2016학년도 차영진 9월 미리보기 문제지

제 2 교시

수학 영역 (A형)

M^2

5지선다형

1. $\log_4 9+\log_2 \frac{8}{3}$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

밑통일

$\log_{2^2} 3^2+\log_2 \frac{8}{3}=\log_2 3+\log_2 \frac{8}{3}$

$=\log_2 8=3$

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

① $A+2B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

② A의 성분의 합 8

2B의 성분의 합 -6

$\therefore 8-6=2$

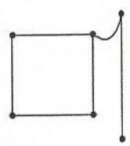
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\times 2^{2n-2}-8}{4^n}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5\times 2^{-2}-\frac{8}{4^n}}{1}$ $\frac{8}{4^n}\to 0$

$=\lim\limits_{n\to\infty} 5\times\frac{1}{4}-0=\frac{5}{4}$

4. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은? [3점]



① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

변의 개수 ×2

⇒ 6×2 =12

A→B, B→A

A B

⇒ 한 변이 2번씩 세어짐

5. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$를 따르고 $\mathrm{V}(X)=6$일 때, $\mathrm{E}(2X-3)$의 값은? [3점]

① 33 ② 34 ③ 35 ④ 36 ⑤ 37

$E(X)=n\times\frac{2}{3}$

$V(X)=n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=6$

$\therefore n=27$

$E(X)=18$

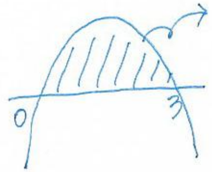
$E(2X-3)=2E(X)-3$

$=2\cdot 18-3$

$=33$

6. 곡선 $y=-x^2+3x-5$와 직선 $y=-5$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$



$\frac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

$\Rightarrow \frac{1}{6}(3-0)^3$

$=\frac{1}{6}\cdot 3^3=\frac{9}{2}$

7. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

↳ 항등식.

$$(x-1)f(x)=x^2+3x+a$$

를 만족시킨다. $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

$x=1$ $0\cdot f(1)=3+1+a$

$\therefore a=-4$

$\therefore (x-1)f(x)=x^2+3x-4$ $(x\neq 1)$

$x=1$에서 연속이 되도록

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$ 연속의 정의

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{x-1}}$

1에 수렴.

$=5$

② $(x-1)f(x)=g(x)$ $\cancel{x}$ x^2+3x+a

$g'(x)=2x+3$

$\therefore g'(1)=5=f(1)$

8. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 $|na_n - 16n + 1| \le \frac{2}{n}$이다.
>
> (나) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 2b_n) = 5$

$\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

(가) $-\frac{2}{n}+16n-1 \le na_n \le \frac{2}{n}+16n-1$

$\underbrace{-\frac{2}{n^2}+16-\frac{1}{n}}_{\hookrightarrow 16 \text{ 수렴}} \le a_n \le \underbrace{\frac{2}{n^2}+16-\frac{1}{n}}_{\hookrightarrow 16 \text{수렴}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = 16$

(나) $\lim_{n\to\infty}(a_n - 2b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n - (a_n - 2b_n)) = 16$

$\therefore \lim_{n\to\infty} 2b_n = 16$ $\lim_{n\to\infty} b_n = 8$

9. 첫째항이 1이고, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$rS_3 - S_3 = 26$

을 만족시킨다. a_4의 값은? [3점]

① 21 ② 25 ③ 27 ④ 29 ⑤ 31

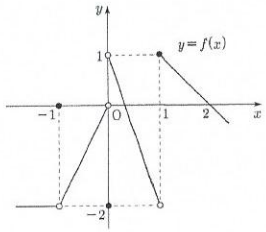
$\boxed{a_1.\ a_2.\ a_3}\ a_4$

S_3 rS_3

$a_4 - a_1 = 26$

$\therefore a_4 = 27$

10. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -1} f(x) + \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right)$의 값은? [3점]

① −1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

$\underbrace{\lim_{x\to -1} f(x)}_{-2} + \underbrace{\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right)}_{1}$

$x \to -1$ 일 때, $f(x) \to \frac{a}{-2}$.

$t\to\infty$ 일때 $\frac{t+1}{t} \to 1+0$ $\left(1+\frac{1}{t}\right)$, s

$f\left(\frac{t+1}{t}\right) \to 1$, $1+0$

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t+1}{t}\right) = \lim_{s\to 1+0} f(s) = 1$

$\therefore -2+1 = -1$

11. 어느 학급은 40명으로 이루어져 있고, 이 학급의 모든 학생은 수학 보충수업으로 '칼개념' 수업 또는 '칼분석' 수업 중 하나만을 반드시 수강해야 한다. 이 학급에서 각 학생이 선택한 수학 보충수업에 대한 인원수는 다음과 같다.

(단위: 명)

구분	남학생	여학생
칼개념	a	4
칼분석	$2a$	b

이 학급의 학생 40명 중에서 임의로 선택한 1명이 '칼개념' 수업을 듣는 학생일 때, 이 학생이 남학생일 확률이 $\frac{2}{3}$이다. 이 학급에서 임의로 2명의 여학생을 뽑을 때, 그 학생들이 모두 '칼분석' 수업을 듣는 학생일 확률은? [3점] → 시행 → 수학적 확률

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{11}{20}$ ⑤ $\frac{3}{5}$

$P(\text{남}|\text{개})$

$= \frac{P(\text{남}\cap\text{개})}{P(\text{개})} = \frac{2}{3}$

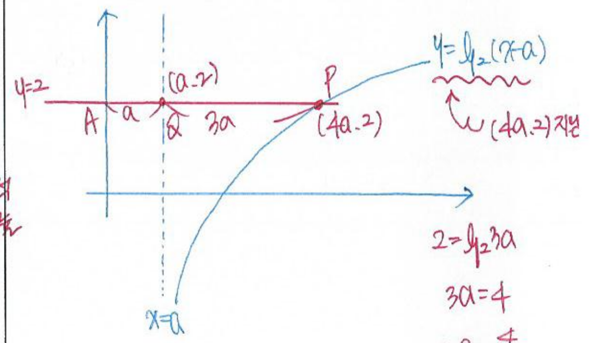
$\frac{n(\text{남}\cap\text{개})}{n(\text{개})}$

	남	여	
칼개념	a=8	4	12
칼분석	2a=16	b=12	28
	24	16	40

$P(\text{여}|\text{분}) = \frac{n(\text{여}\cap\text{분})}{n(\text{여})} = \frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2}$

12. 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 $a\,(a>0)$만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수를 $y=f(x)$라 할 때, 점 $A(0,\ 2)$를 지나고, x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=f(x)$의 점근선과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 선분 AP를 $1:3$으로 내분하는 점이 Q일 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$ ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$



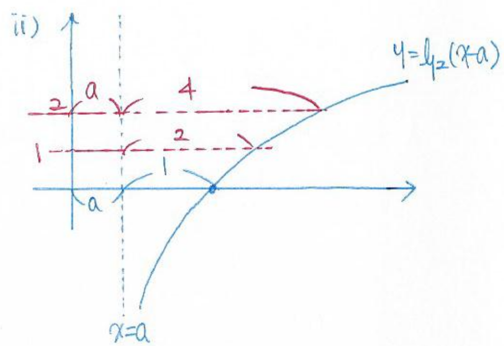
(4a.2) 지난

$2 = \log_2 3a$

$3a = 4$

$\therefore a = \frac{4}{3}$

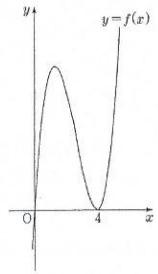
ii)



$a : 4 = 1 : 3$

$\therefore a = \frac{4}{3}$

[13~14] 함수 $f(x)=x(x-4)^2$에 대하여 <u>13번과 14번의</u> 두 물음에 답하시오.



13. 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 정적분 $\int_0^1 f'(x)dx$의 값은? [3점]

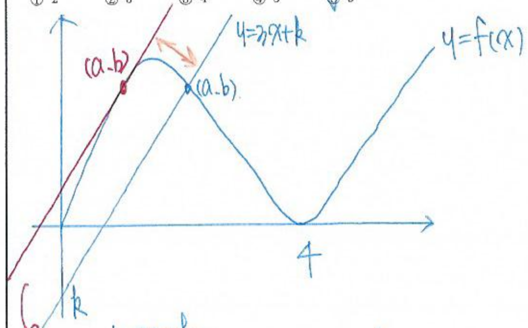
① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

$\int_0^1 f'(x)dx = f(1)-f(0)$

$= 9-0 = 9.$

14. 곡선 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b) $(0<a<4)$에 대하여 $b-3a$의 최댓값은? [4점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6



$b-3a=k$

$b=3a+k \Rightarrow y=3x+k$

접할 때 k의 값 최대

$f'(x)=3$

$f'(x)=(x-4)^2+2x(x-4)$

$f'(x)=3 \Rightarrow x=1$

$\therefore (a.b)=(1.9)$

↓ $y=3x+k$ 대입

$\therefore k=6$

ii) $b=a(a-4)^2$

$b-3a=a(a-4)^2-3a$

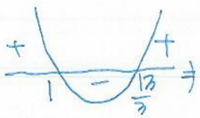
$=a(a^2-8a+16)-3a$

$=a^3-8a^2+13a \ (0<a<4)$

↳의 최댓값(미분하여 개형 check)

$3a^2-16a+13$

$=(a-1)(3a-13)$



⇒ a=1일 때 극댓값

M=6

15. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고,

$$(4n^2-1)(a_{n+1}-1)=\frac{1}{a_1a_2a_3\cdots a_n} \ (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정의 일부이다.

> 자연수 n에 대하여 주어진 식의 양변에 $a_1a_2a_3\cdots a_n$을 곱한 후 $(4n^2-1)$로 나누면
>
> $a_1a_2a_3\cdots a_{n+1}=a_1a_2a_3\cdots a_n+$ (가)
>
> 이고, $a_1a_2a_3\cdots a_n=b_n$이라 하면
>
> $b_{n+1}=b_n+$ (가)
>
> 이므로
>
> $b_n=$ (나) $(n\ge 1)$
>
> 이다.
>
> ⋮

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $\frac{g(11)}{f(4)}$의 값은? [4점]

① 81 ② 84 ③ 87 ④ 90 ⑤ 93

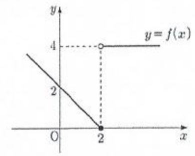
(가) $\frac{1}{4n^2-1}$

$\therefore f(4)=\frac{1}{63}$

(나) $\frac{3n-2}{2n-1}$

$\therefore g(11)=\frac{31}{21}$

16. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



함수 $f(x)$와 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 y절편은? [4점]

> (가) $g'(2)=\lim_{x\to 2+0} f(x)$ $=4$
>
> (나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

① −8 ② −7 ③ −6 ④ −5 ⑤ −4

불연속 연속

$\lim_{x\to 2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$

i) $\lim_{x\to 2+0} f(x)g(x)=0$

$\underset{0}{f(x)}\ \underset{g(2)}{g(x)}$

ii) $\lim_{x\to 2-0} f(x)g(x)=4\cdot g(2)$

$\underset{4}{f(x)}\ \underset{g(2)}{g(x)}$

$\therefore g(2)=0.$

$(2.0) \Rightarrow y=4x+b$

$\therefore b=-8$

17. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2+B=E,\quad AB-A+B=O$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$
ㄴ. $B-E$의 역행렬이 존재한다.
ㄷ. $A^3+A^2=E$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $B=E-A^2$ ← $B=f(A)$꼴.

i) $AB=A-A^3$
$BA=A-A^3$
$\therefore AB=BA$

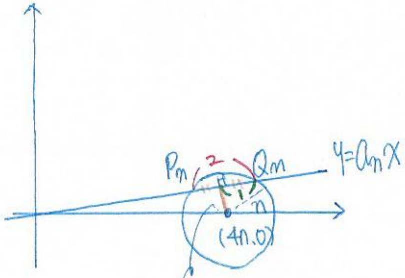
ii) $(A+E)(B-E)=(B-E)(A+E)$
$AB-\cancel{A}+\cancel{B}-\cancel{E}=BA+\cancel{B}-\cancel{A}-\cancel{E}$
$\therefore AB=BA$

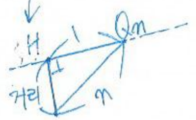
ㄴ. $A(B-E)+(B-E)=-E$
$-(A+E)(B-E)=E$
$\therefore (B-E)^{-1}=-(A+E)$

ㄷ. $A^3+A^2=A^2(A+E)=E$
$=(E-B)(A+E)$
$(A+E)^{-1}$

18. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 원 $(x-4n)^2+y^2=n^2$과 직선 $y=a_nx\ (a_n>0)$이 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{17}}{17}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{\sqrt{15}}{15}$　④ $\frac{\sqrt{14}}{14}$　⑤ $\frac{\sqrt{13}}{13}$





$$\sqrt{n^2-1}=\frac{|4n\cdot a_n|}{\sqrt{a_n^2+1}}$$

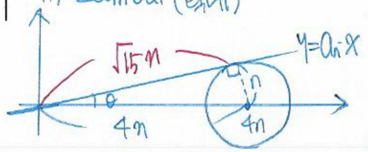
$16n^2a_n^2=(n^2-1)(a_n^2+1)$
$=(n^2-1)a_n^2+n^2-1$

$(15n^2+1)a_n^2=n^2-1$

$\therefore a_n=\sqrt{\frac{n^2-1}{15n^2+1}}$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}$

ii) Zoom out (확대)



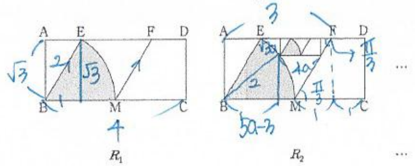
$\tan\theta=a_n$
$\therefore a_n\to\frac{1}{\sqrt{15}}$

$n\to\infty$ 일때, $a_n\to\frac{1}{\sqrt{15}}$

19. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 직사각형 ABCD에서 선분 BC의 중점을 M이라 하자. 선분 AD위의 두 점 E, F를 선분 BE와 선분 MF가 서로 평행하고, $\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{MF}}$가 되도록 정하고, 점 B를 중심으로 하는 부채꼴 BME를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 $4:\sqrt{3}$인 직사각형을 호 EM과 선분 MF와 각각 한 점에서 만나고 한 변이 선분 AD위에 있도록 그리고, 이 직사각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 부채꼴을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠 되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{32}{45}\pi$　② $\frac{98}{135}\pi$　③ $\frac{20}{27}\pi$　④ $\frac{34}{45}\pi$　⑤ $\frac{104}{135}\pi$

축소비율 ⇒ $4:4a$
$=1:a$　⇒ 길이

$\therefore$ 넓이 비율 ⇒ $1:a^2$

$2=\sqrt{(5a-3)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}a)^2}$

$a=1$ or $\frac{2}{7}$

$\therefore a^2=\frac{4}{49}$

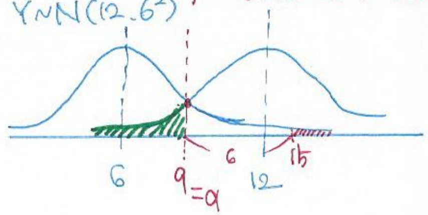
$$\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\frac{4}{49}}=\frac{98}{135}\pi$$

20. 확률변수 X와 Y는 평균이 각각 6과 12이고 표준편차가 모두 6인 정규분포를 따르고, 확률밀도함수가 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. $f(\alpha)=g(\alpha)$일 때, $\mathrm{P}(X\ge\alpha+6)+\mathrm{P}(Y\le\alpha)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.2583　② 0.3313　③ 0.3753
④ 0.4081　⑤ 0.5328

$X\sim N(6, 6^2)$
$Y\sim N(12, 6^2)$ → 정규분포곡선의 성질



$\mathrm{P}(X\ge\alpha+6)=0.5-0.4332$
+
$\mathrm{P}(Y\le\alpha)=0.5-0.1915$
⇓
0.3753

ii) $\mathrm{P}(X\ge\alpha+6)=\mathrm{P}(Z\ge1.5)$
$\mathrm{P}(Y\le\alpha)=\mathrm{P}(Z\le-0.5)$

$\therefore \mathrm{P}(Z\ge1.5)+\mathrm{P}(Z\le-0.5)$
$=0.3753$

21. 자연수 n에 대하여 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=-2$
> (나) $x \ge -n$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \ge -x^2-1$이다.

$f(2)$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

① 19 ② 21 ③ 23 ④ 25 ⑤ 27

$f(x) - (-x^2-1) \ge 0$

$f(x) + x^2+1 \ge 0$

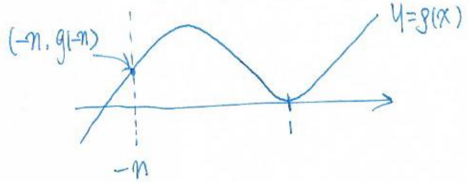
$= g(x)$

$\therefore g(x) \ge 0$ ← 최고차항의 계수가 1인 삼차식

$[-n, \infty)$의 최솟값 ≥ 0

↳ 극값 or 양끝값

$g(1) = f(1) + 1+1 = 0$



$g(1)=0$, $g(-n) \ge 0 \Rightarrow g(x)=(x-1)^2(x-k)$

$k \le -n$ ← 개형을 통해.

$f(x) = (x-1)^2(x-k) + (-x^2-1)$

$f(2) = 2-k-5 = -k-3$ → 감소함수

$k=-n$일 때 $f(2)$ 최소

$f(2) = n-3$

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(n-3) = 55-30 = 25.$

단답형

22. $\lim_{x\to 2}\sqrt{5x+15}$의 값을 구하시오. [3점] 5

극한값 = 함숫값 (연속인 함수)

23. 함수 $f(x)=(x^2-4)(x+3)$에 대하여 $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(x+3)-0}{\cancel{x-2}}$

$= 4\cdot 5 = 20.$

24. x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ -x\end{pmatrix}$$

이 $x=0$, $y=0$이외의 해를 가질 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 8 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$

$a-16=0$

$\therefore a=16.$

25. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때,

$$\log_2 5f(t) = g(t)+6$$

을 만족시키는 모든 $f(t)$의 값의 합을 구하시오. [3점]

$6 \le \log_2 5f(t) < 7$

$2^6 \le 5f(t) < 2^7$

$\frac{2^6}{5} \le f(t) < \frac{2^7}{5}$

$12.\times \le f(t) < 25.\times$

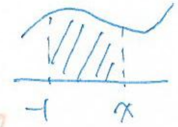
$13, 14, \cdots, 25$

$\Rightarrow 38\times 6+19 = 247$

26. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{-1}^{x} f(t)dt = 2x^2+(x+1)\int_0^a f(t)dt - a$$

을 만족시킬 때, $f(10)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]



$\Rightarrow x$에 대한 함수

$F(x)-F(-1)$

상수 $F(a)-F(0)$

$\therefore$ 미정 계수 $\therefore k$

$\int_{-1}^{x} f(t)dt = S(x)$

$\therefore S'(x) = f(x)$

$S(-1)=0$

$x=-1$ $0=2-a$

$\therefore a=2$

(다른)

$f(x) = 4x + \int_0^2 f(t)dt$

$\int_0^2 (4x+k)\,dx = k$

$[2x^2+kx]_0^2 = k$

$8+2k=k$

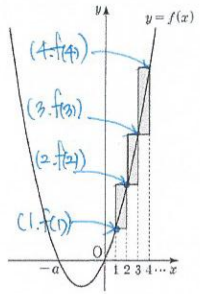
$\therefore k=-8$

$f(x) = 4x-8$

$f(10) = 40-8$

$= 32$

27. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)=x^2+ax\ (a>0)$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 P_n이라 할 때, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 대각선으로 하고 각 변이 좌표축에 평행한 직사각형의 넓이를 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{9} a_k=270$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]



$a_1=f(2)-f(1)$

$a_2=f(3)-f(2)$

$a_3=f(4)-f(3)$

⋮

$a_9=f(10)-f(9)$

$a_1+a_2+\cdots+a_9=f(10)-f(1)$

$270=100+10a-1-a$

$9a=171$

$\therefore a=19$

28. 부등식

$$64 \le 2^{a+b+c}\times 10^d \le 128$$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

i) $d=0$일 때

$64 \le 2^{a+b+c} \le 2^7$

$a+b+c=6$ or $a+b+c=7$

$\Rightarrow {}_8C_2+{}_9C_2=64$

ii) $d=1$일 때

$6.4 \le 2^{a+b+c} \le 12.8$

$a+b+c=3$

$\Rightarrow {}_5C_2=10$

iii) $d=2$일 때

$0.64 \le 2^{a+b+c} \le 1.28$

$a+b+c=0 \Rightarrow 1$

$\Rightarrow 64+10+1=75$

$d=3$ 이상 일 때 성립하는 값 X

29. 닫힌 구간 $[0, 2]$에서 정의된 연속확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(0\le X\le x)=\begin{cases} ax & (0\le x\le 1) \\ b(x^2+1) & (1<x\le 2)\end{cases}$$

$\int_0^x f(t)dt$

이다. $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}\le X\le \frac{3}{2}\right)=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

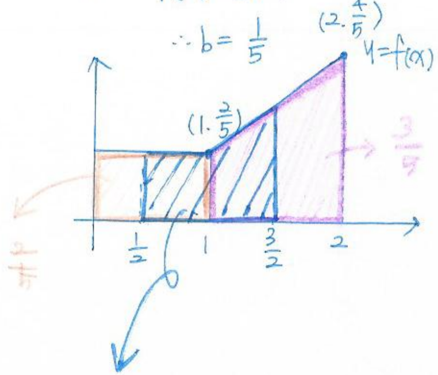
$f(x)=\begin{cases} a & (0<x<1) \\ 2bx & (1<x<2)\end{cases}$

① $f(x)\ge 0$

② $P(S)=\int_0^2 f(x)dx=1$

$x=2 \quad P(S)=5b=1$

$\therefore b=\frac{1}{5}$



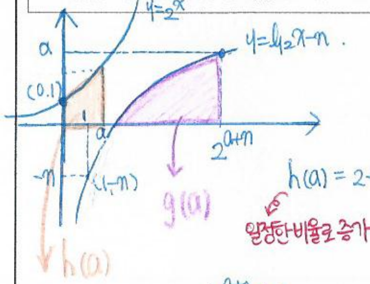
$P(\frac{1}{2}\le X\le \frac{3}{2})$

$=\frac{13}{20}-\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(1)\times f(3)\times f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $a \ge 2$
>
> (나) 영역
>
> $\{(x, y)\,|\,x\le 2^{a+n},\ y<\log_2 x-n\}$
>
> 과
>
> $\{(x, y)\,|\,x\le a,\ y\le 2^x\}$
>
> 에 속하는 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 각각 $g(a)$, $h(a)$라 할 때, $g(a)+h(a)\le 800$이다.

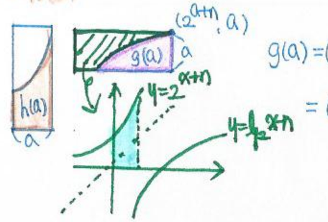
정의역 나타냄



$h(a)=2+2^2+2^3+\cdots+2^a$

일정한 비율로 증가

$=2^{a+1}-2$



$g(a)=a\cdot 2^{a+n}-(2^{1+n}+2^{2+n}+\cdots+2^{a+n})$

$=a\cdot 2^{a+n}-2^n\cdot h(a)$

$\therefore g(a)+h(a)=a\cdot 2^{a+n}-(2^n-1)\cdot h(a)$

i) $f(1) \Rightarrow h(a)+g(a)=$ ▭ $=2^{a+1}\cdot a-1\cdot(2^{a+1}-2)$

$a=2.3.4.5.6$ (5개)

ii) $f(3) \Rightarrow 2^{a+3}\cdot a-7\cdot(2^{a+1}-2)$

$a=2.3.4$ (3개)

iii) $f(5) \Rightarrow 2^{a+5}\cdot a-31(\ \ -2)$

$a=2.3$ (2개)

$\therefore f(1)\times f(3)\times f(5)=5\times 3\times 2=30$