\left(\frac{16}{25}\right)^n\right)}{1-\frac{16}{25}}=\frac{25\times16\times\left(1-\left(\frac{16}{25}\right)^n\right)}{9}$$

과 같고, T_n은 첫째항이 9이고 공비가 $\dfrac{9}{25}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합인

$$\frac{9\left(1-\left(\frac{9}{25}\right)^n\right)}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25\times9\times\left(1-\left(\frac{9}{25}\right)^n\right)}{16}$$

과 같다.

따라서 $\sqrt{S_n}+\sqrt{T_n}$

$$=\frac{5\times4}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{16}{25}\right)^n}+\frac{5\times3}{4}\times\sqrt{1-\left(\frac{9}{25}\right)^n}$$

$$=\frac{20}{3}\times\sqrt{1-\left(\frac{16}{25}\right)^n}+\frac{15}{4}\times\sqrt{1-\left(\frac{9}{25}\right)^n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{S_n}+\sqrt{T_n}\right\}$$

$$=\frac{20}{3}\times\sqrt{1}+\frac{15}{4}\times\sqrt{1}$$

$$=\frac{80+45}{12}$$

$$=\frac{125}{12}$$

28. $x<0$일 때 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+a$이므로

$f'(x)=-\dfrac{2}{x^3}>0$

즉, $x<0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

또한 $x>0$에서 $-x^2+x<f(x)<x^2+x$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=0$이고 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)}{x}=1$이다.

충분히 작은 양수 h에 대하여 함수 $f(x)$가

구간 $(0,h)$에서 증가하고

모든 양수 t에 대하여 방정식 $f(x)=t$가 오직

하나의 실근을 가지므로

함수 $f(x)$는 $x>0$에서 증가한다.

$x<0$에서 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+a>a$이고,

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 정의되므로

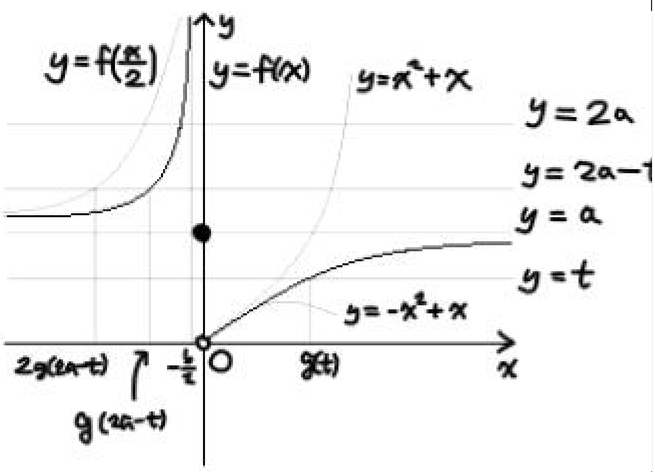
$x>0$에서 $f(x)<a$이고, $f(0)=a$이다.

또한 $0<t<a$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)+2g(2a-t)+b=0$에서

$\dfrac{g(t)+2g(2a-t)}{2}=-\dfrac{b}{2}$가 성립하므로

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는

$x<0$에서 함수 $y=f\left(\frac{x}{2}\right)$의 그래프를

점 $\left(-\frac{b}{2},\ a\right)$에 대하여 대칭이동한 그래프이므로

$x>0$에서 $f(x)=2a-f\left(\frac{-b-x}{2}\right)$이다.

따라서 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}+a & (x<0)\\ a & (x=0)\\ -\frac{1}{\left(\frac{-b-x}{2}\right)^2}+a & (x>0)\end{cases}$$

이다.

함수 $g(x)$를 $g(x)=-\frac{1}{\left(\frac{-b-x}{2}\right)^2}+a$이라 할 때,

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+}g(x)=0$, $\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)}{x}=1$에서

$g(0)=0,\ g'(0)=1$이다.

즉 $g(0)=-\frac{4}{b^2}+a=0$이고

$g'(x)=\frac{1}{\left(\frac{-b-x}{2}\right)^3}$에서 $g'(0)=\frac{8}{b^3}=1$이므로

$b=2,\ a=1$이다.

따라서 $f(0)=1$이고

$x>0$에서 $f(x)=-\frac{4}{(x+2)^2}+1$이므로

$f(8)=\frac{24}{25}$

$\therefore \frac{f(0)}{f(8)}=\frac{25}{24}$

29.

곡선 C 위의 점 (x,y)에서의 곡선 C의

접선의 기울기는

$2x-y-x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$에서

$\frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{4y-x}$이고,

직선 l_1이 x축에 평행하므로

직선 l_1은 $\frac{dy}{dx}=0$인 점,

즉 곡선 C와 직선 $y=2x$의 교점에서 곡선 C에 접하는 직선이고

직선 l_2가 y축에 평행하므로

직선 l_2는 $\frac{dy}{dx}$의 값이 존재하지 않는 점,

즉 곡선 C와 직선 $4y=x$의 교점에서 곡선 C에 접하는 직선이다.

정답과 해설

곡선 C와 직선 $y=2x$의 교점은

$x^2-x \cdot 2x+2(2x)^2=5$에서

$7x^2=5, x=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, y=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$

이므로 $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}, \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$이고

즉 곡선 C와 직선 $4y=x$의 교점은

$(4y)^2-4y \cdot y+2y^2=5$에서

$14y^2=5, y=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}, x=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$

이므로 $\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{14}}, \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}\right)$이다.

즉, 직선 l_1의 방정식은 $y=\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$이고

직선 l_2의 방정식은 $x=\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$이므로

두 직선의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{14}}, \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\right)$이다.

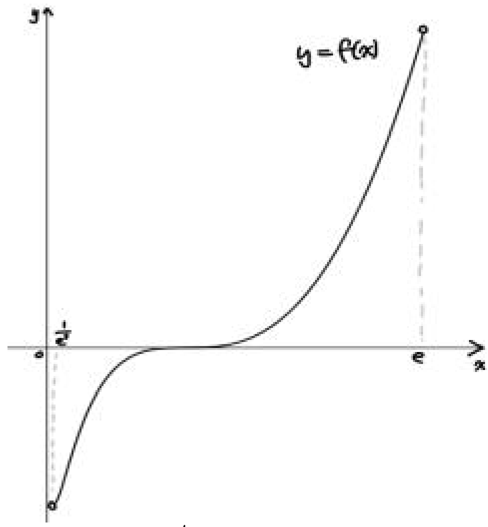
따라서 $\dfrac{4\sqrt{5}}{\sqrt{14}} \times \dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{8\times 5}{7\times\sqrt{2}} = \dfrac{20\sqrt{2}}{7}$에서

$\dfrac{q}{p}=\dfrac{20}{7}$이므로 $p=7, q=20$

$p+q=7+20=27$

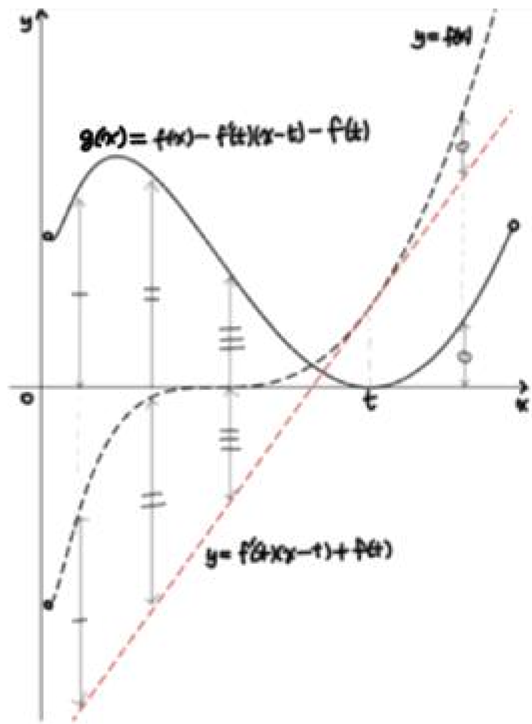
30.

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)$는 함수 $f(x)$의 그래프를 각각의 x값에 대하여 y축의 방향으로 $-f'(t)(x-t)-f(t)$만큼 평행이동한 것과 같으므로,

그 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $g(x)=f(x)-f'(t)(x-t)-f(t)$를

x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f'(x)-f'(t)$이므로

함수 $f'(x)$의 그래프를 y축 방향으로 $-f'(t)$만큼 평행이동한 것과 같다.

정답과 해설

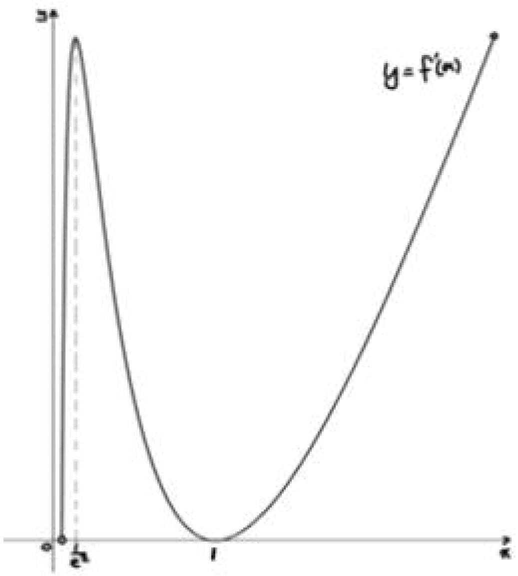
이 때 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=(\ln x)^3+3(\ln x)^2$이고,

이계도함수는

$f''(x)=\dfrac{1}{x}\cdot(3(\ln x^2)+6(\ln x))$이므로

함수 $f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\dfrac{1}{e^3}<t<e,\ t\neq\dfrac{1}{e^2},\ t\neq 1$인 모든 실수 t에 대하여

x에 대한 방정식 $f'(x)=f'(t)$의 서로 다른 실근의

개수가 3이면서 모든 실근이 중근이 아니므로

$g(x)$가 극대 또는 극소인 x좌표의 개수가

3이 된다.

이 때 $\dfrac{1}{e^2}<t<1$이면 함수 $f'(x)-f'(t)$의 부호가

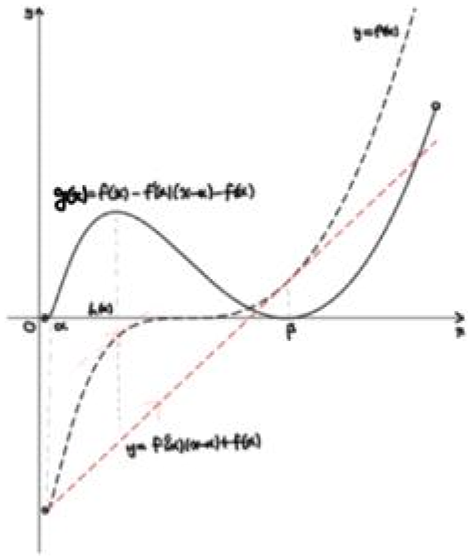
$x=t$의 좌우에서 $(+)\to(-)$으로 바뀌므로

함수 $g(x)$는 $x=t$에서 극대이다.

따라서 $\dfrac{1}{e^2}<t<1$일 때 $h(t)=t$이고

$2<e<3$에서 $\dfrac{1}{e^2}<\dfrac{12}{e^4}<1$이므로

$h\left(\dfrac{12}{e^4}\right)=\dfrac{12}{e^4}$이다.



두 실수 $\alpha,\beta\left(\alpha<\dfrac{1}{e^2},\beta>1\right)$에 대하여

$f'(\alpha)=f'(\beta)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

가 성립하는 경우는

$x=\alpha$에서 함수 $f(x)$에 접하는 직선과

$x=\beta$에서 함수 $f(x)$에 접하는 직선이

일치하는 경우이고,

이 때 함수 $y=f(x)-f'(\alpha)(x-\alpha)-f(\alpha)$가

극대가 되는 점의 x좌표인 $h(\alpha)$에 대하여

$x=h(\alpha)$에서의 $f(x)$에 접하는 직선의 기울기

역시 $f'(\alpha)$로 같다.

따라서 $f'(\alpha)=f'(h(\alpha))=f'(\beta)$가 성립한다.

함수 $f'(x)=(\ln x)^3+3(\ln x)^2$에 대하여

$\ln x$를 u로 치환하면

$f'(x)=u^3+3u^2$

이므로 다항방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

임의의 실수 c에 대하여 u에 대한 방정식

$u^3+3u^2=c$

의 모든 근의 합은 c의 값에 관계없이 항상 -3으로

일정하다는 사실을 알 수 있다.

따라서 u에 대한 방정식 $u^3+3u^2=f'(\alpha)$

의 서로 다른 세 실근을 각각 u_1,u_2,u_3이라고 하면

x에 대한 방정식 $(\ln x)^3+3(\ln x)^2=f'(\alpha)$

의 서로 다른 세 실근은 각각 e^{u_1},e^{u_2},e^{u_3}이고

그 값이 각각 $\alpha,h(\alpha),\beta$이므로

$\alpha\beta h(\alpha)=e^{u_1+u_2+u_3}=e^{-3}=\dfrac{1}{e^3}$이다.

정답과 해설

이상에서

$$h\left(\frac{12}{e^4}\right)\times \alpha\beta h(\alpha)=\frac{12}{e^4}\times\frac{1}{e^3}=\frac{12}{e^7}$$

이므로

$p=7, q=12$

따라서 $7+12=19$

풀어주셔서 감사합니다.

반응이 좋으면 6평 이후 회차도
추가적으로 공개하겠습니다!

By Mz04