

제 2 교시

수학 영역(B형)

$M^2$

5지선다형

1.  $\sqrt[5]{32} \times \log_2 16$ 의 값은? [2점]

- ① 4      ② 8      ③ 16      ④ 32      ⑤ 64

2. 두 행렬  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬

$2A - B$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 11      ② 13      ③ 15  
④ 17      ⑤ 19

3.  $\cos 2x = \frac{1}{3}$ 일 때,  $\tan x$ 의 값은? (단,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ) [2점]

- ①  $\frac{\sqrt{2}}{4}$     ②  $\frac{1}{2}$       ③  $\frac{\sqrt{2}}{2}$     ④  $\frac{\sqrt{10}}{4}$     ⑤  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 공차가 0이 아닌 등차수열  $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_3 + 3a_{11} = 4a_k$$

를 만족시킬 때, 자연수  $k$ 의 값은? [3점]

- ① 5      ② 6      ③ 7      ④ 8      ⑤ 9

5. 함수  $f(x) = xe^x + \sin x \cos x$ 에 대하여  $f'(0)$ 의 값은? [3점]

- ① 2      ② 1      ③ 0      ④ -1      ⑤ -2

6. 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 3\right) = 1$ 일 때,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3n + 2}{a_n + 2n - 1}$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{1}{2}$       ②  $\frac{3}{5}$       ③ 1      ④  $\frac{6}{5}$       ⑤ 2

7. 좌표평면에서 일차변환  $f$ 에 의해 점  $(1, 0)$ 은 점  $(2, 1)$ 로 옮겨지고, 점  $(0, 1)$ 은 점  $(2, 2)$ 로 옮겨진다. 일차변환  $f$ 에 의해 직선  $2x + 3y = 6$ 이 옮겨지는 직선을  $l$ 이라 할 때, 직선  $l$ 의  $y$ 절편은? [3점]

- ① 7      ② 6      ③ 5      ④ 4      ⑤ 3

8. 곡선  $y=e^{2x}$ 과 두 직선  $x=0, y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 곡선  $y=e^{2x}$ 과 두 직선  $x=3, y=a$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 서로 같을 때, 실수  $a$ 의 값은? [3점]

- ①  $\frac{e^2-1}{2}$     ②  $\frac{e^3-1}{3}$     ③  $\frac{e^4-1}{4}$     ④  $\frac{e^5-1}{5}$     ⑤  $\frac{e^6-1}{6}$

9. 그림과 같이 쉬는 시간 두 교시를 포함한 국어, 영어, 수학 자습시간표(총 8교시)를 만들려고 한다.

1교시	2교시	3교시	4교시	5교시	6교시	7교시	8교시

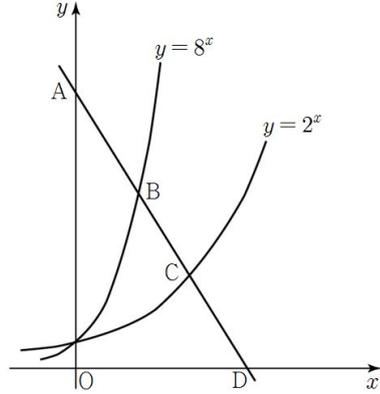
쉬는 시간으로 구분되지 않은 연속된 교시에는 같은 과목을 공부하며, 국어, 영어, 수학은 반드시 이 순서로 적어도 한 시간 이상 공부한다. 이와 같은 공부 시간표를 만드는 방법의 수는?

[3점]

- ① 10                      ② 15                      ③ 21  
 ④ 28                      ⑤ 36

10. 그림과 같이  $y$ 축 위의 점  $A$ 를 지나는 직선이 곡선  $y=8^x$ 와 만나는 점을  $B$ , 곡선  $y=2^x$ 와 만나는 점을  $C$ ,  $x$ 축과 만나는 점을  $D$ 라 하자.  $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$ 일 때, 직선  $AD$ 의 기울기는?

[3점]



- ① -7    ② -6    ③ -5    ④ -4    ⑤ -3

11. 자연수  $n$ 에 대하여  $x$ 에 대한 분수부등식  $1 + \frac{n}{x-n} \leq \frac{1}{x+2}$

을 만족시키는 정수  $x$ 의 개수를  $f(n)$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^{10} f(n)$ 의

값은? [3점]

- ① 65      ② 67      ③ 69      ④ 71      ⑤ 73

12. 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 2$ 이고,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 할 때,

$$a_{n+1} = 2S_n + 3^{n+1} - 1 \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항  $a_n$ 을 구하는 과정이다.

주어진 식에 의하여  $a_2 = 2S_1 + 3^2 - 1 = 12$ 이다.

$n \geq 2$ 인 자연수  $n$ 에 대하여  $a_n = 2S_{n-1} + 3^n - 1$

이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 2(S_n - S_{n-1}) + 2 \times 3^n \\ &= 2a_n + 2 \times 3^n \end{aligned}$$

이다. 그러므로

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \times 3^n$$

이다.

양변을  $\boxed{\text{(가)}}$ 로 나눈 뒤  $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ 이라 하면

$$b_{n+1} = b_n + \frac{2}{3} \quad (n \geq 2)$$

이고,  $b_2 = \frac{4}{3}$ 이므로

$$b_n = \boxed{\text{(나)}} \quad (n \geq 2)$$

이다. 따라서

$$a_n = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ \boxed{\text{(다)}} & (n \geq 2) \end{cases}$$

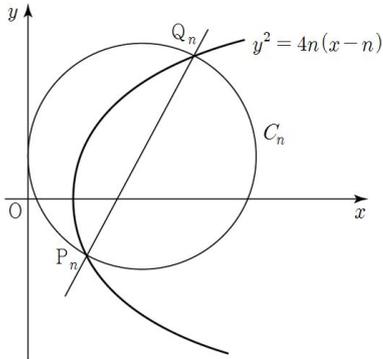
이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을  $f(n)$ ,  $g(n)$ ,  $h(n)$ 이라 할

때,  $g(9) + \frac{h(5)}{f(2)}$ 의 값은? [3점]

- ① 27      ② 30      ③ 33      ④ 36      ⑤ 39

[13~14] 자연수  $n$ 에 대하여 포물선  $y^2 = 4n(x-n)$ 의 초점  $F$ 를 지나고 기울기가  $m$ 인 직선이 포물선과 만나는 두 점  $P_n, Q_n$ 에 대하여 선분  $P_nQ_n$ 을 지름으로 하는 원은  $C_n$ 이다. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



13.  $m=1$ 일 때, 원  $C_n$ 의 중심의  $x$ 좌표를  $a_n$ 이라 하자.

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① 145
- ②  $\frac{365}{2}$
- ③ 220
- ④  $\frac{515}{2}$
- ⑤ 295

14.  $n=1$ 일 때, 원  $C_1$ 의 중심에서  $y$ 축에 내린 수선의 발을  $H$ 라 하자.  $m$ 의 값이 매초 25의 일정한 속력으로 움직일 때,  $m$ 의 값이  $\frac{4}{3}$ 이 되는 순간,  $\frac{\overline{P_1H}}{\overline{Q_1H}}$ 의 값의 시간(초)에 대한 변화율은? [4점]

- ①  $\frac{85}{16}$
- ②  $\frac{45}{8}$
- ③  $\frac{95}{16}$
- ④  $\frac{25}{4}$
- ⑤  $\frac{105}{16}$

15. 두 이차정사각행렬  $A, B$ 가

$$2AB + B^2 = E, \quad 4A^2 = B^2$$

를 만족시킬 때, <보기>중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?  
(단,  $E$ 는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ.  $AB = BA$   
 ㄴ.  $B$ 의 역행렬이 존재한다.  
 ㄷ.  $16A^4 = E$

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 이차함수  $y = f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $f(0) = 4, f(2) = 1$   
 (나)  $f(2-x) = f(2+x)$

무리방정식  $\sqrt{f(|x|)} = f(|x|) - k$ 의 실근의 개수를  $a_k$ 라 할 때,

$$\sum_{k=1}^5 a_k \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 9                      ② 10                      ③ 11                      ④ 12                      ⑤ 13

17. 함수  $f(x) = \log_2 x - [\log_2 x]$ 가 있다. 0보다 크고 100보다 작은 실수  $x$ 에 대하여 함수  $y = f(x)$ 의 그래프가 직선  $y = \log_2 \frac{3}{2}$ 과 만나는 점의  $x$ 좌표를 가장 큰 것부터 순서대로

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \text{ (단, } a_1 > a_2 > a_3 > \dots \text{)}$$

라 할 때,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 값은?

(단,  $[x]$ 는  $x$ 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

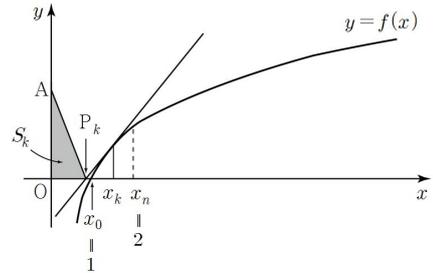
- ① 156      ② 168      ③ 180      ④ 192      ⑤ 204

18. 함수  $f(x) = 2\ln x$ 가 있다. 2이상인 자연수  $n$ 에 대하여 구간  $[1, 2]$ 를  $n$ 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 2$$

라 하자. 점  $A(0, 2)$ 에 대하여 함수  $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점  $(x_k, f(x_k))$ 에서의 접선이  $x$ 축과 만나는 점을  $P_k$ 라 할 때, 삼각형  $OAP_k$ 의 넓이를  $S_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )이라 하자.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값은? [4점]



- ①  $\frac{9}{4} - 2\ln 2$       ②  $2 - 2\ln 2$       ③  $\frac{7}{4} - 2\ln 2$   
 ④  $\frac{3}{2} - 2\ln 2$       ⑤  $\frac{5}{4} - 2\ln 2$

19. 실수  $a$ 에 대하여 쌍곡선  $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 과 직선

$l: ax - y + 1 = 0$ 에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

- ㄱ.  $a = -2$ 일 때, 쌍곡선  $C$ 와 직선  $l$ 은 한 점에서 만난다.  
 ㄴ.  $0 < a < \sqrt{3}$ 일 때, 쌍곡선  $C$ 와 직선  $l$ 은 서로 다른 두 점에서 만난다.  
 ㄷ. 쌍곡선  $C$ 와 직선  $l$ 의 교점의 개수를  $f(a)$ 라 할 때, 함수  $f(a)$ 가  $a = m$ 에서 불연속이 되는 모든  $m$ 의 값의 곱은 12이다.

- ① ㄱ                      ② ㄷ                      ③ ㄱ, ㄴ  
 ④ ㄴ, ㄷ                ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 자연수  $n$ 에 대하여 좌표평면에서 직선  $y = \frac{1}{n+1}x$ 와

이루는 각의 크기가  $\frac{\pi}{4}$ 인 두 직선  $y = ax$  ( $a > 0$ ),

$y = bx$  ( $b < 0$ )가 직선  $x = 2n$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점  $C(2n, 0)$ 에 대하여 삼각형 OAC의 넓이와 삼각형

OBC의 넓이를 각각  $S_n, T_n$ 이라 할 때,  $\sum_{n=1}^9 \log \frac{S_n}{T_n}$ 의 값은?

(단, O는 원점이다.) [4점]

- ①  $2\log 36$                 ②  $2\log 45$                 ③  $2\log 55$   
 ④  $2\log 66$                 ⑤  $2\log 78$

21. 함수  $f(x)=e^{-x^2}$ 와 일차함수  $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가)  $\frac{f(k+x)-g(k+x)}{f(k-x)-g(k-x)} < 0 \quad (x \neq 0)$

(나) 함수  $h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \leq k) \\ g(x) & (x > k) \end{cases}$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \infty$ 이다.

$g(-2k)$ 의 값은? (단,  $k$ 는 상수이다.) [4점]

- ①  $\frac{1}{\sqrt{e}}$     ②  $\frac{2}{\sqrt{e}}$     ③  $\frac{3}{\sqrt{e}}$     ④  $\frac{4}{\sqrt{e}}$     ⑤  $\frac{5}{\sqrt{e}}$

단답형

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{e^x - 1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 다항식  $(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+(x+1)^4+(x+1)^5$ 의 전개식에서  $x^2$ 의 계수를 구하시오. [3점]

24.  $f(0)=a$ 인 다항함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) + ax^2}{x+1} = 2$$

$$(나) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{\ln x} = 3$$

$f(3)$ 의 값을 구하시오. (단,  $a$ 는 상수이다.) [3점]

25. 두 함수  $f(x), g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 4}{h} = 6, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(h) - 4}{h} = 18$$

일 때,  $g'(0)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26.  $x$ 축에 대한 대칭이동을 나타내는 일차변환을  $f$ 라 하고,

원점을 중심으로  $\frac{\pi}{2}$ 만큼 회전하는 회전변환을  $g$ 라 하자. 직선

$x+y=6$  위의 점  $P$ 가  $f, g$ 에 의하여 각각 점  $Q, R$ 로 옮겨질 때, 세 점  $O, Q, R$ 이 한 직선위에 있다.  $\overline{QR}=l$ 이라 할 때,  $l^2$ 의 값을 구하시오. (단, 점  $O$ 는 원점이다.) [4점]

27. 실수 전체의 집합에서

$$\frac{f(-x)}{f(x)} = e^x$$

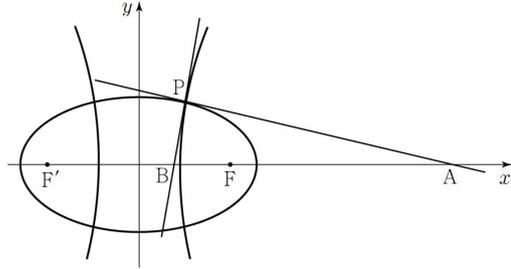
를 만족시키는 함수  $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \int_0^x e^t f(t+x) dt$$

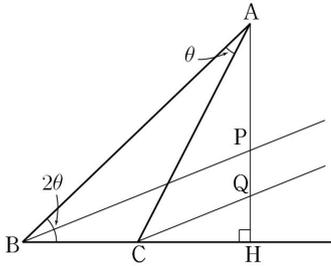
라 하자.  $F'(a) + F(a) = \frac{e^{-a}}{2}$ 를 만족시키는 실수  $a$ 에 대하여  $2f(-2a) - f(-a)$ 의 값은  $p$ 이다.  $100p$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이  $x$ 축 위의 두 점  $F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$ 을 초점으로 하고 장축의 길이가 6인 타원  $C_1$ 과 두 점  $F, F'$ 을 초점으로 하고 주축의 길이가 2인 쌍곡선  $C_2$ 의 교점이 점  $P$ 이다. 타원  $C_1$ 과 쌍곡선  $C_2$  위의 점  $P$ 에서의 접선이  $x$ 축과 만나는 점을 각각  $A, B$ 라 할 때,  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$ 의 값은  $p$ 이다.  $9p$ 의 값을 구하시오. (단, 점  $P$ 는 제 1사분면 위의 점이다.)

[4점]



29. 그림과 같이  $\angle ABC = 2\theta$ ,  $\angle BAC = \theta$ 인 삼각형 ABC가 있다. 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H에 대하여  $\angle ABC$ 를 이등분하는 직선이 선분 AH와 만나는 점을 P, 점 C를 지나고 선분 BP와 평행한 직선이 선분 AH와 만나는 점을 Q라 할 때,  $\lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\overline{AP}}{\overline{PQ}} = p$ 이다.  $15p$ 의 값을 구하시오. [4점]



30. 미분 가능한 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가)  $1 < f(x) < 2, f'(x) > 0$
- (나) 곡선  $y=f(x)$  위의 점  $(a, f(a))$ 에서의 접선이 두 직선  $y=1, y=2$ 와 만나는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 길이의 최솟값은  $t$ 이다.
- (다) 함수  $f(x)$ 의 역함수를  $g(x)$ 라 할 때,  $g'(x)$ 의 최솟값은  $h(t)$ 이다.

곡선  $y=h(x)$ 와  $x$ 축 및  $x=2$ 로 둘러싸인 부분을  $x$ 축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는  $V\pi$ 이다.  $60V$ 의 값을 구하시오. [4점]

- \* 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.