2024학년도 수능완성출제분석서(수.완.출)
- 수학 I -

by. 17학번머스크(OrbiID)

"이걸 활용한 넌 잘 될거야"

- 대상

수학 2-3등급 이상

- 배경과 목표

'풀 것도 많은데, EBS를 다 풀어야해?' '선별해준것만 풀어도 되려나? 찝찝한데?'

그래서 왜 선별했는지 그리고 어떻게 출제될 수 있는지까지
선별하였습니다. 또한, 6월부터 수학 또한 심심찮게 ebs에서 출제된 요소들과 표현들이 자주나오다보니
수능특강에 비해서 난이도가 비교적 높은 수능완성에서 더더욱 좋은 POINT들을 연구하여 문제 몇 놈이
출제될 수 있다고 판단하였습니다.

- 활용방안

좌측에는 문제들이 오른쪽에는 출제분석이 적혀있습니다.
문제푸는 속도가 정말 빠르신 분들은 그냥 수능완성 사서 다 풀고 이 칼럼을 읽어주면 좋고,
할 것이 산더미이신 분들은 해당 1) 문제를 풀어버리고, 2) 한번 더 출제 분석을 정독
하시면 도움이 될 것 같습니다. !

- 이상 예상 질문들

Q. 선별의 기준은?

A. 어디서든 볼 수 있는 문제들과 본인이 2등급 이상이고 정상적인 루틴 (개념서,기출서,인강교재 등을 '적당히' 풀어오며살았음)
으로 살아왔다면, 지금 당장 급하게 풀지 않아도 되는 것들은 제외하였습니다.

Q. EBS 선별을 너(17머스크)가 왜 해?

A. 본인은 문제 판매 타율이 좋은 편이고, 유명한 강사분들 밑에서 조교로 일하였기에(비밀조항) 오르비에서 많은 고수들이 계시지만,
현 수험생들에게 도움이 될 만한 자료를 일단 만들어 보고 싶었고, EBS를 단순 선별 이상으로 활용할 수 있겠다고 판단하여
자료를 만들어본것이고 무료로 배포하고자하니, 양해바랍니당

Q. 기하는?

A. 안(못)해요

수능완성

수학Ⅰ. 1. 지수함수와 로그함수

[7page 7번]

1. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=x\sqrt{x}$에 대하여 $f(f(n))$의 값이 1보다 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. 1)

[9page 14번]

2. 두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선이 직선 $y=-2x+1$과 수직일 때, 양수 a의 값은?

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

2)

[9page 15번]

3. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\left\{\log_a b,\ \frac{1}{\log_9 27},\ \frac{1}{3}\log_b b^5\right\}$$

$$B=\{2,\ \log_a a^{\frac{2}{3}},\ \log_2 a+\log_2 b\}$$

라 하자. $A=B$일 때, $\log_a 2+\log_b 2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 3)

[10page 18번]

4. 두 함수 $f(x)=2^{x+2}$, $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

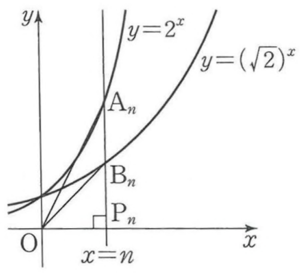
ㄱ. 함수 $y=f(|x|)$의 치역은 $\{y|y\geq 4\}$이다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\leq 2$이다.
ㄷ. 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만날 때, 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프의 점근선은 직선 $y=3$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4)

[11page 20번]

5. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=2^x$, $y=(\sqrt{2})^x$과 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 x축과 만나는 점을 P_n이라 하자. 원점 O에 대하여 두 직각삼각형 OP_nA_n, OP_nB_n의 넓이를 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, 부등식 $f(n)-4\times g(n)\geq 16n$을 만족시키는 n의 최솟값은?



① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

5)

[12page 22번]

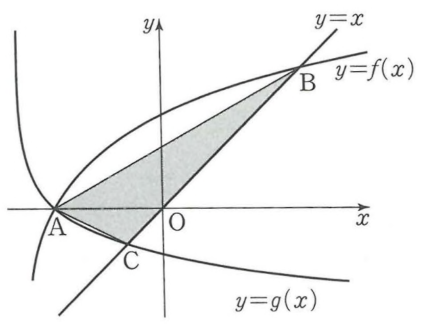
6. 점근선이 $x=-3$인 곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 두 점 $(0, 2)$, $(2, k)$를 지날 때, k의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-1+\log_3 5$ ② $\log_3 5$ ③ $1+\log_3 5$
④ $2+\log_3 5$ ⑤ $3+\log_3 5$

6)

[12page 24번]

7. $a>1$인 실수 a와 상수 m에 대하여 그림과 같이 함수 $f(x)=\log_a(x-m)$의 그래프와 함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축 위의 점 A에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x$와 제1사분면에서 만나는 점을 B, 곡선 $y=g(x)$가 직선 $y=x$와 만나는 점을 C라 하자. 점 C의 좌표가 $(-1,\ -1)$이고 삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, $a=2^{\frac{q}{p}}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 7)



[13page 26번]

8. 부등식 $\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}<6$을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은?

① 80 ② 81 ③ 82
④ 83 ⑤ 84

8)

[14page 28번]

9. 함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수가 $g(x)=\log_2(x-2)+1$이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 함수의 그래프의 점근선은 직선 $x=5$이다. 두 상수 a, m에 대하여 $a+m$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9)

[14page 29번]

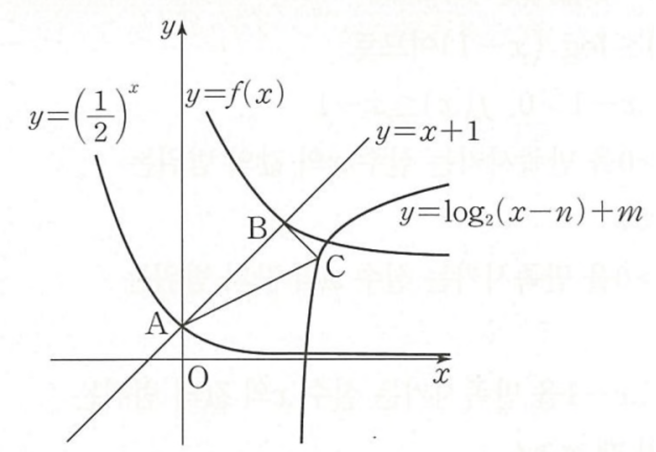
10. 곡선 $y=\log_2(x-1)-1$과 기울기가 -1인 직선 l이 점 $(5,\ 1)$에서 만난다. 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 점 $(a,\ b)$에서 만날 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 2 ② $\dfrac{8}{3}$ ③ $\dfrac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\dfrac{14}{3}$

10)

[14page 30번]

11. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프가 y축과 만나는 점 A는 이 평행이동에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x+1$의 교점 B로 이동된다. 또 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선과 함수 $y=\log_2(x-n)+m$의 그래프의 교점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 6일 때 $f(2)$의 값을 구하시오. (단, m, n은 양의 실수이다.



11)

[15page 33번]

12. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(9x-9) & (1<x<4)\\ (\sqrt{3})^{6-x} & (x\ge 4)\end{cases}$$

라 하자. $t \le x \le t+2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 3이 되도록 하는 모든 자연수 t의 개수를 a, $s \le x \le s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 1이 되도록 하는 모든 실수 s의 값의 곱을 b라 할 때, $a+3b$의 값을 구하시오. (단, $t>1$, $s>1$) 12)

[120page 18번]

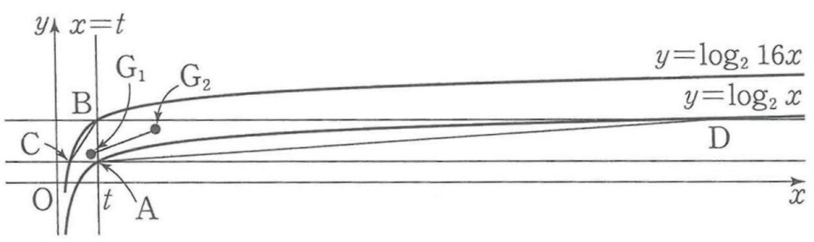
13. 두 양수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(가) $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$
(나) $\log_2 a\times log_2 b=\log_3 16\times log_2 9$

13)

[130page 13번]

14. 그림과 같이 직선 $x=t$ $(t>0)$과 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_2 16x$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 16x$와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 할 때, 두 삼각형 ABC, ADB의 무게중심을 각각 G_1, G_2라 하자. 직선 G_1G_2의 기울기가 $\frac{16}{255}$일 때, 삼각형 ADB의 넓이는?



① 60 ② 75 ③ 90
④ 105 ⑤ 120

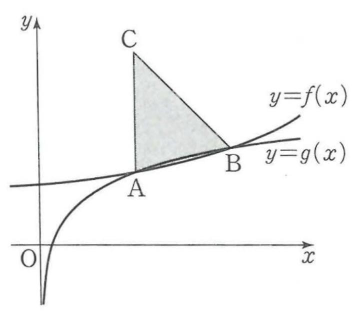
14)

[141page 11번]

15. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=a^x+4$, $g(x)=\frac{1}{4}\log_a x$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 점 중에서 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B라 하자. 점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C라 할 때, 점 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OC의 기울기는 2이다.
(나) 직선 AC는 y축과 평행하다.

삼각형 ABC의 넓이는?
(단, a는 1보다 큰 상수이고, O는 원점이다.)



① 28 ② 32 ③ 36
④ 40 ⑤ 44

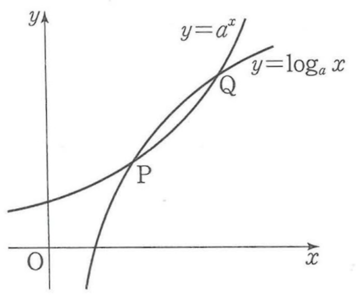
15)

[152page 9번]

16. 그림과 같이 $a>1$인 상수 a에 대하여 두 곡선

$y=a^x$, $y=\log_a x$

가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만난다. $\overline{OP}=\overline{PQ}$일 때, a의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 점 Q의 x좌표보다 작고, O는 원점이다.)

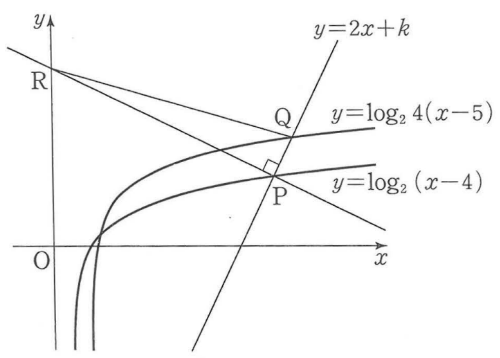


① $\sqrt[8]{2}$ ② $\sqrt[8]{3}$ ③ $\sqrt[4]{2}$
④ $\sqrt[4]{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

16)

[166page 13번]

17. 그림과 같이 직선 $y=2x+k$가 두 함수 $y=\log_2(x-4)$, $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프와 제1사분면에서 각각 한 점에서 만나며 그 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 R라 할 때, 삼각형 PQR의 넓이가 15이다. 상수 k의 값은? $\left(\text{단, } k<-\frac{21}{2}\right)$



① -21 ② -22 ③ -23 ④ -24 ⑤ -25

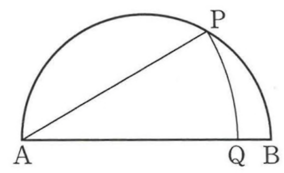
17)

수능완성

수학Ⅰ. 2. 삼각함수

[18page 2번]

18. 그림과 같이 길이가 6인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있다. 선분 AB 위에 점 Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고 부채꼴 APQ의 호 PQ를 그린다. 호 BP의 길이가 π일 때, 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는?



① $\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{12}\pi$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{24}\pi$
④ $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{24}\pi$

18)

[19page 6번]

19. 좌표평면에서 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$ 위의 점 P에 대하여 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이다. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\theta\times\cos\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $-\frac{7}{10}$ ⑤ $-\frac{4}{5}$

19)

[19page 7번]

20. 좌표평면에 점 A(6, 0)과 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점 P가 있다. 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, 점 P와 θ가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 선분 AP를 포함하는 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이는 4π이다.
(나) $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$

$\cos\theta+\tan^2\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.)

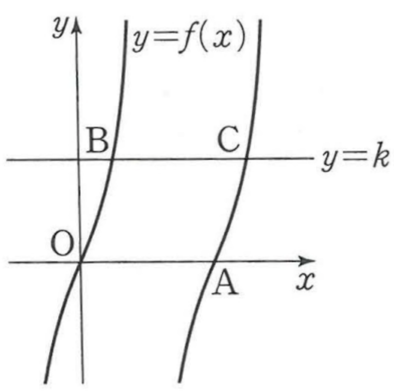
① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

20)

[20page 9번]

21. 두 양수 a, b에 대하여 주기가 2인 함수 $f(x)=a\tan bx$가 있다. $0<x<3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점을 A, $0<x<3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k$ $(k>0)$과 만나는 두 점을 각각 B, C, 동경 OB가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. $\tan\theta=3$, $\angle\mathrm{BAO}=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $f\left(\dfrac{k}{3}\right)+\overline{\mathrm{OC}}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, $\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이다.)

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



21)

[21page 12번]

22. $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여

$$\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$$

일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 0

④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

22)

[21page 15번]

23. 자연수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}\log_4(x-3),\ g(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선과 함수 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.
(나) $g\left(\frac{2}{3}\right)>1$

정의역이 $\left\{x \,\middle|\, \frac{13}{4}\le x\le 19\right\}$인 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $12(M-m)^2$의 값을 구하시오.

23)

[23page 16번]

24. $0 \le x < 2\pi$에서 부등식

$$(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$$

의 해가

$$\alpha < x < \beta \text{ 또는 } \gamma < x < \delta$$

일 때, $\sin(\delta - \beta) + \cos(\gamma - \alpha)$의 값은? (단, $\alpha < \beta < \gamma < \delta$)

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

24)

[23page 19번]

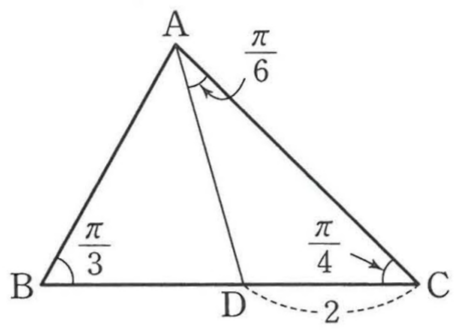
25. 정의역이 $\{x | x \ge 0\}$인 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여 다음을 만족시킨다.

$2n-2 \le x < 2n$일 때, $f(x) = \sin(n\pi x)$이다.

$0 \le x < 8$에서 방정식 $2f(x) - 1 = 0$의 서로 다른 실근 중 가장 작은 값을 α, 가장 큰 값을 β라 할 때, $\frac{4\beta}{\alpha}$의 값을 구하시오. 25)

[24page 21번]

26. 그림과 같이 $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{3}$, $\angle \mathrm{ACB}=\frac{\pi}{4}$이고 $\overline{\mathrm{BC}}>2$인 삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{\mathrm{CD}}=2$이고 $\angle \mathrm{CAD}=\frac{\pi}{6}$일 때, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는?



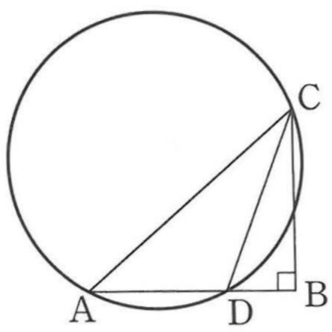
① $\frac{\sqrt{22}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{26}}{3}$

④ $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{30}}{3}$

26)

[24page 22번]

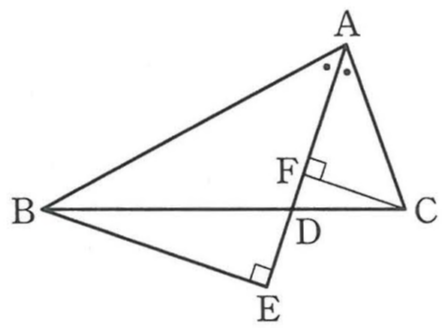
27. 그림과 같이 $\angle \mathrm{ABC}=90^\circ$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



27)

[25page 23번]

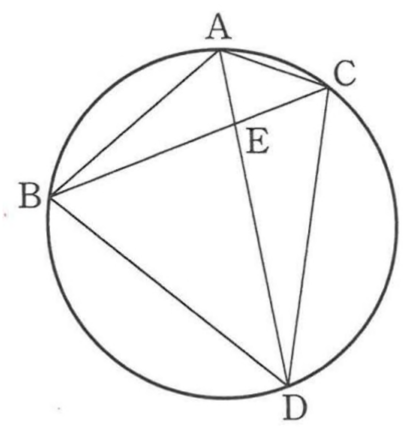
28. 그림과 같이 $\overline{AB}=4\sqrt{2}$, $\overline{AC}=2\sqrt{2}$인 예각삼각형 ABC가 있다. ∠A의 이등분선과 변 BC가 만나는 점을 D, 점 B에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 F라 하자. $\cos(\angle ABC)=\frac{5\sqrt{2}}{8}$일 때, $\overline{AF}\times\overline{AE}$의 값을 구하시오. (단, $\overline{AB}<\overline{BC}$)



28)

[116page 10번]

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle BAC=\frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC가 있다. ∠BAC를 이등분하는 직선과 점 A를 포함하지 않는 호 BC가 만나는 점을 D, 선분 AD와 선분 BC가 만나는 점을 E라 하자. $\sin(\angle BDA)=\frac{\sqrt{21}}{7}$일 때, $\overline{BE}^2+\overline{CE}^2$의 값은?

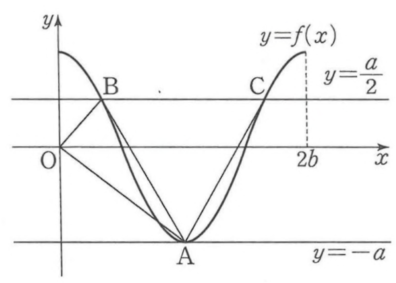


① $\frac{35}{3}$ ② $\frac{38}{3}$ ③ $\frac{41}{3}$ ④ $\frac{44}{3}$ ⑤ $\frac{47}{3}$

29)

[117page 12번]

30. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 닫힌구간 $[0, 2b]$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos\dfrac{\pi x}{b}$가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-a$가 만나는 점을 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\dfrac{a}{2}$가 만나 는 두 점을 각각 B, C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$일 때, 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은? (단, O는 원점이고, $\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이다.)



① $-\dfrac{2}{3}$　② $-\dfrac{13}{18}$　③ $-\dfrac{7}{9}$　④ $-\dfrac{5}{6}$　⑤ $-\dfrac{8}{9}$

30)

[9page 14번] 〈중복〉

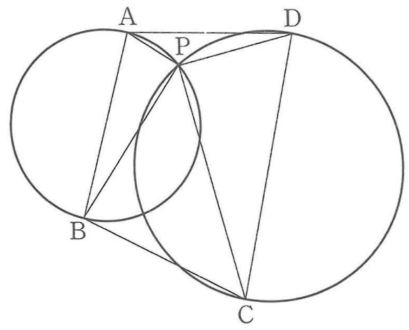
31. ~~두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선이 직선 $y=-2x+1$과 수직일 때, 양수 a의 값은?~~

~~① 18　② 21　③ 24　④ 27　⑤ 30~~

~~31)~~

[131page 15번]

32. 그림과 같이 길이가 $\sqrt{10}$인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 길이가 $2\sqrt{5}$인 선분 CD를 지름으로 하는 원이 서로 다른 두 점에서 만나고 선분 AB와 선분 CD가 서로 만나지 않을 때, 두 원이 만나는 점 중 점 A에 가까운 점을 P라 하자. $\overline{\mathrm{PA}}=1$, $\overline{\mathrm{PC}}=4$이고, 삼각형 APD의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, 선분 BC의 길이는? (단, $\angle\mathrm{APD}>\angle\mathrm{BPC}$)



① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $\sqrt{10}$
④ $\sqrt{11}$ ⑤ $2\sqrt{3}$

32)

[145page 21번]

33. $0<a<\frac{\pi}{2}$인 상수 a에 대하여 $a\le x\le 4a$에서 방정식 $\sin x=k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐일 때, 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 두 자연수 m, n $(m<n)$의 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수를 구하시오.

닫힌구간 $[ma,\ na]$에서 함수 $y=\sin x$의 최댓값과 최솟값의 합은 0이다.

33)

[155page 15번]

34. $0 < t < 2\pi$, $t \neq \frac{\pi}{2}$, $t \neq \pi$, $t \neq \frac{3}{2}\pi$인 실수 t에 대하여

$0 < x < 2\pi$에서 x에 대한 방정식

$(\sin x - |\sin t|)(|\sin x| - \sin t) = 0$

의 실근 중 가장 작은 값을 $f(t)$, 가장 큰 값을 $g(t)$, 서로 다른 모든 실근의 합을 $h(t)$라 하자. t에 대한 방정식 $g(t) - f(t) = kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위가 $\alpha < k < \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은?

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

34)

수능완성

수학Ⅰ. 3. 수열

[28page 2번]

35. 첫째항이 45이고 공차가 -7인 등차수열 $\{a_n\}$과 첫째항과 공차가 같고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{b_n\}$에 대하여 수열 $\{c_n\}$을 $c_n = a_n + b_n$이라 하자. $c_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10일 때, b_1의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

35)

[28page 3번]

36. 3으로 나눈 나머지가 1인 모든 자연수를 작은 것부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{a_n\}$, 4로 나눈 나머지가 2인 모든 자연수를 작은 것부터 크기순으로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. $a_k = b_m$을 만족시키는 20 이하의 두 자연수 k, m에 대하여 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. 36)

[29page 4번]

37. 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_5의 값은?

① 118 ② 119 ③ 120
④ 121 ⑤ 122

37)

[29page 7번]

38. 두 함수 $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = -x-1$이 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=g(x-2n)$의 그래프가 만나는 점 중 y좌표가 0이 아닌 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 두 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n < b_n)$이라 하자. 수열 $\{c_n\}$을 $c_n = a_n + b_n$이라 하고 수열 $\{c_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_n > 100$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오. 38)

[30page 10번]

39. 첫째항이 자연수이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\frac{1}{2},\ a_{10}\le 40$$

을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

39)

[31ge 12]

40. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$\frac{a_1a_4}{a_3}=2,\ a_2+a_6=10$$

을 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\dfrac{a_{2n}}{2a_{n+1}}$이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제8항까지의 합은?

① $\frac{7}{2}(\sqrt{2}+1)$ ② $\frac{11}{2}(\sqrt{2}+1)$

③ $\frac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$ ④ $\frac{19}{2}(\sqrt{2}+1)$

⑤ $\frac{23}{2}(\sqrt{2}+1)$

40)

[32page 15번]

41. 0이 아닌 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킬 때, ab의 값은?

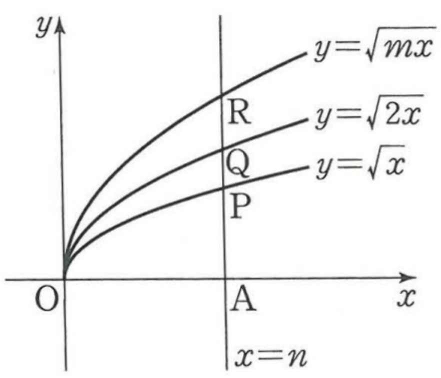
(가) 세 수 a, $a+b$, ab는 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
(나) 세 수 a^2, ab, $2b$는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

41)

[32page 16번]

42. $m>2$, $n>0$인 두 상수 m, n에 대하여 그림과 같이 세 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{2x}$, $y=\sqrt{mx}$의 그래프와 직선 $x=n$이 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. 점 A$(n, 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}$, $\overline{\mathrm{QA}}$, $\overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루고, $\overline{\mathrm{OP}}^2$, $\overline{\mathrm{OQ}}^2+4$, $\overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $m+n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

42)

[33page 19번]

43. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 3인 등차수열이다.
> (나) 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 4인 등차수열이다.

$a_{11} = a_{12}$일 때, a_7의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

43)

[34page 21번]

44. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1} - (k+1)a_k\} = 70$$

이고 $a_{11} = 15$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k(a_k+6) - \sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

44)

[35page 25번]

45. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$nx^2-(n^2-12n)x-8=0$$

의 두 근의 합을 a_n, 두 근의 곱을 b_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

45)

[36page 28번]

46. 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}=p$$

일 때, $\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)$의 값은? (단, $a_1\neq 0$)

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

46)

[38page 35번]

47. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 6a_n & (a_n\text{이 홀수}) \\ \frac{1}{2}a_n+1 & (a_n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_3=4$이고 $a_2>a_1$일 때, $a_k<a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[118page 13번]

48. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=2$, $a_na_{n+1}=(-1)^n$
(나) $a_n+b_n=n$

$\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})$의 값은?

① 200 ② 210 ③ 220
④ 230 ⑤ 240

48)

[119page 15번]

49. 첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 각 항을 원소로 갖는 집합을 A라 하고, 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{b_n\}$의 각 항을 원소로 갖는 집합을 B라 하자. 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열한 것을 c_1, c_2, c_3, $\cdots$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} c_k > 140$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

49)

[133page 21번]

50. 0이 아닌 두 정수 p, q에 대하여 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_1 = 40$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - p & (a_n \geq 0) \\ a_n + pq & (a_n < 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{21} = a_1$이 되도록 하는 두 정수 p, q의 순서쌍 (p, q)에 대하여 $p+q$의 최솟값을 구하시오. 50)

[140page 9번]

51. 수열 $\{a_n\}$은 $a_3 = \frac{1}{6}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{1}{4-8a_n}$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{25} a_n$의 값은?

① $\frac{31}{4}$ ② 8 ③ $\frac{33}{4}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

51)

[143page 15번]

52. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 두 집합

$A = \{n \mid a_n a_{n+5} \le 0,\ n\text{은 자연수}\}$,
$B = \{n \mid S_n S_{n+5} \le 0,\ n\text{은 자연수}\}$

가

$$n(A \cap B) = 3,\ A - B \ne \varnothing$$

을 만족시킨다. $S_m = a_m$을 만족시키는 짝수인 자연수 m이 존재할 때, $\frac{a_{m+10}}{a_m}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

52)

[157page 21번]

53. 첫째항이 $\frac{4}{3}$이고, 공차가 $\frac{1}{3}$인 등차수열 $\{a_n\}$과 6 이상의 자연수 m에 대하여 두 집합 A_m, B_m을

$$A_m = \{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{2m}\},$$

$$B_m = \{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{3m}\}$$

이라 하자. 집합 $A_m \cap B_m$의 모든 원소 중 가장 큰 원소를 b_m이라 할 때, $\sum_{m=6}^{20} b_m$의 값을 구하시오. 53)

[169page 21번]

54. 집합 $A=\{0, 1\}$과 자연수 n에 대하여 집합 S_n을

$$S_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} (-2)^{k-1} a_k \,\middle|\, a_k \in A \right\}$$

라 하자. 예를 들어 $S_1 = \{0, 1\}$, $S_2 = \{-2,\ -1, 0, 1\}$이다.
집합 S_3의 원소의 개수를 p, 5453이 집합 S_n의 원소가 되는 n의 최솟값을 q라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. 54)

이하 해설

1) [정답] 16

[해설]

$f(x)=x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$이므로 $f(f(n))=\left(n^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}=n^{\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}}=n^{\frac{9}{4}}$

$n^{\frac{9}{4}}$의 값이 1보다 큰 자연수가 되려면 n은 1보다 큰 자연수 k에 대하여 $n=k^4$의 꼴이어야 한다. 즉, 자연수 n의 최솟값은 1보다 큰 자연수의 네제곱의 꼴로 표현되는 자연수 중 가장 작은 값이므로

$2^4=16$

2) [정답] ④

[해설]

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{\log_9 a^2-\log_9 a}{\log_3 54-\log_3 2}=\frac{\log_9 a}{\log_3 27}=\frac{\log_9 a}{3}=\frac{1}{2}$에서

$\log_9 a=\frac{3}{2}$이므로

$a=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{2\times\frac{3}{2}}=3^3=27$

3) [정답] 37

[해설]

$\frac{1}{\log_9 27}=\frac{1}{\log_{3^2}3^3}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}$

$\frac{1}{3}\log_b b^5=\frac{5}{3}\log_b b=\frac{5}{3}$

$\log_a a^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\log_a a=\frac{2}{3}$이므로

$A=\left\{\log_a b,\ \frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right\}$, $B=\left\{2,\ \frac{2}{3},\ \log_2 a+\log_2 b\right\}$

$A=B$이기 위해서는 $\log_a b=2$, $\log_2 a+\log_2 b=\frac{5}{3}$이어야 한다.

$\log_a b=2$에서 $\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=2$이므로

$\log_2 b=2\log_2 a$ …… ㉠

$\log_2 a+\log_2 b=\frac{5}{3}$에 ㉠을 대입하면 $\log_2 a=\frac{5}{9}$

㉠에서 $\log_2 b=\frac{10}{9}$

이때 $\log_a 2+\log_b 2=\frac{1}{\log_2 a}+\frac{1}{\log_2 b}=\frac{9}{5}+\frac{9}{10}=\frac{27}{10}$

따라서 $p=10$, $q=27$이므로

$p+q=10+27=37$

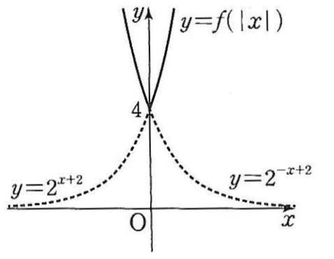
4) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로 $f(|x|)=f(x)=2^{x+2}$이고

$x<0$일 때, $|x|=-x$이므로 $f(|x|)=f(-x)=2^{-x+2}$이다.

따라서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y|y\geq 4\}$이다. (참)

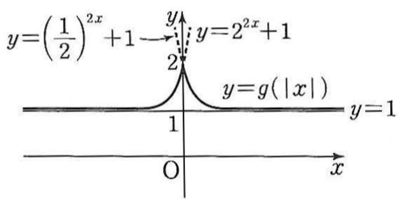
ㄴ. (ⅰ) $x\geq 0$일 때, $|x|=x$이므로

$$g(|x|)=g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}+1$$

(ⅱ) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$$g(|x|)=g(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}+1=2^{2x}+1$$

$g(0)=2$이므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 함수 $y=g(|x|)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=g(|x|)$의 최댓값은 2이므로 모든 실수 x에 대하여 $g(|x|)\leq 2$이다. (참)

ㄷ. ㄱ에서 함수 $y=f(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 4)$이고, ㄴ에서 함수 $y=g(|x|)$의 그래프가 y축과 만나는 점은 점 $(0, 2)$이므로 $g(0)=2$

이때 두 함수 $y=f(|x|)$, $y=g(|x|)+k$의 그래프가 y축 위의 점에서 만나므로 함수 $y=g(|x|)+k$의 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나야 한다.

따라서 $4=g(0)+k$에서 $k=4-g(0)$이므로 $k=2$이다.

함수 $y=g(|x|)$의 그래프의 점근선은 직선 $y=1$이고 함수 $y=g(|x|)+2$의 그래프는 함수 $y=g(|x|)$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은 직선 $y=3$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) [정답] ④

[해설]

곡선 $y=2^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 A_n의 좌표는 $(n, 2^n)$

곡선 $y=(\sqrt{2})^x$과 직선 $x=n$이 만나는 점 B_n의 좌표는 $\left(n, 2^{\frac{n}{2}}\right)$

$$f(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{A_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times 2^n=\frac{n}{2}\times 2^n$$

$$g(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OP_n}\times\overline{B_nP_n}=\frac{1}{2}\times n\times 2^{\frac{n}{2}}=\frac{n}{2}\times 2^{\frac{n}{2}}$$

부등식 $f(n)-4\times g(n)\geq 16n$에서

$$\frac{n}{2}\times 2^n-4\times\frac{n}{2}\times 2^{\frac{n}{2}}\geq 16n,\ 2^n-4\times 2^{\frac{n}{2}}\geq 32$$

$2^{\frac{n}{2}}=t$라 하면 $t>0$이고 $t^2-4t-32\geq 0$

$(t+4)(t-8)\geq 0$이므로 $t\geq 8$

즉, $2^{\frac{n}{2}}\geq 8=2^3$이므로 $\frac{n}{2}\geq 3$, $n\geq 6$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

6) [정답] ③

[해설]

곡선 $y=\log_3(ax+b)$가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $2=\log_3 b$에서 $b=9$

곡선 $y=\log_3(ax+9)$의 점근선이 직선 $x=-\dfrac{9}{a}$이므로

$-\dfrac{9}{a}=-3$에서 $a=3$

따라서 주어진 곡선은 $y=\log_3(3x+9)$이고 이 곡선이 점 $(2, k)$를 지나므로

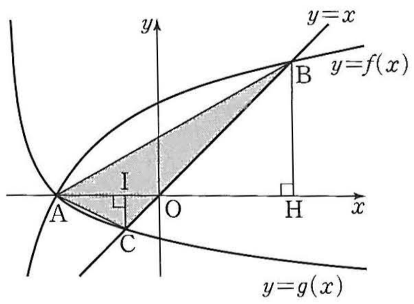
$k=\log_3(3\times2+9)=\log_3 15=\log_3(3\times5)=1+\log_3 5$

7) [정답] 7

[해설]

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3, 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3, 0)$을 지난다. 즉,

$0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 B의 좌표를 (k, k) $(k>0)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 $\mathrm{C}(-1, -1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{\mathrm{CI}}=1$이고 $\overline{\mathrm{BH}}=k$한편, 삼각형 ABC의 넓이는 원점 O에 대하여 두 삼각형 OAC와 OAB의 넓이의 합이므로

$$(\text{삼각형 ABC의 넓이})=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{CI}}+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{BH}}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times k=\frac{3}{2}(1+k)$$

즉, $\dfrac{3}{2}(1+k)=\dfrac{15}{2}$에서 $k=4$

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

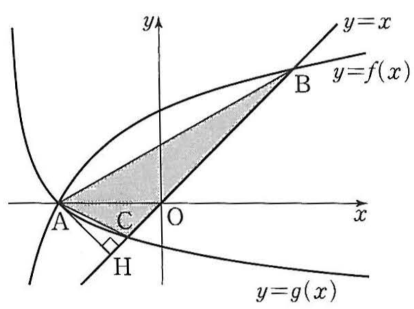
$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

[다른 풀이]

함수 $g(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x+4)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(-3, 0)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-3, 0)$을 지난다.

즉, $0=\log_a(-3-m)$에서 $m=-4$이므로 $f(x)=\log_a(x+4)$



한편, 점 $\mathrm{A}(-3, 0)$에서 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{|-3-|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

또한 점 B의 좌표를 (k, k)라 하면 $k>0$이고 $\mathrm{C}(-1, -1)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{2(k+1)^2}=\sqrt{2}(k+1)$

삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(k+1)\times\dfrac{3\sqrt{2}}{2}=\dfrac{15}{2}$에서 $k=4$

점 B$(4,\ 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $4=\log_a(4+4)$에서 $a^4=8$

$a>1$이므로 $a=2^{\frac{3}{4}}$

따라서 $p=4,\ q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

8) [정답] ①

[해설]

$$\log_3\frac{x}{3}\times\log_3\frac{x}{9}=(\log_3x-\log_3 3)(\log_3x-\log_3 9)$$
$$=(\log_3x-1)(\log_3x-2)$$

$\log_3x=t$라 하면

$(t-1)(t-2)<6$에서 $t^2-3t-4<0$

$(t+1)(t-4)<0$이므로 $-1<t<4$

즉, $-1<\log_3x<4,\ \frac{1}{3}<x<81$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최댓값은 80이다.

9) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수는 $y=2^{x-1}+a$에서 x와 y를 바꾸면 $x=2^{-1}+a$이고

$y=\log_2(x-a)+1$이므로 $a=2$

한편, 함수 $g(x)=\log_2(x-2)+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 $g(x-m)=\log_2(x-m-2)+1$이고, 이 함수의 그래프의 점근선은 $x=m+2$이므로 $m+2=5$에서 $m=3$

따라서 $a+m=2+3=5$

10) [정답] ①

[해설]

곡선 $y=\log_2(x-1)-1$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 곡선 $y=\log_2x$가 되고, 점 $(5,\ 1)$을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 $(4,\ 2)$가 되며 이 점은 직선 l 위의 점이다.

곡선 $y=\log_2x$와 곡선 $y=2^x$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 직선 l과 곡선 $y=2^x$이 만나는 점의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.

따라서 $a=2,\ b=4$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{4}{2}=2$

11) [정답] 22

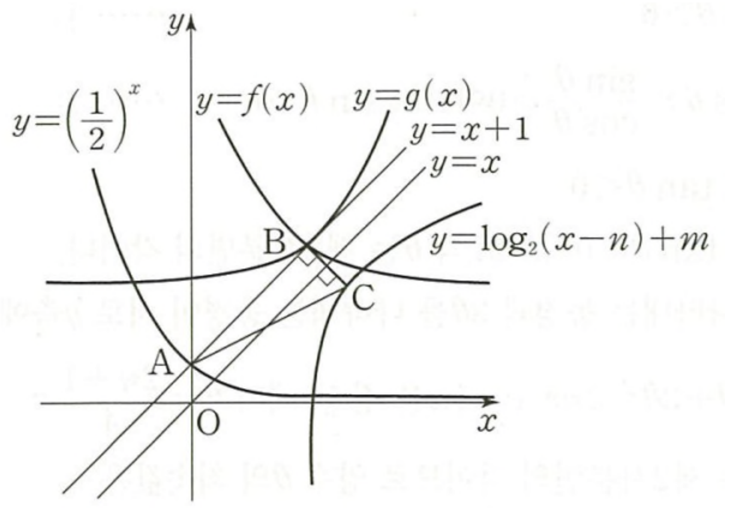
[해설]

점 A의 좌표는 $(0,\ 1)$이므로 점 B의 좌표는 $(m,\ 1+n)$이다.

점 B는 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로 $1+n=m+1$에서 $m=n$이다.

함수 $y=2^x$의 그래프도 y축과 점 A에서 만나므로 $g(x)=2^{x-m}+n$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프도 점 B$(m,\ 1+n)$을 지난다.

또한 함수 $y=g(x)$의 역함수가 $y=\log_2(x-n)+m$이고 기울기가 -1인 직선이 두 함수 $y=g(x),\ y=\log_2(x-n)+m$의 그래프와 만나는 점이 각각 B, C이므로 두 점 B, C는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



즉, 두 점 B, C의 좌표는 각각 $(m,\ m+1)$, $(m+1,\ m)$이므로

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

두 직선 AB, BC의 기울기의 곱은 -1이므로 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{B}=90°$이다.

$m>0$이고 삼각형 ABC의 넓이가 6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}m\times\sqrt{2}=m=6$

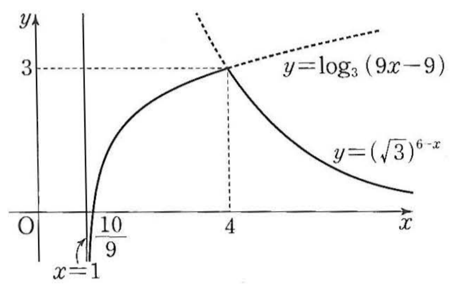
따라서 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6}+6$이므로

$f(2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}+6=16+6=22$

12) [정답] 23

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=4$일 때 최댓값 3을 가지므로 $t\le x\le t+2$에 $x=4$가 포함되면 최댓값은 3이다. 즉, $t\le 4\le t+2$에서 $2\le t\le 4$이고 이를 만족시키는 자연수 t의 값은 2, 3, 4로그 개수는 3이다. 즉, $a=3$

$s\le x\le s+1$에서 최솟값이 1인 경우는 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) $s>1$, $s+1<4$일 때, $1<s<3$이고 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하는 함수이므로 $x=s$일 때 최소이다.

$f(s)=\log_3(9s-9)=1$에서 $9s-9=3$, $s=\frac{4}{3}$

이는 $1<s<3$을 만족시킨다.

(ⅱ) $1<s<4$, $s+1\ge 4$일 때, $3\le s<4$이고 $f(3)=\log_3 18>\log_3 3=1$

$f(4)=(\sqrt{3})^2=3>1$이므로 $s\le x\le s+1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1보다 크다.

(ⅲ) $s\ge 4$일 때, 함수 $f(x)$는 $s\le x\le s+1$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소하는 함수이므로 $x=s+1$일 때 최소이다.

즉, $f(s+1)=(\sqrt{3})^{6-(s+1)}=1$에서 $5-s=0$, $s=5$

이는 $s\ge 4$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $b=\frac{4}{3}\times 5=\frac{20}{3}$

따라서 $a+3b=3+3\times\frac{20}{3}=23$

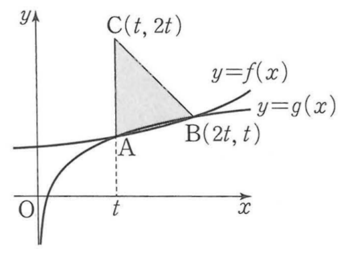
13) [정답] 20

[해설]
조건 (가)에서 $\log_8 a+\log_8 b=\log_2 12-\log_2 3$이므로
$\log_8 ab=\log_2 4$, $\log_8 ab=2$
$ab=64$ …… ㉠
조건 (나)에서 $\log_3 16\times log_2 9=\dfrac{4\log 2}{\log 3}\times\dfrac{2\log 3}{\log 2}=8$이므로
$\log_2 a\times log_2 b=8$ …… ㉡
㉠에서 $b=\dfrac{64}{a}$이므로 이를 ㉡에 대입하면
$\log_2 a\times log_2\dfrac{64}{a}=8$, $\log_2 a\times(6-\log_2 a)=8$
$(\log_2 a)^2-6\log_2 a+8=0$, $(\log_2 a-2)(\log_2 a-4)=0$
$\log_2 a=2$ 또는 $\log_2 a=4$
$a=4$ 또는 $a=16$
$a=4$일 때 $b=16$이고, $a=16$일 때 $b=4$이다.
따라서 $a+b=4+16=20$

14) [정답] ⑤

[해설]
두 점 A, B의 좌표는 각각
$A(t, \log_2 t)$, $B(t, \log_2 16t)$
점 C의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같으므로 점 C의 x좌표를 a라 하면
$\log_2 16a=\log_2 t$에서 $16a=t$, 즉 $a=\dfrac{t}{16}$
점 D의 y좌표는 점 B의 y좌표와 같으므로 점 D의 x좌표를 b라 하면
$\log_2 b=\log_2 16t$에서 $b=16t$
즉, $C\left(\dfrac{t}{16}, \log_2 t\right)$, $D(16t, \log_2 16t)$이므로 삼각형 ABC의 무게중심 G_1의 좌표는
$G_1\left(\dfrac{t+t+\dfrac{t}{16}}{3}, \dfrac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 t}{3}\right)$
즉, $G_1\left(\dfrac{11}{16}t, \dfrac{4}{3}+\log_2 t\right)$
이고, 삼각형 ADB의 무게중심 G_2의 좌표는
$G_2\left(\dfrac{t+16t+t}{3}, \dfrac{\log_2 t+\log_2 16t+\log_2 16t}{3}\right)$
즉, $G_2\left(6t, \dfrac{8}{3}+\log_2 t\right)$
이므로 직선 G_1G_2의 기울기는
$$\frac{\left(\dfrac{8}{3}+\log_2 t\right)-\left(\dfrac{4}{3}+\log_2 t\right)}{6t-\dfrac{11}{16}t}=\frac{\dfrac{4}{3}}{\dfrac{85}{16}t}=\frac{64}{255t}$$
즉, $\dfrac{64}{255t}=\dfrac{16}{255}$이므로 $t=4$
따라서 $A(4, 2)$, $B(4, 6)$, $D(64, 6)$이므로 삼각형 ADB의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times(64-4)\times(6-2)=\dfrac{1}{2}\times 60\times 4=120$
15) [정답] ④

[해설]



조건 (가)에서 직선 OC의 기울기가 2이므로 점 C의 좌표를 $(t,\ 2t)$라 하면 점 B의 좌표는 $(2t,\ t)$이다.

점 B가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$a^{2t}+4=t$ …… ㉠

점 B가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$\frac{1}{4}\log_a 2t=t,\ a^{4t}=2t$ …… ㉡

㉡에서 $t=\frac{1}{2}a^{4t}$이므로 이를 ㉠에 대입하면 $a^{2t}+4=\frac{1}{2}a^{4t}$

$a^{2t}=k\ (k>0)$이라 하면

$k+4=\frac{1}{2}k^2,\ k^2-2k-8=0,\ (k+2)(k-4)=0$

$k>0$이므로 $k=4$

$a^{2t}=4$이므로 ㉠에서 $t=8$이고, $a^{16}=4$에서 $a=4^{\frac{1}{16}}=2^{\frac{1}{8}}$이다.

즉, 점 B의 좌표는 $(16,\ 8)$, 점 C의 좌표는 $(8,\ 16)$이다.

$f(x)=2^{\frac{1}{8}x}+4$이고, 조건 (나)에서 두 점 A, C의 x좌표가 같으므로

$f(8)=2^1+4=6$

에서 점 A의 좌표는 $(8,\ 6)$이다.

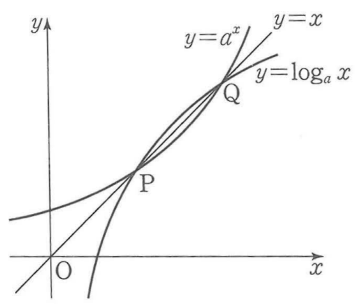
$\overline{\mathrm{AC}}=16-6=10$이고, 점 B와 직선 AC 사이의 거리는 $16-8=8$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times10\times8=40$

16) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=a^x,\ g(x)=\log_a x$라 하면 두 함수 $f(x),\ g(x)$는 서로 역함수 관계이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 교점은 곡선 $y=a^x$과 직선 $y=x$의 교점과 같다. 즉, 두 점 P, Q는 직선 $y=x$ 위의 점이다.



$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 양수 k에 대하여 점 P의 좌표를 $(k,\ k)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(2k,\ 2k)$이다.

두 점 P, Q는 곡선 $y=a^x$ 위의 점이므로

$a^k=k$ …… ㉠

$a^{2k}=2k$ …… ㉡

㉡에서 $a^{2k}=(a^k)^2$이므로 ㉠을 대입하면 $k^2=2k,\ k(k-2)=0$

$k>0$이므로 $k=2$ …… ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a^2=2$

$a>1$이므로 $a=\sqrt{2}$

17) [정답] ①

[해설]

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

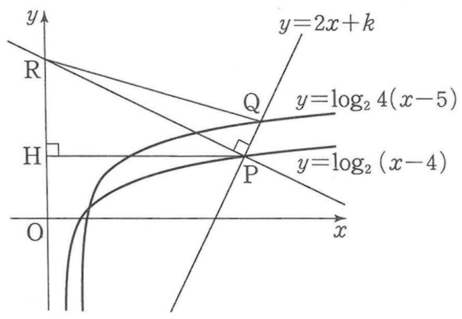
이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한

것이다. 직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PR}}=15$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$

점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PR의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 $\overline{\mathrm{RH}}:\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{PR}}=1:2:\sqrt{5}$이다.



$\overline{\mathrm{PR}}=6\sqrt{5}$이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=12$

점 P의 x좌표를 p라 하면 $p=12$

점 $\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$, 즉 $\mathrm{P}(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=3-24=-21$

[다른 풀이]

$y=\log_2 4(x-5)=\log_2(x-5)+\log_2 4=\log_2(x-5)+2$

이므로 함수 $y=\log_2 4(x-5)$의 그래프는 함수 $y=\log_2(x-4)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

직선 $y=2x+k$의 기울기가 2이므로 점 P를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점이 점 Q이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이고 삼각형 PQR의 넓이가 15이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\overline{\mathrm{PR}}=15$, $\overline{\mathrm{PR}}=\frac{30}{\sqrt{5}}=6\sqrt{5}$ …… ㉠

점 P의 x좌표를 p $(p>0)$이라 하면 점 P는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\mathrm{P}(p,\ 2p+k)$

점 P를 지나고 직선 $y=2x+k$에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 PR의 방정식은

$y-(2p+k)=-\frac{1}{2}(x-p)$, $x+2y-5p-2k=0$

$x=0$이면 $y=\frac{5p+2k}{2}$이므로 $\mathrm{R}\left(0,\ \frac{5p+2k}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{PR}}$는 점 R와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리이므로

$\overline{\mathrm{PR}}=\frac{\left|0-\frac{5p+2k}{2}+k\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{5}{2}p}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}p$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{5}}{2}p=6\sqrt{5}$, $p=12$

점 $\mathrm{P}(12,\ 24+k)$는 곡선 $y=\log_2(x-4)$ 위의 점이므로

$24+k=\log_2 8=3$

따라서 $k=-3-24=-21$

18) [정답] ④

[해설]

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=3$

$\angle\mathrm{POB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$라 하면 호 BP의 길이가 π이므로

$\pi=3\times\theta,\ \theta=\frac{\pi}{3}$

삼각형 ABP에서 $\angle\mathrm{APB}=\frac{\pi}{2},\ \angle\mathrm{PAB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{POB}=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

따라서 부채꼴 APQ의 호 PQ의 길이는

$3\sqrt{3}\times\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

19) [정답] ①

[해설]

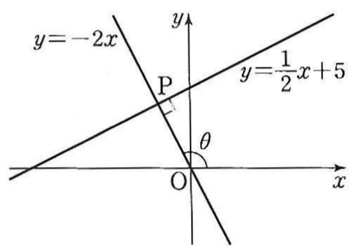
직선 OP의 기울기를 m이라 하면 직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 OP가 서로 수직이므로

$m\times\frac{1}{2}=-1,\ m=-2$

직선 $y=\frac{1}{2}x+5$와 직선 $y=-2x$가 만나는 점의 x좌표는

$\frac{1}{2}x+5=-2x$에서 $x=-2$

이때 $y=-2\times(-2)=4$이므로 점 P의 좌표는 $(-2,4)$이다.



$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{(-2)^2+4^2}=2\sqrt{5}$

$\sin\theta=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \cos\theta=\frac{-2}{2\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta\times cos\,\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{2}{5}$

20) 정답

[정답] ⑤

[해설]

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle\mathrm{AOP}=\alpha$라 하자. 조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi,\ \alpha=\frac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\frac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\frac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0,\ \tan\theta<0$이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

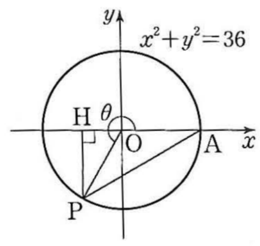
(ii) $\theta=\frac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0,\ \tan\theta>0$

이때 $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\frac{4}{3}\pi$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{OH}}=3$, $\overline{\mathrm{PH}}=3\sqrt{3}$



이므로 점 P의 좌표는 $(-3,\ -3\sqrt{3})$이다.

따라서 $\cos\theta=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}$,

$\tan\theta=\dfrac{-3\sqrt{3}}{-3}=\sqrt{3}$이므로

$\cos\theta+\tan^2\theta=-\dfrac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\dfrac{5}{2}$

[다른 풀이]

선분 AP를 포함하는 부채꼴 OAP에서 $\angle\mathrm{AOP}=\alpha$라 하자.

조건 (가)에서 부채꼴 AOP의 호 AP의 길이가 4π이므로

$6\alpha=4\pi$, $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$

이때 $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$이다.

(i) $\theta=\dfrac{2}{3}\pi$일 때, θ는 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

이때 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}>0$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

이때 $\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\theta=\dfrac{4}{3}\pi$

$\cos\theta=\cos\dfrac{4}{3}\pi=\cos\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$

$\tan\theta=\tan\dfrac{4}{3}\pi=\tan\left(\pi+\dfrac{\pi}{3}\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 $\cos\theta+\tan^2\theta=-\dfrac{1}{2}+(\sqrt{3})^2=\dfrac{5}{2}$

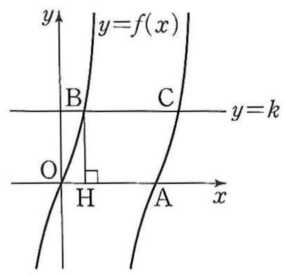
21) [정답] ⑤

[해설]

함수 $y=f(x)$의 주기가 2이므로 $\dfrac{\pi}{b}=2$, 즉 $b=\dfrac{\pi}{2}$

$\overline{\mathrm{OA}}=2$이므로 점 A의 좌표는 $(2,0)$이다.

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\angle\mathrm{BAO}=\dfrac{\pi}{4}$이므로



$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=k$, $\overline{\mathrm{OH}}=2-k$

직각삼각형 BOH에서

$\tan\theta=\tan(\angle\mathrm{BOH})=3$이므로

$\dfrac{\overline{\mathrm{BH}}}{\overline{\mathrm{OH}}}=\dfrac{k}{2-k}=3$, $k=\dfrac{3}{2}$

점 B의 좌표가 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 B를 지나므로

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=a\tan\left(\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{1}{2}\right)=a\tan\dfrac{\pi}{4}=a=\dfrac{3}{2}$

이때 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$이고 $f(x)=\dfrac{3}{2}\tan\dfrac{\pi x}{2}$이다.

$f\left(\frac{k}{3}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}\tan\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{OC}}^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}$

따라서 $f\left(\frac{k}{3}\right)+\overline{\mathrm{OC}}^2=\frac{3}{2}+\frac{17}{2}=10$

22) [정답] ④

[해설]

$\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\left\{\pi+\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sin\theta$

이므로 $\sin(2\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)+2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=3\sin\theta$에서

$-\sin\theta-\cos\theta+2\sin\theta=3\sin\theta$

$\cos\theta=-2\sin\theta$ …… ㉠

한편, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로 $\sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{5}$

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

23) [정답] 64

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=3$이다.

함수 $g(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=na+\frac{a}{2}$ (n은 정수)이다.

조건 (가)에서 $na+\frac{a}{2}=3$이므로 $a=\frac{6}{2n+1}$

a는 자연수이므로 $2n+1$은 6의 양의 약수이어야 한다.

$2n+1=1$ 또는 $2n+1=2$ 또는 $2n+1=3$ 또는 $2n+1=6$

즉, $n=0$ 또는 $n=\frac{1}{2}$ 또는 $n=1$ 또는 $n=\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

(i) $n=0$일 때, $a=6$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{6}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{9}<\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $n=1$일 때, $a=2$이므로 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

$g\left(\frac{2}{3}\right)=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}>1$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x)=\tan\frac{\pi x}{2}$

함수 $y=f(x)$의 정의역은 $\{x|x>3$인 실수$\}$이고 밑 4가 1보다 크므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$\frac{13}{4} \le x \le 19$에서 $f\left(\frac{13}{4}\right)= \frac{1}{3}\log_4 \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}$, $f(19)= \frac{1}{3}\log_4 16 = \frac{2}{3}$

이므로 $-\frac{1}{3} \le f(x) \le \frac{2}{3}$

또 $-1 < x < 1$일 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$g\left(-\frac{1}{3}\right)= \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)= -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$g\left(\frac{2}{3}\right)= \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$이므로 $-\frac{\sqrt{3}}{3} \le (g \circ f)(x) \le \sqrt{3}$

따라서 $M= \sqrt{3}$, $m= -\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$12(M-m)^2 = 12 \times \left\{\sqrt{3} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}^2 = 12 \times \left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 64$

24) [정답] ①

[해설]

부등식 $(2\sin x - 1)(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$에서

$2\sin x - 1 > 0$, $\sqrt{2}\cos x - 1 > 0$ 또는

$2\sin x - 1 < 0$, $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$

(ⅰ) $2\sin x - 1 > 0$, $\sqrt{2}\cos x - 1 > 0$일 때 부등식 $2\sin x - 1 > 0$에서 $\sin x > \frac{1}{2}$이므로

$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5}{6}\pi$ …… ㉠

부등식 $\sqrt{2}\cos x - 1 > 0$에서 $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$

(ⅱ) $2\sin x - 1 < 0$, $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$일 때

부등식 $2\sin x - 1 < 0$에서 $\sin x < \frac{1}{2}$이므로

$0 \le x < \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < 2\pi$ …… ㉢

부등식 $\sqrt{2}\cos x - 1 < 0$에서 $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{7}{4}\pi$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{5}{6}\pi$, $\delta = \frac{7}{4}\pi$이므로

$$\begin{aligned}\sin(\delta - \beta) + \cos(\gamma - \alpha) &= \sin\left(\frac{7}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\frac{3}{2}\pi + \cos\frac{2}{3}\pi \\ &= -1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

25) [정답] 185

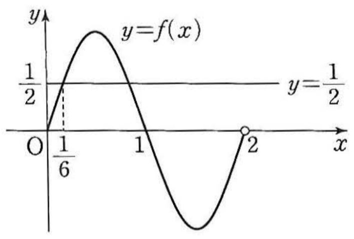
[해설]

함수 $y = \sin(n\pi x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{n\pi} = \frac{2}{n}$

(i) $0 \le x < 2$, 즉 $n=1$일 때, $f(x)=\sin(\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(\pi x)=\frac{1}{2}$

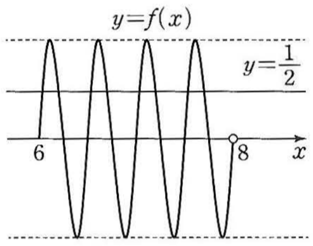
$0 \le x < 2$에서 방정식 $\sin(\pi x)=\frac{1}{2}$의 실근 중 가장 작은 것이 α이므로 $\alpha=\frac{1}{6}$



(ii) $6 \le x < 8$, 즉 $n=4$일 때, $f(x)=\sin(4\pi x)$이다.

방정식 $2f(x)-1=0$에서 $\sin(4\pi x)=\frac{1}{2}$

$6 \le x < 8$에서 방정식 $\sin(4\pi x)=\frac{1}{2}$의 실근 중 가장 큰 것이 β이므로 $\beta=6+\frac{3}{2}+\frac{5}{24}=\frac{185}{24}$



(i), (ii)에서 $\frac{4\beta}{\alpha}=\frac{4\times\frac{185}{24}}{\frac{1}{6}}=185$

26) [정답] ②

[해설]

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ACD})}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}$이므로

$\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{CAD})}\times\sin(\angle\mathrm{ACD})=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}\times\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin(\angle\mathrm{ABD})}=2R$이므로

$R=\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{2\sin(\angle\mathrm{ABD})}=\frac{2\sqrt{2}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

27) [정답] 39

[해설]

직각삼각형 ABC에서

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AB}}^2}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$이므로 $\sin(\angle\mathrm{CAB})=\frac{\sqrt{7}}{4}$

점 D는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{BD}=\frac{1}{3}\times\overline{AB}=\frac{1}{3}\times 3=1$

직각삼각형 DBC에서 $\overline{CD}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+(\sqrt{7})^2}=2\sqrt{2}$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=2R$에서 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{7}}{4}}=2R$, $R=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$

삼각형 ADC의 외접원의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{32}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=32$이므로

$p+q=7+32=39$

28) [정답] 9

[해설]

$\overline{BC}=a$ $(a>4\sqrt{2})$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos(\angle ABC)$

이므로

$(2\sqrt{2})^2=(4\sqrt{2})^2+a^2-2\times4\sqrt{2}\times a\times\frac{5\sqrt{2}}{8}$

$a^2-10a+24=0$, $(a-6)(a-4)=0$

$a>4\sqrt{2}$이므로 $a=6$

한편, $\angle BAD=\angle CAD$이므로 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

즉, $2:1=\overline{BD}:\overline{CD}$이므로 $\overline{BD}=2\overline{CD}$

$\overline{BC}=\overline{BD}+\overline{CD}=3\overline{CD}=6$에서 $\overline{CD}=2$

이때 $\overline{BD}=4$

직각삼각형 ABE에서 $\angle BAE=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\overline{AE}=4\sqrt{2}\cos\theta$

직각삼각형 CAF에서

$\angle CAF=\theta$이므로 $\overline{AF}=2\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2&=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\angle ABD)\\&=(4\sqrt{2})^2+4^2-2\times4\sqrt{2}\times4\times\frac{5\sqrt{2}}{8}=8\end{aligned}$$

$\overline{AD}=2\sqrt{2}$

삼각형 ABD에서

$\cos\theta=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\frac{(4\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2-4^2}{2\times4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{AF}\times\overline{AE}&=2\sqrt{2}\cos\theta\times4\sqrt{2}\cos\theta=16\cos^2\theta\\&=16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2=9\end{aligned}$$

29) [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}=2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{7}\times\sin\dfrac{2}{3}\pi=2\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{21}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin(\angle\mathrm{BDA})}=2\sqrt{7}$

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{7}\sin(\angle\mathrm{BDA})=2\sqrt{7}\times\dfrac{\sqrt{21}}{7}=2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}=x$ $(x>0)$이라 하면 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$(\sqrt{21})^2=(2\sqrt{3})^2+x^2-2\times2\sqrt{3}\times x\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$x^2+2\sqrt{3}x-9=0$, $(x+3\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$

$x>0$이므로 $x=\sqrt{3}$

직선 AD가 $\angle\mathrm{BAC}$를 이등분하므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}$

즉, $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\overline{\mathrm{BE}}:\overline{\mathrm{CE}}$에서 $\overline{\mathrm{BE}}=2\overline{\mathrm{CE}}$

따라서 $\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{2}{3}\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$, $\overline{\mathrm{CE}}=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$이므로

$\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{CE}}^2=\left(\dfrac{2\sqrt{21}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)^2=\dfrac{35}{3}$

30) [정답] ⑤

[해설]

함수 $f(x)=a\cos\dfrac{\pi x}{b}$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{b}}=2b$이고,

최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

$f(x)=-a$에서

$a\cos\dfrac{\pi x}{b}=-a$, $\cos\dfrac{\pi x}{b}=-1$

$\dfrac{\pi x}{b}=\pi$, $x=b$

즉, 점 A의 좌표는 $(b, -a)$이다.

$f(x)=\dfrac{a}{2}$에서

$a\cos\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{a}{2}$, $\cos\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $\dfrac{\pi x}{b}=\dfrac{5\pi}{3}$

$x=\dfrac{b}{3}$ 또는 $x=\dfrac{5b}{3}$

$\overline{\mathrm{OB}}<\overline{\mathrm{OC}}$이므로 두 점 B, C의 좌표는 $\mathrm{B}\left(\dfrac{b}{3}, \dfrac{a}{2}\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{5b}{3}, \dfrac{a}{2}\right)$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=b$에 대하여 대칭이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$

이때 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$아므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\frac{1}{2}\left(\frac{5b}{3}-\frac{b}{3}\right)=\frac{2}{3}b$, $\overline{AH}=\frac{a}{2}-(-a)=\frac{3}{2}a$이므로

$\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\frac{3}{2}a}{\frac{2}{3}b}=\sqrt{3}$, $a=\frac{4\sqrt{3}}{9}b$

따라서 직선 OA의 기울기는 $-\frac{a}{b}$이고, 직선 OB의 기울기는 $\frac{3a}{2b}$이므로 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱은

$-\frac{a}{b}\times\frac{3a}{2b}=-\frac{3a^2}{2b^2}=-\frac{3}{2b^2}\times\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}b\right)^2=-\frac{8}{9}$

31) [정답] ④

[해설]

수직인 두 직선의 기울기의 곱이 -1이므로

두 점 $(\log_3 2, \log_9 a)$, $(\log_3 54, \log_9 a^2)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 $\frac{\log_9 a^2-\log_9 a}{\log_3 54-\log_3 2}=\frac{\log_9 a}{\log_3 27}=\frac{\log_9 a}{3}=\frac{1}{2}$에서

$\log_9 a=\frac{3}{2}$이므로

$a=9^{\frac{3}{2}}=(3^2)^{\frac{3}{2}}=3^{2\times\frac{3}{2}}=3^3=27$

32) [정답] ②

[해설]

선분 CD가 원의 지름이므로 $\angle CPD=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PCD에서 $\overline{CD}^2=\overline{PC}^2+\overline{PD}^2$이므로

$\overline{PD}=\sqrt{\overline{CD}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-4^2}=2$

삼각형 APD의 넓이가 $\frac{\sqrt{5}}{3}$이므로 $\angle APD=\theta$라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PD}\times\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\frac{1}{2}\times1\times2\times sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

선분 AB가 원의 지름이므로 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 PAB에서 $\overline{AB}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{PA}^2}=\sqrt{(\sqrt{10})^2-1^2}=3$

삼각형 BPC에서 $\angle BPC=\pi-\theta$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2&=\overline{PB}^2+\overline{PC}^2-2\times\overline{PB}\times\overline{PC}\times\cos(\pi-\theta)\\&=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{2}{3}=9+16-16=9\end{aligned}$$

$\overline{BC}>0$이므로 $\overline{BC}=3$

33) [정답] 8

[해설]

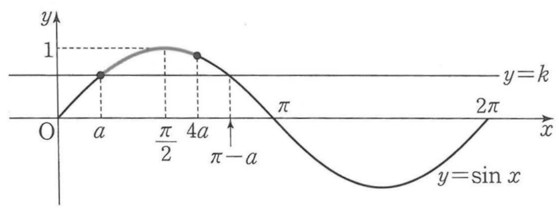
$0 < a < \frac{\pi}{2}$에서 $0 < 4a < 2\pi$이고,

$a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = 1$의 해가 존재하므로 $4a \ge \frac{\pi}{2}$이다.

즉, $\frac{\pi}{2} \le 4a < 2\pi$

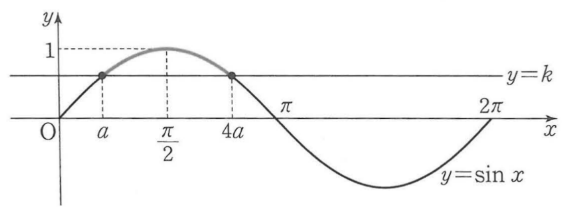
$\sin a = \sin(\pi - a)$이므로 $4a$의 값과 $\pi - a$의 값의 대소관계에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $\frac{\pi}{2} \le 4a < \pi - a$인 경우



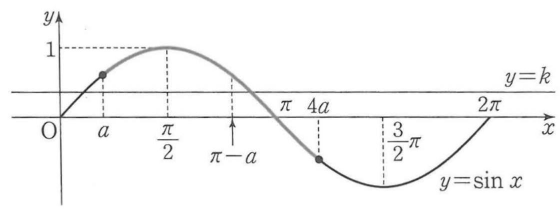
$\sin a \le k < \sin 4a$ 또는 $k = 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(ii) $4a = \pi - a$인 경우



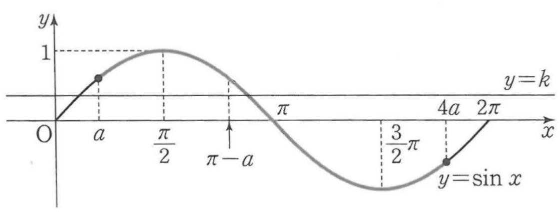
$k = 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다. $k \ne 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$의 서로 다른 실근의 개수는 0 또는 2이다.

(iii) $\pi - a < 4a \le \frac{3}{2}\pi$인 경우



$\sin 4a \le k < \sin a$ 또는 $k = 1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

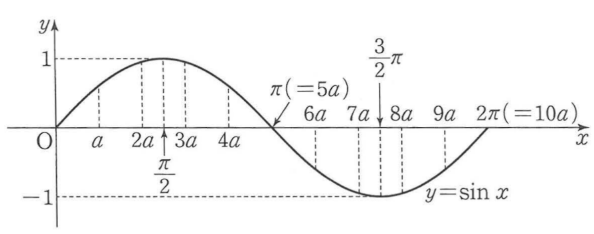
(iv) $\frac{3}{2}\pi < 4a < 2\pi$인 경우



$\sin 4a < k < \sin a$ 또는 $k = 1$ 또는 $k = -1$이면 $a \le x \le 4a$에서 방정식 $\sin x = k$는 오직 한 개의 실근을 갖는다.

(i)~(iv)에서 방정식 $\sin x = k$가 오직 한 개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값이 1뿐인 경우는 (ii)이다.

즉, $4a = \pi - a$이므로 $a = \frac{\pi}{5}$



한편, m, n $(m < n)$이 10 이하의 두 자연수일 때, 닫힌구간 $[ma, na]$에서 함수 $y = \sin x$의 최댓값과 최솟값의 합이 0인 경우는

㉠ $0 < ma \le \frac{\pi}{2}$이고 $\frac{3}{2}\pi \le na \le 2\pi$인 경우

(최댓값 1, 최솟값 -1)

㉡ $\frac{\pi}{2} < ma < \pi < na < \frac{3}{2}\pi$이고 $ma + na = 2\pi$인 경우

(최댓값 $\sin ma$, 최솟값 $\sin na = \sin(2\pi - ma) = -\sin ma$)

이다.

㉠에서 m의 값은 1 또는 2이고 n의 값은 8 또는 9 또는 10이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는 $2 \times 3 = 6$

㉡에서 가능한 순서쌍 (m, n)은 $(3, 7)$, $(4, 6)$으로 그 개수는 2따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6 + 2 = 8$

34) [정답] ②

[해설]

x에 대한 방정식 $\sin x - |\sin t| = 0$에서

$0 < t < \frac{\pi}{2}$일 때, $x = t$ 또는 $x = \pi - t$

$\frac{\pi}{2} < t < \pi$일 때, $x = \pi - t$ 또는 $x = t$

$\pi < t < \frac{3}{2}\pi$일 때, $x = t - \pi$ 또는 $x = 2\pi - t$

$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$일 때, $x = 2\pi - t$ 또는 $x = t - \pi$

x에 대한 방정식 $|\sin x| - \sin t = 0$에서

$0 < t < \frac{\pi}{2}$일 때, $x = t$ 또는 $x = \pi - t$ 또는 $x = \pi + t$ 또는 $x = 2\pi - t$

$\frac{\pi}{2} < t < \pi$일 때, $x = \pi - t$ 또는 $x = t$ 또는 $x = 2\pi - t$ 또는 $x = \pi + t$

$\pi < t < \frac{3}{2}\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

$\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$일 때, 실근은 존재하지 않는다.

그러므로 각 경우의 $0 < x < 2\pi$에서 x에 대한 방정식

$(\sin x - |\sin t|)(|\sin x| - \sin t) = 0$의 실근을 크기순으로 나열하고 서로 다른 모든 실근의 합을 구하면

(ⅰ) $0 < t < \frac{\pi}{2}$일 때

$x = t$ 또는 $x = \pi - t$ 또는 $x = \pi + t$ 또는 $x = 2\pi - t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$t + (\pi - t) + (\pi + t) + (2\pi - t) = 4\pi$

(ⅱ) $\frac{\pi}{2} < t < \pi$일 때

$x = \pi - t$ 또는 $x = t$ 또는 $x = 2\pi - t$ 또는 $x = \pi + t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(\pi - t) + t + (2\pi - t) + (\pi + t) = 4\pi$

(ⅲ) $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$일 때

$x = t - \pi$ 또는 $x = 2\pi - t$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(t - \pi) + (2\pi - t) = \pi$

(ⅳ) $\frac{3}{2}\pi < t < 2\pi$일 때

$x = 2\pi - t$ 또는 $x = t - \pi$이므로 서로 다른 모든 실근의 합은

$(2\pi - t) + (t - \pi) = \pi$

즉,

$$f(t)=\begin{cases} t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right) \\ \pi-t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ t-\pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right) \\ 2\pi-t & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases},\ g(t)=\begin{cases} 2\pi-t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right) \\ \pi+t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ 2\pi-t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right) \\ t-\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases}$$

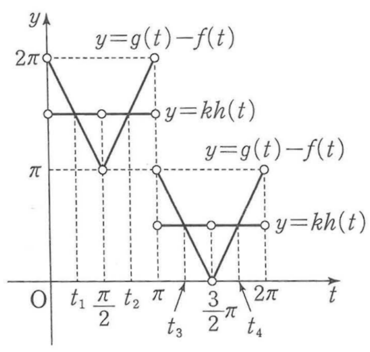
$$g(t)-f(t)=\begin{cases} 2\pi-2t & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right) \\ 2t & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ 3\pi-2t & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right) \\ 2t-3\pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases},\ h(t)=\begin{cases} 4\pi & \left(0<t<\frac{\pi}{2}\right) \\ 4\pi & \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right) \\ \pi & \left(\pi<t<\frac{3}{2}\pi\right) \\ \pi & \left(\frac{3}{2}\pi<t<2\pi\right) \end{cases}$$

$0<t<\pi\left(t\neq\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_1, t_2라 하면 $\frac{t_1+t_2}{2}=\frac{\pi}{2}$에서 $t_1+t_2=\pi$

$\pi<t<2\pi\ \left(t\neq\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$일 때

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 두 실근을 t_3, t_4라 하면 $\frac{t_3+t_4}{2}=\frac{3}{2}\pi$에서 $t_3+t_4=3\pi$



$t_1+t_2+t_3+t_4=(t_1+t_2)+(t_3+t_4)=\pi+3\pi=4\pi$이므로

$0<t<\pi\ \left(t\neq\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\pi<kh(t)<2\pi$이고

$\pi<t<2\pi\ \left(t\neq\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $0<kh(t)<\pi$인 경우에만

방정식 $g(t)-f(t)=kh(t)$의 모든 실근의 합이 4π이다.

$0<t<\pi\ \left(t\neq\frac{\pi}{2}\right)$에서 $h(t)=4\pi$이므로 $\pi<4\pi k<2\pi$

$\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$ …… ㉠

$\pi<t<2\pi\ \left(t\neq\frac{3}{2}\pi\right)$에서 $h(t)=\pi$이므로 $0<\pi k<\pi$

$0<k<1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 모든 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{4}<k<\frac{1}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

35) [정답] ②

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 45이고 공차가 -7이므로 일반항 a_n은 $a_n=-7n+52$이다. 또한 수열 $\{b_n\}$은 첫째항과 공차가 같고 모든 항 이 자연수이므로 수열 $\{b_n\}$의 공차를 d라 하면 d는 자연수이다. $b_n=b_1+(n-1)d$에서 $b_1=d$이므로 $b_n=dn$이다.

따라서 $c_n=(d-7)n+52$

$c_n > 100$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 10이므로

$c_9 \le 100$, $c_{10} > 100$이다.

$c_9 = 9(d-7)+52 = 9d-11$에서 $9d-11 \le 100$, $d \le \dfrac{37}{3}$

$c_{10} = 10(d-7)+52 = 10d-18$에서 $10d-18 > 100$, $d > \dfrac{59}{5}$

즉, $\dfrac{59}{5} < d \le \dfrac{37}{3}$이고 d는 자연수이므로 $d=12$

따라서 $b_1 = 12$

36) [정답] 42

[해설]

3으로 나눈 나머지가 1인 자연수를 나열하면 1, 4, 7, 10, 13, ⋯이므로 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열이다.

즉, $a_n = 3n-2$

4로 나눈 나머지가 2인 자연수를 나열하면

2, 6, 10, 14, 18, ⋯이므로 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

즉, $b_n = 4n-2$

$a_k = b_m$에서 $3k-2 = 4m-2$, $3k = 4m$

즉, k는 4의 배수이고 m은 3의 배수이므로

$k = 4k'$, $m = 3m'$ (단, $k' \le 5$, $m' \le 6$인 자연수)

이를 대입하면 $3 \times 4k' = 4 \times 3m'$에서 $k' = m'$이다.

k와 m은 20 이하의 자연수이므로 $k+m$의 최솟값은 $k' = m' = 1$, 즉 $k=4$, $m=3$일 때 7이고, $k+m$의 최댓값은 $k' = m' = 5$, 즉 $k=20$, $m=15$일 때 35이다.

따라서 $k+m$의 최댓값과 최솟값의 합은 $35+7=42$

37) [정답] ③

[해설]

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_k\}$의 일반항은

$a_n = 3+2(n-1) = 2n+1$이므로

$a_{2n-1} = 2(2n-1)+1 = 4n-1$, $a_{2n} = 2\times 2n+1 = 4n+1$이고

$b_n = a_{2n-1} + a_{2n} = (4n-1)+(4n+1) = 8n$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $b_1 = 8$이고 공차가 8인 등차수열이다.

따라서 $S_5 = \dfrac{5\times(2\times 8+4\times 8)}{2} = 120$

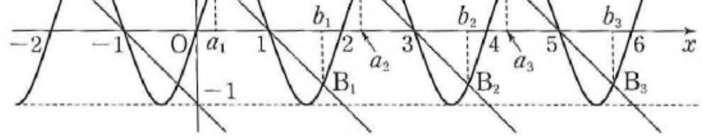
38) [정답] 8

[해설]

직선 $y = -x$가 원점에 대하여 대칭인 직선이므로 직선 $y = g(x)$는 점 $(-1, 0)$에 대하여 대칭인 직선이다.

따라서 직선 $y = g(x-2n)$은 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이고 기울기가 -1인 직선이다.

함수 $y = \sin\pi x$의 그래프는 함수 $y = \sin\pi x$의 그래프가 x축과 만나는 모든 점에 대하여 대칭이고 점 $(2n-1, 0)$은 함수 $y = \sin\pi x$의 그래프 위의 점이므로 함수 $y = \sin\pi x$의 그래프는 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이다.



따라서 그림과 같이 곡선 $y = \sin\pi x$와 직선 $y = g(x-2n)$이 모두 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점 A_n, B_n도 점 $(2n-1, 0)$에 대하여 대칭이다.

즉, $\dfrac{a_n+b_n}{2}=2n-1$에서 $a_n+b_n=4n-2$

따라서 $c_n=4n-2$

그러므로 수열 $\{c_n\}$은 첫째항이 2이고 공차가 4인 등차수열이다.

$S_n=\dfrac{n\{4+4(n-1)\}}{2}=2n^2$이므로 $2n^2>100$에서 $n^2>50$

한편, $7<\sqrt{50}<8$이므로 $n^2>50$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.
39) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$a_1+a_2=a_1(1+r)$, $a_4+a_5=a_4(1+r)$이므로

$\dfrac{a_1+a_2}{a_4+a_5}=\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{a_1}{a_4}=\dfrac{1}{2}$

즉, $a_4=2a_1$이므로 $r^3=2$

$a_{10}=a_1\times r^9=a_1\times(r^3)^3=8a_1$이므로

$8a_1\le 40$, $a_1\le 5$

따라서 자연수 a_1의 값은 1, 2, 3, 4, 5이고 그 합은 15이다.
40) [정답] ③

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a $(a>0)$, 공비를 r $(r>0)$이라 하면

$\dfrac{a_1a_4}{a_3}=\dfrac{a\times ar^3}{ar^2}=ar=2$ …… ㉠

$a_2+a_6=ar+ar^5=ar(1+r^4)=10$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1+r^4=5$, $r^4=4$

$r>0$이므로 $r=\sqrt{2}$

㉠에 의하여 $a=\sqrt{2}$

즉, $a_n=(\sqrt{2})^n$이므로

$b_n=\dfrac{a_{2n}}{2a_{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^{2n}}{2\times(\sqrt{2})^{n+1}}=\dfrac{(\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{n-3}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은

$\dfrac{\frac{1}{2}\{(\sqrt{2})^8-1\}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{15}{2}(\sqrt{2}+1)$
41) [정답] ②

[해설]

세 수 a, $a+b$, ab가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a+b)=a+ab$

$a+2b-ab=0$ …… ㉠

세 수 a^2, ab, $2b$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(ab)^2=a^2\times 2b$

$a^2b(b-2)=0$

$a\ne 0$, $b\ne 0$이므로 $b=2$

$b=2$를 ㉠에 대입하면

$a+2\times2-a\times2=0$

$a=4$

따라서 $ab=4\times2=8$
42) [정답] ③

[해설]

$\mathrm{P}(n,\ \sqrt{n}),\ \mathrm{Q}(n,\ \sqrt{2n}),\ \mathrm{R}(n,\ \sqrt{mn})$이므로

$\overline{\mathrm{PA}}=\sqrt{n},\ \overline{\mathrm{QA}}=\sqrt{2n},\ \overline{\mathrm{RA}}=\sqrt{mn}$

$\overline{\mathrm{PA}},\ \overline{\mathrm{QA}},\ \overline{\mathrm{RA}}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{\mathrm{QA}}^2=\overline{\mathrm{PA}}\times\overline{\mathrm{RA}}$

즉, $(\sqrt{2n})^2=\sqrt{n}\times\sqrt{mn}$에서 $n>0$이므로 $2n=n\sqrt{m}$이고,

$\sqrt{m}=2,\ m=4$

또 $\overline{\mathrm{OP}}^2=n^2+n,\ \overline{\mathrm{OQ}}^2+4=n^2+2n+4,\ \overline{\mathrm{OR}}^2+5=n^2+4n+5$

$\overline{\mathrm{OP}}^2,\ \overline{\mathrm{OQ}}^2+4,\ \overline{\mathrm{OR}}^2+5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(\overline{\mathrm{OQ}}^2+4)=\overline{\mathrm{OP}}^2+(\overline{\mathrm{OR}}^2+5)$

즉, $2(n^2+2n+4)=(n^2+n)+(n^2+4n+5)$에서 $n=3$

따라서 $m+n=4+3=7$
43) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에 의하여

$S_{2n-1}=S_1+(n-1)\times3$

조건 (나)에 의하여

$S_{2n}=S_2+(n-1)\times4$

$a_{11}=S_{11}-S_{10}=(S_1+15)-(S_2+16)=S_1-S_2-1$

$a_{12}=S_{12}-S_{11}=(S_2+20)-(S_1+15)=S_2-S_1+5$

이때 $a_{11}=a_{12}$이므로

$S_1-S_2-1=S_2-S_1+5$

$S_2-S_1=-3$

따라서

$a_7=S_7-S_6=(S_1+9)-(S_2+8)$

$=1-(S_2-S_1)$

$=1-(-3)=4$
44) [정답] ①

[해설]

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}=70$에서

$\sum_{k=1}^{10}\{ka_{k+1}-(k+1)a_k\}$

$=(a_2-2a_1)+(2a_3-3a_2)+(3a_4-4a_3)+\cdots+(10a_{11}-11a_{10})$

$=10a_{11}-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10})$

$=10a_{11}-2\sum_{k=1}^{10}a_k$

이고, $a_{11}=15$이므로

$10\times15-2\sum_{k=1}^{10}a_k=70$, $\sum_{k=1}^{10}a_k=40$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}a_k(a_k+6)-\sum_{k=1}^{10}(a_k+2)^2&=\sum_{k=1}^{10}\left\{a_k(a_k+6)-(a_k+2)^2\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-4)=2\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{10}4\\&=2\times40-4\times10=40\end{aligned}$$

45) [정답] ⑤

[해설]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n=\dfrac{n^2-12n}{n}=n-12$, $b_n=-\dfrac{8}{n}$

따라서

$$\sum_{k=1}^{15}\frac{a_k}{b_k}=\sum_{k=1}^{15}\frac{k-12}{-\frac{8}{k}}=\sum_{k=1}^{15}\left(-\frac{k^2}{8}+\frac{3k}{2}\right)=-\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{15}k^2+\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{15}k$$

$$=-\frac{1}{8}\times\frac{15\times16\times31}{6}+\frac{3}{2}\times\frac{15\times16}{2}$$

$$=-155+180=25$$

46) [정답] ④

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 2이므로

$a_{n+1}=2a_n$, $S_n=\dfrac{a_1(2^n-1)}{2-1}=a_1(2^n-1)$

이때 $a_n=\dfrac{1}{2}a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{a_k}{S_{k+1}S_k}&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\frac{S_{k+1}-S_k}{S_{k+1}S_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{S_k}-\frac{1}{S_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_2}\right)+\left(\frac{1}{S_2}-\frac{1}{S_3}\right)+\left(\frac{1}{S_3}-\frac{1}{S_4}\right)+\right.\\&\qquad\left.\cdots+\left(\frac{1}{S_{10}}-\frac{1}{S_{11}}\right)\right\}\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{S_1}-\frac{1}{S_{11}}\right)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1(2^{11}-1)}\right\}\\&=\frac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}\end{aligned}$$

즉, $p=\dfrac{2^{10}-1}{a_1(2^{11}-1)}$에서 $pa_1=\dfrac{2^{10}-1}{2^{11}-1}$이므로

$1-pa_1=\dfrac{2^{10}}{2^{11}-1}$, $(2^{11}-1)(1-pa_1)=2^{10}$

따라서

$$\begin{aligned}\log_2(2^{11}-1)+\log_2(1-pa_1)&=\log_2(2^{11}-1)(1-pa_1)\\&=\log_2 2^{10}=10\end{aligned}$$

47) [정답] ⑤

[해설]

(ⅰ) a_2가 홀수일 때, $a_3=6a_2=4$, $a_2=\frac{2}{3}a_2$가

자연수가 아니므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) a_2가 짝수일 때, $a_3=\frac{a_2}{2}+1=4$, $a_2=6$

① a_1이 홀수일 때, $a_2=6a_1=6$, $a_1=1$

이때 $a_2>a_1$을 만족시킨다.

② a_1이 짝수일 때, $a_2=\frac{a_1}{2}+1=6$, $a_1=10$

이때 $a_2>a_1$을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1=1$, $a_2=6$

한편, a_3이 짝수이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}+1=\frac{4}{2}+1=3$

a_4가 홀수이므로 $a_5=6a_4=6\times 3=18$

a_5가 짝수이므로 $a_6=\frac{a_5}{2}+1=\frac{18}{2}+1=10$

a_6이 짝수이므로 $a_7=\frac{a_6}{2}+1=\frac{10}{2}+1=6$

이때

$a_1=1$

$a_2=a_7=a_{12}=a_{17}=\cdots=6$

$a_3=a_8=a_{13}=a_{18}=\cdots=4$

$a_4=a_9=a_{14}=a_{19}=\cdots=3$

$a_5=a_{10}=a_{15}=a_{20}=\cdots=18$

$a_6=a_{11}=a_{16}=a_{21}=\cdots=10$

따라서 $a_k<a_2$를 만족시키는 20 이하의 자연수 k의 값은

1, 3, 4, 8, 9, 13, 14, 18, 19이므로 그 개수는 9이다.

48) [정답] ⑤

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$, $a_na_{n+1}=(-1)^n$을 만족시키므로

각 항을 차례로 구하면

$a_1a_2=-1$에서 $a_2=-\frac{1}{2}$

$a_2a_3=1$에서 $a_3=-2$

$a_3a_4=-1$에서 $a_4=\frac{1}{2}$

$a_4a_5=1$에서 $a_5=2$

⋮

$a_1=2$이므로 $b_1=1-2$

$a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $b_2=2-\left(-\frac{1}{2}\right)=2+\frac{1}{2}$

$a_3=-2$이므로 $b_3=3-(-2)=3+2$

$a_4=\frac{1}{2}$이므로 $b_4=4-\frac{1}{2}$

$a_5=2$이므로 $b_5=5-2$

⋮

따라서

$$b_n=\begin{cases} n-2 & (n=4m-3) \\ n+\dfrac{1}{2} & (n=4m-2) \\ n+2 & (n=4m-1) \\ n-\dfrac{1}{2} & (n=4m) \end{cases}$$

자연수 k에 대하여 b_{2k}는 수열 $\{b_n\}$의 짝수번째 항을 의미하므로

$$b_{2k}=\begin{cases} 2k+\dfrac{1}{2} & (2k=4m-2) \\ 2k-\dfrac{1}{2} & (2k=4m) \end{cases} \quad (\text{단, } m\text{은 자연수})$$

$$b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k+\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2-\frac{1}{2}\right)=4k+2$$

또는 $b_{2k}+b_{2k+2}=\left(2k-\frac{1}{2}\right)+\left(2k+2+\frac{1}{2}\right)=4k+2$

따라서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)=4\times\frac{10\times11}{2}+2\times10=240$

[다른 풀이]

조건 (가)에 의하여 $a_2=-\dfrac{1}{2}$이고

자연수 n에 대하여

$a_{2n}a_{2n+1}=(-1)^{2n}=1$, $a_{2n+1}a_{2n+2}=(-1)^{2n+1}=-1$이므로 $a_{2n+2}=\dfrac{-1}{a_{2n+1}}=-a_{2n}$을 만족시킨다.

따라서 $a_{2n}=\dfrac{(-1)^n}{2}$

조건 (나)에 의하여 $a_{2n}+b_{2n}=2n$에서

$b_{2n}=2n-a_{2n}=2n-\dfrac{(-1)^n}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(b_{2k}+b_{2k+2})&=\sum_{k=1}^{10}\left\{2k-\frac{(-1)^k}{2}+2k+2-\frac{(-1)^{k+1}}{2}\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(4k+2)\\&=240\end{aligned}$$

49) [정답] ①

[해설]

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=3n-1$이므로 집합 A의 원소는 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수로만 이루어져 있다.

한편, 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=2n-1$이므로 수열 $\{b_n\}$의 각 항 중에서 3으로 나눈 나머지가 2가 아닌 수가 집합 $B-A$의 원소가 된다.

(ⅰ) $n=3k-2$ (k는 자연수)일 때

$b_{3k-2}=2(3k-2)-1$에서

$2(3k-2)-1=6k-5=3(2k-1)-2$이므로

$n=3k-2$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 1인 자연수이다.

따라서 b_{3k-2}는 집합 $B-A$의 원소이다.

(ⅱ) $n=3k-1$(k는 자연수)일 때

$b_{3k-1}=2(3k-1)-1$에서

$2(3k-1)-1=6k-3=3(2k-1)$이므로

$n=3k-1$일 때 b_n은 3의 배수이다.

따라서 b_{3k-1}은 집합 $B-A$의 원소이다.

(ⅲ) $n=3k$(k는 자연수)일 때

$b_{3k}=2\times 3k-1$에서

$2\times 3k-1=3\times 2k-1$이므로

$n=3k$일 때 b_n은 3으로 나눈 나머지가 2인 자연수이다.

따라서 b_{3k}는 집합 $B-A$의 원소가 아니다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $B-A=\{b_1,\ b_2,\ b_4,\ b_5,\ b_7,\ b_8,\ \cdots\}$

이때 $d_n=b_{3n-2}+b_{3n-1}$이라 하면 $d_1=b_1+b_2=4$이고

$$\begin{aligned} d_{n+1}-d_n &= (b_{3n+1}+b_{3n+2})-(b_{3n-2}+b_{3n-1}) \\ &= \{2(3n+1)-1+2(3n+2)-1\} \\ &\qquad\qquad -\{2(3n-2)-1+2(3n-1)-1\} \\ &= (12n+4)-(12n-8)=12 \end{aligned}$$

이므로 수열 $\{d_n\}$은 첫째항이 4이고 공차가 12인 등차수열이다.

이때 수열 $\{d_n\}$의 첫째항부터 제k항까지의 합을 S_k라 하면

$S_k=\dfrac{k\{2\times 4+12(k-1)\}}{2}>140$에서

$k(12k-4)>280,\ 3k^2-k-70>0,\ (3k+14)(k-5)>0$

$k>0$에서 $k>5$이므로 부등식을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=(b_1+b_2)+(b_4+b_5)+\ \cdots\ +(b_{16}+b_{17})=\displaystyle\sum_{k=1}^{12}c_k=204$

한편, $b_{17}=2\times 17-1=33$에서 $S_6-b_{17}=171$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는

$b_1+b_2+b_4+b_5+\ \cdots\ +b_{16}=\displaystyle\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로

자연수 n의 최솟값은 11이다.

[다른 풀이]

조건을 만족시키는 집합 $B-A$의 원소는 $b_1,\ b_2,\ b_4,\ b_5,\ b_7,\ b_8,\ \cdots$이다. 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제$3n$항까지의 합에서

수열 $\{b_{3n}\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 뺀 것을 S_n이라 하자.

수열 $\{b_{3n}\}$은 첫째항이 $b_3=5$이고 공차가 6인 등차수열이므로

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{3n}b_k-\sum_{k=1}^{n}b_{3k} \\ &= \frac{3n\{2+2(3n-1)\}}{2}-\frac{n\{10+6(n-1)\}}{2}=\frac{18n^2}{2}-\frac{6n^2+4n}{2} \\ &= 6n^2-2n=2n(3n-1) \end{aligned}$$

$2n(3n-1)>140$에서 $3n^2-n-70>0$이고

$(3n+14)(n-5)>0$에서 n은 자연수이므로 $n>5$이고,

자연수 n의 최솟값은 6이다.

이때 $S_6=b_1+b_2+b_4+b_5+\ \cdots\ +b_{16}+b_{17}=\displaystyle\sum_{k=1}^{12}c_k=204$이고

$b_{17}=2\times 17-1=33$이므로

$b_1+b_2+b_4+b_5+\ \cdots\ +b_{16}=\displaystyle\sum_{k=1}^{11}c_k=171>140$이 성립한다.

따라서 집합 $B-A$에 속하는 모든 원소를 작은 것부터 크기순으로 나열할 때, 첫번째 원소부터 n번째 원소까지의 합이 처음으로 140보다 큰 경우는 $b_1+b_2+b_4+b_5+\ \cdots\ +b_{16}=\displaystyle\sum_{k=1}^{11}c_k$인 경우이므로

자연수 n의 최솟값은 11이다.

50) [정답] 14

[해설]
$p<0$이라 하면 자연수 n에 대하여 $a_n \geq 0$이면 $a_{n+1}=a_n-p>a_n$, 즉 $a_{21}\neq a_1$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, p는 자연수이다.
a_1, a_2, $\cdots$, a_{20} 중 음수인 것의 개수를 k라 하면 0 이상인 것의 개수는 $20-k$이므로
$a_{21}=a_1-(20-k)p+kpq$
$k=20$이면 $a_1>0$에 모순이므로 k는 19 이하인 자연수이다.
$a_{21}=a_1$에서
$(20-k)p=kpq$, $kp(q+1)=20p$
$p\neq 0$이므로 $k(q+1)=20$
q는 정수이고 k는 19 이하의 자연수이므로 k는 19 이하인 20의 양의 약수이다. 즉, k는 1, 2, 4, 5, 10
(i) $k=1$인 경우, $q=19$

18 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\geq 0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\leq\dfrac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+19p=a_1+(18-n_1)p$

$n_1\geq 14$일 때, $2<\dfrac{40}{n_1+1}<\dfrac{40}{n_1}<3$이므로 이를 만족시키는 자연수 p가 존재하지 않는다.

$n_1=13$일 때, $\dfrac{20}{7}<p\leq\dfrac{40}{13}$이므로 $p=3$

$n_1\leq 12$일 때, $3<\dfrac{40}{n_1+1}<p$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>3$

따라서 $p\geq 3$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $3+19=22$

(ii) $k=2$인 경우, $q=9$

8 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\geq 0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\leq\dfrac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+9p=a_1+(8-n_1)p\geq 0$

$a_{n_1+4}=a_1+(7-n_1)p$

$a_{n_1+3+(8-n_1)}=a_1$, 즉 $a_{11}=a_1$이고 $a_{n+10}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+10}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

$n_1=8$일 때, $\dfrac{40}{9}<p\leq 5$이므로 $p=5$

$n_1\leq 7$일 때, $5\leq\dfrac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>5$

따라서 $p\geq 5$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $5+9=14$

(iii) $k=4$인 경우, $q=4$

3 이하의 자연수 n_1에 대하여

$a_{n_1+1}=a_1-n_1p\geq 0$, $a_{n_1+2}=a_1-(n_1+1)p<0$

즉, $\dfrac{40}{n_1+1}<p\leq\dfrac{40}{n_1}$일 때

$a_{n_1+3}=a_1-(n_1+1)p+4p=a_1+(3-n_1)p\geq 0$

$a_{n_1+4}=a_1+(2-n_1)p$

$\vdots$

$a_{n_1+3+(3-n_1)}=a_1$, 즉 $a_6=a_1$이고 $a_{n+5}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+5}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

$n_1=3$일 때, $10<p\le\frac{40}{3}$이므로 $p=11,\ 12,\ 13$

$n_1\le 2$일 때, $13<\frac{40}{n_1+1}$이므로 자연수 p가 존재하면 $p>13$

따라서 $p\ge 11$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $11+4=15$

(ⅳ) $k=5$인 경우, $q=3$

$a_3=a_1-2p\ge 0,\ a_4=a_1-3p<0$인 경우

즉, $\frac{40}{3}<p\le 20$에서 $p=14,\ 15,\ \cdots,\ 20$인 경우

$a_5=a_1-3p+3p=a_1$

$a_2=a_1-p\ge 0,\ a_3=a_1-2p<0$인 경우

즉, $\frac{40}{2}<p\le 40$에서 $p=21,\ 22,\ \cdots,\ 40$

$a_4=a_1-2p+3p=a_1+p>0$, 즉 $a_5=a_1$이고 $a_{n+4}=a_n$

모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

따라서 $p\ge 14$이므로 이 경우에 $p+q$의 최솟값은 $14+3=17$

(ⅴ) $k=10$인 경우, $q=1$

$a_2=a_1-p<0$, 즉 $p>40$을 만족시키고 $a_3=a_1-p+p=a_1$이므로 주기가 2이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2}=a_n$을 만족시키므로 $a_{21}=a_1$을 만족시킨다.

따라서 이 경우에 $p+q$의 최솟값은

$41+1=42$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 $p+q$의 최솟값은 14이다.

51) [정답] ⑤

[해설]

$a_3=\frac{1}{6}$에서

$a_3=\frac{1}{4-8a_2}$이므로 $\frac{1}{6}=\frac{1}{4-8a_2}$, $a_2=-\frac{1}{4}$

$a_2=\frac{1}{4-8a_1}$이므로 $-\frac{1}{4}=\frac{1}{4-8a_1}$, $a_1=1$

또한 $a_3=\frac{1}{6}$에서

$$a_4=\frac{1}{4-8a_3}=\frac{1}{4-8\times\frac{1}{6}}=\frac{3}{8}$$

$$a_5=\frac{1}{4-8a_4}=\frac{1}{4-8\times\frac{3}{8}}=1$$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ 1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8},\ \cdots$으로 첫째항부터 네 개의 수 $1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{6},\ \frac{3}{8}$이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{25}a_n=\sum_{n=1}^{24}a_n+a_{25}=6(a_1+a_2+a_3+a_4)+a_1$$
$$=6\left(1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)+1=6\times\frac{31}{24}+1=\frac{35}{4}$$

52) [정답] ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$이라 하자.

$a_n a_{n+5} \le 0$에서 $a_n(a_n+5d) \le 0$

$-5d \le a_n \le 0$ …… ㉠

$S_n = \dfrac{n(a+a_n)}{2}$

$S_{n+5} = \dfrac{(n+5)(a+a_{n+5})}{2} = \dfrac{(n+5)(a+a_n+5d)}{2}$

n은 자연수이므로 $S_n S_{n+5} \le 0$에서

$(a+a_n)(a+5d+a_n) \le 0$

$d>0$이므로 $-a-5d \le a_n \le -a$ …… ㉡

한편, $a \ge 0$이면 $a_n \ge 0$에서 $n(A) \le 1$이므로 $n(A \cap B)=3$을 만족시킬 수 없다. 즉, $a<0$

$n(A \cap B)=3$이므로 ㉡에서 $-a-5d<0$ …… ㉢

따라서 $A \cap B = \{n \mid -a-5d \le a_n \le 0,\ n$은 자연수$\}$이다.

한편, $S_m = a_m$인 짝수인 자연수 m이 존재하므로

$a_m = S_m - S_{m-1}$에서 $S_m = S_m - S_{m-1}$, $S_{m-1}=0$

$\dfrac{(m-1)(a+a_{m-1})}{2}=0$, $a+a_{m-1}=0$

$a+\{a+(m-2)d\}=0$

$m=2k$ (k는 자연수)라 하면 $2a+(2k-2)d=0$

즉, $-a=(k-1)d$인 자연수 k가 존재한다.

㉢에서 $-a-5d=(k-1)d-5d=(k-6)d<0$이므로 k는 5 이하의 자연수이다.

$-a=(k-1)d$에서

$a_n = a+(n-1)d = -(k-1)d+(n-1)d=(n-k)d$

이므로

$A \cap B = \{n \mid (k-6)d \le (n-k)d \le 0,\ n$은 자연수$\}$

$= \{n \mid k-6 \le n-k \le 0,\ n$은 자연수$\}$

$= \{n \mid 2k-6 \le n \le k,\ n$은 자연수$\}$

k의 값에 따라 집합 $A \cap B$를 구하면 다음과 같다.

$k=1$이면 $A \cap B=\{1\}$

$k=2$이면 $A \cap B=\{1, 2\}$

$k=3$이면 $A \cap B=\{1, 2, 3\}$

$k=4$이면 $A \cap B=\{2, 3, 4\}$

$k=5$이면 $A \cap B=\{4, 5\}$

이때 $n(A \cap B)=3$이므로 $k=3$ 또는 $k=4$

(ⅰ) $k=3$일 때, $a=-2d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-3)d$

㉠에서 $-5d \le (n-3)d \le 0$, $-5 \le n-3 \le 0$, $-2 \le n \le 3$이므로

$A=\{1, 2, 3\}$

㉡에서 $2d-5d \le (n-3)d \le 2d$, $-3 \le n-3 \le 2$, $0 \le n \le 5$이므로

$B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$

이때 $A-B=\varnothing$이다.

(ⅱ) $k=4$일 때, $a=-3d$이고

$a_n=(n-k)d=(n-4)d$

㉠에서 $-5d \le (n-4)d \le 0$, $-5 \le n-4 \le 0$, $-1 \le n \le 4$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4\}$

㉡에서 $3d-5d \le (n-4)d \le 3d$, $-2 \le n-4 \le 3$, $2 \le n \le 7$이므로

$B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

이때 $A-B=\{1\} \ne \varnothing$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $k=4$이고 $m=2k=8$이다.
$a=-3d$이므로
$a_m=a_8=a+7d=-3d+7d=4d$,
$a_{m+10}=a_{18}=a+17d=-3d+17d=14d$
따라서 $\dfrac{a_{m+10}}{a_m}=\dfrac{14d}{4d}=\dfrac{7}{2}$
53) [정답] 135

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\dfrac{4}{3}$이고, 공차가 $\dfrac{1}{3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<a_{n+1}$이고, 2와 3의 최소공배수는 6이다.
$m=6$일 때, $A_6=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{12}\}$, $B_6=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{18}\}$
$A_6\cap B_6=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_6=a_{12}$
$m=7$일 때, $A_7=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{14}\}$, $B_7=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{21}\}$
$A_7\cap B_7=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_7=a_{12}$
$m=8$일 때, $A_8=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{16}\}$, $B_8=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{24}\}$
$A_8\cap B_8=\{a_6,\ a_{12}\}$, $b_8=a_{12}$
$m=9$일 때, $A_9=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{18}\}$, $B_9=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{27}\}$
$A_9\cap B_9=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_9=a_{18}$
$m=10$일 때, $A_{10}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{20}\}$, $B_{10}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{30}\}$
$A_{10}\cap B_{10}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{10}=a_{18}$
$m=11$일 때, $A_{11}=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots,\ a_{22}\}$, $B_{11}=\{a_3,\ a_6,\ a_9,\ \cdots,\ a_{33}\}$
$A_{11}\cap B_{11}=\{a_6,\ a_{12},\ a_{18}\}$, $b_{11}=a_{18}$
$\vdots$
이와 같은 과정을 반복하면
$b_{3k+3}=b_{3k+4}=b_{3k+5}=a_{6k+6}\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
$a_n=\dfrac{4}{3}+(n-1)\times\dfrac{1}{3}$이므로
$a_{6k+6}=\dfrac{4}{3}+\{(6k+6)-1\}\times\dfrac{1}{3}=2k+3$
따라서
$$\sum_{m=6}^{20}b_m=\sum_{k=1}^{5}(b_{3k+3}+b_{3k+4}+b_{3k+5})=\sum_{k=1}^{5}3a_{6k+6}$$
$$=3\sum_{k=1}^{5}a_{6k+6}=3\sum_{k=1}^{5}(2k+3)=3\times\left(2\times\frac{5\times6}{2}+3\times5\right)=135$$
54) [정답] 21

[해설]
집합 S_n의 원소는
$(-2)^0a_1+(-2)^1a_2+(-2)^2a_3+\ \cdots\ +(-2)^{n-1}a_n$
$=a_1-2a_2+2^2a_3-\ \cdots\ +(-2)^{n-1}a_n$
과 같이 나타낼 수 있다.
집합 S_3의 원소는 $a_1-2a_2+4a_3$의 꼴로 나타나고 $a_k(k=1,\ 2,\ 3)$의 값은 0 또는 1이다.
따라서 a_1+4a_3의 값은 0, 1, 4, 5로 4가지
$-2a_2$의 값은 -2, 0으로 2가지
경우가 될 수 있으므로
$S_3=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

즉, $p=8$

집합 S_n에 속하는 원소 $a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{n-1}a_n$의 값은

$a_{2i-1}=1,\ a_{2i}=0\ (i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

일 때 최대이다.

자연수 j에 대하여 $n=2j$라 하면 집합 S_n에 속하는 원소의 최댓값은

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{2j-1}a_{2j}$

$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0$

$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}=\dfrac{2^{2j}-1}{4-1}=\dfrac{2^{2j}-1}{3}$

$n=2j+1$이라 하면

$a_1-2a_2+2^2a_3-\cdots+(-2)^{(2j+1)-1}a_{2j+1}$

$=1-0+2^2-0+\cdots+(-2)^{2j-2}-0+(-2)^{2j}$

$=1+2^2+\cdots+2^{2j-2}+2^{2j}=\dfrac{2^{2j+2}-1}{3}$

$\dfrac{2^{2j}-1}{3}\le 5453\le\dfrac{2^{2j+2}-1}{3}$에서

$\dfrac{2^{12}-1}{3}=\dfrac{4095}{3}=1365,\ \dfrac{2^{14}-1}{3}=\dfrac{16383}{3}=5461$이고

$5453=5461-8$이므로

$5453=1+2^2+2^4+\cdots+2^{12}-2^3$

따라서 5453을 원소로 갖는 S_n 중 n의 값이 최소인 경우는 $n=2\times6+1=13$일 때이다.

그러므로 $q=13$

따라서 $p+q=8+13=21$