1. 답: 3번

$2A^2B = A^2 + AB$, $2AB^2 = AB + B^2$이므로 $A^2 = B^2$가 성립한다.

따라서 $A^3 = AB^2 = AB^2 = B^3$ 이다.

$2B^3 - B^2 = AB$, $2A^3 - A^2 = AB$... (1) 이고

$4B^3 - 2B^2 = A + B$, $A = 4B^3 - 2B^2 - B$ 이므로 $AB = BA$가 성립한다.

(1)에서 $2(A^3 - B^3) = (A^2 - B^2)$, $2(A-B)(A^2 + AB + B^2) = (A-B)(A+B)$

$(A-B)$의 역행렬이 존재한다면, $2A^2 + 2AB + 2B^2 = A + B = 2AB$이다.

$A^2 + B^2 = 0$이므로 $A^2 = 0$이다. 따라서 A^{-1}이 존재하지 않을 수 있다.

한편, 반례를 들어 A, B가 영행렬이라고 한다면 단위행렬의 실수배가 아니라는 조건을 위배하게 된다.

2. 답: 13

<u>삼각형ADE와 삼각형AEC의 넓이 비는 높이가 같으므로 밑변의 길이비와 같다.</u>

즉, $\triangle ABE : \triangle AEC = \frac{1}{2}\sin 2\theta \times 3 \times \overline{AE} : \frac{1}{2}\sin\theta \times 2 \times \overline{AE} = \overline{BE} : \overline{EC}$

$\overline{BE} : \overline{EC} = 3\sin 2\theta : 2\sin\theta$, $\overline{EC}$의 길이비를 이용하여 실제 길이를 구하자.

이는 코싸인 제2 법칙으로 $\overline{BC}$길이를 구하면 된다.

$(\overline{BC})^2 = 9 + 4 - 2 \times 6\cos 3\theta$, $\overline{EC} = \sqrt{13 - 12\cos 3\theta} \times \frac{2\sin\theta}{3\sin 2\theta + 2\sin\theta}$

마지막으로 $\angle ACE$를 구하면 된다. 이는 싸인 법칙으로 구하면 된다.

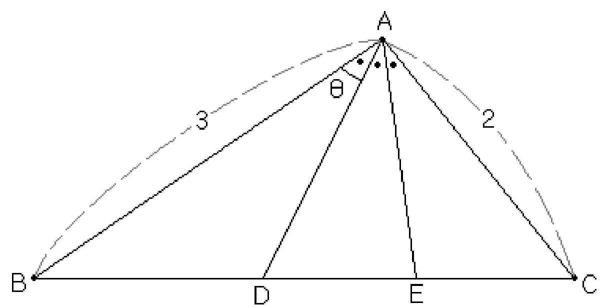
삼각형ABC에서, $\frac{3}{\sin(\angle ACB)} = \frac{\overline{BC}}{\sin 3\theta}$, $\sin(\angle ACB) = \frac{3\sin 3\theta}{\sqrt{13 - 12\cos 3\theta}}$

$S(\theta) = \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{EC} \times \sin(\angle ACE)$

$= \sqrt{13 - 12\cos 3\theta} \times \frac{2\sin\theta}{3\sin 2\theta + 2\sin\theta} \times \frac{3\sin 3\theta}{\sqrt{13 - 12\cos 3\theta}} = \frac{6\sin\theta\sin 3\theta}{3\sin 2\theta + 2\sin\theta}$

잠깐!! 이게 무슨 뻘짓?!? $\overline{BE} : \overline{EC} = 3\sin 2\theta : 2\sin\theta$에서 게임은 끝났다!

$\triangle ABC \times \frac{\triangle AEC}{\triangle ABE + \triangle AEC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin 3\theta \times \frac{2\sin\theta}{3\sin 2\theta + 2\sin\theta} = \frac{2 \times 9}{6 + 2} = \frac{9}{4}$



3. 답: 5번

$x=2$에서 극솟값을 갖는 이차함수 $f(x)=m(x-2)^2+n$ 이다.

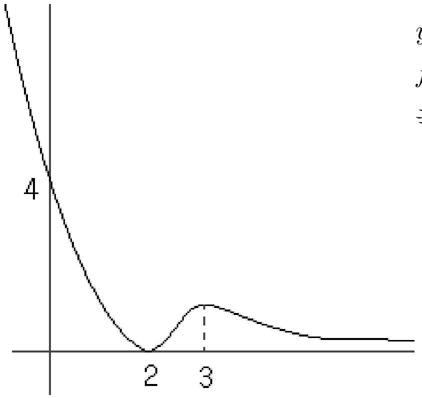
$f(0)=4m+n=4$, $g'(x)=\{2m(x-2)+am(x-2)^2+n\}e^{ax}$ 이다,

$g'(2)=n=0$이므로 $g'(x)=m(x-2)(ax-2a+2)e^{ax}$

$g'(3)=0$이므로 $\dfrac{2\alpha-2}{\alpha}=3$, $3\alpha=2\alpha-2$, $\alpha=-2$

한편 $4m=4$이므로 $m=1$

$g(x)=(x-2)^2e^{-2x}$, $g'(x)=-(x-2)(x-3)e^{-2x}$



$y=g(x)$의 개형을 그리면 왼쪽과 같다.

$f(\alpha)=f(-2)=16$ 이므로 (ㄴ)이참

극댓값: $g(3)=e^{-6}$ 이므로 (ㄷ)이 참

4. 답: 101

상황에서 길이는 다음과 같다.

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 할 때,

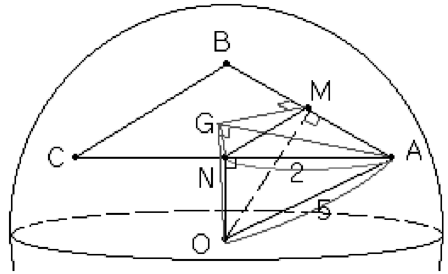
O에서 ABC에 내린 수선의 발이 G이다.

또 삼수선 정리에 의해 $\overline{ON}$ $\overline{AC}$이므로

$\overline{ON}=\sqrt{21}$ 이와 같이, $\overline{OM}=\sqrt{21}$

한편 삼각형 AMN은 정삼각형이므로

$\overline{MN}=2$이다.

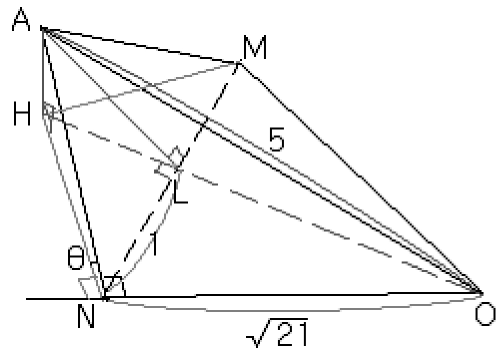


삼각뿔 $A-OMN$에을 관찰해 보자.

(구하고자하는 이면각을 보는데 삼각뿔 $O-AMN$은 불편하다.)

$\overline{MN}$의 중점을 L이라 한다. $\overline{LN}=1$

A에서 평면OMN에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼수선의 정리에 따라 $\overline{NH}\perp\overline{ON}$이므로 구하고자하는 이면각 $\theta=\angle ANH$.



$\cos\theta=\dfrac{\overline{NH}}{\overline{AN}}=\dfrac{\overline{NH}}{2}$,

$\overline{NH}=\dfrac{\overline{LN}}{\cos(\angle LNH)}=\dfrac{1}{\cos(\angle LON)}$

$\sin(\angle LON)=\dfrac{1}{\sqrt{21}}$, $\cos(\angle LON)=\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{21}}$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{20}}=\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{80}}$