제 2 교시

# 수학 영역 (미적분)

23. [2023년 6월 (미적분) 23번]

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

1) ⑤

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}$$
$$=\frac{5}{2}$$

**[다른 풀이]**

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n\underset{+0}{}}-\sqrt{n^2+4n\underset{+0}{}}\right)$$ 교체☆

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n+\left(\frac{9}{2}\right)^2}-\sqrt{n^2+4n+4}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(n+\frac{9}{2}\right)-(n+2)\right\}$$
$$=\frac{5}{2}$$

**Analysis**

극한이기 때문에 상황만 잘 맞으면 아래와 같이 계산하는 것도 가능하다. 유리화보다 훨씬 편리하다.

$$\sqrt{n^2+2an+b}\fallingdotseq\sqrt{n^2+2an+a^2}=n+a$$

☆교체

24. [2023년 6월 (미적분) 24번]

매개변수 $t$로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

2) ④

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

$\therefore$ $t=2$를 대입하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6\times2\times(2^2+1)}{-5\times2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

제 2 교시

# 수학 영역 (미적분)

25. [2023년 6월 (미적분) 25번]

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, $a$와 $b$는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

$\lim_{x\to 0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$

$\therefore\ b=3$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$

$=\dfrac{8a}{3}\times\lim_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2^{ax}-1}{ax}}{\dfrac{2^{3x}-1}{3x}}$

$=\dfrac{8a}{3}\times\dfrac{\ln 2}{\ln 2}$

$=\dfrac{8a}{3}=16$

$\therefore\ a=6$

$\therefore\ a+b=6+3=9$

26. [2023년 6월 (미적분) 26번]

$x$에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 $t$의 값의 합은? [3점]

① $-\dfrac{17}{2}$ ② $-\dfrac{33}{4}$ ③ -8

④ $-\dfrac{31}{4}$ ⑤ $-\dfrac{15}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

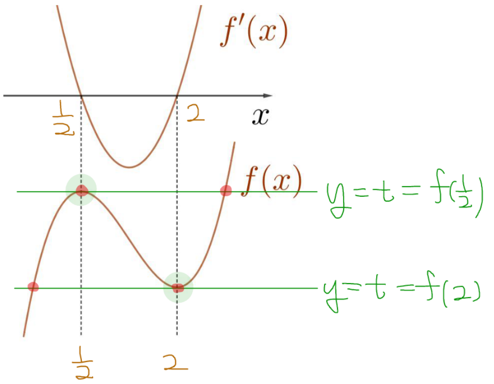
$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하자.

$f'(x)=2x-5+\dfrac{2}{x}$

$=\dfrac{2x^2-5x+2}{x}$

$=\dfrac{(2x-1)(x-2)}{x}$

$x>0$이므로 $y=(2x-1)(x-2)$의 부호변화와 $f'(x)$의 부호변화가 동일하다.




$t=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}-2\ln 2$

$t=f(2)=-6+2\ln 2$

$\therefore$ 모든 실수 $t$의 값의 합은

$\left(-\dfrac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\dfrac{33}{4}$

제 2 교시

# 수학 영역 (미적분)

27. [2023년 6월 (미적분) 27번]

실수 $t(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 할 때,

$\displaystyle\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

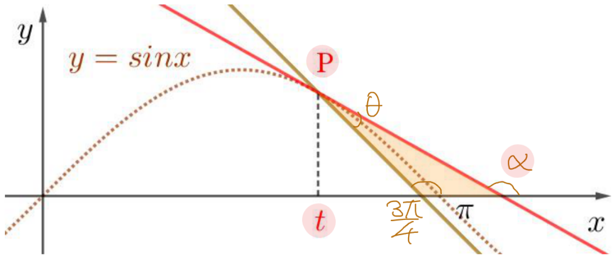
① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

기울기와 각도에 관련된 문제가 나오면? → tan활용!

기울기가 $-1$인 직선은 $x$축의 양의 방향이 이루는 각이

$\frac{3}{4}\pi$ ($\because\ \tan\frac{3}{4}\pi=-1$)




$y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$의 접선의 기울기는 $\cos t$

접선과 $x$축의 양의 방향이 이루는 각을 $\alpha$라 하면

$\cos t=\tan\alpha$

$\therefore\ \alpha=\theta+\frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow \theta=\alpha-\frac{3}{4}\pi$

$$\tan\theta=\tan\left(\alpha-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{3}{4}\pi}{1+\tan\alpha\tan\frac{3}{4}\pi}$$

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to0+$

$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$$

28. [2023년 6월 (미적분) 28번]

두 상수 $a(a>0)$, $b$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 $x$에 대하여
> $\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$
> 이다.
> (나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$

④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) $f(0)$, $f(2)$ 파악하기

$f(0)=f(2)+1$를 활용하기 위해

$x=0$, $x=2$ 대입하기

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$

$\Leftrightarrow\ \{f(0)\}^2-\{f(2)\}^2+2\{f(0)-f(2)\}=0$

$\Leftrightarrow\ \{f(0)-f(2)\}\{f(0)+f(2)+2\}=0$

$\Leftrightarrow\ f(0)=f(2)$ or $f(0)+f(2)+2=0$

$\therefore\ f(0)+f(2)+2=0$ ($\because\ f(0)=f(2)+1$)

$\therefore\ f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(2)=-\frac{3}{2}$

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$

$\Leftrightarrow\ \left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=a+b$

$\therefore\ a+b=-\frac{3}{4}$

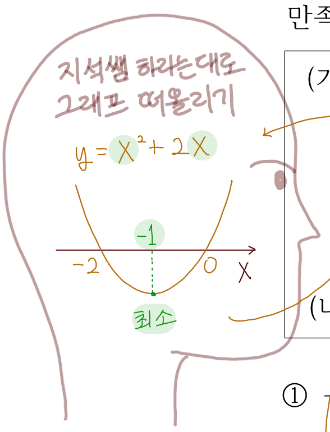
제 2 교시

# 수학 영역

(step2) 최소 찾기

[2023년 6월 (미적분) 28번]

두 상수 $a(a>0)$, $b$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]




(가) 모든 실수 $x$에 대하여

$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$

이다.

$\therefore$ $f(x)=-1$일 때 최소  $\therefore$ $x=1$일 때 최소

$\therefore$ $f(1)=-1$

(나) $f(0)=f(2)+1$

$\cos\pi x=t$ $(-1\le t\le 1)$ 치환

$g(t)=at^3e^{1-t^2}+b$의 최소파악하기

$g'(t)=a\{3t^2e^{1-t^2}+t^3e^{1-t^2}(-2t)\}$

$=a\underbrace{t^2}_{\ge 0}\underbrace{e^{1-t^2}}_{\ge 0}\underbrace{(3-2t^2)}_{\ge 0}\ge 0$ $(\because -1\le t\le 1)$

$\therefore$ $t=-1$에서 $g(t)$ 최소

$\cos\pi x=-1$

① $-\dfrac{1}{16}$ ② $-\dfrac{7}{64}$ ③ $-\dfrac{5}{32}$

④ $-\dfrac{13}{64}$ ⑤ $-\dfrac{1}{4}$

$\{f(1)\}^2+2f(1)=a(-1)^3\times e^0+b$

$\therefore$ $-1=-a+b$

이전 페이지 계산

$\therefore$ $a=\dfrac{1}{8}$, $b=-\dfrac{7}{8}$ $\left(\because a+b=-\dfrac{3}{4}\right)$

$\therefore$ $a\times b=\dfrac{1}{8}\times\left(-\dfrac{7}{8}\right)=-\dfrac{7}{64}$

※ 함수 $f(x)$가 연속이고

$f(0)=-\dfrac{1}{2}$, $f(2)=-\dfrac{3}{2}$이므로

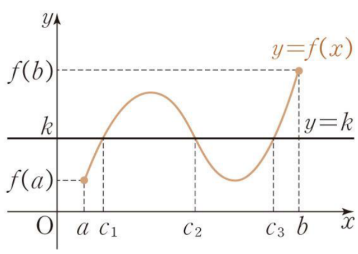
사잇값정리에 의해 $f(x)=-1$의 근이

열린구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

## ■ 사잇값 정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 $k$에 대하여 다음을 만족시키는 $c$가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

$$f(c)=k$$



제 2 교시

# 수학 영역 (미적분)

29. [2023년 6월 (미적분) 29번]
세 실수 $a$, $b$, $k$에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$위에 있다. 곡선 $C$ 위의 점 A에서의 접선과 곡선 $C$ 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, $k^2$의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(step1) 수직 관계의 두 기울기의 곱=-1

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$$

{$\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선 기울기}
×{$\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기}=-1

$$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}\times\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=-1$$

$$\therefore\ 5k^2+(a+b)2k+ab=0$$

(step2) 이제 ab와 a+b의 값을 구해야 한다

$x^2-2xy+2y^2=15$에 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$ 대입

$$a^2-2a(a+k)+2(a+k)^2=15$$

$$\therefore\ a^2+2ka+2k^2-15=0$$

$\mathrm{B}(b,\ b+k)$를 대입해도 같은 형태의 계산이 된다.

$$\therefore\ b^2+2kb+2k^2-15=0$$

$\therefore\ x^2+2kx+2k^2-15=0$의 두 근이 $a$, $b$가 된다!

근과 계수의 관계에 의해

$a+b=-2k$, $ab=2k^2-15$

$$5k^2+(a+b)2k+ab=0$$

$$\Leftrightarrow 5k^2-2k\cdot 2k+2k^2-15=0$$

$$\Leftrightarrow 3k^2=15$$

$$\therefore\ k^2=5$$

## Analysis

‘수직’이라는 조건이 나왔을 때 그냥 그 수직인 모양을 떠올리는 것에 머물지 말고 수직 조건을 어떻게
식으로 표현할지, 또는 수직의 도형의 성질을 어떻게 활용할지를 고민하는 논리적인 사고를 해야 한다.

제 2 교시

# 수학 영역 (미적분)

30. [2023년 6월 (미적분) 30번]

수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 $n$에 대하여

$$b_n = \begin{cases} -1 & (a_n \le -1) \\ a_n & (a_n > -1) \end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 $-3$이다. |
| (나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 $8$이다. |

$b_3 = -1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

$|r| \ge 1$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$ or $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$ or $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$가 수렴하지 않는다.

$\therefore -1 < r < 1$

$b_3 = -1$이므로 $a_3 \le -1$

$0 < r < 1$이면 $a_n$의 모든 항은 음수이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 8$ (양수)에 모순이다.

$\therefore -1 < r < 0$

$\therefore a_{2n-1} < 0,\ a_{2n} > 0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \dfrac{a_2}{1-r^2} = 8$

$\times r^2$ $\times r^2$

$a_5 \le -1$이면

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = b_1 + b_3 + b_5 + \cdots$

$= (-1) + (-1) + (-1) + \ominus + \cdots < -3$ 모순

$\therefore a_5 > -1$

$\times r^2$ $\times r^2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = (-1) + (-1) + a_5 + a_7 + \cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -2 + \dfrac{a_5}{1-r^2} = -3 \Leftrightarrow \dfrac{a_5}{1-r^2} = -1$

$$\frac{\dfrac{a_5}{1-r^2}}{\dfrac{a_2}{1-r^2}} = r^3 = -\frac{1}{8}$$

$\therefore r = -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{a_2}{1-r^2} = 8 \Leftrightarrow \frac{a_1\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2} = 8$$

$\therefore a_1 = -12$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = 12 + 6 + 3 + \cdots = \dfrac{12}{1-\dfrac{1}{2}} = 24$

$\times|r|$ $\times|r|$

$= \dfrac{1}{2}$