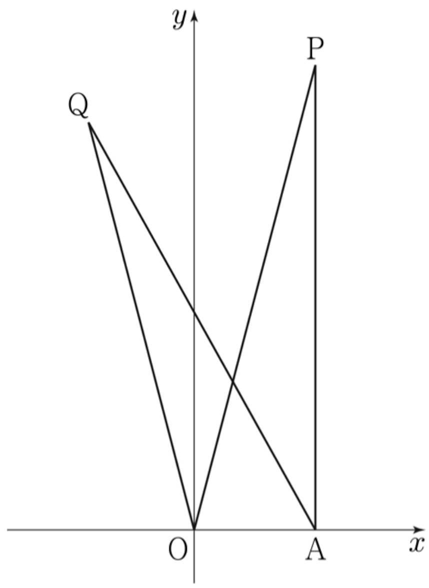
Question

52. [2023년 4월 (공통) 21번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$이다.
(나) $\cos(\angle\mathrm{OPA})=\cos(\angle\mathrm{OQA})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$ 의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



52. [2023년 4월 (공통) 21번]

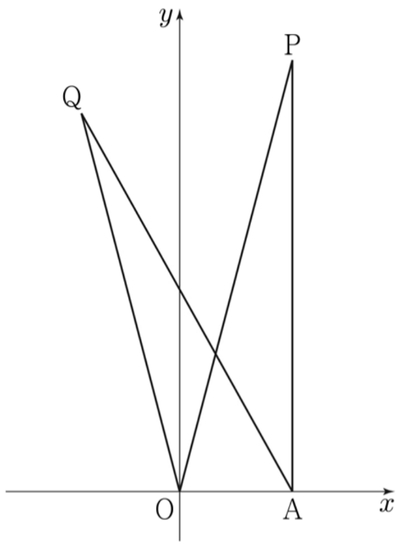
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(2,0)$과 y좌표가 양수인 서로 다른 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

$b>a$

(가) $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}=2\sqrt{15}$ 이고 $\overline{\mathrm{OP}}>\overline{\mathrm{OQ}}$ 이다.

(나) $\cos(\angle \mathrm{O}\underset{\theta}{\mathrm{P}}\mathrm{A})=\cos(\angle \mathrm{O}\underset{\theta}{\mathrm{Q}}\mathrm{A})=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

사각형 OAPQ의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\sqrt{15}$ 일 때, $p\times q$ 의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



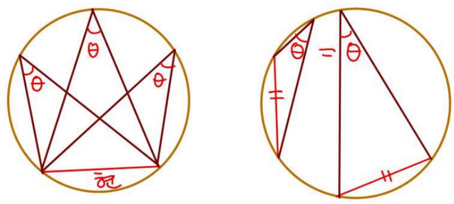
Skill Double코사인법칙 (2) 분각

✓ 원에 내접하는 사각형에서
대각선에 의해 쪼개진 각이 제시됐을 때
→ 원주각이 같은 것 활용
→ 코사인법칙 2번 쓰기

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설
22

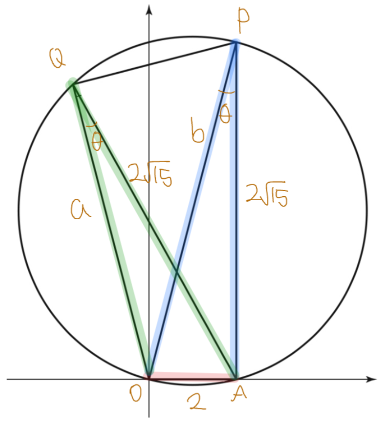
구하는 것 ▸ □OAPQ 넓이

■ [중학도형] 원주각 동일 ⇔ 현의 길이 동일



→ $\cos(\angle \mathrm{OPA})=\cos(\angle \mathrm{OQA})$

→ □OAPQ에 대한 외접원이 존재한다.



■ 외접원과 사각형 → 분각 → Double코사인법칙

(step1) Double코사인법칙 (2) 분각

$\overline{\mathrm{OA}}^2=2^2$

$=a^2+(2\sqrt{15})^2-2\cdot a\cdot 2\sqrt{15}\cdot\cos\theta$

$=b^2+(2\sqrt{15})^2-2\cdot b\cdot 2\sqrt{15}\cdot\cos\theta$

$x=a,\ b$일 때

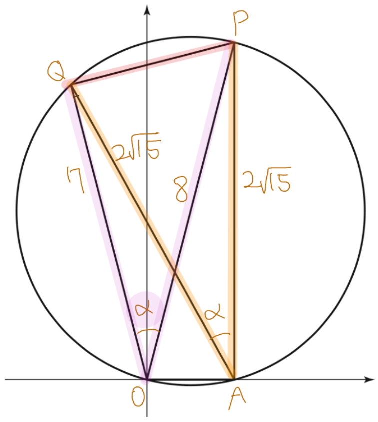
$2^2=x^2+(2\sqrt{15})^2-2\cdot x\cdot 2\sqrt{15}\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$\Leftrightarrow\ x^2-15x+56=0$

$\therefore\ x=7$ or 8

$\therefore\ a=7,\ b=8\ (\because\ b>a)$

(step2) Double코사인법칙 (2) 분각



$\overline{PQ}^2$

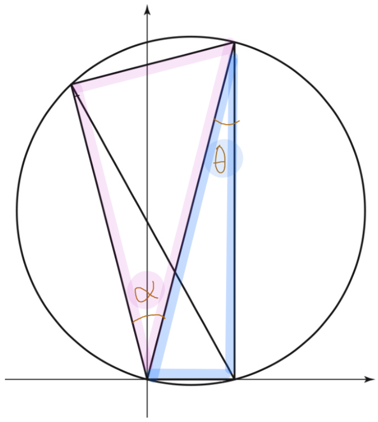
$=(2\sqrt{15})^2+(2\sqrt{15})^2-2\cdot(2\sqrt{15})^2\cdot\cos\alpha$

$=7^2+8^2-2\cdot7\cdot8\cdot\cos\alpha$

$\therefore\ \cos\alpha=\dfrac{7}{8},\ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$

(step3) □OAPQ 넓이

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$



□OAPQ넓이

={△OPQ넓이}+{△OPA넓이}

$=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8\cdot\dfrac{\sqrt{15}}{8}+\dfrac{1}{2}\cdot8\cdot2\sqrt{15}\cdot\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{11}{2}\sqrt{15}$

$\therefore\ p\times q=22$