1. 답 ④	2. 답 ⑤	3. 답 ①	4. 답 ②
5. 답 ③	6. 답 ③	7. 답 ②	8. 답 ①
9. 답 ③	10. 답 ③	11. 답 13	12. 답 92
13. 답 ①	14. 답 ②	14. 답 ②	16. 답 ④
17. 답 ④	18. 답 ④	19. 답 ②	20. 답 ④
21. 답 ⑤	22. 답 ③	23. 답 ④	24. 답 ②
25. 답 ④	26. 답 ②	27. 답 ④	28. 답 80
29. 답 30	30. 답 90	31. 답 ④	32. 답 10
33. 답 ③	33. 답 ③	35. 답 ②	36. 답 300
37. 답 ⑤	38. 답 ③	39. 답 7	40. 답 11
41. 답 4	42. 답 13	43. 답 ③	44. 답 1
45. 답 ②	46. 답 ②	47. 답 9	48. 답 ②
49. 답 ⑤	50. 답 ⑤	51. 답 17	52. 답 ②
53. 답 ②	54. 답 250	55. 답 6	56. 답 ④
57. 답 ③	58. 답 ④	59. 답 ⑤	60. 답 ①
61. 답 ②	62. 답 ③	63. 답 49	64. 답 ②
65. 답 ③	66. 답 ②	67. 답 ④	68. 답 ②
69. 답 ②	70. 답 ②	71. 답 6	72. 답 ④
73. 답 ③	74. 답 ④		

***1.* 답 ④**

[해설] $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x^2-4x+3}=1$에서 $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)(x-3)}=1$

이므로 양변에 분모의 최소공배수 $(x-1)(x-3)$을 곱하면

$(x-3)+2=(x-1)(x-3),\ x-1=x^2-4x+3$

$x^2-5x+4=0,\ (x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

이때, $x=1$은 분모를 0이 되게 하므로 무연근이고 $x=4$는 분모를 0이 되지 않게 하므로 근이다.

따라서 모든 근의 합은 4이다.

***2.* 답 ⑤**

[해설] $\frac{1-x}{x}+\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=\frac{1}{2}$

$\frac{1-x}{x}+\frac{(x^2-x)+1}{x^2-x}=\frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{x}-1\right)+\left(1+\frac{1}{x^2-x}\right)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{2},\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{2}$

양변에 분모의 최소공배수 $2x(x-1)$을 곱하면

$2(x-1)+2=x(x-1)$

$x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x=0$은 분모를 0으로 하므로 무연근이고, $x=3$은 주어진 방정식의 근이다.

$\therefore\ \alpha=3$

***3.* 답 ①**

[해설] $f(x)=y$로 놓으면 $\frac{x-2}{x+1}$

$(x+1)y=x-2$에서 $x=\frac{y+2}{1-y}$

$\therefore f^{-1}(x)=-\frac{x+2}{x-1}$

$\therefore f(x)+f^{-1}(x)=\frac{x-2}{x+1}-\frac{x+2}{x-1}$

$\frac{x-2}{x+1}-\frac{x+2}{x-1}=1$ 에서 양변에 x^2-1을 곱하여 정리하면

$x^2+6x-1=0$

따라서 방정식 $x^2+6x-1=0$의 판별식 $D>0$이고, 두 근은 모두 무연근이 아니므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -6이다.

***4.* 답 ②**

[해설] $\frac{x^2+x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x-1}=\frac{3}{(x-1)(x-2)}-2$

에서 분모의 최소공배수 $(x-1)(x-2)$를 양변에 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)-(x+2)(x-2)=3-2(x-1)(x-2)$

$x^3+x^2-6x+4=0$

$(x-1)(x^2+2x-4)=0$

이때, $x=1$은 무연근이므로 구하는 모든 실근의 합은

$x^2+2x-4=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

***5.* 답 ③**

[해설] 양변에 분모의 최소공배수 x^3-1을 곱하면

$x(x^2+x+1)-3x=x^3-1-x(x-1)$

$2x^2-3x+1=0$

$(2x-1)(x-1)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

그런데 $x=1$은 주어진 식의 분모를 0으로 하므로 무연근이고,

$x=\frac{1}{2}$은 분모를 0이 되게 하지 않으므로 근이다.

따라서, 구하는 근은 $x=\frac{1}{2}$뿐이므로 모든 근의 합은 $\frac{1}{2}$이다.

***6.* 답 ③**

[해설] 양변에 분모의 최소공배수 $(x^2-1)(x^2-5)$를 곱하면

$x^2(x^2-5)+2(x^2-1)=-4$, $x^4-3x^2+2=0$

$(x^2-1)(x^2-2)=0 \quad \therefore x=\pm 1$, $\pm\sqrt{2}$

그런데 $x=\pm 1$은 저어진 방정식의 분모를 0으로 하는 무연근이므로 구하는 근은 $x=\pm\sqrt{2}$이며, 그 곱은 -2이다.

***7.* 답 ②**

[해설] $\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}$에서

$\frac{3}{(x+4)(x+7)}=\frac{3}{(x+5)(x+8)}$

$(x+5)(x+8)=(x+4)(x+7)$

$x^2+13x+40=x^2+11x+28$

$2x=-12$

$\therefore x=-6$

이때, $x=-6$은 분모를 0이 되지 않게 하므로 근이다.

따라서 구하는 근의 개수는 1개다.

8. 답 ①

[해설] 주어진 분수방정식에서

$$\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+6}$$

양변을 각각 통분하면

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{(x+5)(x+6)}$$

양변에 분모의 최소공배수 $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6)$을 곱하면

$(x+5)(x+6)=(x+3)(x+4)$

$4x=-18$

$\therefore\ x=-\frac{9}{2}$

이 값은 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하지 않으므로 근이다.

$\therefore\ 2\alpha+10=2\cdot\left(-\frac{9}{2}\right)+10=1$

9. 답 ③

[해설] 주어진 방정식에서

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)+\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=\left(1+\frac{1}{x+2}\right)+\left(1+\frac{1}{x+3}\right)$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$$

$$\frac{2}{x(x+2)}=\frac{-2}{(x+1)(x+3)}$$

양변에 분모의 최소공배수 $x(x+1)(x+2)(x+3)$을 곱하면

$(x+1)(x+3)=-x(x+2)$

$x^2+4x+3=-x^2-2x$

$2x^2+6x+3=0$

이때, 방정식 $2x^2+6x+3=0$의 근은 정수가 아니므로 분모를 0이 되지 않게 한다.

따라서 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{6}{2}=-3$

10. 답 ③

[해설] $\frac{2}{x^4+2x^3-1}+\frac{5}{x^4+2x^2+2}=2$에서

$x^4+2x^2=X$라 하면

$$\frac{2}{X-1}+\frac{5}{X+2}=2$$

양변에 분모의 최소공배수 $(X-1)(X+2)$를 곱하면

$2(X+2)+5(X-1)=2(X-1)(X+2)$

$7X-1=2X^2+2X-4$

$2X^2-5X-3=0,\ (2X+1)(X-3)=0$

$\therefore X=3\,(\because x^4+2x^4=X\geq 0)$

즉, $x^4+2x^2=3$에서 $x^4+2x^2-3=0$

$(x^3+3)(x^2-1)=0$

$(x^3+3)(x-1)(x+1)=0$

따라서 실수 x는 -1 또는 1로 2개다.

11. 답 13

[해설] $\frac{x^2}{x+6}+\frac{x+6}{x^2}=2$에서 $\frac{x^2}{x+6}=t$ 라 하면

$t+\frac{1}{t}=2,\ t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0,\ \ \therefore t=1$

즉 $\frac{x^2}{x+6}=1$이므로

$x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(-2)^2+3^2=13$

12. 답 92

[해설] 삼차방정식 $x^3-6x^2-15x+k=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=6$ …… ㉠

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-15$ …… ㉡

$\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}=0$에서 양변에

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$를 곱하면

$(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)=0,$

$x\neq\alpha,\ x\neq\beta,\ x\neq\gamma$

정리하면

$3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$

㉠, ㉡을 대입하면

$3x^2-12x-15=0$

$x^2-4x-5=0,\ (x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

이때, 분수방정식이 단 한 개의 실근을 가지므로 $-1, 5$ 중 어느 하나는 무연근이 된다.

(ⅰ) $x=-1$이 무연근일 때,

$-1-6+15+k=0\quad \therefore k=-8$

(ⅱ) $x=5$가 무연근 일 때,

$125-150-75+k=0\quad \therefore k=100$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a+b=-8+100=92$

13. 답 ①

[해설] 분수방정식 $\frac{1}{x(x-a)}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2a}$의 한 근이 3이므로 $x=3$을 대입하면

$\frac{1}{3(3-a)}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2a}$ …… ㉠

㉠의 양변에 분모의 최소공배수 $6a(3-a)$를 곱하면

$2a+2a(3-a)=3(3-a)$

$2a^2-11a+9=0,\ (2a-9)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=\frac{9}{2}$ …… ㉡

이때, ㉡은 ㉠의 분모를 0이 되지 않게 하므로 모두 ㉠의 근이다.
따라서 모든 상수 a의 값의 합은
$1+\frac{9}{2}=\frac{11}{2}$

14. 답 ②

[해설] $\frac{1}{x}-\frac{1}{x-a}=2$ …… ㉠
에서 $a=0$이면 $S=\varnothing$이므로 모순이다.
$\therefore a\neq 0$
㉠의 양변에 분모의 최소공배수 $x(x-a)$를 곱하면
$(x-a)-x=2x(x-a)$
이것을 정리하면
$2x^2-2ax+a=0$ …… ㉡
그런데 $x=0$과 $x=a$는 방정식 ㉡의 근이 아니므로 ㉠은 무연근을 갖지 않는다.
따라서 방정식 ㉠이 단 하나의 실근을 가지려면 ㉡은 중근을 가져야 하므로 방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-2a=0,\ a(a-2)=0$
$\therefore a=2\ (\because a\neq 0)$

15. 답 ④

[해설] 주어진 방정식의 양변에 분모의 최소공배수 $(x-1)(x+2)$를 곱하면 $x+2+2(x-1)=a(x-1)(x+2)$
$\therefore ax^2+(x-3)x-2a=0$ … ㉠
$f(x)=ax^2+(a-3)x-2a$로 놓으면
$f(1)=-3\neq 0,\ f(-2)=6\neq 0$
이므로 ㉠의 두 근을 $\alpha, \alpha+3$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha(\alpha+3)=-2$
$\alpha^2+3\alpha+2=0,\ (\alpha+1)(\alpha+2)=0$
$\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=-1$
그런데 $\alpha=-2$ 는 무연근이므로 $\alpha=-1$
따라서 주어진 방정식의 두 근은 $-1, 2$이므로 두 근의 합은
$-1+2=1$

16. 답 ④

[해설] $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x-2\sin\theta}{x^2-1}$의 양변에 분모의 최소공배수 x^2-1을 곱하면
$(x+1)+(x-1)=x-2\sin\theta$
$x=-2\sin\theta$
이때, 주어진 분수방정식의 근이 존재하지 않기 위해서는
$x=-2\sin\theta$가 무연근이 되어야 하므로
$-2\sin\theta=-1$ 또는 $-2\sin\theta=1$
즉, $\sin\theta=\frac{1}{2}$ 또는 $\sin\theta=-\frac{1}{2}$이므로
$\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때, $\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$
$\sin\theta=-\frac{1}{2}$일 때, $\theta=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $\theta=\frac{11}{6}\pi$
따라서 모든 θ의 값의 합은
$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=4\pi$

17. 답 ④

[해설] 양변에 분모의 최소공배수 $x(x+1)(x-1)$을 곱하면
$(a-1)(b-1)x+x(x-1)=ab(x-1)$
$x^2-(a+b)x+ab=0.\ (x-a)(x-b)=0$
$\therefore x=a$ 또는 $x=b$
주어진 방정식이 근을 갖지 않으려면 $x=a,\ x=b$가 무연근이어야 하므로 $\{a,\ b\}\subset\{-1,\ 0,\ 1\}$이다.
$a,\ b$는 서로 다른 두 실수이므로 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(-1,\ 0),\ (-1,\ 1),\ (0,\ -1),\ (0,\ 1),\ (1,\ -1),\ (1,\ 0)$
이다.
따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 6이다.

18. 답 ④

[해설] $\frac{(a-1)(b-1)}{x-1}+\frac{(a+1)(b+1)}{x+1}=\frac{2ab}{x}$의 양변에 분모의 최소공배수 $x(x-1)(x+1)$을 곱하면
$(a-1)(b-1)x(x+1)+(a+1)(b+1)x(x-1)$
$=2ab(x-1)(x+1)$
$x^2(ab-a-b+1+ab+a+b+a-2ab)$
$+x(ab-a-b+1-ab-a-b-1)+2ab=0$
$2x^2-2(a+b)x+2ab=0$
$x^2-(a+b)x+ab=0$
$(x-a)(x-b)=0$
$\therefore x=a$ 또는 $x=b$
그런데 주어진 분수방정식이 근을 갖지 않으려면 $x=a$와 $x=b$는 분모를 0이 되도록 하여야 한다.
즉, a, b의 값은 $-1, 0, 1$이어야 한다.
그런데 $a\neq b$이므로 순서쌍 (a,b)는 $(0,1),\ (0,-1),\ (1,0), (1,-1), (-1,0), (-1,1)$이다.
따라서 순서쌍 (a,b)의 개수는 6개다.

19. 답 ②

[해설] $x-\frac{7}{5}=\frac{z}{yz-1}=\frac{1}{y-\frac{1}{z}}$이므로
$\left(x-\frac{7}{5}\right)\left(y-\frac{1}{z}\right)=1$
$(5x-7)(yz-1)=5z$
세 정수 x,y,z에 대하여 $5x-7$은 5의 배수가 아니며 $5z$는 5의 배수이므로 $yz-1$은 5의 배수이어야 한다.
$yz-1=5k$ (k는 정수)로 놓으면
$k(5x-7)=z$
$yk(5x-7)=yz$
$yk(5x-7)=5k+1$
$k(5xy-7y-5)=1$
$k, 5xy-7y-5$는 모두 정수이므로
$k=1$ 또는 $k=-1$
(ⅰ) $k=1$일 때,

$yz=6,\quad 5x-7=z$

$\therefore\ x=1, y=-3, z=-2$ 또는 $x=2, y=2, z=3$

(ii) $k=-1$일 때,

$yz=-4,\ 5z-7=-z$

$\therefore\ x=1, y=-2, z=2$

따라서 $x+y+z$의 최댓값은

$2+2+3=7$

20. 답 ④

[해설] 양변에 분모의 최소공배수 (x^2-a^2)을 곱하면

$(x-a)+2a(x+a)=1$

$(2a+1)x=-2a^2+a+1$

$(2a+1)x=-(2a+1)(a-1)$ …… ㉠

$a=-\dfrac{1}{2}$일 때, 방정식 ㉠은 무수히 많은 해를 가지므로 집합 A는 무한집합이다.

$a\neq-\dfrac{1}{2}$일 때, $x=-a+1$의 값이 a, $-a$이면 주어진 방정식의 분모가 0이 되어 근을 갖지 않으므로 집합 A는 공집합이다.

(i) $x=a$이면

$-a+1=a$

$2a=1\qquad\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

(ii) $x=-a$이면

$-a+1=-a$이므로 $x=-a$를 만족하는 a의 값은 존재하지 않는다.

따라서 (i), (ii)에서 $a=\dfrac{1}{2}$이므로 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{1}{2}$이다.

21. 답 ⑤

[해설] $\dfrac{3}{x}-\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x+a}{x(x+2)}$의 양변에 분모의 최소공배수 $x(x+2)$를 곱하면

$3(x+2)-x^2=x+a$

$x^2-2x+a-6=0$ …… ㉠

ㄱ. $a=3$일 때, ㉠은

$x^2-2x-3=0,\ (x-3)(x+1)=0$

이때, $x=3$ 또는 $x=-1$은 주어진 분수방정식의 무연근이 아니므로

$n(S)=2$이다. (참)

ㄴ. $n(S)=0$이면 ㉠은 0과 -2를 모두 근으로 갖거나 허근을 가져야 한다. 그런데 ㉠이 0과 -2를 모두 근으로 가질 수 없으므로

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(a-6)<0$에서 $a>7$

따라서 $n(S)=0$이 되도록 하는 정수 a의 최솟값은 8이다. (참)

ㄷ. (i) 방정식 ㉠이 중근을 갖는 경우

$\dfrac{D}{4}=(-1)^2-(a-6)=0$에서 $a=7$

이것을 방정식 ㉠에 대입하면

$x^2-2x+1=0,\ (x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$

$x=1$은 주어진 분수방정식의 분모를 0이 되게 하지 않으므로 주어진 분수방정식의 근이다.

(ii) $x=0$이 방정식 ㉠의 근인 경우

$a-6=0,\ a=6$

이것을 방정식 ㉠에 대입하면

$x^2-2x=0,\ x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

이때, $x=0$은 주어진 분수방정식의 무연근이고, $x=2$가 주어진 분수방정식의 근이다.

(iii) $x=-2$가 방정식 ㉠의 근이 경우

$(-2)^2-2(-2)+a-6=0$

$\therefore\ a=-2$

이것을 방정식 ㉠에 대입하면

$x^2-2x-8=0,\ (x-4)(x+2)=0$

$\therefore\ x=4$ 또는 $x=-2$

이때, $x=-2$은 주어진 분수방정식의 무연근이고, $x=4$가 주어진 분수방정식의 근이다.

(i), (ii), (iii)에서 $n(S)=1$이 되도록 하는 정수 a의 값은 $-2,\ 6,\ 7$로서 모두 3개 존재한다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 답 ③

[해설] ㄱ. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+a}=0$ … ㉠

양변에 분모의 최소공배수 $(x+1)(x-1)(x+a)$를 곱하면

$(x-1)(x+a)+(x+1)(x+a)+(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ 3x^2+2ax-1=0\ (a>1)$ … ㉡

$x=1,-1,-a$는 ㉡의 근이 아니므로 ㉠과 ㉡은 서로 동치이다.

㉡에서 $\dfrac{D}{4}=a^2+3>0$

따라서 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(x)=3x^2+2ax-1$이라 하면

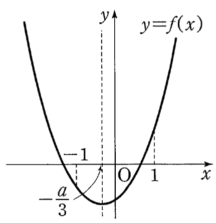
$y=f(x)$의 그래프는 $a>1$에서

대칭축 : $x=-\dfrac{a}{3}<-\dfrac{1}{3}$

$f(1)=2+2a>0$

$f(-1)=-2a+2<0$

이므로 오른쪽 그림과 같다.



그러므로 ㉠의 모든 근은 1보다 작다. (참)

ㄷ. ㉠은 -1보다 작은 근을 갖는다. (거짓)

23. 답 ④

[해설] $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}-f(x)=0$

$\Leftrightarrow\ \{f(x)\}^2-g(x)f(x)=0,\ g(x)\neq0$

$\Leftrightarrow\ f(x)\{f(x)-g(x)\}=0,\ g(x)\neq0$

$\Leftrightarrow\ f(x)=0$ 또는 $f(x)=g(x),\ g(x)\neq0$

(i) $f(x)=0$일 때

$x=-2$ 또는 $x=5$

그런데 $g(-2)=0$이므로 $x=5$

(ii) $f(x)=g(x)$일 때

$x=-2$ 또는 $x=3$

그런데 $g(-2)=0$이므로 $x=3$

따라서 (i), (ii)에서 $\dfrac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=f(x)$의 실근은 $x=3$ 또는 $x=5$이므로 구하는 실근의 총합은 8이다.

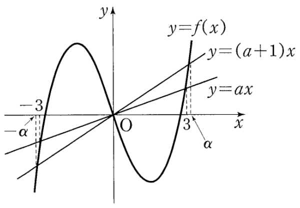
24. 답 ②

[해설] 주어진 조건에 의하여 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또한, $\dfrac{1}{f(x)-ax}=\dfrac{1}{x}$에서 $f(x)-ax=x$

$\therefore f(x)=(a+1)x$ (단, $x\neq 0$, $f(x)\neq ax$)

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=(a+1)x$의 교점의 x좌표는 다음 그림과 같이 α, $-\alpha$, 0 $(\alpha<0)$이다.



즉, 주어진 분수방정식의 해는 $x=-\alpha$ 또는 $x=\alpha$이므로

$(-\alpha)\cdot\alpha=-16$, $\alpha^2=16$

$\therefore \alpha=4$ $(\because a>0)$

따라서 $\alpha=\dfrac{f(3)}{3}$, $a+1=\dfrac{f(4)}{4}$이므로

따라서 $a=\dfrac{f(3)}{3}$, $a+1=\dfrac{f(4)}{4}$이므로

$\dfrac{f(3)}{3}+1=\dfrac{f(4)}{4}$, $4f(3)+12=3f(4)$

$\therefore 3f(4)-4f(3)=12$

25. 답 ④

[해설] $f(x)+g(x)=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}$에서

$f(x)+g(x)=\dfrac{f(x)+g(x)}{f(x)g(x)}$

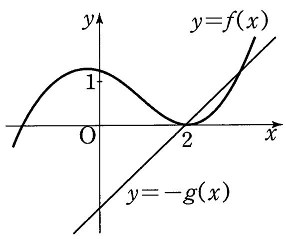
$\{f(x)+g(x)\}\left\{1-\dfrac{1}{f(x)g(x)}\right\}=0$

$\therefore f(x)=-g(x)$또는 $f(x)g(x)=1$ (단, $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$)

(i) $f(x)=-g(x)$인 경우

$y=-g(x)$의 그래프는 오른쪽 그래프와 같고 $y=f(x)$의 그래프와 세 점에서 만난다.

이때, $f(2)=g(2)=0$이므로 $x=2$는 주어진 방정식의 무연근이다. 그러므로 이 경우의 실근의 개수는 2이다.



(ii) $f(x)g(x)=1$인 경우, 즉, $f(x)=\dfrac{1}{g(x)}$인 경우

함수 $g(x)$의 기울기를 $m(m<0)$이라 하면

$g(x)=m(x-2)$이고, y절편은 $-2m$이며 주어진 그래프에서 $-2m>1$이다.

$y=\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{m(x-2)}$이고, y절편은 $-\dfrac{1}{2m}$이며

$0<-\dfrac{1}{2m}<1$이다.

즉, $y=\dfrac{1}{g(x)}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

그러므로 이 경우의 실근의 개수는 2이다.

따라서, (i), (ii)에 의해 주어진 방정식의 실근의 개수는 4이다.

26. 답 ②

[해설] $\dfrac{1}{f(x)+1}-\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{2}{x^2}$에서

$\dfrac{f(x)-1-f(x)-1}{\{f(x)\}^2-1}=\dfrac{2}{x^2}$

양변에 분모의 최소공배수 $x^2\left[\{f(x)\}^2-1\right]$을 곱하면

$\{f(x)\}^2-1=-x^2$이고 $f(x)\neq\pm1$, $x\neq0$

즉, $\{f(x)\}^2=1-x^2$이고 $f(x)\neq\pm1$, $x\neq0$

$\therefore$ $f(x)=\pm\sqrt{1-x^2}$이고 $f(x)\neq\pm1$, $x\neq0$

이때, 주어진 방정식의 해는 두 곡선

$y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$

의 교점의 x좌표 중에서 $f(x)\neq\pm1$, $x\neq0$을 만족하는 것들이다.

여기서 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 원 $x^2+y^2=1$과 같고, 주어진 그림에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$는 서로 다른 네 점에서 만나는데, $x\neq0$, $f(x)\neq\pm1$을 만족해야 하므로 교점 $(0,\ -1)$의 x좌표는 방정식의 해가 아니다.

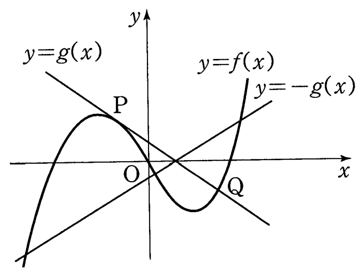
따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.

27. 답 ④

[해설] $\dfrac{1}{\{f(x)\}^2}-\dfrac{1}{\{g(x)\}^2}=0$

$\Leftrightarrow \{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2, f(x)\neq0, g(x)\neq0$

$\Leftrightarrow f(x)=g(x)$또는 $f(x)=-g(x), f(x)\neq0, g(x)\neq0$



이때, 주어진 방정식의 실근은 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 두 함수 $y=f(x), y=-g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다. (단, $f(x)\neq0, g(x)\neq0$)

따라서, 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

28. 답 80

[해설] 고장나기 전의 처음 속력을 $x km/$시라고 하면 나중의 속력은 $(x-20) km/$시이다.

$120km$를 처음 속력으로 가는 데 걸리는 시간은 $\dfrac{120}{x}$시간

$120km$를 나중 속력으로 가는 데 걸리는 시간은 $\frac{120}{x-20}$시간

30분 늦게 도착하였으므로

$\frac{120}{x-20}-\frac{120}{x}=\frac{1}{2}$

양변에 $2x(x-20)$을 곱하면

$240x-240(x-20)=x(x-20)$

$x^2-20x-4800=0$

$(x+60)(x-80)=0$

$x>20$이므로 $x=80(km/시)$

29. 답 30

[해설] 평일에 출근할 때 걸리는 시간 : $\frac{24}{2a}+\frac{6}{a}$(시간)

토요일에 출근할 때 걸리는 시간 : $\frac{24}{2a+20}+\frac{6}{a+10}$(시간)

토요일에 출근할 때는 평일에 출근하는 것보다 9분 빨리 회사에 도착하므로

$\frac{24}{2a}+\frac{6}{a}-\left(\frac{24}{2a+20}+\frac{6}{a+10}\right)=\frac{9}{60}$

$\frac{18}{a}-\frac{18}{a+10}=\frac{9}{60}\cdot\frac{2}{a}-\frac{2}{a+10}=\frac{1}{60}$

양변에 $60a(a+10)$을 곱하면

$120(a+10)-120a=a(a+10)$

$a^2+10a-1200=0$, $(a-30)(a+40)=0$

$\therefore a=30\ (\because a>0)$

30. 답 90

[해설] 버스의 속력은 v(km/시), 승용차의 속력은 $v+30$(km/시)이므로 버스가 A지점에서 B지점까지 가는데 걸리는 시간은 $\frac{240}{v}$(시간), 승용차가 A지점에서 B지점까지 가는데 걸리는 시간은 $\frac{240}{v+30}+\frac{2}{3}$(시간)이다.

즉, $\frac{240}{v}=\frac{240}{v+30}+\frac{2}{3}$ 이므로 양변에 $3v(v+30)$을 곱하면

$3\times240(v+30)=3\times240v+2v(v+30)$

$v^2+30v-90\times120=0$

$(v-90)(v+120)=0$

$\therefore v=90\ (\because v>0)$

31. 답 ④

[해설] A지점에서 C지점가지의 거리를 am, 소리의 속도를 $xm/초$라 하자. 처음 울린 경적이 사람에게 들리기 시작하는 시각은 $\frac{a}{x}$ 초 후이다.

마지막 울린 경적이 사람에게 들린 시각은 $\left(\frac{a}{x}+5\right)$초이다.

이는 고속열차가 A지점에서 B지점까지 움직이면서 경적을 울린 6초의 시간과 경적을 멈춘 뒤 그 마지막 경적 소리가 C지점에 있는 사람에게 전달되는 데 걸린 시간 $\frac{a-50\times6}{x}$초의 합과 같다. 즉,

$\frac{a}{x}+5=6+\frac{a-300}{x}$, $\frac{a}{x}-\frac{a-300}{x}=1$

양변에 x를 곱하면

$a-a+300=x$

$\therefore x=300(m/초)$

32. 답 10

[해설] A공장의 1시간당 자동차 생산량 : $\frac{50}{x}$(대)

B공장의 1시간당 자동차 생산량 : $\frac{50}{x+5}$(대)

A, B 두 공장을 동시에 6시간 가동하여 50대를 생산하면

$\frac{50}{x}\times6+\frac{50}{x+5}\times6=50$

$\frac{6}{x}+\frac{6}{x+5}=1$

$6(x+5)+6x=x(x+5)$

$x^2-7x-30=0$, $(x-10)(x+3)=0$

$\therefore x=10\ (\because x>0)$

33. 답 ③

[해설] 편집할 문서 K의 전체 양을 1로 놓고, A, B가 함께 문서를 편집하여 일을 모두 마치는 데 거리는 시간을 x분이라 하면

(A, B 두 명이 함께 문서를 편집을 할 때의 시간당 일의 양)

=(A 혼자서 문서 편집을 할 때의 시간당 일의 양)

+(B 혼자서 문서 편집을 할 때의 시간당 일의 양)

이므로

$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+12}+\frac{1}{x+27}$ …… ㉠

양변에 분모의 최소공배수 $x(x+12)(x+27)$을 곱하면

$(x+12)(x+27)=x(x+27)+x(x+12)$

$x^2=2^2\times3^4$에서 $x=\pm18$

그런데 $x>0$이르모 $x=18)$

$x=18$은 분수방정식 ㉠의 분모를 0으로 하지 않으므로 방정식의 근이다.

따라서 A, B 두 명이 함께 K문서의 편집을 모두 마치는 데 걸리는 시간은 18분이다.

34. 답 ①

[해설] 세 개의 수도관 A, B, C를 모두 사용하여 물탱크를 채우는 데 걸리는 시간을 x라 하면 수도관 A와 B, 수도관 B와 C, 수도관 B만 사용하여 물탱크를 채우는 데 걸리는 시간은 각각 $x+\frac{1}{2}$, $x+5$, $x+8$이다.

따라서 물탱크의 용량을 W라 하면 수도관 A와 B, 수도관 B와 C, 수도관 B로 시간 당 채울 수 있는 물의 양은 각각 $\frac{W}{x+\frac{1}{2}}$, $\frac{W}{x+5}$, $\frac{W}{x+8}$이므로 다음 등식이 성립한다.

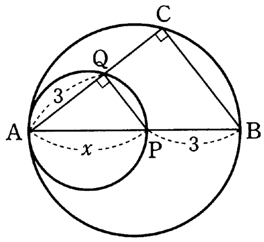
$\frac{W}{x+\frac{1}{2}}+\frac{W}{x+5}-\frac{W}{x+8}=\frac{W}{x}$

$\frac{1}{x+5}-\frac{1}{x+8}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$

$$\frac{3}{(x+5)(x+8)}=\frac{1}{x(2x+1)}$$
$3x(2x+1)=(x+5)(x+8)$
$6x^2+3x=x^2+13x+40$
$5x^2-10x-40=0$
$x^2-2x-8=0$
$(x-4)(x+2)=0$
$\therefore\ x=4\ (\because\ x>0)$

35. 답 ②

[해설] 오른쪽 그림과 같이 선분 AB와 선분 AC가 작은 원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면



$\triangle APQ \backsim \triangle ABC$

따라서 $\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{AQ}:\overline{QC}$

즉, $x:3=3:\overline{QC}$ 이므로

$\overline{QC}=\frac{9}{x}$

을이 갑보다 30분 일찍 목적지에 도착했으므로

$$\frac{x+3}{5}-\frac{3+\frac{9}{x}}{5}=\frac{1}{2}$$
$$x-\frac{9}{x}=\frac{5}{2}$$

분모의 최소공배수 $2x$를 양변에 곱하여 정리하면

$2x^2-5x-18=0,\ (2x-9)(x+2)=0$

$\therefore\ x=\frac{9}{2}\ (\because\ x>0)$

36. 답 300

[해설] 주어진 조건을 식으로 나타내면

$\frac{450}{a}=\frac{b}{100}$이고 $\frac{450}{a+150}=\frac{b-50}{100}$이므로

$$\frac{450}{a+150}=\frac{450}{a}-\frac{50}{100}$$
$$\therefore\ \frac{450}{a+150}-\frac{450}{a}+\frac{1}{2}=0$$

양변에 $2a(a+150)$을 곱하면

$900a-900(a+150)+a(a+150)=0$
$a^2+150a-900\cdot 150=0$
$(a+450)(a-300)=0$
$\therefore\ a=300\ (\because\ a>0)$

37. 답 ⑤

[해설] 직렬 연결일 경우

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}$$
$$\therefore\ C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}$$

따라서 주어진 회로의 합성 전기용량을 구하면

$$5=\frac{2x}{x+2}+2$$

양변에 $(x+2)$를 곱하면

$5(x+2)=2x+x(x+2)$
$x^2-x-10=0$
$\therefore\ x=\frac{1+\sqrt{41}}{2}\ (\because\ x>0)$

그런데 $6<\sqrt{41}<7,\ 7<1+\sqrt{41}<8$이므로

$$\frac{7}{2}<\frac{1+\sqrt{41}}{2}<4$$
$$\therefore\ \frac{7}{2}<x<4$$

38. 답 ③

[해설] 주어진 무리방정식의 무연근이 -1이므로 $x=-1$은 무리방정식 $-\sqrt{x=5}=x+k$를 만족한다.

$-\sqrt{-1+5}=-1+k$
$\therefore\ k=-1$

$\sqrt{x+5}=x-1$의 양변을 제곱하면

$x+5=x^2-2x+1$
$x^2-3x-4=0,\ (x+1)(x-4)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 주어진 방정식의 실근은 4이다.

39. 답 7

[해설] $x-\sqrt{x-1}=3$에서

$x-3=\sqrt{x-1}$ ...... ㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-7x+10=0, (x-2)(x-5)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=5$

(i) $x=2$를 방정식 ㉠에 대입하면

(좌변)$=2-3=-1$, (우변)$=\sqrt{2-1}=1$

(좌변)$\neq$(우변)이므로 $x=2$는 주어진 방정식의 근이 아니다.

(ii) $x=5$를 방정식 ㉠에 대입하면

(좌변)$=5-3=2$, (우변)$=\sqrt{5-1}=2$

(좌변)$=$(우변)이므로 $x=5$는 주어진 방정식의 근이다.

(i), (ii)에서 $t=5$

$\therefore f(2t)=f(10)=10-\sqrt{9}=7$

40. 답 11

[해설] $(2x+3)\sqrt{2x+3}=(x-6)^3$에서

$(\sqrt{2x+3})^3=(x-6)^3$

이므로 $\sqrt{2x+3}=x-6$ ...... ㉠

위의 식의 양변을 제곱하면 $2x+3=x^2-12x+36$

이것을 정리하면 $x^2-14x+33=0,\ (x-3)(x-11)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=11$

(i) $x=3$를 방정식 ㉠에 대입하면

(좌변)$=\sqrt{9}=3$, (우변)$=3-6=-3$

(좌변)$\neq$(우변)이므로 $x=3$는 주어진 방정식의 해가 아니다.

(ii) $x=11$를 방정식 ㉠에 대입하면

(좌변)$=\sqrt{25}=5$, (우변)$=11-6=5$

(좌변)=(우변)이므로 $x=11$는 주어진 방정식의 근이다.

따라서 구하는 근은 11이므로 모든 근의 합은 11이다.

41. 답 4

[해설] $\sqrt{x}+2=\sqrt{3x+4}$ 의 양변을 제곱하면

$x+4\sqrt{x}+4=3x+4$, $2\sqrt{x}=x$

다시 양변을 제곱하면

$4x=x^2$, $x(x-4)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=4$ ⋯⋯ ㉠

이때, ㉠은 모두 주어진 무리방정식을 만족하므로 근이다.

따라서 모든 근의 합은

$0+4=4$

42. 답 13

[해설] $-\sqrt{x+3}$ 을 우변으로 이항하면

$\sqrt{2x-1}=1+\sqrt{x+3}$ ⋯⋯ ㉠

양변을 제곱하여 정리하면

$2x-1=1+2\sqrt{x+3}+x+3$

$x-5=2\sqrt{x+3}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-5)^2=4(x+3)$, $x^2-14x+13=0$

$(x-1)(x-13)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=13$

(ⅰ) $x=1$를 방정식 ㉠에 대입하면 (좌변)$=1$, (우변)$=3$

(좌변)$\neq$(우변)이므로 $x=1$는 주어진 방정식의 근이 아니다.

(ⅱ) $x=13$를 방정식 ㉠에 대입하면 (좌변)$=5$, (우변)$=5$

(좌변)=(우변)이므로 $x=13$는 주어진 방정식의 근이다.

따라서 모든 근의 합은 13이다.

43. 답 ③

[해설] $\sqrt{x+1}-\sqrt{-x+4}=1$에서 $\sqrt{x+1}=\sqrt{-x+4}+1$의 양변을 제곱하면

$x+1=(-x+4)+2\sqrt{-x+4}+1$, $x-2=\sqrt{-x+4}$

다시 양변을 제곱하면

$x^2-4x+4=-x+4$, $x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이때, $x=0$은 주어진 무리방정식의 (좌변)=- 1, (우변)=1이므로 무연근이고 $x=3$은 주어진 무리방정식을 만족하므로 근이다.

따라서 $\alpha=3$이므로 $2<\alpha<4$

44. 답 1

[해설] $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}+\dfrac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=1$에서 분모를 유리화하여

$(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2})+(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})=1$

$\sqrt{x+3}-\sqrt{x}=1$, $\sqrt{x+3}=\sqrt{x}+1$

양변을 제곱하면

$x+3=x+2\sqrt{x}+1$, $\sqrt{x}=1$

$\therefore x=1$

45. 답 ②

[해설] 이차방정식 $x^2-4x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$x^2-4x+1=(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$\sqrt{x-\alpha}+\sqrt{x-\beta}=\sqrt{6}$ 의 양변을 제곱하면

$(x-\alpha)+2\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}+(x-\beta)=6$

$2x-4+2\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}=6$

$\sqrt{x-\alpha}\sqrt{x-\beta}=-x+5$

다시 양변을 제곱하면

$(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-10x+25$

$x^2-4x+1=x^2-10x+25$

$6x=24$

$\therefore x=4$

46. 답 ②

[해설] $(\sqrt[3]{x+9}-\sqrt[3]{x-9})^3=27$이므로

$\sqrt[3]{x+9}=A$, $\sqrt[3]{x-9}=B$라 하면

$A^3-3AB(A-B)-B^3=27$

$A-B=3$, $A^3-B^3=(x+9)-(x-9)=18$이므로

$18-3AB\cdot 3=27$ $\therefore AB=-1$

즉, $\sqrt[3]{x+9}\cdot\sqrt[3]{x-9}=-1$

$x^2=80$ $\therefore x=\pm\sqrt{80}$

따라서 모든 실근의 곱은 $\sqrt{80}\times(-\sqrt{80})=-80$

47. 답 9

[해설] $-4n\leq x\leq 4n$이므로 $\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}=2n$의 양변을 제곱하여 정리하면

$\sqrt{(4n+x)(4n-x)}=2n^2-4n$ ⋯⋯ ㉠

또 양변을 제곱하면 $16n^2-x^2=(2n^2-4n)^2$에서

$x^2=4n^3(4-n)$ ⋯⋯ ㉡

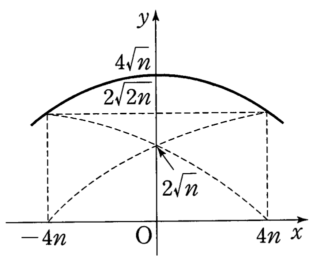
㉠, ㉡에서 $2n^2-4n\geq 0$, $4-n\geq 0$ 이므로

$2\leq n\leq 4$ $\therefore n=2, 3, 4$

따라서 모든 n의 값의 합은 9이다.

다른풀이

$y=\sqrt{4n+x}+\sqrt{4n-x}$ 의 그래프를 그려 보면 오른쪽 그림과 같다.



이때, 실근을 갖기 위한 n의 값의 범위는

$2\sqrt{2n}\leq 2n\leq 4\sqrt{n}$

이것을 정리하면 $2\leq n\leq 4$ $\therefore n=2, 3, 4$

따라서 모든 n의 값의 합은 9이다.

48. 답 ②

[해설] 무리방정식 $f(x)=g(x)$의 양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}=0$

$\therefore f(x)-g(x)=0$, $f(x)+g(x)=0$

즉, $x=a$는 방정식 $f(x)-g(x)=0$의 근이고,

$x=b$는 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 근이므로

$f(a)-g(a)=0$, $g(b)+g(b)=0$

ㄱ. $f(a)=g(a)$이므로 $\sqrt{f(a)}=\sqrt{g(a)}$ (참)

ㄴ. $f(b)=-g(b)$이므로 $\{f(b)\}^2=\{g(b)\}^2$

$\therefore \sqrt{\{f(b)\}^2}=\sqrt{\{g(b)\}^2}$ (참)

ㄷ. 두 등식 $f(a)=g(a), f(b)=-g(b)$를 변끼리 곱하면

$f(a)f(b)=-g(a)g(b)$

$\therefore \sqrt{f(a)f(b)}=\sqrt{-g(a)g(b)}$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

49. 답 ⑤

[해설] 무리방정식 $f(x)=g(x)$의 양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2=\{g(x)\}^2$

$\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2=0$

$\{f(x)-g(x)\}\{f(x)+g(x)\}=0$

$\therefore$ $f(x)-g(x)=0$ 또는 $f(x)+g(x)=0$

ㄱ. $f(x)-g(x)=0$에서 실근이 나오고, $f(x)+g(x)=0$에서 무연근이 나오므로

$f(\alpha)-g(\alpha)=0$ $\cdots$ ㉠

$f(\beta)+g(\beta)=0$ $\cdots$ ㉡(참)

ㄴ. ㉠$\times g(\beta)+$㉡$\times g(\alpha)$를 하면

$f(\alpha)g(\beta)+f(\beta)g(\alpha)=0$ (참)

ㄷ. ㉠에서 $f(\alpha)=g(\alpha)$, ㉡에서 $f(\beta)=-g(\beta)$이므로

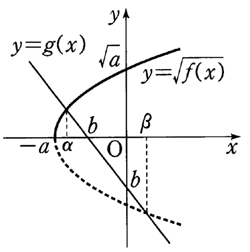
두 식의 양변을 제곱하여 더하면

$\{f(\alpha)\}^2+\{f(\beta)\}^2=\{g(\alpha)\}^2+\{g(\beta)\}^2$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ이다.

50. 답 ⑤

[해설] ㄱ. 주어진 무리방정식의 실근 α와 무연근 β가 존재하려면 다음 그림과 같이 직선 $y=g(x)$의 x절편 b가 $y=\sqrt{f(x)}$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표 $-a$보다 크거나 같으면 된다.



즉, $b\geq -a$이므로 $a+b\geq 0$ (참)

ㄴ. $\sqrt{x+a}=-x+b$의 양변을 제곱하면

$x+a=x^2-2bx+b^2$

$x^2-(2b+1)x+b^2-a=0$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때, α, β는 이차방정식 ㉠의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=2b+1$ (참)

ㄷ. α는 $\sqrt{f(x)}=g(x)$의 근이고, β는 $-\sqrt{f(x)}=g(x)$의 근이므로

$\sqrt{f(\alpha)}=g(\alpha)$, $-\sqrt{f(\beta)}=g(\beta)$

두 식을 변끼리 더하면

$\sqrt{f(\alpha)}-\sqrt{f(\beta)}$

$=g(\alpha)+g(\beta)$

$=(-\alpha+b)+(-\beta+b)$

$=-(\alpha+\beta)+2b$

$=-(2b+1)+2b$

$=-1$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

51. 답 17

[해설] $\sqrt{x+8-5\sqrt{x}}=2$의 양변을 제곱하면

$x+8-5\sqrt{x}=4$

$x+4=5\sqrt{x}$ 의 양변을 제곱하면

$x^2+8x+16=25x$

$x^2-17x+16=0,$ $(x-1)x-16)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=16$

이것은 모두 무연근이 아니다.

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 17이다.

52. 답 ②

[해설] $2-x\geq 0$이므로 $x\leq 2$ $\cdots$ ㉠

$\sqrt{1+\sqrt{2-x}}=x\geq 1$ $\cdots$ ㉡

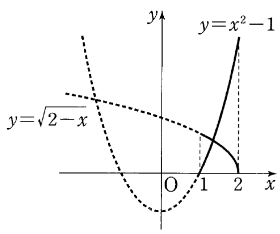
㉠, ㉡에서 $1\leq x\leq 2$이고 주어진 식의 양변을 제곱하면

$1+\sqrt{2-x}=x^2$

$\therefore$ $\sqrt{2-x}=x^2-1$

이 방정식의 실근의 개수는 두 함수 $y=\sqrt{2-x}$와 $y=x^2-1$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 교점은 1개이므로 구하는 실근의 개수는 1개다.



53. 답 ②

[해설] $\sqrt{x+1+\sqrt{2x}}=1$의 양변을 제곱하면

$x+1+\sqrt{2x}=1,$ $x=-\sqrt{2x}$

다시 양변을 제곱하면

$x^2=2x,$ $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

이때, $x=0$은 주어진 무리방정식을 만족하고 $x=2$는 주어진 무리방정식을 만족하지 못하므로

$\alpha=0,$ $\beta=2$

따라서 방정식 $\dfrac{1}{x+\alpha}+\dfrac{1}{x-\beta}=1$은

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-2}=1$ $\cdots\cdots$ ㉠

이므로 양변에 분모의 최소공배수 $x(x-2)$를 곱하면

$x-2+x=x(x-2),$ $2x-2=x^2-2x$

$x^2-4x+2=0$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때, ㉡을 만족하는 근은 ㉠의 분모를 모두 0이 되지 않게 하므로 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 4이다.

54. 답 6

[해설] $x^2-7x=t$라 하면 $\sqrt{t+15}=t+9$ $\cdots\cdots$ ㉠

양변을 제곱하면 $t+15=t^2+18t+81$

$t^2+17t+66=0$, $(t+6)(t+11)=0$

$\therefore t=-6$ 또는 $t=-11$

이때, $t=-11$은 ㉠의 무연근이므로 ㉠의 해는 $t=-6$

즉, $x^2-7x=-6$에서 $x^2-7x+6=0$

$(x-1)(x-6)=0$ $\quad\therefore x=1$ 또는 $x=6$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 6이다.

다른풀이

$\sqrt{x^2-7x+15}=t\,(t\geq 0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t=t^2-6$, $t^2-t-6=(t-3)(t+2)=0$

$\therefore t=3\ (\because t\geq 0)$

이때, $\sqrt{x^2-7x+15}=3$이므로 $x^2-7x+15=9$

$x^2-7x+6=(x-1)(x-6)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=6$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은 6이다.

55. 답 ④

[해설] $x^2-x=t$라 하면 주어진 무리방정식은

$t-\sqrt{t-2}=4,\ t-4=\sqrt{t-2}$ …… ㉠

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$t^2-8t+16=t-2$

$t^2-9t+18=0,\ (t-3)(t-6)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=6$

이때, $t=3$은 ㉠의 무연근이므로 ㉠의 해는 $t=6$

즉, $x^2-x=6$이므로 $x^2-x-6=0,\ (x+2)(x-3)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=3$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=13$

56. 답 ③

[해설] 한 근이 1이므로 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$5-\sqrt{-2+a}=3,\ \sqrt{-2+a}=2$

양변을 제곱하면 $-2+a=4$

$\therefore\ a=6$

$a=6$을 주이진 방정식에 대입하면

$x^2-3x+7-\sqrt{x^2-3x+6}=3$

$\sqrt{x^2-3x+6}=t\ (t\geq 0)$라 하면 $x^2-3x+6=t^2$에서

$x^2-3x=t^2-6$

이므로 주어진 방정식은

$t^2-6+7-t=3$

$t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=2$

그런데 $t\geq 0$이므로 $t=-1$은 근이 될 수 없다.

$\therefore\ t=2$

$\sqrt{x^2-3x+6}=2$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-3x+2=0,\ (x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 다른 한 근은 2이다.

57. 답 ④

[해설] $x^2-x=X$로 치환하면 주어진 방정식은

$\sqrt{X-1}-\sqrt{2-X}=1$ …… ㉠

$-\sqrt{2-X}$를 우변으로 이항하면

$\sqrt{X-1}=1+\sqrt{2-X}$

양변을 제곱하여 정리하면

$X-1=1+2\sqrt{2-X}+(2-X)$, $X-2=\sqrt{2-X}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$(X-2)^2=2-X$, $(X-2)(X-1)=0$

$\therefore X=1$또는 $X=2$

(i) $X=1$을 방정식 ㉠에 대입하면 (좌변)$=-1$, (우변)$=1$

(좌변)$\neq$(우변)이므로 $X=1$은 무연근이다.

(ii) $X=2$를 방정식 ㉠에 대입하면 (좌변)$=1$, (우변)$=1$

(좌변)$=$(우변)이므로 $X=2$는 근이다.

즉, $x^2-x=2$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$또는 $x=2$

따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은 1이다.

58. 답 250

[해설] $\sqrt{2a-1}$, $\sqrt{a+\dfrac{15}{4}}$, $\sqrt{2a+4}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\sqrt{2a-1}+\sqrt{2a+4}=2\sqrt{a+\dfrac{15}{4}}$ …… ㉠

양변을 제곱하면

$2a-1+2\sqrt{(2a-1)(2a+4)}+2a+4=4\left(a+\dfrac{15}{4}\right)$

$\sqrt{(2a-1)(2a+4)}=6$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$2a^2+3a-20=0,\ (2a-5)(a+4)=0$

$\therefore\ a=\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=-4$

그런데 ㉠에서 $a\geq\dfrac{1}{2}$이므로 $a=-4$는 방정식을 만족하지 않는다.

따라서 $a=\dfrac{5}{2}$이므로 $100a=250$

59. 답 ⑤

[해설] 방정식 $\sqrt{x+4}=\dfrac{1}{2}x+k$의 양변을 제곱하면

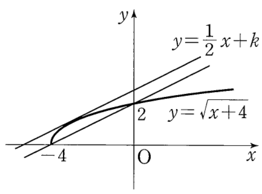
$x+4=\dfrac{1}{4}x^2+kx+k^2,\ x^2+4(k-1)x+4k^2-16=0$ …… ㉠

이때, 곡선 $y=\sqrt{x+4}$와

직선 $y=\dfrac{1}{2}x+k$가 접하려면

이차방정식 ㉠의 판별식 $D=0$

이어야 하므로



$\dfrac{D}{4}=4(k-1)^2-(4k^2-16)=-8k+20=0$

$\therefore k=\dfrac{5}{2}$

또한, 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+k$가 점 $(-4,\ 0)$을 지날 때,

$-2+k=0$ $\quad\therefore k=2$

따라서 주어진 무리방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건은

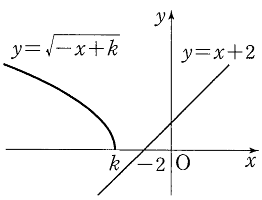
$2 \leq k < \frac{5}{2}$

$\therefore \alpha = 2,\ \beta = \frac{5}{2}$

$\therefore \alpha\beta = 5$

60. 답 ①

[해설] 곡선 $t = \sqrt{-x+k}$ 는 점 $(k,\ 0)$을 지나고 직선 $y = x+2$는 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로 방정식 $\sqrt{-x+k} = x+2$의 실근이 존재하지 않기 위해서는 오른쪽 그림과 같이 곡선과 직선이 교점을 갖지 않아야 한다.



즉, $k < -2$에서 정수 k의 최댓값은 -3이다.

61. 답 ②

[해설] $y = \sqrt{1-x^2}$ 의 양변을 제곱하여 정리하면 $x^2 + y^2 = 1$이므로 $y = \sqrt{1-x^2}$ 의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 반원이다.

오른쪽 그림과 같이 직선 $y = x+k$가 반원에 접할 때의 k의 값은 주어진 방정식 $\sqrt{1-x^2} = x+k$가 중근을 가질 때이므로 양변을 제곱하여 정리하면

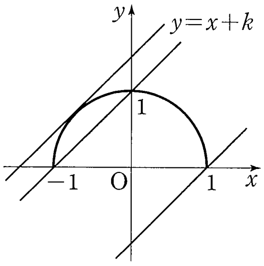
$1 - x^2 = x^2 + 2kx + k^2$

$2x^2 + 2kx + k^2 - 1 = 0$

이때, 위 방정식의 판별식 $D = 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4} = k^2 - 2(k^2-1) = -k^2 + 2 = 0$

$\therefore k = \sqrt{2}\ (\because k > 0)$



또한, 점 $(1,\ 0)$과 점 $(-1,\ 0)$을 지날 때, 실수 k의 값은 각 -1과 1이다.

따라서 주어진 방정식이 단 한 개의 실근을 갖기 위한 실수 k의 값의 범위는

$-1 \leq k < 1$ 또는 $k = \sqrt{2}$

이므로 모든 정수 k의 개수는 $-1,\ 0$의 2개다.

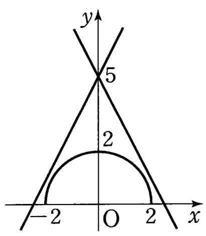
62. 답 ③

[해설] 주어진 방정식이 실근을 갖지 않으려면 두 함수 $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = ax+5$의 그래프가 만나지 않아야 한다. 이 때, 직선 $y = ax+5$는 a의 값에 관계없이 항상 점 $(0,\ 5)$를 지난다.

$\sqrt{4-x^2} = ax+5$의 양변을 제곱하면

$4 - x^2 = a^2x^2 + 10ax + 25$

$(a^2+1)x^2 + 10ax + 21 = 0$



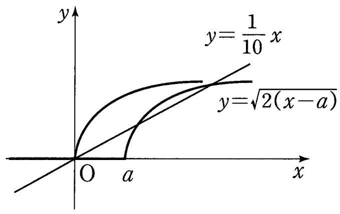
이차방정식 $(a^2+1)x^2 + 10ax + 21 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (5a)^2 - 21(a^2+1) < 0$ $\therefore a^2 < \frac{21}{4}$

따라서 구하는 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ 의 5개다.

63. 답 49

[해설] $y = \sqrt{x-a+|x-a|} = \begin{cases} \sqrt{2(x-a)} & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases}$



직선 $y = \frac{1}{10}x$가 곡선 $y = \sqrt{2(x-a)}$와 접할 때,

$\frac{1}{10}x = \sqrt{2(x-a)}$, $\frac{1}{100}x^2 = 2(x-a)$

$x^2 - 200x + 200a = 0$

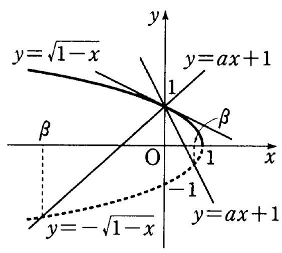
이때, $\frac{D}{4} = 100^2 - 200a = 0$이므로

$a = \frac{10000}{200} = 50$

따라서, 곡선과 직선이 만나는 점의 개수가 3개가 되도록 하는 a의 값의 범위는 $0 < a < 50$이므로 정수a의 개수는 49 이다.

64. 답 ②

[해설] 무리방정식 $\sqrt{1-x} = ax+1$의 무연근은 $-\sqrt{1-x} = ax+1$을 만족한다.



ㄱ. $a > 0$이면 위의 그림과 같이 두 함수 $y = -\sqrt{1-x}$, $y = ax+1$의 그래프의 교점의 x좌표 β는 0보다 작다. (참)

ㄴ. $a < -1$이면 위의 그림과 같이 두 함수 $y = -\sqrt{1-x}$, $y = ax+1$의 그래프의 교점의 x좌표 β는 0보다 크고 1보다 작다. (참)

ㄷ. [반례] ㉠의 양변의 제곱하여 정리하면

$a^2x^2 + (2a+1)x = 0$

이 식의 판별식 $D = 0$일 때 접하므로

$D = (2a+1)^2 = 0$

$\therefore\ a = -\frac{1}{2}$

따라서 $a = -\frac{1}{2}$일 때, ㉠은 하나의 실근(중근)을 갖는다.

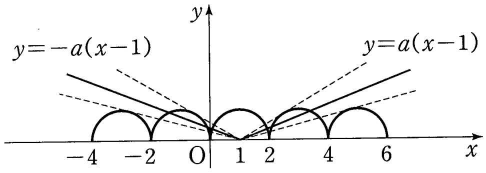
그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

65. 답 ③

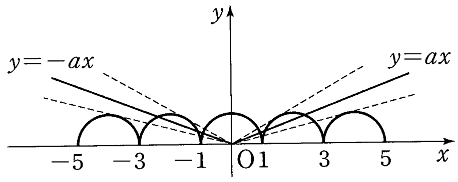
[해설] $0 \leq x \leq 2$일 때, $y = \sqrt{1-(x-1)^2}$ 으로 놓고 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-1)^2 + y^2 = 1\ (y \geq 0)$

이고, $f(x)$는 주기가 2인 주기함수이므로 $y = f(x)$의 그래프와 $y = |a(x-1)|$의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때, 방정식$f(x)=|a(x-1)|$이 서로 다른 6개의 실근을 갖기 위한 양수 a의 값의 범위는 방정식 $f(x+1)=|ax|$가 서로 다른 6개 의 실근을 갖기 위한 양수a의 값의 범위와 같다.



(ⅰ) $\sqrt{1-(x-2)^2}=ax$에서 $1-(x-2)^2=a^2x^2$

$(a^2+1)x^2-4x+3=0$

$\frac{D}{4}=0$에서 $4-3(a^2+1)=0$, $3a^2=1$ $\quad \therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(ⅱ) $\sqrt{1-(x-4)^2}=ax$에서 $1-(x-4)^2=a^2x^2$

$(a^2+1)x^2-8x+15=0$

$\frac{D}{4}=0$ 에서 $16-15(a^2+1)=0$, $15a^2=1$ $\quad \therefore a=\frac{\sqrt{15}}{15}$

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a의 값의 범위는

$\frac{\sqrt{15}}{15}<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$

66. 답 ②

[해설] 주어진 방정식의 양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2-4f(x)+4=f(x)+10$

$\{f(x)\}^2-5f(x)+6=0$

$\{f(x)+1\}\{f(x)-6\}=0$

$\therefore f(x)=-1$ 또는 $f(x)=6$

(ⅰ) $f(x)=-1$을 주어진 방정식에 대입하면

(좌변)$=2-(-1)=3$, (우변)$=\sqrt{-1+10}=3$

(좌변)=(우변)이므로 $f(x)=-1$은 주어진 방정식의 근이다.

(ⅱ) $f(x)=6$을 주어진 방정식에 대입하면

(좌변)$=2-6=-4$,

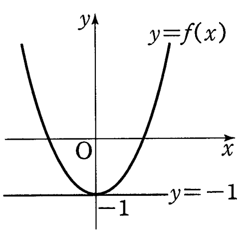
(우변)$=\sqrt{6+10}=4$

(좌변)$\neq$(우변)이므로 $f(x)=6$은

주어진 방정식의 근이 아니다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=-1$

오른쪽 그림에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$의 교점은 1개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1개이다.



67. 답 ④

[해설] $\sqrt{2f(x)+5}-\sqrt{f(x)+2}=1$에서

$\sqrt{2f(x)+5}=\sqrt{f(x)+2}+1$

양변을 제곱하여 정리하면

$f(x)+2=2\sqrt{f(x)+2}$

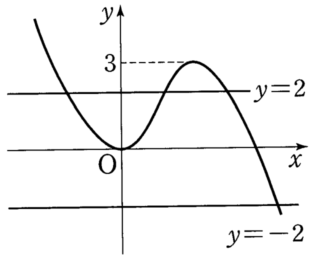
다시 양변을 제곱하고 정리하면

$\{f(x)\}^2=4$

$\therefore f(x)=-2$ 또는 $f(x)=2$

이때, $f(x)=-2$와 $f(x)=2$는 주어진 식을 모두 만족한다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 $f(x)=-2$를 만족하는 근은 1개이고, $f(x)=2$를 만족하는 근은 3개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



68. 답 ②

[해설] $f(x)-\sqrt{f(x)}=2$에서 $\sqrt{f(x)}=t\ (t\geq 0)$라 하면

$t^2-t=2$, $(t-2)(t+1)=0$

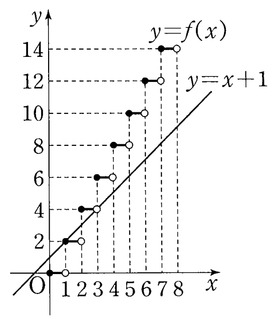
$\therefore t=2$ ($\because t\geq 0$)

즉, $\sqrt{f(x)}=2$이므로 $f(x)=4$

따라서 주어진 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4$의 교점의 개수는 1개이므로 $f(x)=4$를 만족하는 실근의 개수는 1개다.

69. 답 ②

[해설] 주어진 조건에 의하여 $0\leq x<8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$\sqrt{f(x)-x}=x-f(x)+2$에서

$f(x)-x=X$라 하면

$\sqrt{X}=-X+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

양변을 제곱하면

$X=X^2-4X+4$, $X^2-5X+4=0$

$(X-1)(X-4)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=4$

이때, $X=4$는 ㉠을 만족하지 못하므로 무연근이다.

즉, $X=1$이므로 $f(x)-x=1$에서 $f(x)=x+1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 교점은 단 한 개이므로 실근의 개수는 1개다.

70. 답 ②

[해설] $f(x)g(x)=-\sqrt{f(x)g(x)} \quad \cdots\cdots$ ㉠

양변을 제곱하면

$\{f(x)\}^2\{g(x)\}^2=f(x)g(x)$

$f(x)g(x)\{f(x)g(x)-1\}=0$

$\therefore\ f(x)g(x)=0$ 또는 $f(x)g(x)=1$

그런데 $f(x)g(x)=1$은 방정식 ㉠을 만족하지 않으므로 $f(x)g(x)=0$

$\therefore\ A=\{a,\ c,\ d,\ f\}$

$f(x)+g(x)=2\sqrt{f(x)g(x)}$ …… ㉡

양변을 제곱하여 정리하면

$\{f(x)\}^2+2f(x)g(x)+\{g(x)\}^2=4f(x)g(x)$

$\{f(x)\}^2-2f(x)g(x)+\{g(x)\}^2=0$

$\{f(x)-g(x)\}^2=0$

$\therefore\ f(x)=g(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 교점의 x좌표는 $a,\ b,\ e$이다.

그런데 $f(x)+g(x)\geqq 0$이므로 $x=e$는 방정식 ㉡을 만족하지 않으므로 무연근이다.

$\therefore\ B=\{a,\ b\}$

$\therefore\ B-A=\{b\}$

71. 답 6

[해설] 점 P의 좌표가 $(a,\ 0)$이고 $a>0$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{AP}}=7$에서

$a+\sqrt{(a+1)^2+(0-4)^2}=7$

즉, $\sqrt{(a+1)^2+4^2}=7-a$ …… ㉠

양변을 제곱하여 정리하면

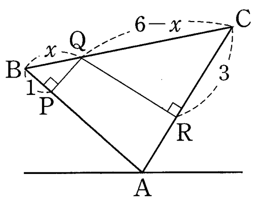
$16a=32 \qquad \therefore\ a=2$

$a=2$는 방정식 ㉠을 만족하므로 근이다.

$\therefore\ a^2+a=2^2+2=6$

72. 답 ④

[해설] 오른쪽 그림에서 $\overline{\mathrm{BQ}}=x$(km) 라고 하면 $\overline{\mathrm{QC}}=6-x$(km)



$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QR}}=4$(km)이므로

$\sqrt{x^2-1}+\sqrt{(6-x)^2-9}=4$

$\sqrt{x^2-1}$을 우변으로 이항하면

$\sqrt{(6-x)^2-9}=4-\sqrt{x^2-1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-12x+27=16-8\sqrt{x^2-1}+x^2-1$

$3x-3=2\sqrt{x^2-1}$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

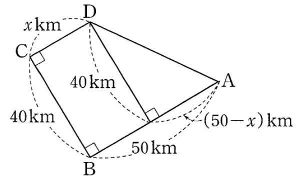
$9x^2-18x+9=4x^2-4$, $5x^2-18x+13=0$

$(5x-13)(x-1)=0$

$\therefore x=\dfrac{13}{5}$ 또는 $x=1$

그런데 $\overline{\mathrm{BQ}}>1$(km) 이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{13}{5}$(km) 이다.

73. 답 ③



[해설] 위의 그림과 같이 $\overline{CD}=x(km)$라 하면

$\overline{DA}=\sqrt{(50-x)^2+40^2}\,(km)$

이고, C에서 D로 운항하는 데 걸린 시간은 $\dfrac{x}{80}$(시간),

D에서 A로 운항하는 데 걸린 시간은 $\dfrac{\sqrt{(50-x)^2-40^2}}{100}$(시간)이다.

따라서 전체 걸린 시간 중에서 점 D에서 머무른 10분을 뺀 시간은 $\dfrac{45}{60}=\dfrac{3}{4}$(시간)이므로

$\dfrac{x}{80}+\dfrac{\sqrt{(50-x)^2+40^2}}{100}=\dfrac{3}{4}$

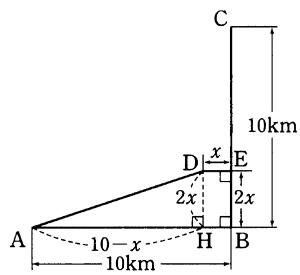
$4\sqrt{x^2-100x+4100}=-5x+300$

양변을 제곱하면

$16x^2-1600x+65600=25x^2-3000x+90000$

74. 답 ④

[해설]



위의 그림에서

$\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{(10-x)^2+(2x)^2}$

$=\sqrt{5x^2-20x+100}$

이때, 영희는 평균속력 6 km/시로 A → D → E → C 순서로 이동하므로 걸린 시간은

$\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+x+10-2x}{6}$

$=\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x}{6}$(시간)

철수는 평균속력 3 km/시로 A →B, 평균속력 6 km/시로 B → C로 이동하므로 걸린 시간은

$\dfrac{10}{3}+\dfrac{10}{6}=5$(시간)

따라서 주어진 조건에 맞게 식을 세우면

(영희가 걸린 시간)=(철수가 걸린 시간)−2이므로

$\dfrac{\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x}{6}=5-2$

$\sqrt{5x^2-20x+100}+10-x=18$

$\sqrt{5x^2-20x+100}=x+8$

양변을 제곱하면

$5x^2-20x+100=x^2+16x+64$

$4x^2-36x+36=0,\ x^2-9x+9=0$

$\therefore\ x=\dfrac{9\pm\sqrt{81-36}}{2}=\dfrac{9\pm\sqrt{45}}{2}=\dfrac{9\pm3\sqrt{5}}{2}$

그런데 $0<x<5$이므로 $x=\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}$

1.답 ②	2. 답 ⑤	3.답 ⑤	4.답 ②
5.답 ①	6. 답 ①	7.답 ⑤	8.답 ⑤
9.답 ④	10. 답 ④	11.답 ⑤	12.답 ⑤
13.답 ⑤	14. 답 ①	15.답 12	16.답 ④
17.답 ④	18. 답 ④	19.답 ②	20.답 ②
21.답 ⑤	22. 답 ④	23.답 9	24.답 ⑤
25.답 ①	26.답 ④	27.답 25	28.답 ④
29.답 ③	30.답 ③	31.답 ③	32.답 ②
33.답 ⑤	34.답 6	35.답 ①	36.답 ⑤
37.답 13	38.답 ⑤	39.답 ④	40.답 ③
41.답 ③	42.답 8	43.답 ⑤	44.답 5
45.답 12	46.답 ④	47.답 ④	48.답 ③
49.답 ①	50.답 5	51.답 ③	52.답 ④
53.답 ④	54.답 5	55.답 ④	56.답 ③
57.답 14	58.답 ③	59.답 ⑤	60.답 ⑤

1. **답 ②**

[해설]

$x^3-6x^2+3x+10 \le 0$, $(x+1)(x-2)(x-5) \le 0$

$x \le -1$ 또는 $2 \le x \le 5$이므로

자연수 x의 개수는 4개

***2.* 답 ⑤**

[해설]

$x^4+12x < 2x^3+11x^2$ 에서 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$x^4-2x^3-11x^2+12x < 0$

$f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x$ 로 놓으면 $f(0)=0$, $f(1)=0$

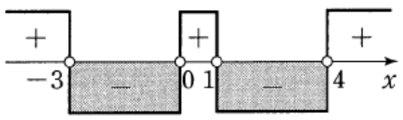
이므로 인수정리와 조립젯법에 의하여 인수분해를 하면

$f(x)=x(x-1)(x-4)(x+3)$

이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$

이 때, 이 x의 값을 수직선 위에 나타내고 이들을 경계로 하는 각 x의 값의 범위에서 $f(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x는 -2, -1, 2 , 3 이고 그 합은 2이다.

***3.* 답 ⑤**

[해설]

$x^4+12x < 2x^3+11x^2$ 에서 우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$x^4-2x^3-11x^2+12x < 0$

$f(x)=x^4-2x^3-11x^2+12x$ 로 놓으면 $f(0)=0$, $f(1)=0$

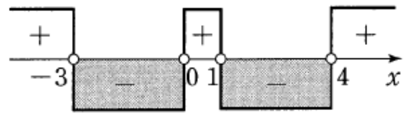
이므로 인수정리와 조립젯법에 의하여 인수분해를 하면

$f(x)=x(x-1)(x-4)(x+3)$

이므로 방정식 $f(x)=0$ 의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=-3$

이 때, 이 x의 값을 수직선 위에 나타내고 이들을 경계로 하는 각 x의 값의 범위에서 $f(x)$ 의 부호를 조사하면 다음과 같다.



따라서 주어진 부등식을 만족하는 정수 x는 -2, -1, 2 , 3 이고 그 합은 2이다.

***4.* 답 ②**

[해설]

우변을 좌변으로 이항하여 정리하면

$$\frac{3}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{3}{x^2-5x+6}+2 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-3x-2}{x^2-5x+6} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-2)(2x+1)}{(x-2)(x-3)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-3} \le 0,\ x \ne 2 \ \cdots\cdots \ ㉠$$

㉠의 양변에 $(x-3)^2$을 곱하면

$(2x+1)(x-3) \le 0$, $x \ne 2$, $x \ne 3$

$\therefore\ -\frac{1}{2} \le x < 3$, $x \ne 2$

따라서 정수 x의 개수는 0, 1의 2개이다.

***5.* 답 ①**

[해설]

$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$이므로

주어진 부등식의 양변에 x^2-x+1을 곱하여 정리하면

$x^2+x-12 < 0$, $(x-3)(x+4) < 0$

$\therefore\ -4 < x < 3$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2 이므로

모든 정수의 합은 -3이다.

***6.* 답 ①**

[해설] 로그의 밑을 2로 통일하면 주어진 부등식은

$$\log_2 a-\frac{3}{\log_2 a} > 2$$

$\log_2 a = X$로 놓으면

$$X-\frac{3}{X} > 2$$

모든항을 좌변으로 이항하고 통분하면

$$\frac{X^2-2X-3}{X} > 0$$

양변에 X^2을 곱하고 인수분해하면

$X(X+1)(X-3) > 0$

$\therefore -1 < X < 0$ 또는 $X > 3$

$X = \log_2 a$이므로

$-1 < \log_2 a < 0$ 또는 $\log_2 a > 3$

$\therefore \frac{1}{2} < a < 1$ 또는 $a > 8$

이것을 만족하는 한 자리 자연수 a는 9하나 뿐이다.

7. 답 ⑤

[해설] $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = x^2(x-3) - 4(x-3)$

$= (x-3)(x^2-4)$

$= (x-3)(x+2)(x-2)$

이므로 부등식 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 > 0$의 해는

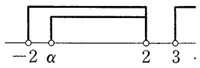
$-2 < x < 2$ 또는 $x > 3$

부등식 $\dfrac{x-2}{x-\alpha} < 0$의 양변에 $(x-\alpha)^2$을 곱하면

$(x-2)(x-\alpha) < 0$

오른쪽 그림에서 $\alpha > 2$이면 주어진 조건을 만족할 수가 없다.

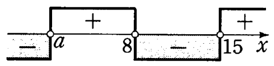
$\therefore -2 \le \alpha \le 2$



8. 답 ⑤

[해설]

(i) $a < 8$일 때,

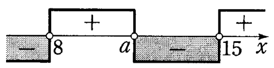


부등식 $(x-8)(x-15)(x-a) < 0$의 해는

$x < a,\ 8 < x < 15$

이때, $8 < x < 15$에서 자연수 x의 개수는 6개이므로 $f(a) \ge 6$이다.

(ii) $8 \leqq a < 15$일 때,

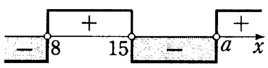


부등식 $(x-8)(x-15)(x-a) < 0$의 해는

$x < 8,\ a < x < 15$

이때, $x < 8$에서 자연수 x의 개수는 7개이므로 $f(a) \ge 7$이다.

(iii) $a \geqq 15$일 때,



부등식 $(x-8)(x-15)(x-a) < 0$의 해는

$x < 8$, $15 < x < a$

이때, $x < 8$에서 자연수 x의 개수는 7개이므로 $f(a) \ge 7$이다.

따라서 실수 $f(a)$의 최솟값은 6이다.

9. 답 ④

[해설]

해가 $1 < x < 2$ 또는 $x > 3$ 이고 최고차항의 계수가 1인 삼차부등식은 $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$ 이므로

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$

$\therefore\ a = -6$, $b = 11$, $c = -6$

부등식 $\dfrac{x^2+ax+b}{x+c} \le 0$ 은 $\dfrac{x^2-6x+11}{x-6} \le 0$

그런데, $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 > 0$ 이므로

$\dfrac{x^2-6x+11}{x-6} \le 0 \Leftrightarrow x - 6 \le 0$, $x \ne 6$

따라서 구하는 자연수x는 $1, 2, 3, 4, 5$ 의 5개다.

10. 답 ④

[해설]

$(x-n)(x-3n)(x-9n) < 0$의 해는

$x < n$ 또는 $3n < x < 9n$

$\therefore f(n) = (n-1) + (9n-3n-1) = 7n-2$

$\therefore \displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(k) = \sum_{k=1}^{5}(7k-2) = 7 \times \frac{5\times 6}{2} - 2\times 5 = 95$

11. 답 ⑤

[해설] $(f \circ f)(x) = f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\frac{x-1}{x+1} + 1} = -\dfrac{1}{x}$

$(f \circ f \circ f)(x) = f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{-\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x} + 1} = \dfrac{-x-1}{x-1}$

$(f \circ f \circ f \circ f)(x) = f\left(\dfrac{-x-1}{x-1}\right) = \dfrac{\frac{-x-1}{x-1} - 1}{\frac{-x-1}{x-1} + 1} = x$

$\dfrac{-x-1}{x-1} < x$에서 양변에 $(x-1)^2$을 곱하여 정리하면

$x(x-1)^2 - (-x-1)(x-1) > 0$

$(x-1)(x^2 - x + x + 1) > 0$

$(x-1)(x^2+1) > 0$

$\therefore x > 1$ ($\because x^2 + 1 > 0$)

12. 답 ⑤

[해설] $2^x = t$ $(t > 0)$로 놓으면 주어진 부등식은

$\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{2}{t^2+t+1} \le \dfrac{9}{t^3-1}$

$\dfrac{t^2-t-6}{(t-1)(t^2+t+1)} \le 0$

$\dfrac{(t-3)(t+2)}{(t-1)(t^2+t+1)} \le 0$

$t+2 > 0,\ t^2+t+1 > 0$이므로

$\dfrac{t-3}{t-1} \le 0 \Leftrightarrow (t-3)(t-1) \le 0,\ t \ne 1$

$\therefore 1 < t \le 3$

따라서 $1 < 2^x \le 3$이므로 주어진 부등식의 해는

$0 < x \le \log_2 3$

$\therefore a + b = \log_2 3$

13. 답 ⑤

[해설] $y=x+|x-1|$로 놓으면

$x\ge 1$일 때, $y=2x-1$

$x<1$일 때, $y=1$

(i) $x\ge 1$일 때

주어진 부등식은 $\dfrac{2x-1}{x+1}>2x-1$

$(2x-1)\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)<0$

$\dfrac{x(2x-1)}{x+1}<0$

$x(x+1)(2x-1)<0,\ x\ne -1$

그런데 $x\ge 1$일 때, $x(x+1)(2x-1)>0$이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x<1$일 때

주어진 부등식은 $\dfrac{2x-1}{x+1}>1$

$\dfrac{x-2}{x+1}>0$

$(x+1)(x-2)>0,\ x\ne -1$

$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>2$

그런데 $x<1$이므로 $x<-1$

(i), (ii)에서 구하는 해는 $x<-1$

14. 답 ①

[해설] $[x]^2-3[x]-18\le 0 \Leftrightarrow ([x]+3)([x]-6)\le 0$

$\Leftrightarrow\ -3\le [x]\le 6$

$\Leftrightarrow\ -3\le x<7$

$\Leftrightarrow\ (x+3)(x-7)\le 0,\ x\ne 7$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{x+3}{x-7}\le 0$

15. 답 12

[해설] $\dfrac{1}{x-a}\le\dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x-a}-\dfrac{1}{x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{x-1-(x-a)}{(x-a)(x-1)}\le 0$

$\Leftrightarrow\ (a-1)(x-a)(x-1)\le 0$

(단, $x\ne a,\ x\ne 1$)

$\Leftrightarrow\ (a-1)(x-a)(x-1)<0$

$a<1$이면 $x>1$또는 $x<a$이므fh 조건에 맞지 않는다.

따라서 $a>1$이고 , 이때 해가 $1<x<a$ 이므로

$a=11,\ b=1$

$\therefore a+b=12$

16. **답 ④**

[해설]

$(x-1)(x+2)(x^2-mx+m)>0$에서

이차방정식 $x^2-mx+m=0$의 근을 분류하면

i) 허근일 경우

주어진 사차부등식의 해를 만족한다.

$D=m^2-4m<0\ \ \therefore 0<m<4$

ii) 중근일 경우

주어진 사차부등식의 해를 만족하기 위해서는

중근이 $x<-2$ 또는 $x>1$에 포함되지 않아야 한다.

$D=0$일 때, $m=0$이면 중근이 0이고

$m=4$이면 중근이 2이다. $\therefore m=0$

iii) 서로 다른 두 실근일 경우

주어진 사차부등식의 해를 만족하지 않는다.

i), ii), iii)에 의하여 $0\le m<4$이다.

따라서 모든 정수 m의 개수는 4개다.

17. 답 ④

[해설]

$f(x)=a(x+3),\ g(x)=b(x+3)$ ($a,\ b$는 서로소인 두 일차식)으로 놓으면

$L=ab(x+3)=x(x+3)(x-4)$에서

$a=x,\ b=x-4$ 또는 $a=x-4,\ b=x$

$\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{L}\le 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{x+x-4}{x(x+3)(x-4)}\le 0$

$\Leftrightarrow\ 2(x-2)x(x+3)(x-4)\le 0,\ x\ne -3,\ x\ne 0,\ x\ne 4$

$\Leftrightarrow\ -3<x<0,\ 2\le x<4$

따라서, 정수 x는 $-2,\ -1,\ 2,\ 3$ 의 4개이다.

18. 답 ④

[해설]

$f(x)=a(x+3),\ g(x)=b(x+3)$ ($a,\ b$는 서로소인 두 일차식)으로 놓으면

$L=ab(x+3)=x(x+3)(x-4)$에서

$a=x,\ b=x-4$ 또는 $a=x-4,\ b=x$

$\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{g(x)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{a+b}{L}\le 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{x+x-4}{x(x+3)(x-4)}\le 0$

$\Leftrightarrow\ 2(x-2)x(x+3)(x-4)\le 0,\ x\ne -3,\ x\ne 0,\ x\ne 4$

$\Leftrightarrow\ -3<x<0,\ 2\le x<4$

따라서, 정수 x는 $-2,\ -1,\ 2,\ 3$ 의 4개이다.

19. 답 ②

[해설]

$g(x)=t$ 로 치환하여 부등식 $(f\circ g)(x)<g(x)$ 를 t에 대한 부등식으로 나타내면

$f(t)<t$, 즉 $t^3-6t^2-25t-18<0$ --------- ①

$h(t)=t^3-6t^2-25t-18$ 로 놓으면 $h(-1)=0$ 이므로

인수정리와 조립젯법에 의하여 인수분해하면

$h(t)=(t+1)(t+2)(t-9)$

따라서 부등식①의 해는 $t<-2$ 또는 $-1<t<9$ 이다.

$t=g(x)=x^2-2$ 에서 $x^2-2<-2$ 또는 $-1<x^2-2<9$

$\therefore\ 1<x^2<11$

따라서 부등식을 만족하는 정수x는 $\pm 2,\ \pm 3$ 의 4개다.

20. 답 ②

[해설]

$f(x)=x^4-a^2x^2=x^2(x-a)(x+a)$ $(a>0)$

ㄱ. 부등식 $f(x)=x^2(x-a)(x+a)\le 0$의 해는

$-a\le x\le a$ (참)

ㄴ. $f(x-a)$는 $f(x)$의 x 대신 $x-a$를 대입한 것이므로

$f(x-a)=(x-a)^2(x-2a)x$

그러므로 부등식 $f(x-a)\le 0$의 해는 $0\le -x\le 2a$ (참)

ㄷ. $f(x)\ge f(x-a)$

$\Leftrightarrow f(x)-f(x-a)\ge 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-a)(x+a)-(x-a)^2(x-2a)x\ge 0$

$\Leftrightarrow x(x-a)(4ax-2a^2)\ge 0$

그러므로 부등식 $f(x)\ge f(x-a)$의 해는

$0\le x\le \frac{a}{2}$ 또는 $x\ge a$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

[다른 풀이]

$y=f(x-a)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이므로 부등식 $f(x-a)\le 0$의 해를 나타내는 구간은 부등식 $f(x)\le 0$의 해를 나타내는 구간을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이다.

21. 답 ⑤

[해설]

$a_{n+2}<a_{n+1}<a_n$이므로

부등식 $f_n(x)=(x-a_n)(x-a_{n+1})(x-a_{n+2})$의 해는

$x<a_{n+2}$ 또는 $a_{n+1}<x<a_n$

$a_n=50+(n-1)(-2)=52-2n$이므로

$a_1=50,\ a_2=48,\ a_3=46,\ a_4=44,\ a_5=42,\ \cdots$

ㄱ. $A_1=\{x\mid x<46$ 또는 $48<x<50\}$이므로 $49\in A_1$ (참)

ㄴ. $A_2=\{x\mid x<44$ 또는 $46<x<48\}$

$A_3=\{x\mid x<42$ 또는 $44<x<46\}$

$A_4=\{x\mid x<40$ 또는 $42<x<44\}$

$\vdots$

이므로 $x\in A_n$이면 $(x-2)\in A_{n+1}$ (참)

ㄷ. $A_1\cap A_2=\{x\mid x<44\}$

$A_2\cap A_3=\{x\mid x<42\}$

$A_3\cap A_4=\{x\mid x<40\}$

$\vdots$

에서 $A_n\cap A_{n+1}=\{x\mid x<46-2n\}$임을 알 수 있다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

22. 답 ④

[해설]

$[x]^2+3[x]<0$에서 $[x]([x]+3)<0$이므로 $-3<[x]<0$

즉, $[x]=-2,\ -1$에서 $-2\le x<0$

$\therefore A=\{x\mid -2\le x<0\}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\frac{x-2}{x+2}\le 0$에서 $(x-2)(x+2)\le 0,\ x\ne -2$

$\therefore -2<x\le 2$

$\therefore B=\{x\mid -2<x\le 2\}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $A\cap B=\{x\mid -2<x<0\}$

$A\cap B=C$이려면 부등식 $x^2+ax+b<0$의 해가 $-2<x<0$이 되어야 한다.

즉, $x^2+ax+b=x(x+2)=x^2+2x$

따라서 $a=2,\ b=0$이므로 $a^2+b^2=4$

23. 답 9

[해설]

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 다항식이고 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{(x+1)(x-3)}{x-5}\ge 0$ 에서

$f(x)=x-5$, $g(x)=(x+1)(x-3)$ 이다.

$(g\circ f)(x)=\{(x-5)+1\}\{(x-5)-3\}=(x-4)(x-8)$

$(f\circ g)(x)=(x+1)(x-3)-5=(x+2)(x-4)$

이 때, $\frac{(g\circ f)(x)}{(f\circ g)(x)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-8)}{(x+2)(x-4)}\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{x-8}{x+2}\le 0$, $x\ne 4$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-8)\le 0$, $x\ne 4$, $x\ne -2$

따라서 구하는 정수x는 $-1,0,1,2,3,5,6,7,8$ 의 9개다.

24. 답 ⑤

[해설]

$\frac{x-a}{x-b}\le 0$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\Leftrightarrow (x-a)(x-b)\le 0,\ x\ne b$

따라서 부등식 ㉠의 해와 $N(a,\ b)$는 다음과 같다.

(ⅰ) $a>b$일 때, $b<x\le a$ $\therefore N(a,\ b)=a-b$

(ⅱ) $a=b$일 때, 해는 없다. $\therefore N(a,\ b)=0$

(ⅲ) $a<b$일 때, $a\le x<b$ $\therefore N(a,\ b)=b-a$

따라서 $N(a,\ b)=|a-b|$

ㄱ. [반례] $a=1,\ b=2$일 때

$N(2a,\ b)=N(2,\ 2)=2-2=0$

$N(a,\ 2b)=N(1,\ 4)=4-1=3$

$\therefore N(2a,\ b)\ne N(a,\ 2b)$ (거짓)

ㄴ. $N(2a,\ 2b)=|2a-2b|=2|a-b|=2N(a,\ b)$ (참)

ㄷ. $a\le b\le c$일 때

$N(a,\ b)+N(b,\ c)=(b-a)+(c-b)=c-a=N(c,\ a)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

25. 답 ①

[해설]

(ⅰ) n이 홀수일 때

$(x-n)^n(x+n)(x-2n)<0$

$\Leftrightarrow (x-n)(x+n)(x-2n)<0$

$\therefore x<-n$ 또는 $n<x<2n$

$\therefore\ a_n = n-1$ …… ㉠

(ii) n이 짝수일 때

$(x-n)^n(x+n)(x-2n)<0$

$\Leftrightarrow\ (x+n)(x-2n)<0,\ x \neq n$

$\therefore\ -n<x<n$ 또는 $n<x<2n$

$\therefore\ a_n = 2n-2$ …… ㉡

ㄱ. ㉠, ㉡에서 $a_1=0,\ a_2=2$

$\therefore\ a_1+a_2=2$ (참)

ㄴ. [반례] ㉠, ㉡에서 $a_4=6,\ a_5=4$이므로

$a_{n+1}<a_n$인 경우도 있다. (거짓)

ㄷ. ㉠에서 $a_{2n-1}=2n-2$, ㉡에서 $a_{2n}=4n-2$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{n=1}^{15}(a_{2n-1}+a_{2n})$$

$$=\sum_{n=1}^{15}(2n-2+4n-2)=\sum_{n=1}^{15}(6n-4)$$

$$=6\times\frac{15\times16}{2}-4\times15=660\ \text{(거짓)}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

26. 답 ④

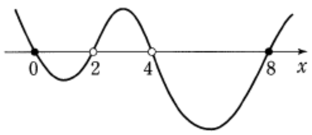
[해설]

주어진 식의 양변에 $(x-n)^2(x-n^2)^2$ 을 곱하면

$x(x-8)(x-n)(x-n^2)\le 0,\ x\neq n,\ x\neq n^2$

ㄱ. $n=2$ 일 때, $0\le x<2$ 또는 $4<x\le 8$ 이므로 이를 만족하는 자연수 x는 1, 5, 6, 7, 8 의 5개다.

$\therefore f(2)=5$



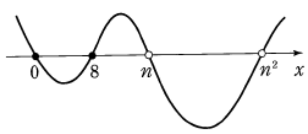
ㄴ. [반례] $n=3$일 때, $0\le x<3$또는 $8\le x<9$ 이므로 이를 만족하는 자연수 x 는 1,2,8 의 3개다. $\therefore f(3)=3$

또한, $m=2$ 일 때, ㄱ에서 $f(2)=5$

즉, $n>m$ 이지만 $f(n)<f(m)$ 이다.(거짓)

ㄷ. $n\ge 9$일 때, $0\le x\le 8$ 또는 $n<x<n^2$

$\therefore f(n)=8+(n^2-n-1)=n^2-n+7$ (참)



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

27. 답 25

[해설]

$$f^1(x)=\frac{2x}{x-2}$$

$$f^2(x)=\frac{2\cdot\frac{2x}{x-2}}{\frac{2x}{x-2}-2}=\frac{\frac{4x}{x-2}}{\frac{4}{x-2}}=x\quad,\ x\neq 2$$

i) n이 홀수일 때,

$\frac{f^n(x)}{x-5}\le 0$ 에서 $\frac{2x}{(x-2)(x-5)}\le 0$

$x(x-2)(x-5)\le 0\ ,\ x\neq 2\ ,x\neq 5$

$\therefore\ x\le 0$ 또는 $2<x<5$

$\therefore\ a_n=2$

ii) n이 짝수일 때,

$\frac{f^n(x)}{x-5}\le 0$ 에서 $\frac{x}{x-}5\le 0\ ,\ x\neq 2$

$x(x-5)\le 0\ ,\ x\neq 2\ ,\ x\neq 5$

$\therefore\ 0\le x<5\ ,\ x\neq 2\quad \therefore\ a_n=3$

위의 경우에서 $\sum_{n=1}^{10}a_n = 5(2+3) = 25$

28. 답 ④

[해설]

$$\begin{cases}(x+2)(x-1)(x-4)\le 0\\ \left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{7}{2}\right)<0\end{cases}$$

위의 3차식을 만족하는 x의 값의 범위는

$x\le -2$ 또는 $1\le x\le 4$ ----------- ①

아래의 4차식을 만족하는 x의 값의 범위는

$-\frac{5}{2}<x<\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$ ------ ②

따라서 ①과②를 만족하는 x의 값의 범위는

$-\frac{5}{2}<x\le -2$ 또는 $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{2}$

따라서 구하는 정수 x는 -2 , 2 , 3 이고 그 합은 3 이다.

29. 답 ③

[해설]

ㄱ. $\begin{cases}(x+1)^2(x^2-1)<0\\(x-1)^2(x^2-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-1)<0,\ x\neq -1\\(x^2-1)<0,\ x\neq 1\end{cases}$

따라서 두 부등식의해는 모두 $-1<x<1$이므로 서로 같다.

ㄴ. $\begin{cases}x^2(x^2-1)\ge 0\\(x^2+1)(x^2-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-1)\ge 0 \text{ 또는 } x=0 & \cdots ㉠\\(x^2-1)\ge 0 & \cdots ㉡\end{cases}$

부등식 ㉠의 해는 $x\le -1$ 또는 $x=0$ 또는 $x\ge 1$

부등식 ㉡의 해는 $x\le -1$ 또는 $x\ge 1$

이므로 서로 다르다.

ㄷ. $\begin{cases}|x+1|(x^2-1)\le 0\\|1-x|(1-x^2)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x+1|(x^2-1)\le 0\\|x-1|(x^2-1)\le 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(x^2-1)\le 0 \text{ 또는 } x=-1\\(x^2-1)\le 0 \text{ 또는 } x=1\end{cases}$

따라서 두 부등식의 해는 모두 $-1\le x\le 1$이므로 서로 같다.

그러므로 두 부등식의 해가 같은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

30. 답 ③

[해설]

$x + \dfrac{6}{x+2} \le 3$ 에서

$\dfrac{x(x+2)+6-3(x+2)}{x+2} \le 0$

$\dfrac{x(x-1)}{x+2} \le 0$

$x(x-1)(x+2) \le 0$, $x \ne -2$

$\therefore$ $x < -2$, $0 \le x \le 1$ --------- ①

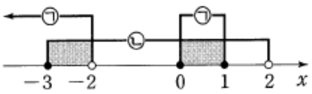
또한 $\dfrac{x+3}{x-2} \le 0$ 에서

$(x+3)(x-2) \le 0$, $x \ne 2$

$\therefore$ $-3 \le x < 2$ ---------------- ②

①,② 를 동시에 만족하는 x의 값의 범위는

$-3 \le x < -2$ 또는 $0 \le x \le 1$



따라서 두 부등식을 동시에 만족하는 정수 x 는 -3, 0 , 1 이므로 그 합은 -2 이다.

31. 답 ③

[해설]

주어진 부등식은 두 개의 부등식 $1 < \dfrac{3x}{x+2}$, $\dfrac{3x}{x+2} \le 2$을 동시에 만족하는 x의 값의 범위를 구하는 것이다.

(ⅰ) 부등식 $1 < \dfrac{3x}{x+2}$를 이항하여 정리하면

$\dfrac{2(x-1)}{x+2} > 0$

양변에 $(x+2)^2$을 곱하면

$2(x-1)(x+2) > 0$

$\therefore$ $x < -2$ 또는 $x > 1$ …… ㉠

(ⅱ) 부등식 $\dfrac{3x}{x+2} \le 2$를 이항하여 정리하면

$\dfrac{x-4}{x+2} \le 0$

양변에 $(x+2)^2$을 곱하면

$(x-4)(x+2) \le 0$, $x \ne -2$

$\therefore$ $-2 < x \le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족하는 x의 값의 범위는 $1 < x \le 4$

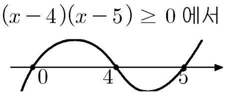
$\therefore$ $\alpha = 1$, $\beta = 4$

$\therefore$ $\beta - \alpha = 3$

32. 답 ②

[해설]

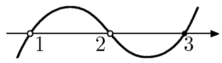
$x(x-4)(x-5) \ge 0$ 에서



$0 \le x \le 4$ 또는 $x \ge 5$ … ㉠

$\dfrac{x-3}{x^2-3x+2} = \dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)} \le 0$ 에서

$(x-1)(x-2)(x-3) \le 0$ (단, $x \ne 1$, $x \ne 2$)



$\therefore$ $x < 1$ 또는 $2 < x \le 3$ … ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는 $0 \le x < 1$ 또는 $2 < x \le 3$

따라서 구하는 정수 x 의 개수는 0, 3 이므로 2 개다.

33. 답 ⑤

[해설]

주어진 연립부등식의 각각의 해를 구하면 다음과 같다. (단, $a < 0$)

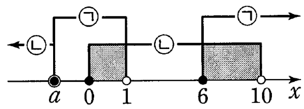
$\dfrac{(x-6)(x-a)}{x-1} \ge 0 \Leftrightarrow (x-a)(x-1)(x-6) \ge 0, x \ne 1$

$\therefore a \le x < 1, x \ge 6$ ...... ㉠

$\dfrac{x}{(x-a)(x-10)} \le 0 \Leftrightarrow (x-a)x(x-10) \le 0, x \ne a, x \ne 10$

$\therefore x < a, 0 \le x < 10$ ...... ㉡

㉠, ㉡로부터



주어진 연립부등식의 해는 $0 \le x < 1, 6 \le x < 10$이므로

정수의 개수는 5개 $(0, 6, 7, 8, 9)$이다.

34. 답 6

[해설]

$\dfrac{x^2-x-20}{|x(x-4)|} \le 0$

$\Leftrightarrow$ $x^2-x-20 \le 0$, $x \ne 0$, $x \ne 4$

$\Leftrightarrow$ $(x+4)(x-5) \le 0$, $x \ne 0$, $x \ne 4$

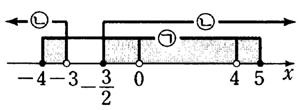
$\therefore$ $-4 \le x \le 5$, $x \ne 0$, $x \ne 4$ …… ㉠

$\dfrac{2x+3}{x+3} \ge 0$

$\Leftrightarrow$ $(2x+3)(x+3) \ge 0$, $x \ne -3$

$\therefore$ $x < -3$ 또는 $x \ge -\dfrac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통범위는



$-4 \le x < -3$ 또는 $-\dfrac{3}{2} \le x < 0$ 또는 $0 < x < 4$ 또는 $4 < x \le 5$

따라서 ㉠, ㉡을 동시에 만족하는 정수 x는 -4, -1, 1, 2, 3, 5 이므로 그 합은 6이다.

35. 답 ①

[해설] (i) $x^3 - 2x^2 + x < 0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x-1)^2 < 0$

$(x-1)^2 \geq 0$이므로 이 부등식의 해는 $x<0$

(ii) (i)에서 $x<0$이므로

$x+\dfrac{1}{x} \leq -2$

$\therefore x-1+\dfrac{1}{x}<0,\ x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}<0$

$\therefore \left(x-1+\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x}\right)^2\left(x+4+\dfrac{1}{x}\right)^3 \leq 0$

$\Leftrightarrow \left(x+4+\dfrac{1}{x}\right)^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow x+4+\dfrac{1}{x} \geq 0$

$\Leftrightarrow x^2+4x+1 \leq 0\ (\because x<0)$

이 부등식의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$이므로 $\alpha,\ \beta$는 이차방정식 $x^2+4x+1=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=1$

36. 답 ⑤

[해설]

$\dfrac{x^2-4}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+2) \geq 0$, $x \neq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq x < 1$ 또는 $x \geq 2$ ------ ①

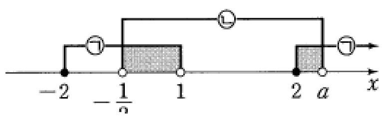
집합B에서 $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-a)<0$ ----------------- ②

i) $-\dfrac{1}{2}<x<a$ 일 때,

집합$A\cap B$에 속하는 정수가 3개 이려면 다음 그림과 같이 정수는 0 , 2 , 3 이므로 조건을 만족하는 a의 값의 범위는 $3<a\leq 4$ 이다.

ii) $a<x<-\dfrac{1}{2}$ 일 때,

집합$A\cap B$ 에 속하는 정수는 다음 그림과 같이 최대 $-2,\ -1$ 의 2개 이므로 조건을 만족하는 a의 값은 없다.



따라서 위의 경우에서 구하는 a의 값의 범위는 $3<a\leq 4$ 이다.

37. 답 13

[해설]

$x(x-3)(x+6)>0$ 의 해는

$-6<x<0$ 또는 $x>3$

$\dfrac{x-1}{x-a} \leq 0$ 의 양변에 $(x-a)^2$을 곱하면

$(x-1)(x-a) \leq 0$, $x \neq a$

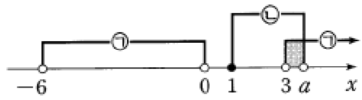
이 때, $a=1$ 인 경우 부등식의 해가 없다.

따라서 $a>1$ 이면 $1 \leq x < a$

$a<1$ 이면 $a<x\leq 1$

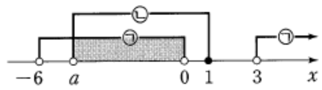
위의 경우를 모두 만족하는 정수x의 값들의 합의 절댓값이 15 이므로

i) $1 \leq x < a$ 인 경우



$6<a\leq 7$ 일 때 정수해는 4,5,6 이고 그 합은 15 이다.

ii) $a<x\leq 1$ 인 경우



$-6\leq x<-5$ 일 때, 정수해는 $-1,-2,-3,-4,-5$ 이고 그 합은 -15이다.

따라서 위의 경우에서 a의 최댓값은 7 , 최솟값은 -6이므로

$|m|=7$, $|n|=6$ $\therefore |m|+|n|=13$

38. 답 ⑤

[해설]

$\dfrac{(x-a)(x-2)^2}{x-1} \leq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-a) \leq 0,\ x\neq 1$ 또는 $x=2$ …… ㉠

$\dfrac{x}{(x-a)(x^2+1)} \geq 0$

$\Leftrightarrow x(x-a) \geq 0,\ x \neq a$ …… ㉡

ㄱ. $a=1$일 때

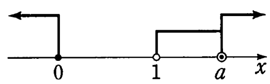
㉠의 해는 $x=2$, ㉡의 해는 $x\leq 0$ 또는 $x>1$이므로

두 부등식의 공통해는 $x=2$이다.

$\therefore S(a)=1$ (참)

ㄴ. $a\geq 2$일 때

㉮의 해는 $1<x\leq a$, ㉡의 해는 $x\leq 0$ 또는 $x>a$

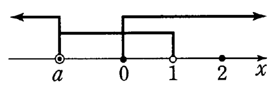


이므로 두 부등식의 공통해는 없다.

$\therefore S(a)=0$ (참)

ㄷ. $a<0$일 때

㉠의 해는 $a\leq x<1$ 또는 $x=2$, ㉡의 해는 $x<a$ 또는 $x\geq 0$



이므로 두 부등식의 공통해는 $0\leq x<1$ 또는 $x=2$

이 중에서 정수 x는 0, 2이다.

$\therefore S(a)=2$ (참)

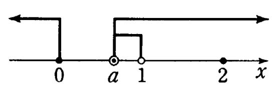
따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[참고]

(i) $0\leq a<1$일 때

㉠의 해는 $a\leq x<1$ 또는 $x=2$

㉡의 해는 $x\leq 0$ 또는 $x>a$ (단, $a=0$일 때 a는 제외)



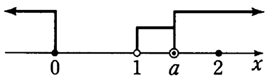
이므로 두 부등식의 공통해는 $a<x<1$ 또는 $x=2$

이 중에서 정수 x는 2이다.

(ii) $1 < a < 2$일 때

㉠의 해는 $1 < x \le a$ 또는 $x = 2$

㉡의 해는 $x \le 0$ 또는 $x > a$



이므로 두 부등식의 공통해는 $x = 2$이다

39. 답 ④

[해설]

$f(x) = x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 12x$로 놓으면

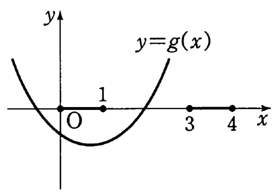
$f(x) = x(x-1)(x-3)(x-4)$

따라서 $f(x) \le 0$의해는

$0 \le x \le 1$ 또는 $3 \le x \le 4$ …… ㉠

$g(x) = x^2 + ax + b$로 놓으면

$x^2 + ax + b < 0$의 해와 ㉠을 동시에 만족하는 x의 값의 범위가 $0 \le x \le 1$이 되려면 다음과 같이 세 조건을 만족해야 한다.



$g(0) = b < 0$ …… ㉡

$g(1) = 1 + a + b < 0$ …… ㉢

$g(3) = 9 + 3a + b \ge 0$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $\dfrac{-9-b}{3} \le a < -1-b$ …… ㉤

이때, ㉡과 ㉤을 모두 만족하는 음의 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 다음과 같다.

$(-1, -1)$, $(-1, -2)$, $(-1, -3)$, $(-1, -4)$, $(-1, -5)$

$(-1, -6)$, $(-2, -1)$, $(-2, -2)$, $(-2, -3)$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 9개이다.

40. 답 ③

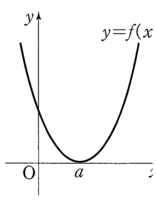
[해설] $x^3 - 2ax^2 + (a+6)x = x(x^2 - 2ax + a + 6) \ge 0$이므로

$x \ge 0$일 때, $f(x) = x^2 - 2ax + a + 6 \ge 0$이 항상 성립해야 한다.

$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a + 6$이고

$a > 0$이므로

$x \ge 0$에서 $f(x) \ge 0$이려면



$f(x) \ge -a^2 + a + 6 \ge 0$

$a^2 - a - 6 \le 0$

$(a+2)(a-3) \le 0$

그런데 $a > 0$이므로

$0 < a \le 3$

따라서 양수 a의 최댓값은 3이다.

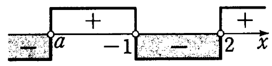
41. 답 ③

[해설]

$x^3 - (a+1)x^2 + (a-2)x + 2a < 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-2)(x-a) < 0$

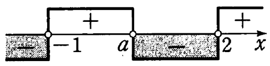
(i) $a < -1$ 일 때,



부등식의 해는 $x < a$ 또는 $-1 < x < 2$이므로

만족하는 자연수는 1의 1개이다.

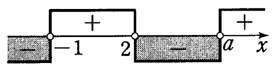
(ii) $-1 \le a < 2$일 때



부등식의 해는 $x < -1$ 또는 $a < x < 2$이므로

만족하는 자연수가 1의 1개이려면 $-1 \le a < 1$

(iii) $a \ge 2$일 때,



부등식의 해는 $x < -1$ 또는 $2 < x < a$이므로

만족하는 자연수가 3의 1개이려면 $3 < a \le 4$

따라서 구하는 a의 값의 범위는 $a < 1$ 또는 $3 < a \le 4$

42. 답 8

[해설] 부등식 $(x-8)(x-1)(x+5) > 0$의 해는

$-5 < x < 1$또는 $x > 8$

부등식 $x(x-a) \le 0$의 해는

$a < 0$이면 $a \le x \le 0$, $a > 0$이면 $0 \le x \le a$

따라서 $A \cap B$의 원소가 5개가 될 a의 값의 범위는

(i) $a \le -4$일 때,

$A \cap B = \{0, -1, -2, -3, -4\}$

(ii) $12 \le a < 13$

$A \cap B = \{0, 9, 10, 11, 12\}$

$\therefore m + M = 12 + (-4) = 8$

43. 답 ⑤

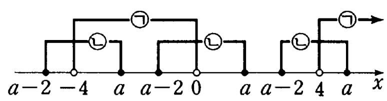
[해설]

$x^3 - 16x > 0 \Leftrightarrow x(x+4)(x-4) > 0$

$\therefore -4 < x < 0$ 또는 $x > 4$ …… ㉠

$(x-a)(x-a+2) \le 0 \Leftrightarrow (x-a)\{x-(a-2)\} \le 0$

$\therefore a-2 \le x \le a$ …… ㉡



구하는 연립부등식의 해는 ㉠과 ㉡의 공통 범위이므로 이를 만족하는 정수 x의 개수가 1개가 되도록 하는 정수 a의 값은 -3, 1, 5이다.

따라서 그 합은 3이다.

44. 답 5

[해설]

$x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$

이므로 주어진 부등식의 해는 부등식 $x^2-ax<0$ 과 같다.

$x^2-ax<0$, $x(x-a)<0$

즉, 주어진 부등식의 해는

$a<x<0$ 또는 $0<x<a$ 이다.

따라서 정수 x의 개수가 4개이려면 $-5\le a<-4$ 또는

$4<a\le 5$ 이므로 실수 a의 최댓값은 5이다.

45. 답 12

[해설]

$(x-2)(x+1)(x+3)>0$ 에서

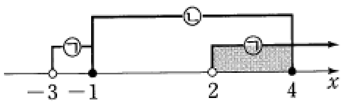
$A=\{x \mid -3<x<-1$ 또는 $x>2\}$ -------- ①

이차방정식 $x^2+ax+b=0$ 의 두 근을 $\alpha,\beta(\alpha\le\beta)$ 라 하면

$B=\{x \mid \alpha\le x\le\beta\}$ -------------------- ②

$A\cup B=\{x \mid x>-3\}$, $A\cap B=\{x \mid 2<x\le 4\}$ 이므로 수직선

위에 그려 보면 다음과 같다.



$\therefore\ \alpha=-1$, $\beta=4$

$x^2+ax+b=(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$ 이므로

$a=-3$, $b=-4$

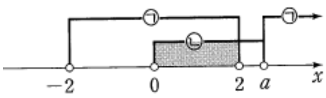
$\therefore\ ab=(-3)\times(-4)=12$

46. 답 ④

[해설]

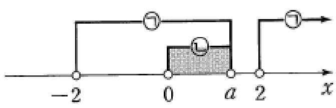
$$\begin{cases}(x+2)(x-2)(x-a)>0\\ x(x-a)<0\end{cases}$$

i) $a\ge 2$ 일 때,



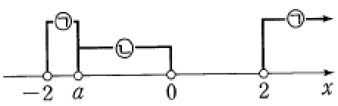
공통범위는 $0<x<2$ 이므로 정수해 1을 갖는다.

ii) $0<a<2$ 일 때,



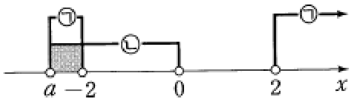
위의 그림에서 $1<a<2$일 때 정수해1을 갖는다.

iii) $-2\le a\le 0$ 일 때,



해가 공집합이므로 정수해는 없다.

iv) $a<-2$ 일 때,



위의 그림에서 $-4\le a<-3$ 일 때, 정수해 -3을 갖는다.

따라서 위의 경우에서 k의 값이 될 수 있는 것은 -3 또는 1 이다.

47. 답 ④

[해설] $2x^3-kx^2-12x+4k=3x(x^2-4)-k(x^2-4)$

$=(x^2-4)(3x-k)$

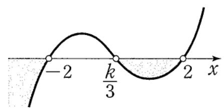
$=(x+2)(x-2)(3x-k)<0$

$\frac{k}{3}\le -2$이면 $x=1$을 해로 가지므로 $\frac{k}{3}>-2$이다.

(i) $\frac{k}{3}<2$, 즉 $k<6$일 때,

삼차부등식의 해는

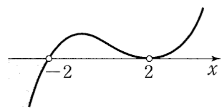
$x<-2$또는 $\frac{k}{3}<x<2$



(ii) $\frac{k}{3}=2$, 즉 $k=6$일 때,

삼차부등식의 해는

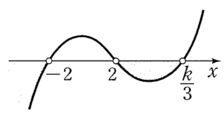
$x<-2$



(iii) $\frac{k}{3}>2$, 즉 $x>6$일 때,

삼차부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $2<x<\frac{k}{3}$



양의 정수 x가 없어야 하므로

$1\le\frac{k}{3}\le 3$에서 $3\le k\le 9$

이것을 만족하는 정수 k는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개다.

48. 답 ③

[해설]

분수부등식 $\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}\le 0$의 좌변을 통분하면

$\frac{x(x-b)+x(x-a)}{(x-a)(x-b)}\le 0,\quad \frac{x(2x-a-b)}{(x-a)(x-b)}\le 0$ …… ㉠

㉠의 양변에 $(x-a)^2(x-b)^2$을 곱하면

$x(2x-a-b)(x-a)(x-b)\le 0$ (단, $x\ne a,\ x\ne b$)

이 때, $a<\frac{a+b}{2}<b$이므로 주어진 분수부등식의 해는

$0\le x<a$또는 $\frac{a+b}{2}\le x<b$

$a=1,\ b=2$일 때, 정수인 해가 존재하지 않는다.

$a=1,\ b=3$일 때, $\frac{a+b}{2}=2$이므로 정수인 해는 $x=0,\ x=2$의 2개이다.

$a=1,\ b=4$일 때, $\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$이므로 정수인 해는 $x=0,\ x=3$의 2개이다.

$a=1,\ b\ge 5$일 때, 정수인 해는 세 개 이상이다.

$a=2,\ b=3$일 때, $\frac{a+b}{2}=\frac{5}{2}$이므로 정수인 해는 $x=0,\ x=1$의 2개이다.

$a=2,\ b\geqq 4$일 때, 정수인 해는 3개 이상이다.

$a\geqq 3$이면 정수인 해는 3개 이상이다.

따라서 구하는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $(1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)$의 3개이다.

49. 답 ①

[해설]

해는 $\begin{cases} 0<x\le a \\ -2a\le x<-a \end{cases}$

해의 정수해가 총 4개인데,

i) $a=$(정수)일 때

정수 x의 개수는 $0<x\le a$에서 a개

$-2a\le x<-a$에서 $(-a)-(-2a)=a$개

$\therefore\ 2a=4,\ a=2$

이때 정수해는 1, 2, −3, −4

ii) $a\ne$(정수), $2a\ne$(정수)일 때

정수 x의 개수는 $0<x\le a$에서 $[a]$개

$-2a\le x<-a$에서 $[-a]-([-2a]+1)+1$개

$[a]+[-a]-([-2a]+1)+1$

$=[a]+[-a]-[-2a]$

$=-1-[-2a]=4$

$[-2a]=-5$

$-5<-2a<-4$ ($\because\ 2a\ne$(정수))

$\frac{5}{2}>a>2$

이때 정수해는 1, 2, −3, −4

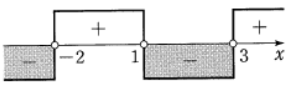
$\therefore\ 2\le a<\frac{5}{2}$일 때 정수해는 1, 2, −3, −4이고 그 합은 −4

50. 답 5

[해설]

$x^3-2x^2-5x+6<0$ 에서

$(x+2)(x-1)(x-3)<0$

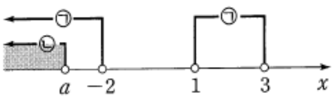


$\therefore\ x<-2$, $1<x<3$ --------- ①

$|x-1|(x-a)<0$ 에서 $x\ne 1$ 일 때 $|x-1|>0$ 이므로

$x<a$, $x\ne 1$ ---------------- ②

①은 ②이기 위한 필요조건이므로 $a\le -2$

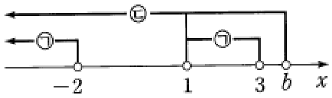


$|x-1|(x-b)<0$ 에서 $x\ne 1$ 일 때 $|x-1|>0$ 이므로

$x<b$, $x\ne 1$ ----------------- ③

①은 ③이기 위한 충분조건이므로 $b\ge 3$

$\therefore\ |a-b|=|b-a|\ge 3-(-2)=5$



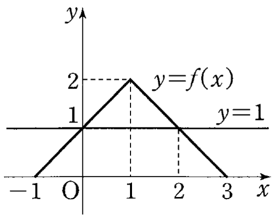
51. 답 ③

[해설] $\sqrt{f(x)}\ge\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$에서 $f(x)\ge 0$이고 $f(x)\ne 0$

$\therefore\ f(x)>0$ $\cdots$ ㉠

또, $\sqrt{f(x)}>0$이므로 주어진 부등식의 양변에 $\sqrt{f(x)}$를 곱하면

$f(x)\ge 1$ $\cdots$ ㉡



따라서 위의 그림에서 부등식 ㉡을 만족하는 x의 값의 범위는

$0\le x\le 2$

52. 답 ④

[해설]

$\frac{g(x)}{f(x)}\ge 1 \ \Leftrightarrow\ \frac{f(x)-g(x)}{f(x)}\le 0 \ \Leftrightarrow f(x)\{f(x)-g(x)\}\le 0$,

$f(x)\ne 0$

즉, $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)\ge g(x) \end{cases}$

i) $\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)\le g(x) \end{cases}$ 일 때,

$f(x)>0$ 의 해는 $x<0$ 또는 $c<x<f$

$f(x)\le g(x)$ 의 해는 $b\le x\le d$ 또는 $g\le x$

따라서 위의 공통범위를 구하면

$b\le x<0$ 또는 $c<x\le d$

ii) $\begin{cases} f(x)<0 \\ f(x)\ge g(x) \end{cases}$ 일 때,

$f(x)<0$ 의 해는 $0<x<c$ 또는 $x>f$

$f(x)\ge g(x)$의 해는 $x\le b$ 또는 $d\le x\le g$

따라서 위의 공통범위를 구하면

$f<x\le g$

따라서 위의 경우에서 구하는 해는

$b\le x<0$ 또는 $c<x\le d$ 또는 $f<x\le g$

53. 답 ④

[해설]

$f(x)=ax(x-1)$ $(a>0)$이라 하면

$\frac{f(x)}{f(x+1)}\le x \ \Leftrightarrow\ \frac{ax(x-1)}{a(x+1)x}\le x$

$\Leftrightarrow\ \frac{x-1}{x+1}\le x,\ x\ne 0$

$\Leftrightarrow\ \frac{-x^2-1}{x+1}\le 0,\ x\ne 0$

$\Leftrightarrow (x^2+1)(x+1) \geq 0,\ x \neq 0,\ x \neq -1$

$\Leftrightarrow x+1 \geq 0,\ x \neq 0,\ x \neq -1$

따라서 구하는 해는 $-1 < x < 0$ 또는 $x > 0$

54. 답 5

[해설]

$\dfrac{xf(x)}{gx} \leq 0 \Leftrightarrow xf(x)g(x) \leq 0$, $g(x) \neq 0$

i) $x < 0$ 일 때,

$f(x)g(x) \geq 0$, $g(x) \neq 0$ 을 만족하는 x의 값의 범위는

$-3 \leq x < -1$ 이다.

ii) $x \geq 0$ 일 때,

$f(x)g(x) \leq 0$, $g(x) \neq 0$ 을 만족하는 x의 값의 범위는

$0 \leq x \leq 4$ 이다.

따라서, 위의 경우에서 구하는 정수는 $-3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$ 이므로 그 합은 5이다.

55. 답 ④

[해설] $f(x) = a(x+1)(x-3)$ $(a > 0)$으로 놓으면

ㄱ. $k=1$일 때, $\dfrac{f(x-1)}{f(x+1)} \leq 0$에서

$\dfrac{ax(x-4)}{a(x+2)(x-2)} \leq 0$

$x(x-4)(x+2)(x-2) \leq 0,\ x \neq -2,\ x \neq 2$

$\therefore -2 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 4$

$\therefore A_1 = \{-1,\ 0,\ 3,\ 4\}$

$\therefore n(A_1) = 4$ (참)

ㄴ. $\dfrac{f(x-k)}{f(x+1)} \leq 0$에서

$\dfrac{a(x-k+1)(x-k-3)}{a(x+2)(x-2)} \leq 0$

$(x-k+1)(x-k-3)(x+2)(x-2) \leq 0,\ x \neq -2,\ x \neq 2$

따라서 $k \geq 4$일 때,

$-2 < x < 2$ 또는 $k-1 \leq x \leq k+3$

$\therefore A_k = \{-1,\ 0,\ 1,\ k-1,\ k,\ k+1,\ k+2,\ k+3\}$

$\therefore n(A_k) = 8$ $(k \geq 4)$ (거짓)

ㄷ. $k+3 = 100$에서 $k=97$, $k-1=100$ 에서 $k=101$

이므로 $97 \leq k \leq 101$ 일 때, $100 \in A_k$

즉, $100 \in A_k$를 만족하는 k의 값은 5개 존재한다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

56. **답 ③**

[해설]

$2x = t$로 치환하면

부등식 $\dfrac{x}{f(2x)-1} \geq \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{t}{f(t-1)-1} \geq 1$

(i) $f_{(t)} > 1$이면

$f(t) \leq t+1$ 이어야 하므로

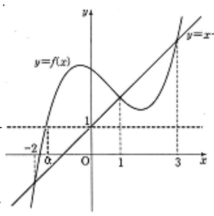
주어진 그래프에서 두 조건

을 만족하는 t의 범위는 $1 \leq t \leq 3$이다.

(ii) $f_{(t)} < 1$이면 $f_{(t)} \geq t+1$이어야 하므로

같은 방법으로 t의 범위를 구하면

$-2 \leq t < \alpha$이다.



$\therefore -2 \leq 2x < \alpha,\ 1 \leq 2x \leq 3$

$-1 \leq x \leq \dfrac{\alpha}{2},\ \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

$\mathrm{M} = \dfrac{3}{2},\ m = -1 \quad \therefore \mathrm{M} + m = \dfrac{1}{2}$

57. 답 14

[해설] 전체 일의 양을 1로 놓으면 한 사람이 1시간에 할 수 있는 일 양은 $\dfrac{1}{2}$이다.

두 사람 외에 같이 배식한 사람의 수를 x라 하면 전체 $(2+x)$이 1시간에 할 수 있는 일의 양은 $\dfrac{2+x}{2}$이다.

최소 10분, 최대 20분이 걸렸으므로

$\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{2}{2+x} \leq \dfrac{1}{3}$

(i) $\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{2}{2+x}$에서 $2+x \leq 12$이므로 $x \leq 10$

(ii) $\dfrac{2}{2+x} \leq \dfrac{1}{3}$에서 $6 \leq 2+x$이므로 $x \geq 4$

(i), (ii)에서 $M=10,\ m=4$이므로

$M+m = 10+4 = 14$

58. 답 ③

[해설] 집에서 박물관에 갈 때의 속력을 $xkm/$시라 하면 박물관에서 기차역을 갈 때의 속력은 $(x+4)km/$시이다.

그러므로 자전거를 타고 달린 시간은 $\left(\dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{x+4}\right)$시간이다.

$\dfrac{6}{x} + \dfrac{8}{x+4} \leq 1$

양변에$x(x+4)$를 곱하면

$6(x+4) + 8x \leq x(x+4)$

$x^2 - 10x - 24 \geq 0$

$(x+2)(x-12) \geq 0$

$x > 0$이므로 $x \geq 12$

따라서 집에서 박물관에 갈 때의 속력은 시속 $12km$이상이어야 한다.

59. 답 ⑤

[해설]

농도 12%의 소금물 200g에 들어 있는 소금의 양은

$200 \times \dfrac{12}{100} = 24(\mathrm{g})$

농도 6%의 소금물 xg을 섞는다고 하면 전체 소금물의 양은 $(200+x)$g이고, 이때 들어 있는 소금의 양은 $\left(24 + \dfrac{6}{100}x\right)$g이므로

$$\frac{24+\frac{6}{100}x}{200+x} \le \frac{8}{100} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$200+x$이므로 부등식 ㉠의 양변에 $100(200+x)$를 곱하면

$2400+6x \le 8(200+x)$

$\therefore\ x \ge 400$

따라서 농도 6%인 소금물은 $400\,g$이상 섞어야 한다.

60. 답 ⑤

[해설]

A 병의 용액 절반을 B 병에 넣는 것을 1단계, 그 다음 B 병의 용액 절반을 A 병에 넣는 것을 2단계라고 할 때, 각 단계 시행 후의 A 병과 B 병에 들어 있는 용액의 양과 용질의 양은 다음과 같다.

구분	A 병		B 병	
	용액	용질	용액	용질
1단계 후	500	25	$500+x$	$25+\frac{x}{10}$
2단계 후	$500+\frac{500+x}{2}$	$25+\frac{25+\frac{x}{10}}{2}$	$\frac{500+x}{2}$	$\frac{25+\frac{x}{10}}{2}$

2단계 시행 후 A 병의 용액의 농도가 9% 이하이므로

$$\frac{25+\frac{25+\frac{x}{10}}{2}}{500+\frac{500+x}{2}}\times 100 \le 9$$

$7500+10x \le 13500+9x$

$\therefore\ x \le 6000$

따라서 처음 B 병에 들어 있는 용액의 양은 $6000\,mL$ 이하이므로 a의 최댓값은 6000이다.

1. 정답 ③ 2. 정답 ③ 3. 정답 ②
4. 정답 ⑤ 5. 정답 7 6. 정답 ⑤
7. 정답 ① 8. 정답 ⑤ 9. 정답 ④
10. 정답 ② 11. 정답 ④ 12. 정답 ③
13. 정답 ① 14. 정답 ② 15. 정답 ④
16. 정답 ④ 17. 정답 8 18. 정답 ⑤
19. 정답 ⑤ 20. 정답 ③ 21. 정답 ③
22. 정답 ② 23. 정답 ⑤ 24. 정답 ②
25. 정답 ① 26. 정답 ⑤ 27. 정답 ⑤
28. 정답 ① 29. 정답 ① 30. 정답 ②
31. 정답 ④ 32. 정답 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 33. 정답 20
34. 정답 ⑤ 35. 정답 ⑤ 36. 정답 ④
37. 정답 ④ 38. 정답 ⑤ 39. 정답 ①
40. 정답 ④ 41. 정답 ① 42. 정답 ③
43. 정답 ③ 44. 정답 ④ 45. 정답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$
46. 정답 ① 47. 정답 $\frac{3}{4}$ 48. 정답 ②
49. 정답 ② 50. 정답 ④ 51. 정답 ②
52. 정답 ① 53. 정답 ③ 54. 정답 $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$
55. 정답 ② 56. 정답 ① 57. 정답 ③
58. 정답 ① 59. 정답 ③ 60. 정답 ⑤
61. 정답 ③ 62. 정답 ③ 63. 정답 ③
64. 정답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 65. 정답 ⑤ 66. 정답 ⑤
67. 정답 ③ 68. 정답 직각삼각형
69. 정답 ① 70. 정답 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

71. 정답 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

72. 정답 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수)

73. 정답 $x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$ (단, n은 정수)

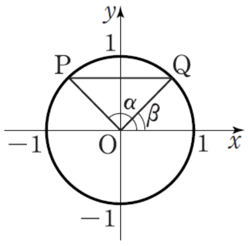
74. 정답 9 75. 정답 ④ 76. 정답 ⑤
77. 정답 ⑤ 78. 정답 ④ 79. 정답 ④
80. 정답 ③ 81. 정답 ⑤ 82. 정답 ③
83. 정답 ① 84. 정답 ⑤ 85. 정답 ⑤

86. 정답 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

87. 정답 ② 88. 정답 ④ 89. 정답 ②
90. 정답 ① 91. 정답 ① 92. 정답 ④
93. 정답 $\frac{1}{5}$ 94. 정답 ⑤ 95. 정답 ⑤

1. 정답 ③

오른쪽 그림과 같이 두 각 α, β가 나타내는 동경이 단위원과 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$, $\mathrm{Q}(\cos\beta,\ \sin\beta)$이다. 이때, $\triangle\mathrm{OPQ}$에서 제이코사인법칙에 의하여



$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$

$= \boxed{2} - 2\cos(\alpha-\beta)$ …… ㉠

좌표평면에서 두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2$

$= \boxed{2} - 2(\cos\alpha\cos\beta \boxed{+} \sin\alpha\sin\beta)$ …… ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서 $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta \boxed{+} \sin\alpha\sin\beta$

2. 정답 ③

α는 제2사분면의 각이고 β는제 1사분면의 각이므로 $\cos\alpha < 0$이고 $\cos\beta > 0$이다. 따라서

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$

$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= \left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{5} = \frac{6-4\sqrt{21}}{25}$

3. 정답 ②

θ가 제1사분면의 각이므로 $\sin\theta > 0$이고 $\cos\theta > 0$이다. 또,

$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$이므로

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\theta\cos\frac{\pi}{3} + \cos\theta\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{6}}{6}$

4. 정답 ⑤

$\sin\alpha + \cos\beta = \frac{\sqrt{15}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha + \cos^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta = \frac{15}{4}$ …… ㉠

또, $\cos\alpha + \sin\beta = \frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha + \sin^2\beta + 2\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠+㉡에서 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$

이므로 $2 + 2(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = 4$

$\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 1$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 1$

5. 정답 7

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{2}{3}$에서 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{2}{3}$ …… ㉠

$\sin(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}$에서 $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\sin\alpha\cos\beta = \frac{7}{12}$, $\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{12}$

$\therefore\ \frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\times\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{1}{12}}$

6. 정답 ⑤

$\cos A = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$이므로

$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin B = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{1} = 2\sqrt{2}$

$\therefore\ \tan C = \tan\{\pi-(A+B)\} = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$

$= -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\times2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

7. 정답 ①

두 직선 OA, OB가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면, 직선 OA의 기울기는 $\frac{3}{2}$, 직선 OB의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 $\tan\alpha = \frac{3}{2}$, $\tan\beta = \frac{4}{3}$

$\therefore\ \tan\theta = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\frac{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}}\right| = \frac{1}{18}$

8. 정답 ⑤

$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = -1\ \left(\because\ \alpha+\beta = \frac{3}{4}\pi\right)$

이므로 $\tan\alpha + \tan\beta = -1 + \tan\alpha\tan\beta$

$\therefore\ (1-\tan\alpha)(1-\tan\beta) = 1-(\tan\alpha+\tan\beta) + \tan\alpha\tan\beta$

$= 1-(-1+\tan\alpha\tan\beta) + \tan\alpha\tan\beta = 2$

9. 정답 ④

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{DB}} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$이므로 $\angle\mathrm{ABC} = \alpha$라 하면

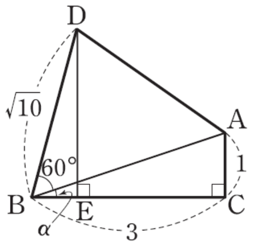
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$, $\cos\alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DE}} = \overline{\mathrm{DB}}\sin(60^\circ+\alpha)$

$= \sqrt{10}(\sin 60^\circ \cos\alpha + \cos 60^\circ \sin\alpha)$

$= \sqrt{10}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{10}}{10}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$

$= \dfrac{3\sqrt{3}+1}{2}$



10. 정답 ②

$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\tan\gamma = \dfrac{1}{9}$이므로

$\tan(\alpha+\gamma) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\gamma} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}} = \dfrac{11}{17}$

$\alpha+\beta+\gamma = 45^\circ$이므로

$\tan\beta = \tan\{45^\circ-(\alpha+\gamma)\} = \dfrac{\tan 45^\circ - \tan(\alpha+\gamma)}{1+\tan 45^\circ \tan(\alpha+\gamma)} = \dfrac{1-\frac{11}{17}}{1+\frac{11}{17}} = \dfrac{3}{14}$

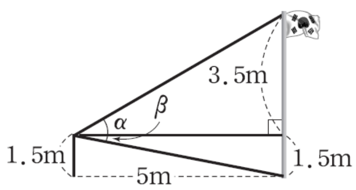
따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{1}{\tan\beta} = \dfrac{14}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{PD}} = \dfrac{14}{3} - 2 = \dfrac{8}{3}$

11. 정답 ④

오른쪽 그림에서 $\tan\alpha = \dfrac{3.5}{5} = \dfrac{7}{10}$, $\tan\beta = \dfrac{1.5}{5} = \dfrac{3}{10}$이므로

$\tan\theta = \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$= \dfrac{\frac{7}{10}+\frac{3}{10}}{1-\frac{7}{10}\times\frac{3}{10}} = \dfrac{100}{79}$



12. 정답 ③

$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{ADC}$이므로 $\angle\mathrm{ACB} = 45^\circ$, $\angle\mathrm{BAC} = 75^\circ$

따라서 $\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin 60^\circ} = \dfrac{1}{\sin 75^\circ}$ $\therefore$ $\overline{\mathrm{AC}} = \dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$

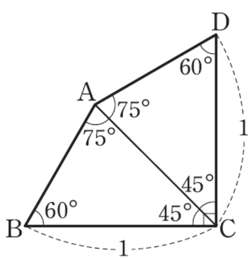
$\therefore$ $\square\mathrm{ABCD} = 2\triangle\mathrm{ABC}$

$= 2\times\left(\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin 45^\circ\right)$

$= \dfrac{\sin 60^\circ \times \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} = \dfrac{\sin 60^\circ \times \sin 45^\circ}{\sin(30^\circ+45^\circ)}$

$= \dfrac{\sin 60^\circ \times \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ}$

$= \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$



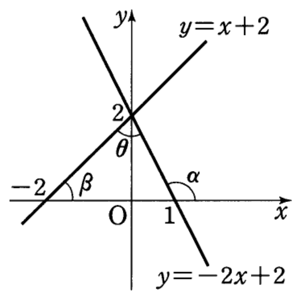
13. 정답 ①

직선 $y=3x-1$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha = 3$, $\tan\beta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $\tan\theta = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}\right| = 1$

14. 정답 ②

두 직선 $y=-2x+2$, $y=x+2$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha = -2$, $\tan\beta = 1$이므로



$\tan\theta = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$= \left|\dfrac{-2-1}{1+(-2)\cdot 1}\right| = 3$

$\therefore$ $\tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}} = \dfrac{3-1}{1+3\cdot 1} = \dfrac{1}{2}$

15. 정답 ④

두 직선 $y=2x$, $y=ax$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = a$이다.

$\therefore$ $\tan 45^\circ = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\dfrac{2-a}{1+2a}\right| = 1$

$\therefore$ $\dfrac{2-a}{1+2a} = \pm 1$

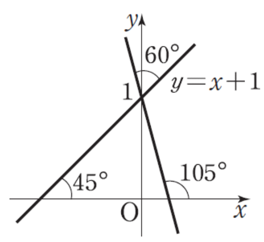
(ⅰ) $\dfrac{2-a}{1+2a} = 1$일 때 $2-a = 1+2a$에서 $a = -3$

(ⅱ) $\dfrac{2-a}{1+2a} = -1$일 때 $2-a = -1-2a$에서 $a = -3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a는 양수이므로 $a = \dfrac{1}{3}$

16. 정답 ④

직선 $y=x+1$을 점 $(0, 1)$을 중심으로 시계 반대 방향으로 60° 만큼 회전시킨 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 105°이다. 이 직선의 기울기는



$\tan 105^\circ = \tan(60^\circ + 45^\circ)$

$= \dfrac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1-\tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3})$

이고 점 $(0, 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1 = -(2+\sqrt{3})(x-0)$ $\therefore$ $y = -(2+\sqrt{3})x+1$

17. 정답 8

직선 $y=\dfrac{1}{2}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$

따라서 직선 $y=ax+b$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는

$\theta+45^\circ$이므로 $a = \tan(\theta+45^\circ) = \dfrac{\tan\theta+\tan 45^\circ}{1-\tan\theta\tan 45^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\cdot 1} = 3$

또, 직선 $y=3x+b$가 점 $(2,\ 1)$을 지나므로 $1=3\cdot 2+b$에서 $b=-5$

$\therefore\ a-b=3-(-5)=8$

18. 정답 ⑤

$f(x)=\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x+1$

$=\sqrt{3}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)+\cos x+1$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x+1=\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)+1$

ㄱ. $-1\leqq\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)\leqq 1$이므로 $0\leqq f(x)\leqq 2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 2이다. (참)

ㄴ. $\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)$의 주기는 2π이므로 $f(x)$의 주기는 2π이다. (참)

ㄷ. $f(x)=\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)+1=\sin\left(x+2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+1$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+1$

이므로 $y=\sin x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$만큼 평행이동한 것이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19. 정답 ⑤

$\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x-\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}$

$=\cos x-\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=-\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x-\frac{11}{6}\pi\right)=-\cos\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)$

$(\because\ \cos(-\theta)=\cos\theta)$

이므로 주어진 식이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 k의 값은 $\frac{4}{3}\pi$이다.

[참고] 주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하여 풀어도 된다.

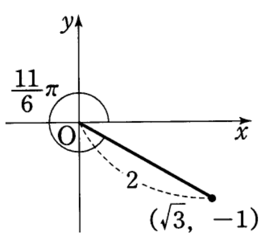
20. 정답 ③

$\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{4}=2$이므로

$y=\sqrt{3}\sin x-\cos x$

$=2\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\left(-\frac{1}{2}\right)\cos x\right\}$

$=2\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)$



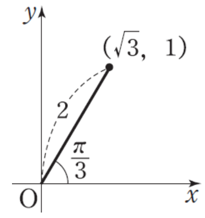
이때, $-1\leq\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)\leq 1$이므로 $-2\leq\sin\left(x+\frac{11}{6}\pi\right)\leq 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$ $\therefore\ M-m=4$

21. 정답 ③

$\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$이므로

$y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+2=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2$



따라서 $x+\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$, 즉 $x=\frac{7}{6}\pi$일 때 최솟값 0을 갖고, $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{\pi}{6}$일 때 최댓값 4를 갖는다. $\therefore\ a+b=\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$

22. 정답 ②

$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin x+\cos x=t$라 하면 $-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}$이므로 주어진 함수는

$y=t^2+t-2=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\ \ (-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2})$

따라서 최솟값은 $t=\frac{1}{2}$일 때 $-\frac{9}{4}$

최댓값은 $t=\sqrt{2}$일 때 $\sqrt{2}$이므로 치역은 $\left\{y\,\middle|\,-\frac{9}{4}\leq y\leq\sqrt{2}\right\}$

23. 정답 ⑤

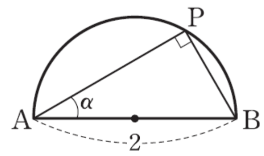
삼각형 ABP에서 $\angle A=\alpha$라 하면

$\overline{BP}=2\sin\alpha$, $\overline{AP}=2\cos\alpha$이므로

$\overline{AP}+2\overline{BP}=2\cos\alpha+4\sin\alpha$

$=2\sqrt{5}\sin(\alpha+\beta)$

(단, $\cos\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$)



따라서 $\overline{AP}+2\overline{BP}$의 최댓값은 $2\sqrt{5}$이다.

24. 정답 ②

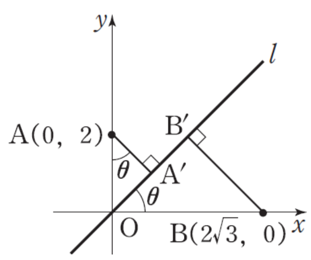
오른쪽 그림에서 $\angle OAA'=\theta$,

$\angle B'OB=\theta$이므로

$\overline{OA'}=2\sin\theta$, $\overline{OB'}=2\sqrt{3}\cos\theta$

그러므로 $\overline{OA'}+\overline{OB'}$

$=2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta=4\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$



따라서 $\overline{OA'}+\overline{OB'}$가 최대가 되는 θ의 값은 $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$에서

$\theta=\frac{\pi}{6}$

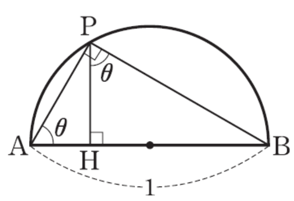
25. 정답 ①

$\overline{AB}$가 지름이므로 $\angle APB=\angle R$이다.

$\angle PAH=\theta$라 하면 $\angle BPH=\theta$이므로

$\overline{PH}=\overline{BP}\cos\theta=(\overline{AB}\sin\theta)\cos\theta$

$=\sin\theta\cos\theta\ \ (\because\ \overline{AB}=1)$



$\overline{AH}=\overline{PA}\cos\theta=(\overline{AB}\cos\theta)\cos\theta=\cos^2\theta$

$\therefore\ \overline{PH}-\overline{AH}=\sin\theta\cos\theta-\cos^2\theta=\frac{\sin 2\theta}{2}-\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}(\sin 2\theta-\cos 2\theta)-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\frac{7}{4}\pi\right)-\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{PH}-\overline{AH}$의 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$이다.

26. 정답 ⑤

ㄱ. $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$이고, $\cos\theta$가 유리수이므로 $\cos 2\theta$는 유리수이다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta$가 유리수일 때, $\cos 2\theta\neq 0$이므로 $\frac{1}{\cos 2\theta}$, 즉 $\sec 2\theta$도 유리수이다. (참)

ㄴ. $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$이고, $\sin\theta$, $\cos\theta$가 유리수이므로 $\sin 2\theta$는 유리수이다. $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2\theta\neq 0$이므로 $\frac{1}{\sin 2\theta}$, 즉, $\mathrm{cosec}\,2\theta$도 유리수이다. (참)

ㄷ. $\cot 2\theta=\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$이고, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2\theta\neq 0$이며 $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$는 유리수이므로 $\cot 2\theta$도 유리수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

27. 정답 ⑤

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$이므로 $\cos 2\theta=2(\sqrt{2}\cos\theta-1)$

$2\cos^2\theta-1=2(\sqrt{2}\cos\theta-1)$, $2\cos^2\theta-2\sqrt{2}\cos\theta+1=0$

$(\sqrt{2}\cos\theta-1)^2=0 \quad \therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{4} \quad \therefore \sin 2\theta=\sin\frac{\pi}{2}=1$

28. 정답 ①

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$의 양변을 제곱하면 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{5}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta=\frac{1}{4}$, $\sin^2 2\theta=\frac{1}{16}$

또, $\cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$이므로

$\tan^2 2\theta=\frac{\sin^2 2\theta}{\cos^2 2\theta}=\frac{1}{15}$

29. 정답 ①

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면 $1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$2\sin 2\theta\cos 2\theta=\sin 2\theta=-\frac{3}{4}$, $\cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta=-\frac{1}{8}$

$\therefore \sin 2\theta+\cos 4\theta=-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}=-\frac{7}{8}$

30. 정답 ②

$\theta=72^\circ$라 하면 $2\theta+3\theta=360^\circ$이므로

$\sin 2\theta=\sin(2\pi-3\theta)=-\sin 3\theta \quad \therefore \sin 2\theta+\sin 3\theta=0$

이때, $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$, $\sin 3\theta=\boxed{3}\sin\theta-4\sin^3\theta$이므로

$\sin 2\theta+\sin 3\theta=\sin\theta(3+2\cos\theta-4\sin^2\theta)=0$이고, $\sin\theta\neq 0$이므로 $3+2\cos\theta-4\sin^2\theta=0$, $4\cos^2\theta+2\cos\theta-1=0$

$\cos\theta=\cos 72^\circ=\boxed{\frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$ $(\because \cos\theta>0)$

31. 정답 ④

$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$, $\sec 2\theta=\frac{1}{\cos 2\theta}$이므로

$$\frac{\tan 2\theta+\sec 2\theta-1}{\tan 2\theta+\sec 2\theta+1}=\frac{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}+\frac{1}{\cos 2\theta}-1}{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}+\frac{1}{\cos 2\theta}+1}=\frac{\sin 2\theta+1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta+1+\cos 2\theta}$$

$$=\frac{2\sin\theta\cos\theta+1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta+1+(2\cos^2\theta-1)}=\frac{\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$=\tan\theta$$

따라서 $\tan\theta=2$이므로 θ는 제1사분면의 각이고,

$\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

[다른풀이] $\frac{\tan 2\theta+\sec 2\theta-1}{\tan 2\theta+\sec 2\theta+1}=2$에서

$\tan 2\theta+\sec 2\theta-1=2(\tan 2\theta+\sec 2\theta+1)$

양변에 $\cos 2\theta(\cos 2\theta\neq 0)$를 곱하여 정리하면

$\sin 2\theta+1-\cos 2\theta=2(\sin 2\theta+1+\cos 2\theta)$

$\therefore \sin 2\theta+3\cos 2\theta=-1$ ⋯⋯ ㉠

한편, $\sin^2 2\theta+\cos^2 2\theta=1$이므로 ㉠에서 $\cos 2\theta=\frac{-\sin 2\theta-1}{3}$을 대입하면 $\sin^2 2\theta+\left(\frac{-\sin 2\theta-1}{3}\right)^2=1$,

$10\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta-8=0$

$5\sin^2 2\theta+\sin 2\theta-4=0$, $(\sin 2\theta+1)(5\sin 2\theta-4)=0$

$\therefore \sin 2\theta=-1$ 또는 $\sin 2\theta=\frac{4}{5}$

그런데 $\cos 2\theta\neq 0$이므로 $\sin 2\theta\neq -1 \quad \therefore \sin 2\theta=\frac{4}{5}$

32. 정답 $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

33. 정답 20

$$\frac{\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ}=\frac{(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)^2}{(\cos 15^\circ+i\sin 15^\circ)(\cos 15^\circ-i\sin 15^\circ)}$$

$$=\frac{\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ-i(2\sin 15^\circ\cos 15^\circ)}{\cos^2 15^\circ+\sin^2 15^\circ}$$

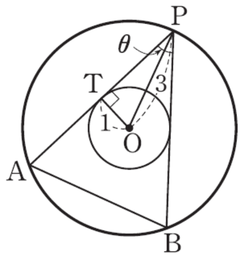
$$=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ-i(2\sin 15^\circ\cos 15^\circ)=\cos 30^\circ-i\sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

$$\therefore 20(a^2+b^2)=20\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right\}=20$$

34. 정답 ⑤

동심원의 중심을 O, 현 PA와 작은 원의 접점을 T, $\angle$APB의 크기를 θ라 하면



$\angle \mathrm{OPT} = \dfrac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{PT}} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$

이므로 $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{3}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

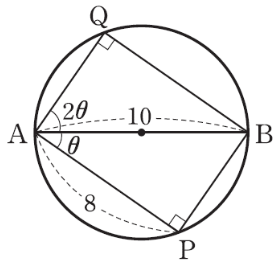
$\therefore\ \sin\theta = \sin 2\cdot\dfrac{\theta}{2} = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

또, $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}} = 2\overline{\mathrm{PT}} = 4\sqrt{2}$ 이므로

$\triangle \mathrm{PAB} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}\cdot\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}}{9} = \dfrac{64\sqrt{2}}{9}$

35. 정답 ⑤

$\overline{\mathrm{AB}}$가 지름이므로



$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{R}$이다.

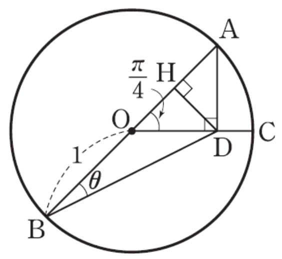
$\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$이므로

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\dfrac{16}{25} - 1 = \dfrac{7}{25}$

그러므로 $\cos 2\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{AQ}}}{10} = \dfrac{7}{25}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}} = \dfrac{7}{25}\times 10 = \dfrac{14}{5}$

36. 정답 ④

점 D에서 $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 H,



$\overline{\mathrm{OB}} = 1$이라 하면 $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{DH}} = \dfrac{1}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{BH}} = \dfrac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{BD}} = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

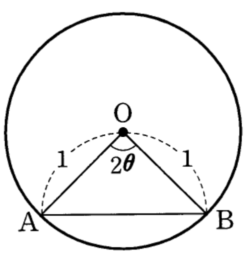
따라서 $\sin\theta = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\theta = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$

이므로 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \dfrac{3}{5}$

37. 정답 ④

$\tan\theta = \dfrac{2}{3}$에서 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta > 0$,



$\cos\theta > 0$이다. $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

에서 $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{9}{13}$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

또, $\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{9}{13}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$이다.

따라서 삼각형 OAB에서 $\angle \mathrm{AOB} = 2\theta$이므로

$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \dfrac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\dfrac{3\sqrt{13}}{13} = \dfrac{6}{13}$

38. 정답 ⑤

$\dfrac{\cos C}{\cos B} = \dfrac{\sin B}{\sin C}$에서 $\cos C\sin C = \cos B\sin B$

$\therefore\ \sin 2C = \sin 2B \quad \therefore\ 2B = 2C$ 또는 $2B = \pi - 2C$

여기서 $B = C$이면 $25\sin(B-C) = 7$이 성립하지 않으므로

$2B = \pi - 2C$ 즉, $B = \dfrac{\pi}{2} - C$이므로

$\sin(B-C) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2C\right) = \cos 2C$

따라서 조건 (나)에서 $\sin(B-C) = \cos 2C = 2\cos^2 C - 1 = \dfrac{7}{25}$

$\cos^2 C = \dfrac{16}{25} \quad \therefore\ \cos C = \dfrac{4}{5}\ (\because\ \cos C > 0)$

39. 정답 ①

a,b,c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 $b^2 = ac$이고, 사인법칙을 이용하면 $\sin^2 B = \sin A\sin C$ …… ㉠

$\cos(A-C) = \cos A\cos C + \sin A\sin C = \cos A\cos C + \sin^2 B$…… ㉡

$\cos B = \cos\{\pi - (A+C)\} = -\cos(A+C)$

$= -\cos A\cos C + \sin A\sin C$

$= \sin^2 B - \cos A\cos C\ (\because$ ㉠$)$ …… ㉢

$\cos 2B = 1 - 2\sin^2 B$ …… ㉣

㉡, ㉢, ㉣에 의하여 $\cos(A-C) + \cos B + \cos 2B = 1$

40. 정답 ④

$\triangle \mathrm{AOB} \backsim \triangle \mathrm{BOC}$이므로 $\overline{\mathrm{AO}} : \overline{\mathrm{BO}} = \overline{\mathrm{BO}} : \overline{\mathrm{CO}}$

$1 : \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2} : \overline{CO} \quad \therefore\ \overline{CO} = a^2 + b^2$

$\angle \mathrm{AOB} = \alpha$라 하면 점 B의 좌표에서 $a = \overline{\mathrm{OB}}\cos\alpha$,

$b = \overline{\mathrm{OB}}\sin\alpha$

$\therefore\ \cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

이때, $\angle \mathrm{AOC} = 2\alpha$이므로 점 C의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x = \overline{\mathrm{CO}}\cos 2\alpha = \overline{\mathrm{CO}}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = a^2 - b^2$

$y = \overline{\mathrm{CO}}\sin 2\alpha = \overline{\mathrm{CO}}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 2ab$

따라서 점 C의 좌표는 $(a^2 - b^2,\ 2ab)$이다.

41. 정답 ①

$f(x) = \sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= \dfrac{1}{2}(2\sin x\cos x) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 x - 1)$

$= \dfrac{1}{2}\sin 2x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x = \sin\left(2x + \dfrac{5}{3}\pi\right)$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 1이고, 최솟값은 -1이므로

$M - m = 1 - (-1) = 2$

42. 정답 ③

$\dfrac{1}{2+3\sin^2\theta}+\dfrac{1}{2+3\cos^2\theta}=\dfrac{4+3(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{(2+3\sin^2\theta)(2+3\cos^2\theta)}$

$=\dfrac{7}{4+6(\sin^2\theta+\cos^2\theta)+9\sin^2\theta\cos^2\theta}=\dfrac{7}{10+9\sin^2\theta\cos^2\theta}$

$=\dfrac{7}{10+\frac{4}{9}(2\sin\theta\cos\theta)^2}=\dfrac{7}{10+\frac{9}{4}\sin^2 2\theta}$

따라서 주어진 식의 최솟값은 위의 식에서 $\sin^2 2\theta$의 값이 최대일 때 이므로 $\sin^2 2\theta=1$일 때, $\dfrac{7}{10+\frac{9}{4}}=\dfrac{4}{7}$이다.

43. 정답 ③

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}$이므로 $\angle\mathrm{OPA}=\alpha$

이때, $\angle\mathrm{POB}=\angle\mathrm{PAO}+\angle\mathrm{OPA}$이므로 $\beta=2\alpha$

$\therefore\ \sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\cos2\alpha=\sin\alpha+1-2\sin^2\alpha$

$=-2(\sin^2\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha)+1=-2(\sin\alpha-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$

따라서 $\sin\alpha+\cos\beta$의 최댓값은 $\sin\alpha=\frac{1}{4}$일 때 $\frac{9}{8}$이다.

44. 정답 ④

$\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\cos^2 x-1$

$=\sin^2 x+2\sqrt{3}\sin x\cos x+3\cos^2 x-2=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2-2$

이므로 $y=(\sin x+\sqrt{3}\cos x)^2-2(\sin x+\sqrt{3}\cos x)+3$

이때, $\sin x+\sqrt{3}\cos x=t$라 하면 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=t$에서

$-2\leqq t\leqq 2$이므로 $y=t^2-2t+3$은 $t=1$일 때, 즉

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$일 때, 최솟값을 갖는다. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$에서 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

따라서 $x+\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$(단, n은 정수)에서

$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)이고 $0\leqq x\leqq\pi$인 x의 값은 $\frac{\pi}{2}$이다.

45. 정답 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$, 즉 $\frac{\pi}{4}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta}{2}>0$

또, $\cos^2\frac{\theta}{2}=\dfrac{1+\cos\theta}{2}=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{2}=\dfrac{1}{3}$ $\quad\therefore\ \cos\frac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

46. 정답 ①

직선 $y=\frac{4}{3}x$와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{4}{3}$이다. $\sec^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=1+\dfrac{16}{9}$에서

$\cos^2\theta=\dfrac{9}{25}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{3}{5}$ $(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2})$

따라서 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}=\dfrac{1}{4}$에서

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$ $(\because\ 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4})$이므로 $m=\dfrac{1}{2}$

47. 정답 $\dfrac{3}{4}$

$\tan^2\dfrac{\theta_n}{2}=\dfrac{1-\cos\theta_n}{1+\cos\theta_n}=\dfrac{1-\frac{n^2+2n-1}{n^2+2n+1}}{1+\frac{n^2+2n-1}{n^2+2n+1}}=\dfrac{2}{2n^2+4n}=\dfrac{1}{n(n+2)}$

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\tan^2\frac{\theta_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$

48. 정답 ②

$\triangle\mathrm{ABC}$에서 $\angle\mathrm{B}=\theta$라 하면 $\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)=\sin A=\frac{1}{3}$

그러므로 $\tan^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$에서

$\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(\because\ 0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{4})$ $\quad\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[다른 풀이] $\sin A=\frac{1}{3}$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}=3k$, $\overline{\mathrm{BC}}=k$ (k는 0이 아닌 실수)라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{4}\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{2\sqrt{2}k}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}k$

$\therefore\ \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}k}{k}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

49. 정답 ②

$A+B+C=\pi$이므로

$\cos C=\cos 2\cdot\dfrac{C}{2}=\cos 2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{2}\right)=2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{A+B}{2}\right)-1$

$=2\sin^2\dfrac{A+B}{2}-1$

따라서 $1+\cos C=3\cos\dfrac{A+B}{2}$에서 $2\sin^2\dfrac{A+B}{2}=3\cos\dfrac{A+B}{2}$

$2-2\cos^2\dfrac{A+B}{2}=3\cos\dfrac{A+B}{2}$

$\left(\cos\dfrac{A+B}{2}+2\right)\left(2\cos\dfrac{A+B}{2}-1\right)=0$

이때, $\cos\dfrac{A+B}{2}+2>0$이므로 $\cos\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{2}{3}\pi$, $C=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ A+B=2C$

[다른 풀이] $\cos C=1-2\sin^2\dfrac{C}{2}$,

$\cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{\pi-C}{2}=\sin\dfrac{C}{2}$

따라서 $1+\cos C=3\cos\dfrac{A+B}{2}$에서 $1+1-2\sin^2\dfrac{C}{2}=3\sin\dfrac{C}{2}$

$2\sin^2\dfrac{C}{2}+3\sin\dfrac{C}{2}-2=0$, $\left(\sin\dfrac{C}{2}+2\right)\left(2\sin\dfrac{C}{2}-1\right)=0$

$\therefore\ \sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}\ \left(\because \sin\dfrac{C}{2}+2>0\right)$

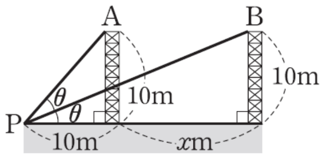
따라서 $C=\dfrac{\pi}{3}$, $A+B=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $A+B=2C$

50. 정답 ④

$\angle\mathrm{APB}=\theta$라 하면

$$\tan^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}=\frac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2}$$

$\therefore\ \tan\theta=\sqrt{2}-1\ \left(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



따라서 $\tan\theta=\dfrac{10}{10+x}=\sqrt{2}-1$에서

$x=10\sqrt{2}\,(\mathrm{m})$

51. 정답 ②

x, y가 $x^2+y^2=1$을 만족하므로 $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$로 놓으면

$\therefore\ xy+y^2=\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=\dfrac{1}{2}\sin2\theta+\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$=\dfrac{1}{2}(\sin2\theta-\cos2\theta)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2\theta+\dfrac{7}{4}\pi\right)+\dfrac{1}{2}$

따라서 최댓값은 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$이다.

52. 정답 ①

$\cos20°\cos40°\cos80°=\dfrac{1}{2}\{\cos(20°+40°)+\cos(20°-40°)\}\cos80°$

$=\dfrac{1}{2}(\cos60°+\cos20°)\cos80°=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\cos20°\right)\cos80°$

$=\dfrac{1}{4}\cos80°+\dfrac{1}{2}\cos80°\cos20°$

$=\dfrac{1}{4}\cos80°+\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}(\cos100°+\cos60°)\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\cos80°+\dfrac{1}{4}(\cos100°+\cos60°)$

$=\dfrac{1}{4}\cos80°+\dfrac{1}{4}(-\cos80°)+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

$(\because \cos100°=\cos(180°-80°)=-\cos80°)$

53. 정답 ③

$\sin40°\sin80°=\sin80°\sin40°=-\dfrac{1}{2}(\cos20°-\cos40°)$

$\therefore\ \sin20°\sin40°\sin80°=\sin20°\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-\cos40\right)°$

$=\dfrac{1}{4}\sin20°+\dfrac{1}{2}\sin20°\cos40°=\dfrac{1}{4}\sin20°+\dfrac{1}{4}(\sin60°-\sin20°)$

$=\dfrac{1}{4}\sin60°=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

54. 정답 $\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\cos15°\sin75°=\dfrac{1}{2}\{\sin(15°+75°)-\sin(15°-75°)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{\sin90°-\sin(-60°)\}=\dfrac{1}{2}(\sin90°+\sin60°)$

$=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}$

55. 정답 ②

$\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}=1$에서 $\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)$

$\dfrac{1}{2}\{\sin(2\alpha-\beta)+\sin\beta\}=\dfrac{1}{2}\{\sin(2\alpha-\beta)-\sin\beta\}\quad\therefore\ \sin\beta=0$

[다른 풀이] $\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)}=1$에서

$\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=0$, $\sin\{\alpha-(\alpha-\beta)\}=0$

$\therefore\ \sin\beta=0$

56. 정답 ①

$\dfrac{\cos\alpha\cos13\alpha}{\cos3\alpha+\cos5\alpha}=\dfrac{\cos\alpha\cos13\alpha}{2\cos4\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\cos13\alpha}{2\cos4\alpha}=\dfrac{\cos(17\alpha-4\alpha)}{2\cos4\alpha}$

$=\dfrac{\cos(\pi-4\alpha)}{2\cos4\alpha}=\dfrac{-\cos4\alpha}{2\cos4\alpha}=-\dfrac{1}{2}$

57. 정답 ③

$x+\dfrac{1}{x}=2\cos\theta$의 양변을 제곱하면 $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=4\cos^2\theta$

$\therefore\ x^2+\dfrac{1}{x^2}=4\cos^2\theta-2=2(2\cos^2\theta-1)=2\cos2\theta$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=2\cos\theta\cdot2\cos2\theta$에서

$x^3+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}=4\cos\theta\cos2\theta$

$\therefore\ x^3+\dfrac{1}{x^3}=4\cos\theta\cos2\theta-2\cos\theta$

$=4\left\{\dfrac{1}{2}(\cos3\theta+\cos\theta)\right\}-2\cos\theta=2\cos3\theta$

58. 정답 ①

$A+B+C=\pi$에서 $\dfrac{A+B}{2}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}$이므로

$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left\{\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{C}{2}\right)\right\}=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\boxed{\sin\dfrac{C}{2}}\right)$

$\le \frac{1}{2}\left(1-\boxed{\sin\frac{C}{2}}\right)$ (단, 등호는 $A=B$일 때 성립)

$\therefore \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$

$=\frac{1}{2}\left(-\sin^2\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{-\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}$

$\le \boxed{\frac{1}{8}}$ (단, 등호는 $A=B=C$일 때 성립)

59. 정답 ③

$\cos10°+\cos110°+\cos130° = 2\cos60°\cos50°+\cos130°$

$=\cos50°+\cos130° = \cos50°-\cos50° = 0$

60. 정답 ⑤

$\frac{\cos\theta+\cos5\theta+\cos9\theta}{\sin\theta+\sin5\theta+\sin9\theta} = \frac{(\cos\theta+\cos9\theta)+\cos5\theta}{(\sin\theta+\sin9\theta)+\sin5\theta}$

$=\frac{2\cos5\theta\cos4\theta+\cos5\theta}{2\sin5\theta\cos4\theta+\sin5\theta} = \frac{\cos5\theta(2\cos4\theta+1)}{\sin5\theta(2\cos4\theta+1)} = \cot5\theta = \cot\frac{\pi}{6}$

$=\sqrt{3}$

61. 정답 ③

$\cos^2 20°+\cos^2 40°+\cos^2 80°$

$=\frac{1+\cos40°}{2}+\frac{1+\cos80°}{2}+\frac{1+\cos160°}{2}$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos40°+\cos80°+\cos160°)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(2\cos60°\cos20°-\cos20°)$

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cos20°-\cos20°\right)=\frac{3}{2}$

62. 정답 ③

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)$

$=\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1-\cos2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\left\{\cos2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos2\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\times2\cos(2\theta+\pi)\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta=\frac{3}{2}$

63. 정답 ③

$\sin^2\theta+\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$

$=\frac{1-\cos2\theta}{2}+\frac{1-\cos2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}{2}+\frac{1-\cos2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}{2}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\left\{\cos2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+\cos2\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta-\frac{1}{2}\times2\cos2\theta\cos\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta+\frac{1}{2}\cos2\theta$

$=\frac{3}{2}$

64. 정답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\cos15^\circ+\cos75^\circ = 2\cos\frac{15^\circ+75^\circ}{2}\cos\frac{15^\circ-75^\circ}{2}$

$=2\cos45^\circ\cos(-30^\circ)=2\cos45^\circ\cos30^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}$

65. 정답 ⑤

$A+B+C=\pi$이므로 $\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$이므로

$\sin A+\sin B+\sin C=(\sin A+\sin B)+\sin2\cdot\frac{C}{2}$

$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$

$=2\cos C\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)=2\cos C\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)$

$=2\cos\frac{C}{2}\left\{2\cos\frac{A}{2}\cos\left(-\frac{B}{2}\right)\right\}=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$\therefore k=4$

66. 정답 ⑤

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin A=\sin2\cdot\frac{A}{2}=\sin2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)$

$=2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)=2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$

또, $\frac{\sin B+\sin C}{\cos B+\cos C}=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$이므로

$2\cos\frac{B+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}=\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B+C}{2}}$

이때, $0<B+C<\pi$에서 $\sin\frac{B+C}{2}>0$이므로

$2\left(\cos\frac{B+C}{2}\right)^2=1$

$\cos\frac{B+C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\left(\because\ \cos\frac{B+C}{2}>0\right)$

따라서 $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{4}$이므로 $B+C=\frac{\pi}{2}$에서 $A=\frac{\pi}{2}$

그러므로 삼각형 ABC는 ∠A = ∠R인 직각삼각형이다.

67. 정답 ③

$\angle PBA=\theta\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$이므로 $\overline{PA}=6\sin\theta$, $\overline{PB}=6\cos\theta$

또한, $\angle PAC = \angle PBC = \frac{\pi}{3} - \theta$이므로 $\triangle PAC$에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{PC}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)} = 6$, $\overline{PC} = 6\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC} = 6\sin\theta + 6\cos\theta + 6\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)$

$= 6\left\{\sin\theta + \sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)\right\} + 6\cos\theta$

$= 12\sin\frac{\theta+\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2}\cos\frac{\theta-\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}{2} + 6\cos\theta$

$= 12\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) + 6\cos\theta = 6\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right) + 6\cos\theta$

$= 12\cos\frac{\theta-\frac{\pi}{6}+\theta}{2}\cos\frac{\theta-\frac{\pi}{6}-\theta}{2} = 12\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$= 12\cos\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right) = 12\sqrt{\frac{\cos\frac{\pi}{6}+1}{2}}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right)$

$= 12\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right) = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$\therefore \cos\left(\theta-\frac{\pi}{12}\right) = 1$ 즉, $\theta - \frac{\pi}{12} = 0$이므로 $\theta = \frac{\pi}{12}$

$\therefore \tan\theta = \tan\frac{\pi}{12} = \frac{\sin\frac{\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 2-\sqrt{3}$

68. 정답 직각삼각형

$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C = 2$에서 $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2 = 0$

$\sin^2A = \frac{1-\cos 2A}{2}$, $\sin^2B = \frac{1-\cos 2B}{2}$,

$\sin^2C = 1-\cos^2C$이므로

$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C-2$

$= \frac{1-\cos 2A}{2} + \frac{1-\cos 2B}{2} + 1 - \cos^2C - 2$

$= -\frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B) - \cos^2\{\pi-(A+B)\}$

$= -\frac{1}{2}\cdot 2\cos(A+B)\cos(A-B) - \cos^2(A+B)$

$= -\cos(A+B)\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$

$= -\cos(\pi-C)\times 2\cos A\cos B$

$= 2\cos A\cos B\cos C = 0$

$\therefore \cos A = 0$ 또는 $\cos B = 0$ 또는 $\cos C = 0$

따라서 $\triangle ABC$는 $\angle A = \angle R$ 또는 $\angle B = \angle R$ 또는 $\angle C = \angle R$인 직각삼각형이다.

69. 정답 ①

$f(x) = 4\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right) = 4\times\frac{1}{2}\left\{\sin 2x + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}$

$\quad = 2\left(\sin 2x - \frac{1}{2}\right) = 2\sin 2x - 1$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$에서 $0 \leq 2x \leq \pi$이므로 $f(x)$는 $2x = \frac{\pi}{2}$, 즉 $x = \frac{\pi}{4}$일 때 최댓값 $2-1=1$을 갖는다.

70. 정답 $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$이므로 $x = \frac{\pi}{6}$는 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$의 한 해이다.

따라서 일반해는 $x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

71. 정답 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

$2\cos x - \sqrt{3} = 0$에서 $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

이때, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $x = \frac{\pi}{6}$는 방정식 $2\cos x - \sqrt{3} = 0$의 한 해이다. 따라서 일반해는 $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)

72. 정답 $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수)

$\sin x = \cos x$이면 $\cos x \neq 0$이므로 양변을 $\cos x$로 나누면 $\tan x = 1$이다. 이때, $\tan\frac{\pi}{4} = 1$이므로 $x = \frac{\pi}{4}$는 방정식 $\sin x = \cos x$의 한 해이다. 따라서 일반해는 $x = n\pi + \frac{\pi}{4}$ (단, n은 정수)

73. 정답 $x = 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$ (단, n은 정수)

$2\sin^2x + 3\cos x = 0$에서 $2(1-\cos^2x) + 3\cos x = 0$

$2\cos^2x - 3\cos x - 2 = 0$, $(\cos x - 2)(2\cos x + 1) = 0$

따라서 $\cos x = -\frac{1}{2}$ ($\because \cos x - 2 < 0$)이고 $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$이므로

$x = 2n\pi \pm \frac{2}{3}\pi$ (단, n은 정수)

74. 정답 9

$\tan 2x\tan 3x = 1$에서 $\tan 3x = \frac{1}{\tan 2x} = \cot 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$

따라서 $3x = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$이므로 $x = \frac{n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$ (단, n은 정수)

$0 \leq x \leq \pi$이므로

(ⅰ) $n = 0$일 때, $x = \frac{\pi}{10}$

(ⅱ) $n = 1$일 때, $x = \frac{1}{5}\pi + \frac{1}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi$

(ⅲ) $n = 2$일 때, $x = \frac{2}{5}\pi + \frac{1}{10}\pi = \frac{5}{10}\pi$

(ⅳ) $n = 3$일 때, $x = \frac{3}{5}\pi + \frac{1}{10}\pi = \frac{7}{10}\pi$

(ⅴ) $n = 4$일 때, $x = \frac{4}{5}\pi + \frac{1}{10}\pi = \frac{9}{10}\pi$

이상에서 $\alpha = \frac{9}{10}\pi$, $\beta = \frac{\pi}{10}$이므로 $\frac{\alpha}{\beta} = 9$

75. 정답 ④

$1+\tan^2 x = a\cos^2 x$에서 $\sec^2 x = a\cos^2 x$, $\dfrac{1}{\cos^2 x} = a\cos^2 x$

$a\cos^4 x = 1$

ㄱ. $0 < a < 1$이면 $\dfrac{1}{a} > 1$이므로 $B = \{x \mid 1+\tan^2 x = a\cos^2 x\}$

$= \varnothing$

$s(A\cap B) = 0$ (거짓)

ㄴ. $a = 1$이면 $\cos x = \pm 1$이므로 $A\cap B = \{0,\ \pi,\ 2\pi\}$

$\therefore\ s(A\cap B) = 3\pi$ (참)

ㄷ. $a > 1$이면 $\cos x = \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$이므로 $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$이고

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$, $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$이라 하면

$A\cap B = \{\alpha,\ \beta,\ 2\pi-\alpha,\ 2\pi-\beta\}$

$\therefore\ s(A\cap B) = 4\pi$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

76. 정답 ⑤

곡선 $y = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}$와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 방정식

$\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$의 실근의 개수와 같다.

$\dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = \tan^2 x + 1$이므로 $(\tan^2 x + 1) + \tan x = 1$

$\tan^2 x + \tan x = 0$, $\tan x(\tan x + 1) = 0$

$\therefore$ $\tan x = 0$ 또는 $\tan x = -1$

(ⅰ) $\tan x = 0$일 때, $\tan 0 = 0$이므로 $x = n\pi + 0 = n\pi$ (단, n은 정수)에서 $x = 0,\ \pi,\ 2\pi$

(ⅱ) $\tan x = -1$일 때, $\tan\dfrac{3}{4}\pi = -1$이므로 $x = n\pi + \dfrac{3}{4}\pi$ (단, n은 정수)에서 $x = \dfrac{3}{4}\pi,\ \dfrac{7}{4}\pi$

따라서 교점의 개수는 5이다.

77. 정답 ⑤

$\sin 2x + \cos x = 0$에서 $2\sin x\cos x + \cos x = 0$

$\cos x(2\sin x + 1) = 0$ $\quad\therefore$ $\cos x = 0$ 또는 $\sin x = -\dfrac{1}{2}$

(ⅰ) $\cos x = 0$일 때, $\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$이므로

$x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$ (단, n는 정수)에서

$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$

(ⅱ) $\sin x = -\dfrac{1}{2}$일 때, $\sin\dfrac{7}{6}\pi = -\dfrac{1}{2}$이므로

$x = n\pi + (-1)^n\dfrac{7}{6}\pi$ (단, n는 정수)에서

$x = \dfrac{7}{6}\pi,\ 2\pi + \dfrac{7}{6}\pi,\ 3\pi - \dfrac{7}{6}\pi,\ 4\pi + \dfrac{7}{6}\pi, 5\pi - \dfrac{7}{6}\pi,\ 7\pi - \dfrac{7}{6}\pi$

따라서 실근의 개수는 12이다.

78. 정답 ④

두 곡선 $y = \cos 2x$, $y = 3\cos x - 2$의 교점의 개수는 방정식 $\cos 2x = 3\cos x - 2$, 즉 $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$의 실근의 개수와 일치한다. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$이므로 $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$ $\quad\therefore$ $\cos x = 1$ 또는 $\cos x = \dfrac{1}{2}$

(ⅰ) $\cos x = 1$일 때, $\cos 0 = 1$이므로

$x = 2n\pi \pm 0 = 2n\pi$ (n은 정수)에서 $x = 0,\ 2\pi$

(ⅱ) $\cos x = \dfrac{1}{2}$일 때, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$이므로

$x = 2n\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$ (n은 정수)에서 $x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \dfrac{7}{3}\pi,\ \dfrac{11}{3}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 교점의 개수는 6이다.

79. 정답 ④

$1 + \cos 3x = 2\cos^2 x$에서 $\cos 3x = 2\cos^2 x - 1$ $\quad\therefore$ $\cos 3x = \cos 2x$

따라서 $3x = 2n\pi \pm 2x$ (단, n은 정수)

(ⅰ) $3x = 2n\pi + 2x$일 때, $x = 2n\pi$ (단, n은 정수)에서

$x = 0,\ 2\pi$

(ⅱ) $3x = 2n\pi - 2x$일 때, $x = \dfrac{2}{5}n\pi$ (단, n은 정수)에서

$x = 0,\ \dfrac{2}{5}\pi, \dfrac{4}{5}\pi,\ \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{8}{5}\pi,\ 2\pi$

따라서 서로 다른 실근의 개수는 $0,\ \dfrac{2}{5}\pi, \dfrac{4}{5}\pi,\ \dfrac{6}{5}\pi,\ \dfrac{8}{5}\pi,\ 2\pi$의 6이다

80. 정답 ③

$1 - 2\sin^2 x = \cos\dfrac{2}{5}\pi$에서 $\cos 2x = \cos\dfrac{2}{5}\pi$이므로 $2x = 2n\pi \pm \dfrac{2}{5}\pi$

$\therefore$ $x = n\pi \pm \dfrac{\pi}{5}$ (단, n은 정수)

따라서 $x = \dfrac{\pi}{5},\ \dfrac{4}{5}\pi$이므로 모든 근의 합은 $\dfrac{\pi}{5} + \dfrac{4}{5}\pi = \pi$

81. 정답 ⑤

$\sin 5x = 2\sin x\cos x$에서 $\sin 5x = \sin 2x$

따라서 $5x = n\pi + (-1)^n 2x$ (단, n은 정수)이다.

(ⅰ) $n = 0$일 때, $5x = 2x$에서 $x = 0$

(ⅱ) $n = 1$일 때, $5x = \pi - 2x$에서 $x = \dfrac{\pi}{7}$

(ⅲ) $n = 2$일 때, $5x = 2\pi + 2x$에서 $x = \dfrac{2}{3}\pi$

(ⅳ) $n = 3$일 때, $5x = 3\pi - 2x$에서 $x = \dfrac{3}{7}\pi$

(ⅴ) $n = 5$일 때, $5x = 5\pi - 2x$에서 $x = \dfrac{5}{7}\pi$

(ⅵ) $n = 7$일 때, $5x = 7\pi - 2x$에서 $x = \pi$

이상에서 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

82. 정답 ③

$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$에서 $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$이므로

$\dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x) + \dfrac{1}{2}(1 - \cos 4x) = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 6x)$

$\cos 2x+\cos 4x=\cos 6x+1$, $2\cos 3x\cos x=2\cos^2 3x$
$\cos 3x(\cos 3x-\cos x)=0$, $\cos 3x(-2\sin 2x\sin x)=0$
$\cos 3x\sin 2x\sin x=0$
$\therefore$ $\cos 3x=0$ 또는 $\sin 2x=0$ 또는 $\sin x=0$
(ⅰ) $\cos 3x=0$에서 $3x=\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$이므로 $x=\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$
(ⅱ) $\sin 2x=0$에서 $2x=0, \pi, 2\pi$이므로 $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$
(ⅲ) $\sin x=0$에서 $x=0, \pi$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 실근의 개수는 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi, \pi$의 5이다.

83. 정답 ①

$\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$ $(x>0)$에서 $2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1$
$2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}\right)=1$, $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$
$\therefore$ $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
따라서 $x+\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$에서 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)이고, $x>0$이므로 a_7은 $n=7$일 때의 x의 값이다.
$\therefore$ $a_7=7\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=\frac{13}{2}\pi$

84. 정답 ⑤

$2\sqrt{3}\sin^2 x-\sin 2x=0$에서 $2\sqrt{3}\sin^2 x-\sin x\cos x=0$
$2\sin x(\sqrt{3}\sin x-\cos x)=0$, $4\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)=0$
$4\sin x\left\{\sin x\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos x\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right\}=0$, $4\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$
$\therefore$ $\sin x=0$ 또는 $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$
(ⅰ) $\sin x=0$일 때, $\sin 0=0$이므로
$x=n\pi+(-1)^n 0=n\pi$ (n은 정수)에서 $x=0, \pi$
(ⅱ) $\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$일 때, $\sin 0=0$이므로
$x-\frac{\pi}{6}=n\pi+(-1)^n 0=n\pi$
따라서 $x=n\pi+\frac{\pi}{6}$ (n은 정수)에서 $x=\frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 근의 합은 $0+\pi+\frac{\pi}{6}+\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{3}\pi$이다.

85. 정답 ⑤

$\overline{PQ}=\overline{SR}=2\sin\theta$, $\overline{PS}=\overline{QR}=-2\cos\theta$이므로 사각형 PQRS의 둘레의 길이는 $2(2\sin\theta-2\cos\theta)$, 즉 $4(\sin\theta-\cos\theta)$이므로
$4(\sin\theta-\cos\theta)=2\sqrt{6}$, $4\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{6}$
$\therefore$ $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$
따라서 $\theta-\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)이고 $\frac{3}{4}\pi<\theta<\pi$이므로 $\theta=\frac{11}{12}\pi$

86. 정답 $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=1$에서 $2\left(\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)=1$
$2\left\{\sin x\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\cos x\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=1$, $2\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1$
$\therefore$ $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$
이때, $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $x-\frac{\pi}{3}=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$
$\therefore$ $x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}$ (단, n은 정수)

87. 정답 ②

$\sin x+\sin 2x=\sin 3x$에서 $(\sin 3x-\sin x)-\sin 2x=0$
$2\cos\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}-\sin 2x=0$
$2\cos 2x\sin x-2\sin x\cos x=0$, $2\sin x(\cos 2x-\cos x)=0$
$2\sin x(2\cos^2 x-\cos x-1)=0$, $2\sin x(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$
(ⅰ) $\sin x=0$에서 $x=n\pi$ (단, n은 정수)이므로 $x=0, \pi, 2\pi$
(ⅱ) $\cos x=-\frac{1}{2}$에서 $x=2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi$(단, n은 정수)이므로
$x=\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$
(ⅲ) $\cos x=1$일 때, $x=2n\pi$ (단, n은 정수)이므로 $x=0, 2\pi$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

88. 정답 ④

$\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$에서 $2\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$
$\therefore$ $\cos 2x=\frac{1}{2}$
이때, $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$이므로 $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$
따라서 $x=n\pi\pm\frac{\pi}{6}$ (단, n은 정수)에서 $x=\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$
이므로 모든 근의 합은 $\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi+\frac{7}{6}\pi+\frac{11}{6}\pi=4\pi$

89. 정답 ②

두 곡선 $y=\sin x+\cos x$, $y=\sin 3x+\cos 3x$의 교점의 개수는 방정식 $\sin x+\cos x=\sin 3x+\cos 3x$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.
$\sin x+\cos x=\sin 3x+\cos 3x$, $(\sin 3x-\sin x)+(\cos 3x-\cos x)=0$
$2\cos 2x\sin x-2\sin 2x\sin x=0$ $\therefore$ $2\sin x(\cos 2x-\sin 2x)=0$
(ⅰ) $\sin x=0$에서 $x=0, \pi$
(ⅱ) $\cos 2x-\sin 2x=0$에서 $\tan 2x=1$
$0\le 2x\le 2\pi$이므로 $2x=\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi$ $\therefore$ $x=\frac{\pi}{8}, \frac{5}{8}\pi$
따라서 실근의 개수가 4이므로 교점의 개수는 4이다.
[다른 풀이] $\sin x+\cos x=\sin 3x+\cos 3x$에서

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)$

따라서 $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore\ 3x+\frac{\pi}{4}=n\pi+(-1)^n\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (n은 정수)

(ⅰ) $n=0$일 때, $x=0$　　(ⅱ) $n=1$일 때, $x=\frac{\pi}{8}$

(ⅲ) $n=2$일 때, $x=\pi$　　(ⅳ) $n=3$일 때, $x=\frac{5}{8}\pi$

이상에서 실근의 개수가 4이므로 교점의 개수는 4이다.

90. 정답 ①

$$f(x)=\frac{\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\cos\frac{3}{2}x\sin x}{\sin\frac{1}{2}x}=2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x$$

$$=\cos 2x+\cos x=2\cos^2 x+\cos x-1$$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 적어도 한 점에서 만나기 위해서는 방정식 $f(x)=g(x)$의 근이 적어도 한 개가 존재해야 한다.

$2\cos^2 x+\cos x-1=k\cos x+k$에서

$(\cos x+1)(2\cos x-1)=k(\cos x+1)$

$0<x<\pi$에서 $\cos x+1\neq 0$이므로 $2\cos x-1=k$

$\therefore \cos x=\frac{k+1}{2}$

$0<x<\pi$에서 $-1<\cos x<1$이므로 방정식 $f(x)=g(x)$가 적어도 한 근을 가지려면 $-1<\frac{k+1}{2}<1$ $\therefore -3<k<1$

$\therefore \alpha+\beta=-3+1=-2$

91. 정답 ①

$\sin x(\sin x+\sin 3x+\cdots+\sin 9x)$

$=\sin x\sin x+\sin x\sin 3x+\cdots+\sin x\sin 9x$

$=-\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 0)-\frac{1}{2}(\cos 4x-\cos 2x)$

$-\cdots-\frac{1}{2}(\cos 10x-\cos 8x)$

$=-\frac{1}{2}\cos 10x+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos 10x=\frac{1}{3}$

$\therefore \cos 20x=2\cos^2 10x-1=2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2-1=-\frac{7}{9}$

92. 정답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\cot\alpha+\cot\beta=\frac{1}{\tan\alpha}+\frac{1}{\tan\beta}=-\frac{3a}{4a+1}$

$\cot\alpha\cot\beta=\frac{1}{\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{4a+1}$이므로 $\tan\alpha\tan\beta=4a+1$이고 $\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}=-\frac{3a}{4a+1}$에서 $\tan\alpha+\tan\beta=-3a$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-3a}{1-(4a+1)}=\frac{3}{4}$

93. 정답 $\frac{1}{5}$

이차방정식 $2x^2-x-3=0$의 두 근이 $\tan\alpha$, $\tan\beta$이므로

$\tan\alpha+\tan\beta=\frac{1}{2}$, $\tan\alpha\tan\beta=-\frac{3}{2}$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}}=\frac{1}{5}$$

94. 정답 ⑤

$g(2)=\alpha$, $g(3)=\beta$라 하면 $\tan\alpha=2$, $\tan\beta=3$

그런데 $\tan\alpha>0$, $\tan\beta>0$이므로 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$

이때, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{2+3}{1-2\cdot 3}=-1$

$\therefore\ g(2)+g(3)=\alpha+\beta=\frac{3}{4}$ ($\because\ 0<\alpha+\beta<\pi$)

95. 정답 ⑤

$\angle\mathrm{BAE}=\alpha$, $\angle\mathrm{DAF}=\beta$라 하면 $\overline{\mathrm{BE}}=\tan\alpha$, $\overline{\mathrm{DF}}=\tan\beta$이므로

$\triangle\mathrm{ABE}=\frac{1}{2}\tan\alpha$, $\triangle\mathrm{ADF}=\frac{1}{2}\tan\beta$

그러므로 $S+S'=\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)$이다.

이때, $\alpha+\beta=45°$에서 $\beta=45°-\alpha$이므로

$\tan\beta=\tan(45°-\alpha)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

$$\therefore\ S+S'=\frac{1}{2}(\tan\alpha+\tan\beta)=\frac{1}{2}\left(\tan\alpha+\frac{1-\tan\alpha}{a+\tan\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{-2+(\tan\alpha+1)+\frac{2}{\tan\alpha+1}\right\}$$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$에서 $1<\tan\alpha+1<2$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$S+S'\geqq\frac{1}{2}\left(-2+2\sqrt{(\tan\alpha+1)\cdot\frac{2}{\tan\alpha+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(-2+2\sqrt{2})=\sqrt{2}-1$$

(단, 등호는 $(\tan\alpha+1)^2=2$, 즉 $\tan\alpha+1=\sqrt{2}$ ($\because$ $1<\tan\alpha+1<2$)일 때 성립한다.)

따라서 $S+S'$의 최솟값은 $\sqrt{2}-1$이다.

1. 답 10　2. 답 ③　3. 답 ②　4. 답 ②
5. 답 ⑤　6. 답 ④　7. 답 ①　8. 답 ⑤
9. 답 54　10. 답 ③　11. 답 (1) -6 (2) 36
12. 답 ①　13. 답 ①　14. 답 ⑤　15. 답 ③
16. 답 24　17. 답 ②　18. 답 ②　19. 답 0
20. 답 ④　21. 답 ⑤　22. 답 ④　23. 답 42
24. 답 ⑤　25. 답 ④　26. 답 10　27. 답 ①
28. 답 ②　29. 답 ③　30. 답 ②　31. 답 ④
32. 답 ②　33. 답 18　34. 답 ⑤　35. 답 ③
36. 답 ③　37. 답 ③　38. 답 ③　39. 답 ①
40. 답 ①　41. 답 ③　42. 답 1　43. 답 ③
44. 답 ③　45. 답 ⑤　46. 답 ④　47. 답 23
48. 답 ④　49. 답 ③　50. 답 ③　51. 답 59
52. 답 ⑤　53. 답 ⑤　54. 답 540　55. 답 ③
56. 답 ⑤　57. 답 10　58. 답 ③　59. 답 ④
60. 답 ⑤　61. 답 25　62. 답 18　63. 답 ⑤
64. 답 ⑤　65. 답 ①　66. 답 ④　67. 답 불연속
68. 답 불연속　69. 답 ①　70. 답 ①　71. 답 2
72. 답 ①　73. 답 ①　74. 답 ③　75. 답 ③
76. 답 ③　77. 답 ④　78. 답 ③　79. 답 168
80. 답 ⑤　81. 답 ②　82. 답 ③　83. 답 ④
84. 답 ③　85. 답 ④　86. 답 ④　87. 답 ⑤
88. 답 ⑤　89. 답 ③　90. 답 ④　91. 답 ②
92. 답 ④　93. 답 ④　94. 답 ③
95. 답 $(-\infty,\ \infty)$　96. 답 ③　97. 답 ④
98. 답 ③　99. 답 ③　100. 답 ②　101. 답 ③
102. 답 ②　103. 답 ③　104. 답 ③　105. 답 ③
106. 답 ②　107. 답 ②　108. 답 ④
109. 답 풀이참조　110. 답 ④　111. 답 ④　112. 정답 ④
113. 답 ②　114. 답 ①　115. 답 ⑤　116. 답 ③
117. 답 ①

***1.* 답 10**

[해설] $\lim_{x\to1-0} f(x)=\lim_{x\to1-0}(-x^2+5)=4$

$\lim_{x\to1+0} f(x)=\lim_{x\to1+0}(x^3+1)=2$

$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}(-x^2+5)=4$이므로

$\lim_{x\to1-0} f(x)+\lim_{x\to1+0} f(x)+\lim_{x\to-1} f(x)=4+2+4=10$

***2.* 답 ③**

[해설]

(ⅰ) $x>1$일 때, $f(x)=x-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{x^2-x}{x+1}$

(ⅱ) $x=1$일 때, $f(1)=1-1=0$

(ⅲ) $x<1$일 때, $f(x)=1-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{-x+1}{x+1}$

즉, $\lim_{x\to1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\dfrac{\frac{x^2-x}{x+1}}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$

$\lim_{x\to1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\dfrac{\frac{-x+1}{x+1}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-0}\dfrac{-1}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x\to1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1-0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\dfrac{1}{2}-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$

***3.* 답 ②**

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1-0} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to+0} f(x)=1,\ \lim_{x\to-0} f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to+0} f(x)\neq\lim_{x\to-0} f(x)$이므로 $x=0$에서 $f(x)$의 극한 값은 존재하지 않는다. (참)

ㄷ. $x=1$에서 $f(x)$의 좌극한 값은 $\lim_{x\to1-0} f(x)=1$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

***4.* 답 ②**

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to2} f(x)=2$이지만

$\lim_{x\to2+0} g(x)=1,\ \lim_{x\to2-0} g(x)=2$이므로

$\lim_{x\to2} g(x)$는 존재하는 않는다.

따라서 $\lim_{x\to2}\{f(x)+g(x)\}$도 존재하지 않는다.

ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$와 $\lim_{x\to1} g(x)$가 존재하므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$도 존재한다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1} f(x)=-1,\ \lim_{x\to-1} g(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1}\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 존재하지 않는다.

그러므로 극한값이 존재하는 것은 ㄴ뿐이다.

***5.* 답 ⑤**

[해설]

$\lim_{x\to3+0}\dfrac{2x-6}{|x-3|}=\lim_{x\to3+0}\dfrac{2(x-3)}{x-3}=\lim_{x\to3+0}2=2$

$\lim_{x\to3+0}\dfrac{2x-6}{|x-3|}=\lim_{x\to3+0}\dfrac{2(x-3)}{-(x-3)}=\lim_{x\to3+0}(-2)=-2$

에서 좌극한과 우극한이 같지 않으므로 극한값은 없다.

***6.* 답 ④**

[해설]

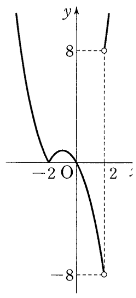
$f(x)=\begin{cases} x(x+2)(x-2) & (x \le -2 \quad \text{또는} \quad x \ge 2) \\ -x(x+2)(x-2) & (-2 \le x \le 2) \end{cases}$

이므로

$g(x)=\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$라 하면

$g(x)=\begin{cases} x(x+2) & (x \le -2 \quad \text{또는} \quad x > 2) \\ -x(x+2) & (-2 \le x < 2) \end{cases}$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore \lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=8$

7. 답 ①

[해설]

$x \to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x \to 0}(|x-a|+b)=|a|+b=0 \qquad \therefore \ b=-|a| \qquad \cdots ㉠$

$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x-a|+b}{x}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x-a|-|a|}{x}$

$=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(x-a)^2-a^2}{x(|x-a|+|a|)}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x^2-2ax}{x(|x-a|+|a|)}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x-2a}{|x-a|+|a|}$

$=\dfrac{-a}{|a|}$

ㄱ. $a>0$이면 ㉠에서 $b=-a$이므로 $a+b=0$이다. (참)

ㄴ. $a=0$이면 $b=0$이므로 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x|}{x}$는 극한값이 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $a<0$이면 $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x-a|+b}{x}=1$이므로 $\alpha=1$이다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

8. 답 ⑤

[해설]

① $\lim\limits_{x \to 4+0}[x+2]=6$, $\lim\limits_{x \to 4-0}[x+2]=5$이므로 극한값 $\lim\limits_{x \to 4}[x+2]$는 존재하지 않는다.

② $x=-1-h(h>0)$라 하면

$x+2=(-1-h)+2=1-h<1$

$\therefore \lim\limits_{x \to -1-0}[x+2]=0$

③ $x=1+h(h>0)$라 하면

$x^2-x=(1+h)^2-(1+h)=h+h^2>0$

$\therefore \lim\limits_{x \to 1+0}[x^2-x]=0$

④ $x \to 2-0$이면 $2<x+\dfrac{1}{1000}<2.001$이므로

$\lim\limits_{x \to 2-0}\left[x+\dfrac{1}{1000}\right]=2$

⑤ $\lim\limits_{x \to 3+0}\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=3$, $\lim\limits_{x \to 3-0}\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=3$이므로 $\lim\limits_{x \to 3}\left[x+\dfrac{1}{2}\right]=3$

9. 답 54

[해설]

$\lim\limits_{x \to 0}x=0$이고, 극한값이 존재하므로

$\lim\limits_{x \to 0}(\sqrt{x+a}-3)=0$에서 $a=9$

$\therefore b=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{(x+9)-9}{x(\sqrt{x+9}+3)}$

$=\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}$

$=\dfrac{1}{3+3}=\dfrac{1}{6}$

$\therefore \dfrac{a}{b}=6 \times 9=54$

10. 답 ③

[해설]

$\dfrac{x}{3}-1<\left[\dfrac{x}{3}\right] \le \dfrac{x}{3}$이므로

$x>0$일 때, $\dfrac{9}{x}\left(\dfrac{x}{3}-1\right)<\dfrac{9}{x}\left[\dfrac{x}{3}\right] \le \dfrac{9}{x} \cdot \dfrac{x}{3}$

$3-\dfrac{9}{x}<\dfrac{9}{x}\left[\dfrac{x}{3}\right] \le 3$

$\lim\limits_{x \to \infty}\left(3-\dfrac{9}{x}\right)=3$, $\lim\limits_{x \to \infty}3=3$이므로

$a=\lim\limits_{x \to \infty}\dfrac{9}{x}\left[\dfrac{x}{3}\right]=3$

$\lim\limits_{x \to 1+0}[x]=1$, $\lim\limits_{x \to 1+0}[-x]=-2$ 이므로

$\lim\limits_{x \to 1+0}([x]+[-x]+4)=1+(-2)+4=3$

$\lim\limits_{x \to 1-0}[x]=$, $\lim\limits_{x \to 1-0}[-x]=-1$ 이므로

$\lim\limits_{x \to 1-0}([x]+[-x]+4)=0+(-1)+4=3$

$\therefore b=\lim\limits_{x \to 1}([x]+[-x]+4)=3$

$\therefore a+b=3+3=6$

11. 답 (1) -6 (2) 36

[해설]

(1) $\lim\limits_{x \to 1}\{2f(x)-3g(x)\}=\lim\limits_{x \to 1}2f(x)-\lim\limits_{x \to}3g(x)$

$=2\lim\limits_{x \to 1}f(x)-3\lim\limits_{x \to}g(x)$

$=2 \times 3-3 \times 4=-6$

(2) $\lim\limits_{x \to 1}3f(x)g(x)=3\lim\limits_{x \to 1}f(x)g(x)$

$=3\lim\limits_{x \to 1}f(x) \times \lim\limits_{x \to 1}g(x)$

$=3 \times 3 \times 4=36$

12. 답 ①

[해설]

$$\lim_{x \to 0}\frac{x^3-12f(x)}{x^3+f(x)}=\lim_{x \to 0}\frac{x^2-12 \cdot \dfrac{f(x)}{x}}{x^2+\dfrac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{-12\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}}{\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{f(x)}{x}}=-12$$

13. 답 ①

[해설]

$\lim_{x\to1}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to1}\{2f(x)+g(x)\}=4$ 이므로

$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)}=0$

즉, $\lim_{x\to1}\left\{2+\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=-2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{2f(x)-g(x)}{2f(x)+4g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{2-\frac{g(x)}{f(x)}}{3+4\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{2-(-2)}{3+4\cdot(-2)}$$

$$=-\frac{4}{5}$$

14. 답 ⑤

[해설]

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ 에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\{4f(x)-5g(x)\}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-5g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{4-\frac{5g(x)}{f(x)}\right\}=0$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{4}{5}$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{3f(x)+2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}{3+2\cdot\frac{g(x)}{f(x)}}$$

$$=\frac{3-\frac{8}{5}}{3+\frac{8}{5}}=\frac{7}{23}$$

$\therefore\ m+n=23+7=30$

[다른 풀이]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)-2g(x)}{3f(x)+2g(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{5}\{4f(x)-5g(x)\}+\frac{7}{5}f(x)}{-\frac{2}{5}\{4f(x)-5g(x)\}+\frac{23}{5}f(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4f(x)-5g(x)}{f(x)}+\frac{7}{5}}{-\frac{2}{5}\cdot\frac{4f(x)-5g(x)}{f(x)}+\frac{23}{5}}=\frac{7}{23}$$

15. 답 ③

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때,

(분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$ $\therefore\ \lim_{x\to1}f(x)=-2$

$g(x)=(x-1)f(x)$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+4}{g(x)}=\lim_{x\to1}\frac{2f(x)+4}{(x-1)f(x)}$$

$$=2\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}\cdot\frac{1}{f(x)}$$

$$=2\cdot3\cdot\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)}$$

$$=2\cdot3\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$$

16. 답 24

[해설]

$\lim_{x\to2}f(x)=\infty$이고 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{g(x)}}{4f(x)}=1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{8\log g(x)}{\log f(x)}=8\lim_{x\to2}\frac{3\log\sqrt[3]{g(x)}}{\log f(x)}$$

$$=8\lim_{x\to2}\frac{3\log\left(4f(x)\frac{\sqrt[3]{g(x)}}{4f(x)}\right)}{\log f(x)}$$

$$=24\lim_{x\to2}\frac{\log4+\log f(x)+\log\frac{\sqrt[3]{g(x)}}{4f(x)}}{\log f(x)}$$

$$=24\lim_{x\to2}\left(\frac{\log4}{\log f(x)}+\frac{\log f(x)}{\log f(x)}+\log\frac{\sqrt[3]{g(x)}}{4f(x)}\times\frac{1}{\log f(x)}\right)$$

$$=24$$

17. 답 ②

[해설]

ㄱ. (반례) $f(x)=x-1,\ g(x)=\frac{1}{x-1}$일 때,

$\lim_{x\to1}f(x)=0,\ \lim_{x\to1}f(x)\cdot g(x)=1$이지만 $\lim_{x\to1}g(x)$는 발산한다. (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to1}g(x),\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}$가 각각 수렴하므로

$\lim_{x\to1}g(x)=\alpha,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$로 놓으면

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\left\{g(x)\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}g(x)\cdot\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

그러므로 $\lim_{x\to1}f(x)$도 수렴한다. (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=x-1,\ g(x)=\frac{1}{x-1}$일 때,

$\lim_{x\to1}f(x)=0,\ \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to1}(x-1)^2=0$으로 각각 수렴하지만

$\lim_{x\to1}g(x)$는 발산한다. (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

18. 답 ②

[해설]

ㄱ. (반례) $f(x)=x+1$ 이면 $\lim_{x\to0}\frac{x}{x+1}=0$ 이지만

$\lim_{x\to0}(x+1)=1\neq0$ (거짓)

ㄴ. $\lim_{x\to0}\frac{\{f(x)\}^2}{x}$의 값이 존재하고 $x\to0$일 때, (분모)$\to0$ 이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=0$ $\quad\therefore\lim_{x\to0}f(x)=0$ (참)

ㄷ. (반례) $f(x)=x^3+x^2$ 이면

$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^3+x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x+1}=1$ 이지만

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}(x+1)=\infty$ (거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ 뿐이다.

19. 답 0

[해설]

$x\neq0$일 때, $-1\leq\sin\frac{1}{x}\leq1$이므로

$-|x|\leq x\sin\frac{1}{x}\leq|x|$

그런데 $\lim_{x\to0}(-|x|)=\lim_{x\to0}|x|=0$이므로

$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

20. 답 ④

[해설]

모든 실수 x에 대하여 $-1\leqq\sin3x\leqq1$이므로

$x>0$일 때, $-\frac{1}{x}\leqq\frac{\sin3x}{x}\leqq\frac{1}{x}$

그런데, $\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin3x}{x}=0$

$x-1\leqq f(x)\leqq x+1$이므로 $x>0$일 때,

$\frac{x-1}{x}\leqq\frac{f(x)}{x}\leqq\frac{x+1}{x}$, 즉 $1-\frac{1}{x}\leqq\frac{f(x)}{x}\leqq1+\frac{1}{x}$

그런데, $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$, $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})=1$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

$$\therefore\lim_{x\to\infty}\frac{\sin3x+f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin3x}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0+1=1$$

21. 답 ⑤

[해설]

$t\to\infty$일 때, $\frac{t+1}{t+2}\to1$ 이고, $\frac{t+1}{t+2}<1$ 이므로

$\frac{t+1}{t+2}\to1-0$

$t\to\infty$일 때, $\frac{t+2}{t+1}\to1$ 이고, $\frac{t+2}{t+1}>1$이므로

$\frac{t+2}{t+1}\to1+0$

$\frac{t+1}{t+2}=m$으로 놓으면 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t+1}{t+2}\right)=\lim_{m\to1-0}f(m)=2$

$\frac{t+2}{t+1}=n$으로 놓으면 $\lim_{t\to\infty}f\left(\frac{t+2}{t+1}\right)=\lim_{n\to1+0}f(n)=1$

$\therefore\lim_{t\to\infty}\left\{3f\left(\frac{t+1}{t+2}\right)+2f\left(\frac{t+2}{t+1}\right)\right\}=3\cdot2+2\cdot1=8$

22. 답 ④

[해설]

ㄱ. $x\to-0$일 때, $f(x)\to-0$이므로

$\lim_{x\to-0}g(f(x))=\lim_{t\to-0}g(t)=0$

$x\to+0$일 때, $f(x)\to+0$ 이므로

$\lim_{x\to+0}g(f(x))=\lim_{t\to+0}g(t)=-2$

즉, $\lim_{x\to0}g(f(x))$는 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $x\to2-0$ 일 때, $f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to2-0}g(f(x))=\lim_{x\to2-0}g(1)=1$

$x\to2+0$ 일 때, $f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to2+0}g(f(x))=\lim_{x\to2+0}g(-1)=1$

$\therefore\lim_{x\to2}g(f(x))=1$ (참)

ㄷ. $f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{4}g\left(f\left(2k+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(4+\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$

$$=2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\}$$

$$\lim_{x\to\infty}g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to2+0}g(f(x))=\lim_{x\to2+0}g(-1)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to+0}g(f(x))=\lim_{t\to+0}g(t)=-2$$

$$\therefore2\lim_{x\to\infty}\left\{g\left(f\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)+g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right\}=2\{1+(-2)\}=-2$$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

23. 답 42

[해설]

$$\lim_{x\to7}\frac{x^2-49}{\sqrt{2+x}-\sqrt{16-x}}$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{(x^2-49)(\sqrt{2+x}+\sqrt{16-x})}{(2+x)-(16-x)}$$

$$=\lim_{x\to7}(x+7)(x-7)(\sqrt{2+x}+\sqrt{16-x})$$

$$=\lim_{x\to7}\frac{(x+7)(\sqrt{2+x}+\sqrt{16-x})}{2}$$

$$=\frac{14\cdot6}{2}=42$$

24. 답 ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-x^2+x-1}{\sqrt{x+8}-3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\{x^2(x-1)+x-1\}(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$$
$$= \lim_{x \to 1}(x^2+1)(\sqrt{x+8}+3)$$
$$= 2 \cdot 6 = 12$$

25. 답 ④

[해설]

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x(\sqrt{9+x}-3)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)(\sqrt{9+x}+3)}{x(\sqrt{9+x}-3)(\sqrt{9+x}+3)(\sqrt{1+x^2}+1)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2(\sqrt{9+x}+3)}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}+3}{\sqrt{1+x^2}+1}$$
$$= \frac{3+3}{1+1} = 3$$

26. 답 10

[해설]

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3-ax^2+ax-a^2}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2+a)}{x-a}$$
$$= \lim_{x \to a}(x^2+a) = a^2+a$$

이므로 $a^2+a=110$에서

$(a+11)(a-10)=0$

$\therefore a=-11$ 또는 $a=10$

그런데 a는 양수이므로

$a=10$

27. 답 ①

[해설]

$$\lim_{x \to a} \frac{x^3-ax^2+a^2x-a^3}{x^4-a^4}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{x^2(x-a)+a^2(x-a)}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}$$
$$= \lim_{x \to a} \frac{1}{x+a}$$
$$= \frac{1}{2a} = 6$$
$$\therefore a = \frac{1}{12}$$

28. 답 ②

[해설]

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x^2+2x-3)A(x)}{(x-1)C(x)} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+3)A(x)}{(x-1)C(x)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)A(x)}{C(x)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)A(x)}{A(x)B(x)}$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{x+3}{B(x)} = \frac{4}{2} = 2$$

29. 답 ③

[해설]

$x-2=t$로 놓으면 $x \to 2$일 때, $t \to 0$ 이므로

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{f(x-2)} = \lim_{t \to 0} \frac{(t+2)^3-8}{f(t)}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^3+6t^2+12t}{f(t)}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{t^2+6t+12}{\frac{f(t)}{t}}$$
$$= \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

30. 답 ②

[해설]

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^3-8)\log_2 x}{(x^2-4)\{f(x)+g(x)\}}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)\log_2 x}{(x+2)(x-2)\{f(x)+g(x)\}}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x^2+2x+4)\log_2 x}{(x+2)\{f(x)+g(x)\}}$$

이때, $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 구간에서 연속이다.

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$, $\lim_{x \to 2} g(x) = g(2)$

$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2+2x+4)\log_2 x}{(x+2)\{f(x)+g(x)\}} = \frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{12}{4\{f(2)+g(2)\}} = \frac{1}{4}$$

$\therefore f(2)+g(2)=12$

31. 답 ④

[해설]

$$\lim_{x \to 0} x^4 f(x) = \lim_{x \to 0} x^4 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{(\sqrt{x^2+1}-1)^2}$$
$$= \lim_{x \to 0} x^4 \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)^2}{x^4}$$
$$= \lim_{x \to 0} \sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)^2$$
$$= 1 \cdot 2^2 = 4$$

32. 답 ②

[해설]

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(4x^2-4)$$
$$= (4x^2-4)^3 = 64(x-1)^3(x+1)^3$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 4x^6-4$$
$$= 4(x^2-1)(x^4+x^2+1)$$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)}{(x+1)(x^2-1)(x^3+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{64(x-1)^3(x+1)^3-4(x^2-1)(x^4+x^2+1)}{(x+1)(x^2-1)(x^3+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)\{64(x-1)^2(x+1)^2-4(x^4+x^2+1)\}}{(x+1)(x^2-1)(x^3+1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{64(x-1)^2(x+1)^2-4(x^4+x^2+1)}{(x+1)(x^3+1)}$$
$$=-\frac{4\times3}{2\times2}=-3$$

33. 답 18

[해설]

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+8}-3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x^3-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x+8)-9}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)(\sqrt{x+8}+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x^2+x+1)(\sqrt{x+8}+3)$$
$$=(1+1+1)(\sqrt{1+8}+3)=18$$

34. 답 ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{2x}\cdot\frac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$
$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$
$$=-\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

35. 답 ③

[해설]

$$\lim_{x\to\infty}(x+a-\sqrt{x^2+6x-9})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a-\sqrt{x^2+6x-9})(x+a+\sqrt{x^2+6x-9})}{x+a+\sqrt{x^2+6x-9}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+a)^2-(x^2+6x-9)}{x+a+\sqrt{x^2+6x-9}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2a-6)x+(a^2+9)}{x+a+\sqrt{x^2+6x-9}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a-6+\frac{a^2+9}{x}}{1+\frac{a}{x}+\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}}}$$
$$=\frac{2a-6}{2}=a-3=10$$

$\therefore a=13$

36. 답 ③

[해설]

$b<0$이면 무한대로 발산하므로 $b>0$이어야 한다.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-bx-1)=3$$
$$\Leftrightarrow\ \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+ax}-bx)=4$$

이므로 분자를 유리화 하면 주어진 식은

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-b^2)x^2+ax}{\sqrt{x^2+ax}+bx}=4$$

분모의 차수가 일차이므로 $1-b^2=0$에서

$b=1\ (\because b>0)$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}=\frac{a}{2}=4$$

$\therefore a=8$

$\therefore a+b=9$

37. 답 ③

[해설]

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+a^2}-\sqrt{x+b^2}}{\sqrt{4x+a}-\sqrt{4x+b}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{(x+a^2)-(x+b^2)\}(\sqrt{4x+a}+\sqrt{4x+b})}{\{(4x+a)-(4x+b)\}(\sqrt{x+a^2}+\sqrt{x+b^2})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)(\sqrt{4x+a}+\sqrt{4x+b})}{\sqrt{x+a^2}+\sqrt{x+b^2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(a+b)\left(\sqrt{4+\frac{a}{x}}+\sqrt{4+\frac{b}{x}}\right)}{\sqrt{1+\frac{a^2}{x}}+\sqrt{1+\frac{b^2}{x}}}$$
$$=\frac{5\times(\sqrt{4}+\sqrt{4})}{1+1}=10$$

38. 답 ③

[해설]

$x=-t$로 치환하면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4x}}{x-5}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-4t}}{-t-5}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-4}}{-1-\frac{5}{t}}=3$$

39. 답 ①

[해설]

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{bx-\sqrt{1+4x^2}}{ax+\sqrt{10+x^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-bt-\sqrt{1+4t^2}}{-at+\sqrt{10+t^2}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-b-\sqrt{\frac{1}{t^2}+4}}{-a+\sqrt{\frac{10}{t^2}+1}}$$

$$= \frac{-b-2}{-a+1} = 2$$

$\therefore\ 2a-b=4$

40. 답 ①

[해설]

$\lim_{x\to-\infty} 4^x = 0$이므로

$$A = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4^x}{4+2^{2x}} = 0$$

$\lim_{x\to0} 4^x = 1$이므로

$$B = \lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{4^x}{4+2^{2x}} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{5}$$

$\lim_{x\to\infty} 4^x = \infty$ 이므로

$$C = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{4^x}{4+2^{2x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{4}{4^x}+1} = 1$$

따라서 A, B, C의 대소 관계는 $A < B < C$이다.

41. 답 ③

[해설]

$x=-t$로 놓으면

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}+ax+b\right)$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\sqrt{t^2-t+1}-at+b\right) \qquad \cdots ㉠$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{t^2-t+1-(at-b)^2}{\sqrt{t^2-t+1}+at-b}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(1-a^2)t^2+(2ab-1)t+1-b^2}{\sqrt{t^2-t+1}+at-b}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{(1-a^2)t+(2ab-1)+1-\frac{b^2}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+a-\frac{b}{t}}$$

위의 식이 극한값을 가지려면 $1-a^2=0$이어야 하므로 $a=\pm1$

그런데 $a=-1$이면 ㉠에서 극한이 발산하므로 $a=1$이어야 한다.

$$\therefore \lim_{t\to\infty} \frac{(2b-1)+\frac{1-b^2}{t}}{\sqrt{1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}+1-\frac{b}{t}} = \frac{2b-1}{2} = 4$$

$\therefore\ b = \frac{9}{2}$

$\therefore\ a+2b = 10$

42. 답 1

[해설]

$-x=t$로 놓으면 $x\to-\infty$ 일 때, $t\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2g(x)}{xf(x)} = \lim_{t\to\infty} \frac{2g(-t)}{(-t)\cdot f(-t)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2g(t)}{-t\cdot\{-t(t)\}} (\because (가),\ (나))$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2g(t)}{tf(t)}$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\frac{tf(t)}{g(t)}} = 1 (\because (다))$$

43. 답 ③

[해설]

$$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{3ax^2-(a-3)x-1}{ax^2-(3a^2-1)x-3a}$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(ax+1)(3x-1)}{(ax+1)(x-3a)}$$

$$= \frac{2}{1-3a}$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$이면 $\lim_{x\to1} f(x)$가 존재하지 않는다.

44. 답 ③

[해설]

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to1}(x^2-a) = 1-a = 0$

$\therefore a=1$

이것을 주어진 식에 대입하면

$$b = \lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to1}(x+1) = 2$$

$\therefore a+b = 1+2 = 3$

45. 답 ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+ax}-x\right)\left(\sqrt{x^2+ax}+x\right)}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{ax}{\sqrt{x^2+ax}+x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+1}$$

$$= \frac{a}{1+1} = 10$$

$\therefore\ a = 20$

46. 답 ④

[해설]

$\lim_{x\to-2} \frac{4x^2+28x+a}{x+2} = b$에서

$x\to-2$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to-2}(4x^2+28x+a) = 16-56+a = 0$에서 $a=40$

$$\lim_{x\to-2} \frac{4x^2+28x+40}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{4(x+2)(x+5)}{x+2}$$

$= \lim_{x \to -2} 4(x+5)$

$= 12 = b$

$\therefore a+b = 40+12 = 52$

47. 답 23

[해설]

극한값 $\lim_{x \to 5} \frac{x^2+ax+b}{x-5}$가 존재하고, $\lim_{x \to 5}(x-5) = 0$이므로

$\lim_{x \to 5}(x^2+ax+b) = 25+5a+b = 0$

$\therefore b = -5a-25$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x \to 5} \frac{x^2+ax+b}{x-5} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2+ax-5a-25}{x-5}$

$= \lim_{x \to 5} \frac{(x-5)(x+5+a)}{x-5}$

$= \lim_{x \to 5}(x+5+a)$

$= 10+a = -2$

$\therefore a = -12$

이것을 ㉠에 대입하면

$b = 60-25 = 35$

$\therefore a+b = (-12)+35 = 23$

48. 답 ④

[해설]

극한값 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{a\sqrt{x+1}-b}$이 0이 아니고 $\lim_{x \to 1}(x^2-1) = 0$이므로

$\lim_{x \to 1}(a\sqrt{x+1}-b) = a\sqrt{2}-b = 0$

$\therefore b = a\sqrt{2}$ ⋯⋯ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{a\sqrt{x+1}-b} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{a\sqrt{x+1}-a\sqrt{2}}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{a(\sqrt{x+1}-\sqrt{2})(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{a(x-1)}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+1}+\sqrt{2})}{a}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

$\therefore a = 4$

㉠에서 $b = 4\sqrt{2}$

49. 답 ③

[해설]

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2$에서 분자와 분모의 차수가 같은 차수의식이어야 하므로

$a = 0$

분모의 최고차항의 계수가 1이므로 분자의 최고차항의 계수는 2가 되어야 한다.

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{2x^2-8x+8}{x^2-4}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)^2}{(x-2)(x+2)}$

$= \lim_{x \to 2} \frac{2(x-2)}{x+2}$

$= 0$

50. 답 ③

[해설]

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \alpha$에서

$x \to 1$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore f(1) = 0$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \beta$에서

$x \to 2$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\therefore f(2) = 0$

따라서, $f(x) = a(x-1)(x-2)(a \neq 0)$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-1} = -a = \alpha$

$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2} = a = \beta$

$\therefore \alpha+\beta = -a+a = 0$

51. 답 59

[해설]

$a \le 0$이면 $\lim_{x \to \infty}\{\sqrt{9x^2+4x+1}-(ax+b)\} = \infty$이므로

$a > 0$이다.

$\therefore \lim_{x \to \infty}\{\sqrt{9x^2+4x+1}-(ax+b)\}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{(9x^2+4x+1)-(ax+b)^2}{\sqrt{9x^2+4x+1}+(ax+b)}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{(9-a^2)x^2+(4-2ab)x+1-b^2}{\sqrt{9x^2+4x+1}+(ax+b)}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{(9-a^2)x+(4-2ab)+\frac{1-b^2}{x}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(a+\frac{b}{x}\right)}$

이 식이 수렴하므로 $a = 3$이고, 극한값이 0이므로

$\frac{4-6b}{6} = 0 \qquad \therefore b = \frac{2}{3}$

$\therefore \lim_{x \to \infty} x\left\{\sqrt{9x^2+4x+1}-\left(3x+\frac{2}{3}\right)\right\}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{x\left\{(9x^2+4x+1)-\left(3x+\frac{2}{3}\right)^2\right\}}{\sqrt{9x^2+4x+1}+\left(3x+\frac{2}{3}\right)}$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{5}{9}x}{\sqrt{9x^2+4x+1}+\left(3x+\frac{2}{3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{9}}{\sqrt{9+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+\left(3+\frac{2}{3x}\right)}=\frac{5}{54}$$

$\therefore\ m+n=54+5=59$

52. 답 ⑤

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{3x^2-4x-3}=7$에서 함수 $f(x)$의 차수는 2차이고 x^2의 계수는 21임을 알 수 있다.

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}=7$에서 $\lim_{x\to 1}(x^2-5x+4)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}f(x)=0$

즉, $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 $f(x)=21(x-a)(x-1)$ (a는 상수)로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-5x+4}=\lim_{x\to 1}\frac{21(x-a)(x-1)}{(x-4)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{21(x-a)}{x-4}$$
$$=7(a-1)=7$$

$\therefore\ a=2$

$\therefore\ f(x)=21(x-2)(x-1)$

$\therefore f(-1)=126$

53. 답 ⑤

[해설]

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}$의 값이 존재하고, $x\to 2$일 때, (분모)$\to 0$ 이므로 (분자)$\to 0$ 이어야 한다.

$\therefore \lim_{x\to 2}f(x)=f(2)=0$

$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}$의 값이 존재하고, $x\to -3$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$ 이어야한다.

$\therefore\ \lim_{x\to -3}f(x)=f(-3)=0$

이때, $f(x)=a(x-2)(x+3)\ (a\neq 0)$ 으로 놓을 수 있으므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}-\lim_{x\to -3}\frac{f(x)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)(x+3)}{x-2}-\lim_{x\to -3}\frac{a(x-2)(x+3)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to 2}a(x+3)-\lim_{x\to -3}a(x-2)$$
$$=5a-(-5a)$$
$$=10a=30$$

$\therefore a=3$

따라서, $f(x)=3(x-2)(x+3)$이므로

$f(3)=3\cdot 1\cdot 6=18$

54. 답 540

[해설]

극한값이 존재하는 분수식에서 (분모) $\to 0$이면 (분자) $\to 0$이어야 하므로

$f(1)=0,\ f(2)=0$

그러므로 $f(x)=(x-1)(x-2)(ax+b)$로 놓을 수 있다.

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x-2)(ax+b)$$
$$=-a-b=-5 \quad \cdots\cdots ㉠$$
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)(ax+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x-1)(ax+b)$$
$$=2a+b=15 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=10,\ b=-5$

즉, $f(x)=(x-1)(x-2)(10x-5)$이므로

$f(5)=4\times 3\times 45=540$

55. 답 ③

[해설]

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x-1)}=5$에서 $\lim_{x\to 0}x(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=0 \qquad \therefore\ b=0$

또, $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^n+ax-5}{x-1}=10$에서

$\lim_{x\to 1}(x-1)=0$이므로

$\lim_{x\to 1}(x^n+ax-5)=1+a-5=0\ \therefore\ a=4$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{x^n+4x-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+5)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+5)$$
$$=1^{n-1}+1^{n-2}+\cdots+1^1+5$$
$$=n-1+5=10$$

$\therefore\ n=6$

$\therefore\ n+a+b=6+4+0=10$

56. 답 ⑤

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 x^m이다.

이때, $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$이므로 $m=a$이다.

한편, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$이므로 $f(x)$의 계수가 0이 아닌 항 중 차수가 가장 낮은 항은 bx^n이다.

이때, $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$이므로 $bn=9$이다.

ㄱ. $f(x)$의 최고차항이 x^m이고 차수가 가장 낮은 항이 bx^n이므로 $m\geq n$ (참)

ㄴ. $m=a,\ bn=9$이므로

$$ab=m\times\frac{9}{n}\geq n\times\frac{9}{n}=9\ \ (\because\ m\geq n)\ (참)$$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $m=a=3,\ bn=9$이므로

$am=bn$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

57. 답 10

[해설]

$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^3f\left(\dfrac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5$에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면

$x\to+0$일 때, $t\to\infty$ 이므로

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t^3}f(t)-1}{\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)-t^3}{t^2+1}=5$$

이때, $f(t)=t^3+5t^2+at+b(a,b$는 상수)로 놓을 수 있다.

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x^2+x-2}=\dfrac{1}{3}$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$ 이므로

(분자)$\to0$ 이어야 한다. 즉,

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=1+5+a+b=0\quad\therefore b=-a-6$ …… ㉠

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+5x^2+ax-a-6}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+6x+a+6)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+6x+a+6}{x+2}$$

$$=\frac{a+13}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ a=-12$

㉠에서 $b=6$이므로 $f(x)=x^3+5x^2-12x+6$

$\therefore f(2)=8+20-24+6=10$

58. 답 ③

[해설]

선분 OC가 각 O의 이등분선이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=\overline{OA}:\overline{OB}=t:5$

점 C는 선분 AB를 $t:5$로 내분하는 점이므로

$C\left(\dfrac{8t}{t+5},\dfrac{4t}{t+5}\right)$

$\overline{OC}=\dfrac{\sqrt{64t^2+16t^2}}{t+5}=\dfrac{\sqrt{80}\,t}{t+5}$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty}\overline{OC}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{80}\,t}{t+5}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

59. 답 ④

[해설]

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)(t>0)$이라 하면

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2)^2}=t\sqrt{1+t^2}$

이므로 $Q(t\sqrt{1+t^2},\ 0)$이다.

그러므로 직선 PQ의 방정식은

$y-t^2=\dfrac{-t^2}{t\sqrt{1+t^2}-t}(x-t)$

위식에 $x=0$을 대입하면

$y-t^2=\dfrac{-t^2}{t\sqrt{1+t^2}-t}(-t)=\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}-1}$

$=\dfrac{t^2(\sqrt{1+t^2}+1)}{(1+t^2)-1}=\sqrt{1+t^2}+1$

$\therefore y=\sqrt{1+t^2}+1+t^2$

즉, 점 R의 y좌표는 $\sqrt{1+t^2}+1+t^2$이다.

따라서 점 P가 곡선을 따라 원점 O에 접근할 때, $t\to0$이므로

구하는 극한값은

$\lim\limits_{t\to0}(\sqrt{1+t^2}+1+t^2)=2$

60. 답 ⑤

[해설]

$\overline{\mathrm{OA}}=1,\ \overline{\mathrm{OB}}=x$이므로 $\triangle\mathrm{AOB}=\dfrac{1}{2}x$

$\triangle\mathrm{AOB}=\triangle\mathrm{CAO}+\triangle\mathrm{COB}+\triangle\mathrm{CBA}$

$=\dfrac{1}{2}r+\dfrac{1}{2}xr+\dfrac{1}{2}\sqrt{1+x^2}\cdot r$

따라서, $\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1+x+\sqrt{1+x^2}}{2}r$에서

$\dfrac{r}{x}=\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{r}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x+\sqrt{1+x^2}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

61. 답 25

[해설]

$x=\sqrt{x}$ 에서 $x^2=x,\ x(x-1)=0\quad\therefore x=1\ (\because x\neq0)$

$\therefore \mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(1,0)$

점 P 의 좌표를 $(t,t)(t>1)$라 하면

$\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t}),\mathrm{R}(t,0)$ 이므로

$\overline{\mathrm{PB}}=\sqrt{(t-1)^2+t^2}=\sqrt{2t^2-2t+1}$

$\overline{\mathrm{QB}}=\sqrt{(t-1)^2+t}=\sqrt{t^2-t+1}$

$\overline{\mathrm{BR}}=t-1$

점P 가 점A$(1,1)$에 가까워 질 때, $t\to1+0$이므로

$$\lim_{t\to1+0}\frac{\overline{\mathrm{PB}}-\overline{QB}}{\overline{\mathrm{BR}}}$$

$$=\lim_{t\to1+0}\frac{\sqrt{2t^2-2t+1}-\sqrt{t^2-t+1}}{t-1}$$

$$=\lim_{t\to1+0}\frac{(2t^2-2t+1)-(t^2-t+1)}{(t-1)(\sqrt{2t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-t+1})}$$

$$=\lim_{t\to1+0}\frac{t^2-t}{(t-1)(\sqrt{2t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-t+1})}$$

$$=\lim_{t\to1+0}\frac{t}{\sqrt{2t^2-2t+1}+\sqrt{t^2-t+1}}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}=\alpha$$

$\therefore 50\alpha=50\times\dfrac{1}{2}=25$

62. 답 18

[해설]

점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(x,\ 2x)$이므로

$\triangle\mathrm{OPQ}$와 $\triangle\mathrm{OPR}$의 넓이 $A(x),\ B(x)$는

$A(x)=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2x=6x,\ \ B(x)=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x=2x$

그런데, 점 P가 점 $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$에 가까워질 때, $x\to\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{\{A(x)\}^2-9}{B(x)-1}=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(6x)^2-9}{2x-1}$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{9(4x^2-1)}{2x-1}$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{9(2x+1)(2x-1)}{2x-1}$$
$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}9(2x+1)=18$$

***63.* 답 ⑤**

[해설]

두 함수 $f(x)=\sqrt{2x-1},\ g(x)=\sqrt{x}$의 그래프가 만나는 점은

$\sqrt{2x-1}=\sqrt{x}$에서 $2x-1=x$ $\therefore\ x=1$

$\therefore\ \mathrm{M}(1,\ 1)$

그러므로 점 $\mathrm{M}(1,\ 1)$을 지나면서 기울기가 -1인 직선 l의 방정식은

$y-1=-1(x-1)$에서 $y=-x+2$

한편, 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{2t-1})$이라 하면

점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}(t,\ \sqrt{t})$, 점 R의 좌표는 $\mathrm{R}(t,\ -t+2)$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{2t-1}+t-2,\ \ \overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{t}+t-2$

점 P가 점 M에 한없이 가까워 질 때, $t\to 1$이므로

$$\lim_{t\to 1}\frac{3\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{QR}}}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{3(\sqrt{2t-1}+t-2)}{\sqrt{t}+t-2}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{3(\sqrt{2t-1}+t-2)\{\sqrt{t}-(t-2)\}}{(\sqrt{t}+t-2)\{\sqrt{t}-(t-2)\}}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{3(\sqrt{2t-1}+t-2)\{\sqrt{2t-1}-(t-2)\}\{\sqrt{t}-(t-2)\}}{(-t^2+5t-4)\{\sqrt{2t-1}-(t-2)\}}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{3(-t^2+6t-5)(\sqrt{t}-t+2)}{(-t^2+5t-4)(\sqrt{2t-1}-t+2)}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{3(t-1)(t-5)(\sqrt{t}-t+2)}{(t-1)(t-4)(\sqrt{2t-1}-t+2)}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{3(t-5)(\sqrt{t}-t+2)}{(t-4)(\sqrt{2t-1}-t+2)}$$
$$=\frac{3\cdot(-4)\cdot 2}{-3\cdot 2}$$
$$=4$$

***64.* 답 ⑤**

[해설]

문제의 조건에서 점 P가 그리는 도형은 원점이 중심이고 지름이 $\overline{AB}$인 구이다.

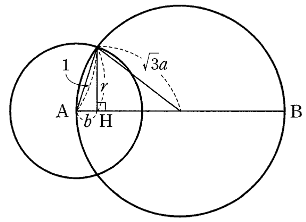
그러므로 점 P가 그리는 도형의 방정식은

$x^2+y^2+z^2=3a^2$

중심이 A이고 반지름의 길이가 1인 구의 방정식은

$(x+a)^2+(y+a)^2+(z+a)^2=1$

두 구가 만나서 생기는 원의 반지름의 길이를 r라 하고 $\overline{AH}=b$라 하면



$1-b^2=r^2=3a^2-(\sqrt{3}\,a-b)^2$

$\therefore\ b=\frac{1}{2\sqrt{3}\,a},\ \ r=\sqrt{1-\frac{1}{12a^2}}$

따라서 $\lim_{a\to\frac{1}{\sqrt{3}}+0}r=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \lim_{a\to\infty}r=1$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

***65.* 답 ①**

[해설]

$r:(r+x)=\overline{AB}:\overline{PQ}$이므로

$r\overline{PQ}=(r+x)\overline{AB}$

$\therefore\ \overline{PQ}=\frac{r+x}{r}\overline{AB}$

따라서 삼각형 PQR의 둘레의 길이는 $\frac{r+x}{r}\times 30$이므로

$f(x)=\frac{1}{2}(r+x)\times\frac{r+x}{r}\times 30=\frac{15(r+x)^2}{r}$

$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{15(r+x)^2}{rx^2}=\frac{15}{r}$

***66.* 답 ④**

[해설]

직선 PQ와 x축과의 교점을 A라 하면

$\overline{AQ}:\overline{PQ}=f(a+h)\{f(a+h)-f(a)\}$

$\overline{AP}:\overline{PQ}=f(a):\{f(a+h)-f(a)\}$

$\therefore\ \overline{AQ}=\frac{f(a+h)}{f(a+h)-f(a)}\overline{PQ},\ \ \overline{AP}=\frac{f(a)}{f(a+h)-f(a)}\overline{PQ}$

원뿔대의 옆면의 넓이 $S(h)$는

$S(h)=\frac{1}{2}\overline{AQ}\times 2\pi f(a+h)-\frac{1}{2}\overline{AP}\times 2\pi f(a)$

$=\pi\times\frac{\{f(a+h)\}^2-\{f(a)\}^2}{f(a+h)-f(a)}\times\overline{PQ}$

$=\pi\times\{f(a+h)+f(a)\}\times\overline{PQ}$

그런데 $f(a)=3a+2$이고 $f(a+h)=3a+3h+2$이므로

$f(a+h)-f(a)=3h$

즉, $\overline{PQ}=\sqrt{h^2+(3h)^2}=\sqrt{10}\,h,\ f(a+h)+f(a)=6a+3h+4$이므로

$\lim_{h\to+0}\frac{S(h)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\sqrt{10}\,\pi h(6a+3h+4)}{h}$

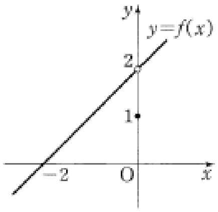
$= \lim_{h \to +0} \sqrt{10}\,\pi(6a+3h+4)$

$= \sqrt{10}\,\pi(6a+4)$

67. 답 불연속

[해설]

함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이 때, 극한값

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x_0}(x+2) = 2$

는 존재하지만, 그 값이 $x=0$에서의 함숫값 $f(0)=1$과 같지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

68. 답 불연속

[해설]

함수 $y=g(x)$의 $x=1$에서의 좌극한 우극한을 살펴보면

$\lim_{x \to 1-0} [x] = 0,\ \lim_{x \to 1+0} [x] = 1$

으로 그 값이 다르다. 따라서 극한값 $\lim_{x \to 0} g(x)$가 존재하지 않으므로

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

69. 답 ①

[해설]

ㄱ. $\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} x[x] = 0$이고

$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} x[x] = \lim_{x \to -0}(-x) = 0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

또한, $f(0)=0$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $f(x) = \cot x \times \sec x = \dfrac{1}{\sin x}$

$x=0$에서 $\sin x = 0$이므로 함숫값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \dfrac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \dfrac{1}{2}$

그런데 $f(0)=2$이므로 $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

그러므로 $x=0$에서 연속인 함수는 ㄱ이다.

70. 답 ①

[해설]

ㄱ. $\lim_{x \to \infty} f(x) = \alpha,\ \lim_{x \to \infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \beta$ (α, β 는 상수) 라 하면

$\lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) \cdot \dfrac{g(x)}{f(x)} \right\} = \alpha\beta \qquad \therefore \lim_{x \to \infty} g(x) = \alpha\beta$ (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=1,\ g(x)=x-1$이면 $f(x),\ g(x)$는 각각

$x=1$에서 연속이지만 $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{1}{x-1}$은 $x=1$에서 불연속이다.

(거짓)

ㄷ. (반례) $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 0) \\ 1 & (x < 0) \end{cases}$ 이면

$f(x),\ g(x)$는 모두 $x=0$에서 불연속이지만 모든 실수 x에 대하여

$f(x)g(x) = -1$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (거짓)

따라서, 옳은 것은 ㄱ 뿐이다.

71. 답 2

[해설]

$y=x^2-2x$와 $y=x-2$는 모든 실수 x에 대하여 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 $y=\dfrac{x^2-2x}{x-2}$는 $x \neq 2$인 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = a$

이어야 한다.

$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{x-2}$

$= \lim_{x \to 2} \dfrac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} x = 2$

$\therefore a = 2$

72. 답 ①

[해설]

구간에서 분리된 각 함수는 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 분리된 지점에서만 연속이면 된다.

(i) $x=-1$에서 연속이려면 $\lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} f(x)$가 성립해야 하므로

$1-a-1 = -a+b \qquad \therefore a+b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=1$에서 연속이려면 $\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x)$가 성립해야 하므로

$1+a-1 = 1+b \qquad \therefore a-b=1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=0$

$\therefore a^2+b^2=1$

73. 답 ①

[해설]

구간으로 분리된 각각의 함수는 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 분리된 지점, 즉 $x=3$에서 연속이어야 한다.

$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$에서 $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-x+a}{x-3} = b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

극한값이 존재하고, $\lim_{x \to 3}(x^2-x+a) = 0$에서 $a=-6$

㉠에 대입하면

$b = \lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3} = \lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+2)}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}(x+2)=5$

$\therefore a+b=(-6)+5=-1$

74. 답 ③

[해설]

$x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1+0}f(x)$에서 $4=b$

$f(x+2)=f(x-1)$을 변형하면 $f(x+3)=f(x)$이고,

$f(0)=0$이므로

$f(3)=4a+4=0$에서 $a=-1$

$\therefore f(5)=f(2)=-(2-1)^2+4=3$

75. 답 ③

[해설]

$f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=0=9a+b$ ⋯⋯ ㉠

(나)에서 $f(0)=f(4)$이므로

$8=a+b$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$, $b=9$

$f(11)=f(7)=f(3)$이고

$2\leq x\leq4$일 때, $f(x)=-(x-5)^2+9$ 이므로

$f(11)=f(3)=-4+9=5$

76. 답 ③

[해설]

$g(f(x))=\begin{cases}g(2-x) & (x\leq1)\\ g(x+1) & (x>1)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to1-0}g(f(x))=\lim_{x\to1-0}g(2-x)=g(1)=1+a$

$\lim_{x\to1+0}g(f(x))=\lim_{x\to1+0}g(x+1)=g(2)=4+2a$

$g(f(1))=g(1)=1+a$

함수 $y=g(f(x))$가 $x=1$에서 연속이므로

$1+a=4+2a$ $\quad\therefore a=-3$

77. 답 ④

[해설]

$f(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)=f(a)$가 성립한다.

즉, $\lim_{x\to a-0}(x+b)=\lim_{x\to a+0}(x^2-b)$에서

$a+b=a^2-b$ $\quad\therefore b=\frac{1}{2}a(a-1)$

이때, a, b가 10이하의 자연수이므로

$a=2$일 때, $b=1$

$a=3$일 때, $b=3$

$a=4$일 때, $b=6$

$a=5$일 때, $b=10$

따라서, 순서쌍 (a,b)는 $(2,1),(3,3),(4,6),(5,10)$ 의 4개이다.

78. 답 ③

[해설]

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이 되기 위해서는 극한값이 존재해야 한다.

그런데 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0}(x^3-a)=0$ $\quad\therefore a=0$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{x-2|x|} & (x\neq0)\\ b & (x=0)\end{cases}$

ㄱ. $f(-1)=\frac{-1}{-1-2}=\frac{1}{3}$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to+0}\frac{x^3}{x-2|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{x^3}{-x}=0$

$\lim_{x\to-0}\frac{x^3}{x-2|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{x^3}{3x}=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$ (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$

$\therefore b=0$ (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

79. 답 168

[해설]

$f(x)$가 $x=0$, $x=1$에서 각각 연속이므로

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x(x-1)}=4$, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x(x-1)}=10$

$\therefore \lim_{x\to0}g(x)=g(0)=0$, $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로

$g(x)=x(x-1)(x^2+ax+b)$로 놓을 수 있다.

$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)(x^2+ax+b)}{x(x-1)}$

$=\lim_{x\to0}(x^2+ax+b)$

$=b=4$ ......㉠

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)(x^2+ax+b)}{x(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}(x^2+ax+b)$

$=1+a+b=10$......㉡

㉠, ㉡에서 $a=5$, $b=4$

$\therefore g(x)=x(x-1)(x^2+5x+4)$

$=x(x-1)(x+1)(x+4)$

$\therefore g(3)=3\cdot2\cdot4\cdot7=168$

80. 답 ⑤

[해설]

$x\neq5$일 때, $f(x)=\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-5}$이고, $f(x)$는 $x\geq1$인 도

실수 x에서 연속이므로

$\lim_{x\to5}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-5}=f(5)=7$

이어야 한다. 이 식에서 $\lim_{x\to5}(x-5)=0$이고, 극한값이 존재하므로

$\lim_{x\to5}a\sqrt{x-1}+b=0$에서 $b=-2a$

$$\therefore \lim_{x\to5}\frac{a\sqrt{x-1}-2a}{x-5}=\lim_{x\to5}\frac{a(\sqrt{x-1}-2)}{x-5}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{a(x-1-4)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to5}\frac{a}{(\sqrt{x-1}+2)}$$
$$=\frac{a}{4=}7$$

$\therefore a=28,\ b=-56$

$\therefore a+b=-28$

81. 답 ②

[해설]

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}=\dfrac{x-1}{(x+2)(x-1)}$이므로 $f(x)$는 $x=-2$에서 불연속이다.

$g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-ax+b}$도 $x=-2$에서 불연속이므로

$x^2-ax+b=(x+2)\left(x+\dfrac{b}{2}\right)$

그런데 $g(x)$는 불연속점이 하나만 존재하므로

$x+\dfrac{b}{2}=x+1$에서 $b=2$

따라서 $x^2-ax+b=(x+2)(x+1)=x^2+3x+2$에서

$a=-3$

$\therefore\ a+b=-1$

82. 답 ③

[해설]

$x\neq0$일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{|x-a|-b}{x}$는 연속이므로 $x=0$일 때만 연속이면 된다.

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=f(0)=-1$

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\dfrac{|x-a|-b}{x}=-1$에서 (분모)→$0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자)→$0$이어야 한다. 즉,

$|0-a|-b=0$에서 $b=|a|$ …… ㉠

$$\therefore\ \lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{|x-a|-|a|}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-a)^2-a^2}{x(|x-a|+|a|)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x+a^2-a^2}{x(|x-a|+|a|)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x(x-2a)}{x(|x-a|+|a|)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x-2a)}{(|x-a|+|a|)}$$
$$=\frac{-2a}{2|a|}=\frac{-a}{|a|}=-1$$

$|a|=a$에서 $a\geqq0$

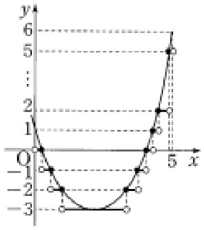
이 때, ㉠에서 $b=a$

따라서 구하는 $a\geqq0, a=b$ 이다.

83. 답 ④

[해설]

$x^2-4x+1=(x-2)^2-3$이므로 그래프는 오른쪽과 같다.



$n\leqq x<n+1$일 때, $[x]=n$이므로

$f(x)=[x^2-4x+1]$의 그래프가 연속인 점은 $y=0,-1,\ -2$ 인 점에서 2개씩 ,

$y=1,2,3,4,5$인 점에서 1개씩이다.

즉, 구간 $(0,5)$ 에서의 불연속인 점의 개수는 11개이다.

84. 답 ③

[해설]

ㄱ. $x=2n\pi-\dfrac{\pi}{2}$(n은 정수) 일 때는 $\sin x=-1$이므로 $f(x)$의 갓이 정해지지 않는다.

따라서 $f(x)$의 정의역은 $\left\{x|\,x\neq2npi-\dfrac{\pi}{2}, n\text{은 정수}\right\}$ 이다.

(거짓)

ㄴ. $x=2npi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수) 일 때는 $\sin x=1$

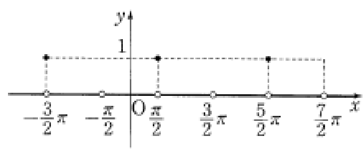
$f(x)=1$이고, $x\neq2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$일 때, $|\sin x|<1$이므로

$f(x)=0$이다.

따라서 $f(x)$의 치역은 $[0,1]$ 이다. (거짓)

ㄷ. 위 ㄴ에서j $x=2n\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$일 때, $y=f(x)$의 그래프가 불연속이고,

n이 정수이므로 불연속인 점은 무수히 많다. (참)



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

85. 답 ④

[해설]

(ⅰ) $a\neq0$일 때,

$\dfrac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4$

$=2(a-1)(a-2)$

㉠ $D>0$일 때, 서로 다른 두 실근을 가지므로

$2(a-1)(a-2)>0$

즉, $a<0$ 또는 $0<a<1$또는 $a>2$일 때, $f(a)=2$

㉡ $D=0$일 때, 중근(한 개의 실근)을 가지므로

$2(a-1)(a-2)=0$

즉, $a=1$또는 $a=2$일 때, $f(a)=1$

㉢ $D<0$일 때, 실근을 갖지 않으므로

$2(a-1)(a-2)<0$

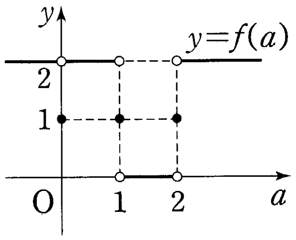
즉, $1<a<2$일 때, $f(a)=0$

(ⅱ) $a=0$일 때,

$-4x+2=0$이므로 $x=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore f(0)=1$

(ⅰ),(ⅱ)에 의하여 $f(a)$와 $f(a)$의 그래프는 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<0,\\ & \ 0<a<1,\ a>2)\\ 1 & (a=0,1,2)\\ 0 & (1<a<2)\end{cases}$$



ㄱ. $\lim\limits_{a\to 0}f(a)=2$, $f(0)=1$이므로 $\lim\limits_{a\to 0}f(a)\neq f(0)$ (거짓)

ㄴ. $\lim\limits_{a\to c+0}f(a)\neq\lim\limits_{a\to c-0}f(a)$인 c는 $c=1,2$이다. (참)

ㄷ. $a=0,1,2$에서 함수 $f(a)$가 불연속이다. (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

86. 답 ④

[해설]

함수 $f(x)$는 $\cos x=0$인 x의 값에서 불연속이므로 $\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi$ 두 개의 점이다.

$g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^{2n}}{2+x^{2n-1}}$에 대하여

(ⅰ) $|x|<1$이면 $\qquad g(x)=\frac{1}{2}$

(ⅱ) $x=\pm 1$이면 $\qquad g(x)=0$

(ⅲ) $|x|>1$이면

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2n}}{2+x^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^{2n-1}}-x}{\frac{2}{x^{2n-1}}+1}=-x$$

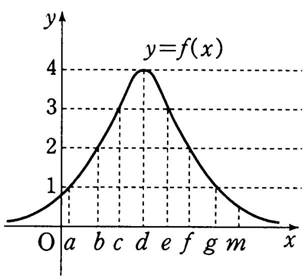
그러므로 함수 $g(x)$는 $x=\pm 1$에서 불연속이다. 즉, 개구간 $(0,5)$에서는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $a_1=1$, $a_2=\frac{\pi}{2}$, $a_3=\frac{3}{2}\pi$이므로

$a_1-a_2+a_3=1-\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=1+\pi$

87. 답 ⑤

[해설]



$0<x<a$에서 $0<f(x)<1$이므로 $[f(x)]=0$

$a\leqq x<b$에서 $1\leqq f(x)<2$이므로 $[f(x)]=1$

$b\leqq x<c$에서 $2\leqq f(x)<3$이므로 $[f(x)]=2$

$c\leqq x<d$에서 $3\leqq f(x)<4$이므로 $[f(x)]=3$

$x=d$일 때, $[f(d)]=[4]=4$

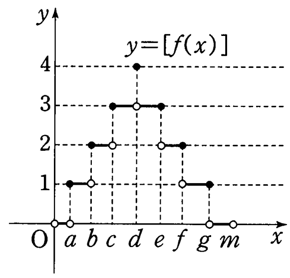
$d<x\leqq e$에서 $3\leqq f(x)<4$이므로 $[f(x)]=3$

$e<x\leqq f$에서 $2\leqq f(x)<3$이므로 $[f(x)]=2$

$f<x\leqq g$에서 $1\leqq f(x)<2$이므로 $[f(x)]=1$

$g<x<m$에서 $0<f(x)<1$이므로 $[f(x)]=0$

따라서, $0<x<m$에서 $y=[f(x)]$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 불연속점의 개수는 7개다.

88. 답 ⑤

[해설]

$$f(x)=\frac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{x^2+(1-a)x-a}=\frac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(x-a)(x+1)}$$

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(x-a)(x+1)}=\dfrac{20}{x-a}>0$

즉, $2-a>0$에서 $a<2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(x-a)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+1)(x+2)}{x-a}=\dfrac{9}{1-a}$

에서 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$의 값이 존재하지 않으면 $a=1$이다. (참)

ㄷ. $a=-2$일 때, $f(x)=\dfrac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+1)}$

$x=-1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

$$\therefore f(-1)=\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{(2x+1)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+1)}=\lim_{x\to -1}(2x+1)=-1$$

또한, $x=-2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to -2}f(x)=f(-2)$

$\therefore f(-2)=\lim\limits_{x\to -2}f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(2x+1)=-3$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

89. 답 ③

[해설]

$0<x<n$에서 $0<x^2<n^2$이므로

$0<x^2<1$일 때, $[x^2]=0$

$1 \le x^2 < 2$일 때, $[x^2]=1$

$2 \le x^2 < 3$일 때, $[x^2]=2$

$\vdots$

$n^2-1 \le x^2 < n^2$일 때, $[x^2]=n^2-1$

개구간 $(0,n)$에서 불연속점의 좌표는 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n^2-1}$ 이므로 총 (n^2-1)개 있다.

$\therefore\ a_n = n^2-1$

$$\therefore \sum_{n=2}^{10}\frac{1}{a_k}=\sum_{n=2}^{10}\frac{1}{n^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)=\frac{36}{55}$$

90. 답 ④

[해설]

$$x>1\text{일 때, } f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{a}{x^{n-1}}}{1+\frac{1}{x^n}}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 1+0}f(x)=2$$

$0<x<1$일 때, $f(x)=ax$

$$\therefore \lim_{x\to 1-0}f(x)=a$$

$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}f(x)$이므로 $a=2$

91. 답 ②

[해설]

(i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=1$$

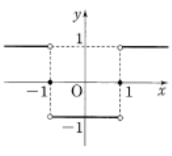
(ii) $|x|=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=-1$

(iii) $x=\pm 1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$이므로

$f(1)=0, f(-1)=0$

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연소인 점의 개수는 2개이다.



92. 답 ④

[해설]

(i) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+ax}{x^{n+1}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{a}{x^{n-1}}}{x+\frac{1}{x^n}}=\frac{1}{x}$$

(ii) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+ax}{x^{n+1}+1}=\frac{1+a}{2}$$

(iii) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+ax}{x^{n+1}+1}=ax$$

$x>1$일 때, $f(x)=\frac{1}{x}$과 $0<x<1$일 때, $f(x)ax$는 각각 연속이므로 $x>0$에서 $f(x)$가 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

즉, $1=\frac{1+a}{2}=a$에서 $a=1$

93. 답 ④

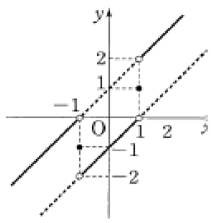
[해설]

(i) $|x|<1$일 때,

$$f(x)=x+\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^n-1}{|x|^n+1}=x-1$$

(ii) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=x+\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{|x|^n}}{1+\frac{1}{|x|^n}}=x+1$$



(iii) $f(1)=1, f(-1)=-1$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 불연속인 점의 x좌표는 ± 1이다.

94. 답 ③

[해설]

수열 $\{x^n\}$은 무한등비수열이므로 공비 x의 범위를 1을 경계로 하여 나눈다.

(i) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로 $f(x)$의 분자, 분모를 x로 나누면

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{\log_{10}x}{x^n}+\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=a$$

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+2}{2}$

(iii) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$f(x)=\log_{10}x+2$

이상에서 각각의 함수는 모두 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여 $x=1$일 때만 연속이면 된다.

즉, $\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$이 성립해야 하므로

$$2=a=\frac{a+2}{2}$$

$\therefore a=2$

95. 답 $(-\infty,\ \infty)$

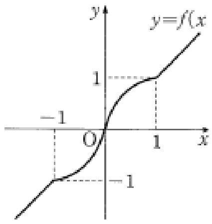
[해설]

(i) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}|x|=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{x^2-1}{x^n}sin\dfrac{\pi}{2}x}{1+\dfrac{x^2-1}{x^n}}=x$$

(ii) $|x|<1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$$



(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로

$$f(1)=\frac{1+0}{1+1-1}=1$$

(iv) $x=-1$일 때, n이 짝수일 때와 홀수일 때 모두 $f(-1)=-1$이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 연속인 구간은 $(-\infty,\ \infty)$이다.

96. 답 ③

[해설]

ㄱ. $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+(4x^2+3)\sin ax}{x^n+4x^2+3}$$

$$=\frac{(4x^2+3)\sin ax}{4x^2+3}=\sin ax \text{ (참)}$$

ㄴ. $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\dfrac{(4x^2+3)\sin ax}{x^n}}{1+\dfrac{4x^2+3}{x^n}}=x$$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}f(x)=\infty$ (참)

ㄷ. $x=1$일 때

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{n+1}+(4\times1^2+3)\sin a}{1^n+4\times1^2+3}=\frac{1+7\sin a}{8}$$

ㄴ에서 $\lim_{n\to1+0}f(x)=1$

$x=1$에서 함수 $f(x)$가 연속이려면 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$이어야 하므로

$\dfrac{1+7\sin a}{8}=1$에서 $\sin a=1$

$\therefore\ a=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (k는 정수) (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

97. 답 ④

[해설]

$f(x)$가 $x=1$에서 연속일 조건은

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$$

그런데 $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\dfrac{(a+b)^n-1}{(a+b)^n+1}$이므로

극한값 $\lim_{x\to1}\dfrac{(a+b)^n-1}{(a+b)^n+1}$이 존재해야 한다.

(i) $|a+b|>1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{(a+b)^n-1}{(a+b)^n+1}=\lim_{x\to1}\frac{1-\dfrac{1}{(a+b)^n}}{1+\dfrac{1}{(a+b)^n}}=1 \text{ (존재)}$$

(ii) $a+b=1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{(a+b)^n-1}{(a+b)^n+1}=0 \text{ (존재)}$$

(iii) $|a+|<1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{(a+b)^n-1}{(a+b)^n+1}=-1 \text{ (존재)}$$

(iv) $a+b=-1$일 때, 극한값이 존재하지 않는다.
따라서 $f(x)$가 $x=1$에서 불연속인 경우는 $a+b=-1$일 때이다.

98. 답 ③

[해설]

(i) $x=0$일 때, $f(0)=0$

(ii) $x\neq0$일 때,

무한등비급수의 첫째항은 x^m이고 공비는 $\dfrac{1}{1+x^2}$이다.

이 때, $0<\dfrac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$f(x)=\frac{x^m}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=x^{m-2}(1+x^2)$$

$x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$이어야 하므로 $(i),(ii)$ 에 의하여 $\lim_{x\to0}x^{m-2}(1+x^2)=0$ 이어야 한다.

따라서 $m-2>0$, 즉 $m>2$이다.
그러므로 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위한 자연수 m의 최솟값은 3 이다.

99. 답 ③

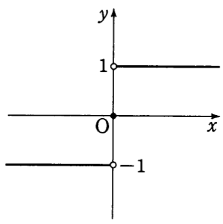
[해설]

$x=0$일 때, $f(0)=0+0+0+\cdots=0$

$x\neq0$일 때, $0<\dfrac{1}{1+|x|}<1$이므로

$$f(x)=\frac{\dfrac{x}{1+|x|}}{1-\dfrac{1}{1+|x|}}=\frac{x}{|x|}$$

$$=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$$



따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이고, $x=1$, $x=-1$에서는 연속이므로 보기 중 연속인 점은 ㄱ, ㄷ이다.

100. 답 ②

[해설]

(i) $x=0$ 일 때, $f(x)=0$

(ii) $x\neq0$일 때, $f(x)$는 첫째항이 x^{10}이고, 공비가 $\dfrac{1}{1+x^{2n}}$인

무한등비급수의 합이므로

$$f(x)=\frac{x^{10}}{1-\dfrac{1}{1+x^{2n}}}=\frac{x^{10}(1+x^{2n})}{x^{2n}}$$

함수가 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)=0$ 이어야 한다.

$1\le n\le 4$ 일 때, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}x^{10-2n}(1+x^{2n})=0$

$n=5$일 때, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(1+x^{2n})=1$

$n\ge 6$ 일 때, $\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1+x^{2n}}{x^{2n-10}}=$ (발산)

따라서, $f(x)$가 $x=0$에서 연속이기 위한 n의 값의 범위는 $1\le n\le 4$이므로 자연수 n의 최댓값은 4이다.

101. 답 ③

[해설]

주어진 함수의 공비가 $\frac{1-x^2}{1+x^2}$인 무한등비급수이다.

그런데 $x^2\ge 0$이므로

$x=0$일 때, $\frac{1-x^2}{1+x^2}=1$

$x\neq0$일 때, $-1<\frac{1-x^2}{1+x^2}<1\ (\because -1-x^2<1-x^2<1+x^2)$

(i) $x=0$일 때,

$f(0)=0+0+0+\cdots=0$

(ii) $x\neq0$ 일 때, $f(x)$는 수렴하므로

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}=\frac{x^2(1+x^2)}{(1+x^2)-(1-x^2)}=\frac{1+x^2}{2}$$

이 때, $\lim_{x\to0}1+\frac{x^2}{2}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이아니다.

따라서 주어진 조건에서 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$를 만족시키지 않는 a의 값은 0 뿐이다.

102. 답 ②

[해설]

ㄱ. $f(x)$는 폐구간 $[0,5]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$, $(f\circ f)(x)$는 모두 폐구간 $[0,5]$에서 연속이다. 따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,5]$에서 연속이다.

$\lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2=1^2=1$

$\lim_{x\to3+0}g(x)=\lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to1-0}f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to3-0}g(x)\neq\lim_{x\to3+0}g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,5]$에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 $[0,3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 폐구간 $[0,3]$에서 연속이다.

한편 함수 $f(x)$는 $x\neq4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq4$이고 $f(x)\neq4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to3+0}g(x)=\lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to2-0}f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore \lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3+0}g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to4-0}g(x)=\lim_{z\to4-0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to+0}f(t)=3$

$\lim_{x\to4+0}g(x)=\lim_{x\to4+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to1+0}f(t)=3$

$g(4)=f(f(4))=f(0)=3$

$\therefore \lim_{x\to4-0}g(x)=\lim_{x\to4+0}g(x)=g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0,5]$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 $[0,3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 폐구간 $[0,3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x\neq4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f\circ f)(x)$는 $x\neq4$이고 $f(x)\neq4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3-0}\{f(x)\}^2=2^2=4$

$\lim_{x\to3+0}g(x)=\lim_{x\to3+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to2-0}f(t)=4$

$g(3)=\{f(3)\}^2=2^2=4$

$\therefore \lim_{x\to3-0}g(x)=\lim_{x\to3+0}g(x)=g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x\to4-0}g(x)=\lim_{x\to4-0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to+0}f(x)=2$

$\lim_{x\to4+0}g(x)=\lim_{x\to4+0}(f\circ f)(x)=\lim_{t\to1+0}f(t)=3$

$\therefore \lim_{x\to4-0}g(x)\neq\lim_{x\to4+0}g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,5]$에서 연속이 아니다.

이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0,5]$에서 연속이 되도록 하는 함수$f(x)$의 그래프는 ㄴ뿐이다.

103. 답 ③

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to+0}g(f(x))=\lim_{t\to1-0}g(t)=1$

$\lim_{x\to-0}g(f(x))=\lim_{t\to-0}g(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to0}g(f(x))=1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to1+0}f(g(x))=\lim_{t\to-0}f(t)=0$ (거짓)

ㄷ. $x\to1-0$ 일 때, $g(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to 1-0} f(g(x)) = f(1) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(g(x)) = 0$ (∵ ㄴ)

$f(g(1)) = f(0) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(g(x)) = f(g(1))$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $x=1$에서 연속이다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

***104.* 답 ③**

[해설]

(i) $|x|>1$ 일 때, $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2}{\dfrac{1}{x^{2n}}+1} = 2$

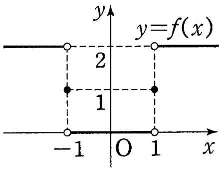
(ii) $|x|=1$ 일 때,

$f(x) = \dfrac{2}{1+1} = 1$

(iii) $|x|<1$ 일 때,

$f(x) = \dfrac{0}{1+0} = 0$

(i), (ii), (iii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=\pm1$에서 불연속이므로 합성함수 $g_i(f(x))$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=\pm1$에서 연속이어야 한다. 즉,

$\lim_{x\to 1+0} g_i(f(x)) = \lim_{x\to 1+0} g_i(2) = g_i(2)$

$\lim_{x\to 1-0} g_i(f(x)) = \lim_{x\to 1-0} g_i(0) = g_i(0)$

$g_i(f(1)) = g_i(1)$

즉, 함수 $g_i(f(x))$가 $x=1$에서 연속이려면

$g_i(0) = g_i(1) = g_i(2)$

마찬가지 방법으로 함수 $g_i(f(x))$가 $x=-1$에서 연속이려면

$g_i(0) = g_i(1) = g_i(2)$

따라서, 보기의 함수 중 $g_i(0) = g_i(1) = g_i(2)$를 만족하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

***105.* 답 ③**

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to +0} g(f(x)) = \lim_{t\to 1+0} g(t) = 0$

$\lim_{x\to -0} g(f(x)) = \lim_{t\to +0} g(t) = 0$

$g(f(0)) = g(0) = 0$

따라서, $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $F(x) = f(x) + f(-x)$로 놓으면

$\lim_{x\to +0} F(x) = \lim_{x\to +0} \{f(x)+f(-x)\}$

$= \lim_{x\to +0} f(x) + \lim_{t\to -0} f(t) = 1+0 = 1$

$\lim_{x\to -0} F(x) = \lim_{x\to -0} \{f(x)+f(-x)\}$

$= \lim_{x\to -0} f(x) + \lim_{t\to +0} f(t) = 0+1 = 1$

$F(0) = f(0) + f(0) = 0$

따라서, $F(x)$는 $x=0$에서 불연속 이다. (거짓)

ㄷ. n이 정수일 때, $\lim_{x\to -n+0} f(x-n) = \lim_{t\to +0} f(t) = 1$

$\lim_{x\to -n+0} g(n-x) = \lim_{t\to -0} g(t) = 1$

$\therefore \lim_{x\to n+0} f(x-n)g(n-x) = 1$

따라서, $\lim_{x\to n+0} f(x-n)g(n-x) = 0$인 정수 n의 값은 존재하지 않는다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

***106.* 답 ②**

[해설]

$y=f(x)$는 구간 $(-2, 0)$, $(0, 2)$에서 연속이고,

함수 $y=g_i(x)(i=1, 2, 3)$는 구간 $(-2, 2)$에서 연속이므로

함수 $y=(g_i\circ f)(x)$의 $x=0$에서의 연속성을 조사하면 된다.

ㄱ. (i) $x\to +0$일 때, $f(x)\to -1+0$ 이므로

$\lim_{x\to +0} (g_1\circ f)(x) = \lim_{x\to +0} g_1(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} g_1(t) = 1$

(ii) $x\to -0$일 때, $f(x)\to 1-0$이므로

$\lim_{x\to -0} (g_1\circ f)(x) = \lim_{x\to -0} g_1(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} g_1(t) = -1$

따라서, $y=(g_1\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. (i) $x\to +0$일 때, $f(x)\to -1+0$ 이므로

$\lim_{x\to +0} (g_2\circ f)(x) = \lim_{x\to +0} g_2(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} g_2(t) = 1$

(ii) $x\to -0$일 때, $f(x)\to 1-0$이므로

$\lim_{x\to -0} (g_2\circ f)(x) = \lim_{x\to -0} g_2(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} g_2(t) = 1$

(iii) $(g_2\circ f)(0) = g_2(f(0)) = g_2(0) = 0$

따라서, $y=(g_2\circ f)(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. (i) $x\to +0$일 때, $f(x)\to -1+0$ 이므로

$\lim_{x\to +0} (g_3\circ f)(x) = \lim_{x\to +0} g_3(f(x)) = \lim_{t\to -1+0} g_3(t) = 1$

(ii) $x\to -0$일 때, $f(x)\to 1-0$이므로

$\lim_{x\to -0} (g_3\circ f)(x) = \lim_{x\to -0} g_3(f(x)) = \lim_{t\to 1-0} g_3(t) = 1$

(iii) $(g_3\circ f)(0) = g_3(f(0)) = g_3(0) = 1$

따라서, $y=(g_3\circ f)(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

그러므로 $y=(g_i\circ f)(x)$가 구간 $(-2, 2)$에서 연속이 되는 함수 $g_i(x)$는 ㄷ뿐이다.

***107.* 답 ②**

[해설]

$g(x) = f(x-1)f(x+1)$로 놓으면

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} g(x) = 0$ 이지만 $\lim_{x\to 1-0} g(x) = 2f(2) \neq 0$, 즉 $x=1$에서 $g(x)$는 극한값이 존재하지 않으므로 불연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 1+0} g(x) = 0$이고 $\lim_{x\to 1-0} g(x) = 2\times f(2) = 0$이므로

$\lim_{x\to 1} g(x) = 0$

또, $g(1) = f(0)\times f(2) = 0$이므로 $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$이 되어

$x=1$에서 $g(x)$는 연속이다.

ㄷ.. $\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} f(x-1) \lim_{x\to 1} f(x1) = 2f(2) \neq 0$이고

$g(1)=f(0)\times f(2)=0$이므로 $\lim_{x\to 1}g(x)\neq g(1)$이 되어

$x=1$에서 $g(x)$는 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 연속인 함수의 그래프는 ㄴ이다.

108. 답 ④

[해설]

합성함수의 극한값은 함수를 합성한 후에 그 극한값을 구한다는 의미이므로 각각의 값이 존재하면 제일 안쪽의 값을 구한 후에 단계적으로 구한다.

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} f(g(x))=f(\lim_{x\to 1+0} g(x))=\lim_{x\to -2+0} f(x)=-1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to -1+0} g(f(x))=g(\lim_{x\to -1+0} f(x))=\lim_{x\to +0} g(x)=-\frac{7}{4}$ (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to\infty} g\left(f\left(-2+k-\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to -2+k-0} g(f(x))$와 같다.

$\therefore \lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{4} g\left(f\left(-2+k-\frac{1}{x}\right)\right)=\sum_{k=0}^{4}\lim_{x\to -2+k-0} g(f(x))$

$=\lim_{x\to -2-0} g(f(x))+\lim_{x\to -1-0} g(f(x))+\lim_{x\to -0} g(f(x))$

$\quad+\lim_{x\to 1-0} g(f(x))+\lim_{x\to 2-0} g(f(x))$

$=g(-2)+\lim_{x\to -0} g(x)+\lim_{x\to 1-0} g(x)+g(-2)+\lim_{x\to -0} g(x)$

$=2+\left(-\frac{7}{4}\right)+(-2)+2+\left(-\frac{7}{4}\right)$

$=-\frac{3}{2}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

109. 답 풀이 참조

[해설]

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$f(-1)=3>0, f(1)=-1<0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 $f(c)=0$인 구간이 $9-1,\ 1)$에 적어도 하나 존재한다. 즉, 방정식 $x^3-3x+1=0$은 구간 $(-1,1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

110. 답 ④

[해설]

$f(x)=3x^3-4x^2+5x-6$으로 놓으면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

$f(-2)=-24-16-10-6-56<0$

$f(-1)=-3-4-5-6=-18<0$

$f(0)=-6<0$

$f(1)=3-4+5-6=-2<0$

$f(2)=24-36+10-6=12>0$

$f(3)=81-36+15-6=54>0$

따라서 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(1,2)$에서 실근을 갖는다.

111. 답 ④

[해설]

$f(x)=x^4-x^3-x-2$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

$f(0)=-2<0$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}-2=-\frac{41}{16}<0$

$f(1)=1-1-1-2=-3<0$

$f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{81}{16}-\frac{27}{8}-\frac{3}{2}-2=-\frac{29}{16}<0$

$f(2)=16-8-2-2=4>0$

이므로 중간값의 정리에 의하여 방정식$f(x)=0$은 열린 구간 $\left(\frac{3}{2},2\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

112. 정답 ④

[해설]

$y=\sin x$와 $y=x$, $y=\cos x$가 모든 실수 전체에서 연속함수이므로 $f(x)=\sin x-x\cos x$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속이다.

$f(0)=0$

$f(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}(4-\pi)>0$

$f(\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}\times 0=1>0$

$f(\pi)=0-\pi\times(-1)\pi>0$

$f(\frac{3}{2}\pi)=-2\frac{3}{2}\pi\times 0=-1<0$

$f(2\pi)=0-2\pi\times 1=-2\pi<0$

따라서 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $\left(\pi,\frac{3}{2}\pi\right)$ 에서 실근을 갖는다.

113. 답 ②[

[해설]

$g(x)=f(x)-x$라 하면 $y=f(x)$와 $y=x$는 각각 연속함수이므로 $y=g(x)$도 연속함수이다.

또, $g(0)=f(0)-0=-1<0,$

$g(1)=f(1)-1=-3<0$

$g(2)=f(2)-2=1>0$

$g(3)=g(3)-3=-3<0$

에서 $g(1)g(2)<0, g(2)g(3)<0$ 이므로 중간값의 정리에 의하여 구간

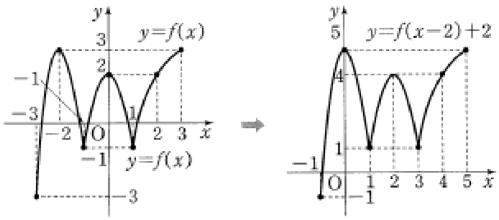
$(1,\ 2), (2,\ 3)$ 에 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. 따라서 구간 $(0,\ 3)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

114. 답 ①

[해설]

$y=f(x)$의 그래프를 추정하면 「그림1」과 같이 그릴 수 있다.

$y=f(x-2)+2$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 그 그래프는 「그림2」와 같다.

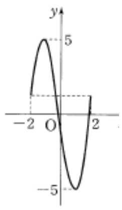


[그림 1] [그림 2]

「그림2」에서 방정식 $f(x-2)+2=0$의 실근의 구간은 $(-1,0)$에 적어도 하난 존재한다. 따라서 구하는 실근의 개수는 최솟값이 1 이다.

***115.* 답 ⑤**

[해설]



(나) $-2 \leqq x \leqq 2$에서 $f(x)=5$ 와 $f(x)=-5$를 만족하는 x가 각각 한 개씩 있으므로 5와 -5는 이 구간에서 각각 최댓값과 최솟값이고 이 구간에서 그래프의 개형의 예를 들면 오른쪽 그림과 같다.

① (가)에서 $f(x)$의 주기가 4이므로

$f(-5)=f(-1)=f(3)=f(7)=\cdots$

$\therefore f(-5) \neq f(5)$

② (가)에서 $f(x)$의 주기가 4이므로 $-10 \leqq x \leqq 10$에서 $f(x)$의 최댓값 과 최솟값은 각각 5, -5이다.

③, ④ 정의역의 구간의 길이는 20 이고 주기가 4 이므로 오른쪽 그래프의 개형은 5번 반복한다.

⑤ $-2 \leqq x \leqq 2$일 때, 중간값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$의 근은 적어도 2개 존재한다.

그러므로 $-10 \leqq x \leqq 10$에서 방정식 $f(x)=0$의 근은 적어도 10개 존재한다.

***116.* 답 ③**

[해설]

$F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$F(x)=\log_4 x+(k-3)x+8$

$\therefore\ F(1)=k-3+8=k+5$

$F(2)=\frac{1}{2}+2k-6+8=2k+\frac{5}{2}$

$y=\log_4 x$ 및 $y=(3-k)x-8$의 그래프에 의해서

$F(1)>0,\ F(2)<0$이므로

$k+5>0, 2k+\frac{5}{2}<0$

$\therefore\ \ -5<k<-\frac{5}{4}$

따라서 α의 최댓값은 -5, β의 최솟값은 $-\frac{5}{4}$이므로 α의 최댓값과 β의 최솟값의 차는

$-\frac{5}{4}-(-5)=\frac{15}{4}$

***117.* 답 ①**

[해설]

$F(x)=f(x)-2x$로 놓으면

$F(0)=\log_3 9a-2\times 0=\log_3 9a=2+\log_3 a$

$F(1)=\log_3\frac{a}{3}+4-2\times 1=\log_3\frac{a}{3}+2=\log_3 a+1$

$F(x)=0$은 근이 개구간 $(0,1)$에 존재하기 위해서는 $F(x)$가 감소함수이므로 $F(0)>0$이고 $F(1)<0$이어야 한다.

즉, $2+\log_3 a>0$이고 $\log_3 a+1<0$이므로

$-2<\log_3 a<-1$

$\therefore\ \frac{1}{9}<a<\frac{1}{3}$

1. 정답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

2. 정답 ③	3. 정답 ①	4. 정답 ④
5. 정답 ④	6. 정답 ①	7. 정답 ④
8. 정답 ④	9. 정답 ①	10. 정답 17
11. 정답 ③	12. 정답 ①	13. 정답 38
14. 정답 2	15. 정답 ①	16. 정답 ④
17. 정답 ⑤	18. 정답 ⑤	19. 정답 ⑤
20. 정답 $\frac{9}{2}$	21. 정답 ④	22. 정답 ①
23. 정답 ③	24. 정답 ⑤	25. 정답 ④
26. 정답 ④	27. 정답 ③	28. 정답 ②
29. 정답 ④	30. 정답 ⑤	31. 정답 ③

32. 정답 13

1. 정답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$

[해설]

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\sin2x}{\sin3x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin2x}{x}}{\frac{\sin3x}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin2x}{2x}\cdot2}{\frac{\sin3x}{3x}\cdot3}$

$=\frac{2}{3}$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x^2(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{(1+\cos x)}$

$=1\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}$

2. 정답 ③

분모, 분자에 $1+\cos x$를 곱하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x\sin x}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{2x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{2x\sin x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2(1+\cos x)}=1\cdot\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{4}$$

3. 정답 ①

[해설]

$\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2x+2\cos x-5}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(3\cos x+5)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos^2x-1)(3\cos x+5)}{x^2(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{3\cos x+5}{\cos x+1}\right\}$

$=-1\cdot\frac{8}{2}=-4$

다른 풀이

$\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2x+2\cos x-5}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{3(\cos^2x-1)}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{2(\cos x-1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{-3\sin^2x}{x^2}+\lim_{x\to0}\frac{2(\cos^2x-1)}{x^2(\cos x+1)}$

$=-3\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2+\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{-2}{\cos x+1}$

$=-3+1\cdot\frac{-2}{2}=-4$

4. 정답 ④

[해설]

(주어진 식)

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{3x^3+5x^2+4x}\cdot\frac{3x^3+5x^2+4x}{2x^3+2x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x^3+5x^2+4x)}{3x^3+5x^2+4x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3x^2+5x+4}{2x^2+2x+1}$

$=1\cdot4=4$

5. 정답 ④

[해설]

$\frac{\pi}{2}-x=\theta$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $\theta\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\frac{\pi}{2}-x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\theta}$

$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}$

$=1$

6. 정답 ①

[해설]

$x-\frac{\pi}{2}=\theta$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $\theta\to0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\tan x=\lim_{\theta\to0}\theta\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)$

$=-\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\tan\theta}$

$=-\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\frac{\tan\theta}{\theta}}$

$=-1$

7. 정답 ④

[해설]

$x-\frac{\pi}{2}=\theta$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $\theta\to0$이므로

(주어진 식)

$=\lim_{\theta\to0}(-2\theta)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\lim_{\theta\to0}(-2\theta)\cdot(-\cot\theta)$

$=2\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\tan\theta}=2$

8. 정답 ④

[해설]

$x-\frac{\pi}{2}=\theta$로 놓으면

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $\theta\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sec x-\tan x}{\frac{\pi}{2}-x}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sec\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)-\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}{-\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\mathrm{cosec}\theta+\cot\theta}{-\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1}{\theta\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\theta\sin\theta}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta\sin\theta(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

9. 정답 ①

[해설]

$x-\frac{\pi}{3}=\theta$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{3}$일 때, $\theta\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 3x}{1-\cos 2x}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(3\theta+\pi)}{1-2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin 3\theta}{1-\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-3\sin 3\theta}{2\cdot\frac{1-\cos\theta}{2}+\sqrt{3}\sin\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin 3\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sqrt{3}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\sin 3\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\frac{-\frac{\sin 3\theta}{3\theta}\cdot 3}{\frac{\sin\theta}{\frac{\theta}{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$=\frac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

10. 정답 17

[해설]

(주어진 식)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}\{\cos(5x+3x)+\cos(5x-3x)\}}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x+1-\cos 2x}{2x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{2x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{2x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 8x}{2x^2(1+\cos 8x)}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{2x^2(1+\cos 2x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 8x}{8x}\right)^2\cdot\frac{8^2}{2(1+\cos 8x)}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{2^2}{2(1+\cos 2x)}$$
$$=1\cdot\frac{8^2}{4}+1\cdot\frac{2^2}{4}$$
$$=16+1=17$$

11. 정답 ③

해설 $S(x)=\frac{\cos x}{1-\cos x}$ 이므로

$$\lim_{x\to 0}x^2S(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{1-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\cos x(1+\cos x)$$
$$=1\cdot 1\cdot(1+1)=2$$

12. 정답 ①

(i) $0\le x<1$일 때, $[x]=0$, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n\cdot 0+\cos 2\pi x}{x^n+1}=\cos 2\pi x$$
$$g(x)=\cos 2\pi x+2\sin\pi x=1-2\sin^2\pi x+2\sin\pi x$$
$$=-2\left(\sin\pi x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

이 때, $0\le\sin\pi x\le 1$이므로

$g(x)$의 최댓값은 $x=\frac{1}{6}$, $\frac{5}{6}$일 때, $\frac{3}{2}$, 최솟값은 $x=0$일 때 1이다.

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^n[1]+\cos 2\pi}{1^n+1}=1$

(iii) $1<x\le\frac{3}{2}$일 때, $[x]=1$, $\lim_{n\to\infty}x^n=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n+\cos 2\pi x}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^n}\cos 2\pi x}{1+\frac{1}{x^n}}=1$$

(ii), (iii)에서 $1\le x\le\frac{3}{2}$일 때,

$g(x)=1+2\sin\pi x$이고, $-1\le\sin\pi x\le 0$이므로

$g(x)$의 최댓값은 $x=1$일 때, 1, 최솟값은 $x=\frac{3}{2}$일 때 -1이다.

따라서 $g(x)$의 최댓값 $M=\frac{3}{2}$, 최솟값 $m=-1$이므로

$$M-m=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$$

13. 정답 38

[해설]

$$f(n)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}+2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}+\cdots+n\cdot\frac{\sin nx}{nx}}$$
$$=\frac{1}{1+2+\cdots+n}$$
$$=\frac{2}{n(n+1)}$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{25}f(n)=2\sum_{n=1}^{25}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{25}-\frac{1}{26}\right)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{26}\right)=\frac{25}{13}$$

$\therefore p+q=13+25=38$

14. 정답 2

[해설]

$S(\theta)=2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$라 하면

$\sin\frac{\theta}{2^n}S(\theta)$

$=2\sin\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^n}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdots\cos\frac{\theta}{2}$

$=\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdots\cos\frac{\theta}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-3}}\cdots\cos\frac{\theta}{2}$

$\vdots$

$=\frac{1}{2^{n-2}}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$

$=\frac{1}{2^{n-1}}\cdot\sin\theta$

따라서

$$S(\theta)=\frac{\frac{2}{2^n}\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{2\cdot\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}S(\theta)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}$$
$$=2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$

($\because n\to\infty$이면 $\frac{\theta}{2^n}\to 0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=1$)

$$\therefore \lim_{\theta\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}\left(2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cos\frac{\theta}{2^3}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}\left\{\lim_{n\to\infty}S(\theta)\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to 0}2\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=2$$

15. 정답 ①

$f(x)=ax+b$로 놓으면

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{ax+b}=\frac{1}{2}$이고 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(ax+b)=0$, 즉 $\frac{\pi}{2}a+b=0$에서 $b=-\frac{\pi}{2}a$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{f(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{ax-\frac{\pi}{2}a}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\frac{\pi}{2}$일 때, $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{a\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{at}=\lim_{t\to 0}\frac{-\sin t}{at}=-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2x+\pi$이므로 $f(\pi)=-2\pi+\pi=-\pi$

16. 정답 ④

[해설]

$x\to 0$일 때, (극한값)$\neq 0$이고 (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(a\cos^2 x+b)=a+b=0$

$\therefore b=-a$

따라서 주어진 식은

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(a\cos^2 x+b)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{a(\cos^2 x-1)}$$
$$=-\frac{1}{a}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}$$
$$=-\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$$

$\therefore a=-2,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=(-2)^2+2^2=8$

17. 정답 ⑤

[해설]

$x\to 0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 0}(1-4\cos x+a)=1-4+a=0$

$\therefore a=3$

따라서 주어진 식은

$$\lim_{x\to0}\frac{1-4\cos x+a}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{4(1-\cos x)}{x\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4(1-\cos^2x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2x}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{4}{1+\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{4}{2}=2$$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=5$

18. 정답 ⑤

[해설]

$x\neq0$이면 $f(x)=\dfrac{a-3\cos2x}{x^2}$

$x=0$에서 함수 $f(x)$가 연속이기 위해서는

$\lim\limits_{x\to0}f(x)$가 존재하고 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a-3\cos2x}{x^2}=f(0)$에서 $x\to0$일 때,

극한값이 존재하고 (분모)→0 이므로 (분자)→0이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}(a-3\cos2x)=a-3=0$에서

$a=3$

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}\frac{3(1-\cos2x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3\sin^22x}{x^2(1+\cos2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin2x}{2x}\right)^2\cdot\frac{12}{1+\cos2x}$$
$$=1\cdot\frac{12}{2}$$
$$=6$$

$\therefore a+f(0)=3+6=9$

19. 정답 ⑤

$$\lim_{x\to-0}\frac{\tan x}{x+\sin x}=\lim_{x\to-0}\frac{\frac{\tan x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}$$ 이므로

$f(x)$가 $x=0$에서 연속이려면 $f(0)=c=\dfrac{1}{2}$

또, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\sqrt{a+x}-b}{x}=\dfrac{1}{2}$ ······ ㉠

이어야 한다.

㉠에서 분모가 0에 수렴하므로 분자도 0에 수렴해야 한다.

$\therefore\ b=\sqrt{a}$

이것을 ㉠에 대입하여 극한값을 구하면

$$\lim_{x\to+0}\frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x(\sqrt{a+x}+\sqrt{a})}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{\sqrt{a+x}+\sqrt{a}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a=1,\ b=1$

$\therefore\ a+b+c=\dfrac{5}{2}$

20. 정답 $\dfrac{9}{2}$

[해설]

$x\to0$ (분모)→0 (분자)→0

즉, $\lim\limits_{x\to0}(3-a\cos x)=3-a=0$ $\therefore a=3$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{3-3\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{3(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3(1-\cos^2x)}{x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{3}{1+\cos x}$$
$$=1\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{2}=b$$

$\therefore a+b=\dfrac{9}{2}$

21. 정답 ④

[해설]

$\dfrac{3f(x)-4}{f(x)+2}=g(x)$로 놓으면 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$이고

$f(x)=\dfrac{2f(x)+4}{3-g(x)}$

$$\therefore\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{2g(x)+4}{3-g(x)}$$
$$=\frac{2\cdot2+4}{3-2}=8$$

22. 정답 ①

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x+2\sin x}\cdot\frac{x+2\sin x}{x-2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x+2\sin x}\cdot\frac{1+\frac{2\sin x}{x}}{1-\frac{2\sin x}{x}}$$
$$=4\times\frac{1+2}{1-2}=-12$$

23. 정답 ③

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$
$$=30\cdot1\cdot\frac{1}{2}=15$$

24. 정답 ⑤

해설) $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-2$ 이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=0$ 이고 $\lim_{x\to0}g(x)=0$이다.

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{\sin g(x)}=\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin f(x)}{f(x)}\cdot\frac{g(x)}{\sin g(x)}\cdot\frac{f(x)}{g(x)}\right]$$
$$=1\cdot1\cdot1=1$$

25. 정답 ④

[해설]

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\left(\frac{5}{x}-\sin\frac{3}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\left(5-x\sin\frac{3}{x}\right)$$

$g(x)=\frac{f(x)}{x}\left(5-x\sin\frac{3}{x}\right)$로 놓으면

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{g(x)}{5-x\sin\frac{3}{x}}$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면

$$\lim_{x\to\infty}\left(5-x\sin\frac{3}{x}\right)=\lim_{t\to0}\left(5-\frac{\sin3t}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0}\left(5-\frac{\sin3t}{3t}\cdot3\right)$$
$$=5-3=2$$

한편 $\lim_{x\to\infty}g(x)=6$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{\left(5-x\sin\frac{3}{x}\right)}=\frac{6}{2}=3$$

26. 정답 ④

[해설]

$\triangle POA$에서 $\angle OPA=\pi-3\theta$이고, 사인법칙을 적용하면

$$\frac{3}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{OP}}{\sin2\theta}$$
$$\therefore\ \overline{OP}=\frac{3\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

이 때, $a=\overline{OP}\cos\theta=\frac{3\sin2\theta}{\sin3\theta}\cdot\cos\theta$ 이므로

$$\lim_{\theta\to0}a=\lim_{\theta\to0}\frac{3\sin2\theta}{\sin3\theta}\cdot\cos\theta$$
$$=\lim_{\theta\to0}3\cdot\frac{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot2}{\frac{\sin3\theta}{3\theta}\cdot3}\cdot\cos\theta$$
$$=3\cdot\frac{2}{3}\cdot1=2$$

27. 정답 ③

[해설]

$\triangle OPQ$는 이등변삼각형이므로

$\angle OQP=\frac{3}{2}\theta$

$\therefore\ \angle OQR=\pi-\frac{3}{2}\theta,\ \angle ORQ=\frac{1}{2}\theta$

$\triangle OQR$에서 사인법칙을 적용하면

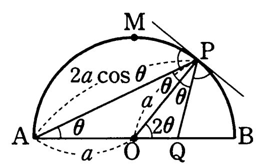
$$\frac{\overline{OR}}{\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\theta\right)}=\frac{\overline{OQ}}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$\overline{OQ}=1$이므로

$$\overline{OR}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{3}{2}\theta\right)}{\sin\frac{1}{2}\theta}=\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0}\overline{OR}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\sin\frac{1}{2}\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin\frac{3}{2}\theta}{\frac{3}{2}\theta}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{\sin\frac{1}{2}\theta}{\frac{1}{2}\theta}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$$

28. 정답 ②



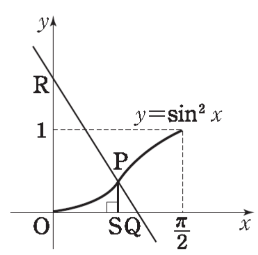
$\triangle APQ$에서 사인법칙을 적용하면

$$\frac{\overline{AQ}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{AP}}{\sin(\pi-3\theta)}$$
$$\therefore\overline{AQ}=\frac{\overline{AP}\sin2\theta}{\sin(\pi-3\theta)}$$
$$=\frac{2a\cos\theta\sin2\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore\lim_{P\to B}\overline{AQ}=\lim_{\theta\to0}2a\cos\theta\cdot\frac{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot2}{\frac{\sin3\theta}{3\theta}\cdot3}$$
$$=2a\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{3}a$$

29. 정답 ④

$\overline{OR}=r$라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle PQS$와 $\triangle RQO$는 서로 닮음이므로



$$\frac{r}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}-a}$$
$$\therefore\ r=\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-a}$$

$$\lim_{a\to+0}\frac{b}{a^2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin^2 a}{a^2}=\lim_{a\to+0}\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2=1$$

$$\lim_{a\to+0}\frac{b^2}{a^2}=\lim_{a\to+0}\frac{\sin^4 a}{a^2}=\lim_{a\to+0}\left\{\left(\frac{\sin a}{a}\right)^2\cdot\sin^2 a\right\}=1\cdot 0=0$$

$$\therefore \lim_{a\to+0} r=\lim_{a\to+0}\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}-a}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{b\sqrt{a^2+b^2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)}{(a^2+b^2)-a^2}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{(a^2+b^2)+a\sqrt{a^2+b^2}}{b}$$

$$=\lim_{a\to+0}\frac{1+\frac{b^2}{a^2}+\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}}{\frac{b}{a^2}}$$

$$=\frac{1+0+\sqrt{1+0}}{1}=2$$

따라서 점 P가 점 O에 한없이 가까워지면 점 R은 점 $(0,\ 2)$에 한없이 가까워진다.

$\therefore\ k=2$

30. 정답 ⑤

[해설]

$\triangle OAP$ 의 넓이를 $S_1(\theta)$라 하면

$$S_1(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}sin\theta$$

$\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 $\overline{OM}=\cos\theta$이므로 $\triangle OMP$의 넓이를 $S_2(\theta)$라 하면

$$S_2(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta$$

이 때, $\triangle APQ$의 넓이는

$$S(\theta)=2\{S_1(\theta)-S_2(\theta)\}$$
$$=2\cdot\frac{1}{2}sin\theta(1-\cos\theta)$$
$$=\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$\therefore\lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)}{\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{1+\cos\theta}$$
$$=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

31. 정답 ③

$\triangle$BAD와 $\triangle$EAD에서 호 BD와 호 DC의 길이가 같으므로

$$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{EAD}=\frac{\theta}{2}$$

또한, $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}$, $\overline{\mathrm{AD}}$는 공통이므로

$\triangle\mathrm{BAD}\equiv\triangle\mathrm{EAD}$ $\qquad\therefore\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DE}}$

한편, 호 BD와 호 DC의 길이가 같으므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

$\therefore\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{CD}}$

따라서 $\triangle\mathrm{DEF}\equiv\triangle\mathrm{DCF}$이므로 $\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{FC}}$

$\therefore\overline{\mathrm{EC}}=2\overline{\mathrm{CF}}$

이때, $\triangle$ADE와 $\triangle$CFD는 직각삼각형이고

$\overline{\mathrm{CD}}=\sin\frac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{CD}}\sin\frac{\theta}{2}$이므로

$\overline{\mathrm{EC}}=2\overline{\mathrm{CF}}=2\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$\therefore\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{\mathrm{EC}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}=2\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

32. 정답 13

$\overline{\mathrm{AC}}=x$ 라 하면 $\overline{\mathrm{CD}}=10-x$

제이코사인법칙에 의하여

$6^2=4^2+x^2-2\cdot4\cdot x\cos\theta$, $x^2-8x\cos\theta-20=0$

$x>0$ 이므로 $x=4\cos\theta+\sqrt{16\cos^2\theta+20}$

$\therefore\overline{\mathrm{CD}}=10-x=10-4\cos\theta-\sqrt{16\cos^2\theta+20}$

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0}\frac{10-4\cos\theta-\sqrt{16\cos^2\theta+20}}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(10-4\cos\theta)^2-(16\cos^2\theta+20)}{\theta^2(10-4\cos\theta+\sqrt{16\cos^2\theta+20})}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{80(1-\cos\theta)}{\theta^2(10-4\cos\theta+\sqrt{16\cos^2\theta+20})}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{80}{(10-4\cos\theta+\sqrt{16\cos^2\theta+20})}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}\cdot\frac{80}{(10-4\cos\theta+\sqrt{16\cos^2\theta+20})}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{80}{(10-4+\sqrt{16+20})}=\frac{10}{3}$$

$\therefore p+q=13$

1. 정답 (1) 1　(2) 0　(3) $-\infty$　(4) ∞
2. 정답 ①　3. 정답 ⑤　4. 정답 ②
5. 정답 (1) e　6. 정답 50　7. 정답 ①
8. 정답 ②　9. 정답 ①　10. 정답 ②
11. 정답 ②　12. 정답 (1) 3　(2) 2
13. 정답 ③　14. 정답 ④　15. 정답 ②
16. 정답 ①　17. 정답 ⑤　18. 정답 ④
19. 정답 ③　20. 정답 3　21. 정답 ④
22. 정답 ⑤　23. 정답 ⑤　24. 정답 ②
25. 정답 ③　26. 정답 ②　27. 정답 ②
28. 정답 3　29. 정답 ②　30. 정답 ④
31. 정답 ③　32. 정답 ④　33. 정답 ④
34. 정답 ②　35. 정답 ④　36. 정답 ③

1. 정답 (1) 1 **(2)** 0 **(3)** $-\infty$ **(4)** ∞

(1) $\lim_{x\to\infty}\frac{3^x+2^x}{3^x-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^x}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^x}=1$

(2) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(x+1)-\log_2 x\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{x+1}{x}=\log_2 1=0$

(3) $\lim_{x\to\infty}(2^x-3^x)=\lim_{x\to\infty}3^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}$

$=\infty\cdot(-1)=-\infty$

(4) $x\to+0$이면 $\frac{1}{x}\to\infty$이므로

$\lim_{x\to+0}\log_2\frac{1}{x}=\infty$

2. 정답 ①

$t=-x$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때, $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2t}$

$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right\}^{-2}=e^{-2}$

3. 정답 ⑤

ㄱ. $-x=t$라 하면

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

ㄴ. $-x=t$라 하면

$\lim_{x\to0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$

ㄷ. $x-1=t$라 하면

$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{t\to0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=e$

따라서 극한값이 e인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

4. 정답 ②

$\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$이므로

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right\}^2\left(1+\frac{2}{x-1}\right)=e^2$

$\therefore \lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\ln e^2=2$

5. 정답 (1) e

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{(x+1)\cdot\frac{x}{x+1}}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\right\}^{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=e$

6. 정답 50

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a+2a}{x-a}\right)^2$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^x$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right\}^{\frac{2ax}{x-a}}=e^{2a}$

따라서 $e^{2a}=e^{100}$에서 $2a=100$

$\therefore a=50$

7. 정답 ①

$x-2=t$라 하면

$x\to2$일 때, $t\to0$이므로

(주어진 식) $=\lim_{t\to0}\ln\left(\frac{t+2}{2}\right)^{-\frac{1}{t}}$

$=\lim_{t\to0}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{2}\right)^{\frac{2}{t}}\right\}^{-\frac{1}{2}}=\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$

8. 정답 ②

$1-\cos^2 x=\sin^2 x$이므로

(주어진 식) $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\ln(1+x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}}$

$=1^2\cdot\frac{1}{\ln e}=1\cdot\frac{1}{1}=1$

9. 정답 ①

(주어진 식) $=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)(1-2x)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-4x^2)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\ln(1-4x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

$=\lim_{x\to0}\ln\left\{(1-4x^2)^{\frac{1}{-4x}}\right\}^{-4}$

$=\ln e^{-4}=-4$

10. 정답 ②

$\log_a x = A$라 하면

$a > 1,\ x > 1$에서 $A > 0$

$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A^h - 1}{h} = \ln A = \ln(\log_a x)$

$\therefore f(x^2) - f(x) = \ln(2\log_a x) - \ln(\log_a x)$

$= \ln\frac{2\log_a x}{\log_a x} = \ln 2$

11. 정답 ②

$\log x = A$라 하면 $x > 1$, $x \neq 10$에서 $A > 0$, $A \neq 1$

$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{A^h - 1}{h} = \ln A = \ln(\log x)$

$\therefore f(x^x) - f(x) = \ln(x\log x) - \ln(\log x)$

$= \ln\left(\frac{x\log x}{\log x}\right) = \ln x$

$f(x^x) - f(x) = 2$ 에서 $\ln x = 2 \qquad \therefore x = e^2$

12. 정답 (1) 3 (2) 2

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot 3 = 3$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot 2$

$= 1\cdot 2 = 2$

13. 정답 ③

$S(x)$는 첫째항이 $\frac{\ln(1+2x)}{1+3x}$이고 공비가 $\frac{1}{1+3x}$인 무한등비급수의 합이다.

이때, $x > 0$이므로 $0 < \frac{1}{1+3x} < 1$이다.

$\therefore S(x) = \frac{\frac{\ln(1+2x)}{1+3x}}{1-\frac{1}{1+3x}} = \frac{\ln(1+2x)}{3x}$

$\therefore \lim_{x\to +0} S(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

14. 정답 ④

$f(n)$

$= \lim_{x\to 0}\frac{20x}{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\cdots+\ln(1+nx)}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{20}{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{x}+\cdots+\frac{\ln(1+nx)}{x}}$

$= \frac{20}{1+2+\cdots+n}$

$= \frac{40}{n(n+10)}$

$= 40\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(k) = 40\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= 40\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 40$

15. 정답 ②

(주어직 식)

$= \lim_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\cdots\times\frac{n+n+1}{n+n}\right\}^n$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$

$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$

$= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

16. 정답 ①

$f(n) = a\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} a\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^n$

$= a\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{0.06}{n}\right)^{\frac{n}{0.06}}\right\}^{0.06} = ae^{0.06}$

17. 정답 ⑤

$x\to a$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a}(3^x - 1) = 3^a - 1 = 0$에서 $a = 0$

$\lim_{x\to a}\frac{3^x-1}{2\sin(x-a)} = \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{2\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{3^x-1}{x}\cdot\frac{x}{2\sin x}\right) = \frac{1}{2}\ln 3$

$\therefore b = \frac{1}{2} \qquad \therefore a+b = \frac{1}{2}$

18. 정답 ④

$x \to 0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이다.

$\lim_{x\to 0}\ln(a+x) = \ln a = 0$

$\therefore a = 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x} = 1$

$\therefore b = 1$

$\therefore a+b = 1+1 = 2$

19. 정답 ③

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{\ln(1+2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{kx}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{kx}{2x}$

$= 1 \times 1 \times \frac{k}{2} = \frac{k}{2} = 3$

$\therefore k = 6$

20. 정답 3

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}+b}{\ln(1+x)} = 4$에서 $x \to 0$일 때, (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(e^{ax}+b) = e^0 + b = 1 + b = 0$

$\therefore b = -1$

(주어진 식) $= \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{\ln(1+x)}$

$= \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{e^{ax}-1}{ax} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot a \right\}$

$= 1 \times 1 \times a = a$

$\therefore a = 4$

$\therefore a + b = 4 + (-1) = 3$

21. 정답 ④

$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{\sin x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{2x}-1}{2x} \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot 2 = 2$

$\therefore f(0) = a = 2$

22. 답 ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이 되려면 $x=0$에서 연속이어야 하므로

$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{3^x - a\sin x + b}{x} = 0$ ...... ㉠

㉠에서 $x \to 0$일 때, 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$이므로 (분자) $\to 0$이어야한다.

즉, $\lim_{x \to 0}(3^x - a\sin x + b) = 0$에서 $3^0 + b = 0$ $\therefore b = -1$

따라서 ㉠에서 $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1 - a\sin x}{x} = \ln 3 - a = 0$ $\therefore a = \ln 3$

$\therefore a + b = \ln 3 - 1$

23. 정답 ⑤

$x=0$에서 연속이므로

$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(6x+1)^{\frac{1}{\sin 2x}}$

$= \lim_{x \to 0} \left\{ (1+6x)^{\frac{1}{6x}} \right\}^{\frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{6x}{2x}} = e^3$

$\therefore a = e^3$

24. 정답 ②

$f(0) = \lim_{x \to 0} \frac{3^{\sin x} + \ln a^x - 2}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{3^{\sin x} - 1 + x\ln a}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{x} + \ln a$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) + \ln a$

$= \ln 3 + \ln a$

$= \ln 3a$

$f(0) = 2$에서 $\ln 3a = 2$

$\therefore a = \frac{e^2}{3}$

25. 정답 ③

$f(x) \cdot \ln(1+\sin 3x) = 12x$에서 $\sin 3x \neq 0$일 때,

즉 $x \neq \frac{n\pi}{3}$ (단, n은 정수)일 때,

$f(x) = \frac{12x}{\ln(1+\sin 3x)}$이다.

연속함수 $f(x)$는 $x=0$에서도 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x)$

$\lim_{x \to 0} f(x) = 12 \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{\ln(1+\sin 3x)} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{1}{3} \right\}$

$= 12 \cdot \frac{1}{3} = 4$

26. 정답 ②

$x \neq 0$일 때, $f(x) = \frac{2x}{e^x + x - 1}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^x + x - 1}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\frac{e^x - 1}{x} + 1} = \frac{2}{2} = 1$

연속함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 1$

27. 정답 ②

$x \neq \pi$일 때, $f(x) = \frac{\ln \frac{x}{\pi}}{\sin x}$ 이고 $0 < x < 2\pi$에서 $f(x)$는 연속이므로 $x = \pi$에서 $f(x)$가 연속이어야 한다.

$\therefore f(\pi) = \lim_{x \to \pi} f(x) = \lim_{x \to \pi} \frac{\ln \frac{x}{\pi}}{\sin x}$

$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln \frac{t+\pi}{\pi}}{\sin(t+\pi)}$ (단, $t = x - \pi$)

$= \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{t}{\pi})}{-\sin t}$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{\pi}\right)}{-\sin\frac{t}{\pi}}\cdot\frac{t}{\sin t}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{t}{\pi}\right)}{\frac{t}{\pi}}\cdot\lim_{t\to0}\frac{t}{\sin t}$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cdot1\cdot1=-\frac{1}{\pi}$$

28. 정답 3

$\ln(1+x)^{f(x)}=e^{3x}-1$에서

$f(x)\ln(1+x)=e^{3x}-1$이므로

$x\neq0$일 때, $f(x)=\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)}$

한편, $f(x)$는 $x>-1$에서 연속함수이므로 $x=0$에서 연속이다.

$$\therefore f(0)=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}\cdot\frac{3x}{x}=3$$

29. 정답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2^x-1}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3^x-1}\cdot\frac{3^x-1}{2^x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{3^x-1}\cdot\frac{\frac{3^x-1}{x}}{\frac{2^x-1}{x}}$$

$$=2\cdot\frac{\ln3}{\ln2}=2\log_2 3$$

30. 정답 ④

$$\lim_{x\to0}f(x)\ln(1+2x)=\lim_{x\to0}\left\{xf(x)\cdot\frac{\ln(1+2x)}{x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}xf(x)\cdot\lim_{x\to0}\ln\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$$

$$=\lim_{x\to0}xf(x)\cdot\ln e^2$$

$$=2\lim_{x\to0}xf(x)=6$$

$$\therefore\lim_{x\to0}xf(x)=3$$

31. 정답 ③

$$\lim_{x\to\infty}f(x)\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot x\cdot\ln\left\{\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}\right\}^{\sin\frac{2}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot x\cdot\sin\frac{2}{x}\cdot\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}\cdot2\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}\cdot\ln\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{3}{2}\cdot2\cdot1\cdot\ln e=3$$

32. 정답 ④

$\mathrm{P}(t,\ e^{3t}-1)$이라 하면 $\mathrm{Q}(t,\ \sin t)$, $\mathrm{R}(t,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=e^{3t}-1-\sin t$, $\overline{\mathrm{QR}}=\sin t$

$$\lim_{t\to0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{QR}}}=\lim_{t\to0}\frac{e^{3t}-1-\sin t}{\sin t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{e^{3t}-1}{\sin t}-1$$

$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{e^{3t}-1}{3t}\cdot\frac{t}{\sin t}\cdot3\right\}-1=3-1=2$$

33. **정답 ④**

$P(t,\ 4\cdot3^t)$, $Q(t,\ 3\cdot4^t)$이므로

$\overline{PQ}=|3\cdot4^t-4\cdot3^t|$

$$\therefore\lim_{t\to1}\frac{\overline{PQ}}{|t-1|}=\lim_{t\to1}\left|\frac{3\cdot4^t-4\cdot3^t}{t-1}\right|$$

$t-1=x$로 치환하면 $t\to1$일 때 $x\to0$이므로

$$\lim_{t\to1}\frac{\overline{PQ}}{|t-1|}=\lim_{t\to1}\left|\frac{3\cdot4^t-4\cdot3^t}{x}\right|$$

$$=12\lim_{x\to0}\left|\frac{4^x-3^x}{x}\right|$$

$$=12\lim_{x\to0}\left|\frac{(4^x-1)-(3^x-1)}{x}\right|$$

$$=12\lim_{x\to0}|\ln4-\ln3|$$

$$=12\ln\frac{4}{3}$$

34. 정답 ②

$f(x)=nx^n(x-1)$에서

$f'(x)=n\{(n+1)x^n-nx^{n-1}\}$

$=n(n+1)x^{n-1}\left(x-\dfrac{n}{n-1}\right)$

x	0	…	$\frac{n}{n+1}$	…	1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	0	↘	극소	↗	0

따라서 $0\leqq x\leqq1$에서

$f(x)$는 $x=\dfrac{n}{n+1}$에서 극소이고 최소가 된다.

$$g(n)=f\left(\frac{n}{n+1}\right)=n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}-1\right)$$

$$=-\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=-\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}$$

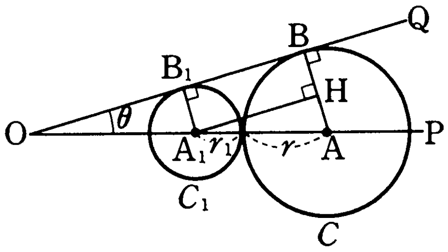
한편, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{\frac{n+1}{n}}=e$

이므로 $\lim_{n\to\infty}g(n)=-\frac{1}{e}$

35. 정답 ④

$\overline{AB}=r$, $\overline{A_1B_1}=r_1$이라 하고

A_1에서 $\overline{AB}$에서 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AA_1}=r+r_1$, $\overline{AH}=r-r_1$이고

$\angle AA_1H=\theta$이므로

$$\frac{r-r_1}{r+r_1}=\sin\theta$$

$$(r+r_1)\sin\theta=r-r_1$$

$r(1+\sin\theta)=r_1(1+\sin\theta)$

$\therefore \frac{r}{r_1}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

즉, $\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$이므로

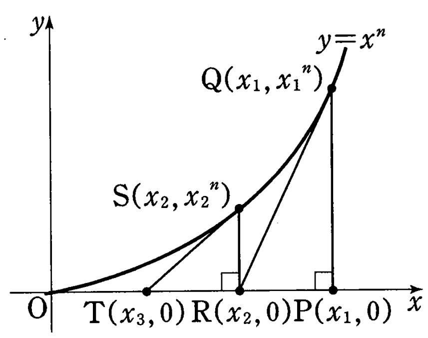
$$\therefore \lim_{\theta\to0}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{A_1B_1}}\right)^{\frac{1}{\theta}}=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(1+\frac{2\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\left(1+\frac{2\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)^{\frac{1-\sin\theta}{2\sin\theta}\times\frac{2\sin\theta}{1-\sin\theta}\times\frac{1}{\theta}}=e^2$$

36. 정답 ③

세 점 P, R, T의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3이라 하면 $Q(x_1, x_1^n)$, $S(x_2, x_2^n)$이므로



접선 QR의 기울기를 생각하면

$\frac{-x_1^n}{x_2-x_1}=nx_1^{n-1}$ $(\because y'=nx^{n-1})$

$\therefore x_2=\frac{n-1}{n}x_1$

같은 방법으로

$x_3=\frac{n-1}{n}x_2=\left(\frac{n-1}{n}\right)^2x_1$

$\triangle PQR=\frac{1}{2}(x_1-x_2)x_1^n$

$$=\frac{1}{2}\left(x_1-\frac{n-1}{n}x_1\right)x_1^n$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)x_1^{n+1}=\frac{1}{2n}x_1^{n+1}$$

$\triangle RST=\frac{1}{2}(x_2-x_3)x_2^n$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)x_1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2x_1\right\}\left(\frac{n-1}{n}\right)^nx_1^n$$

$$=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}x_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}x_1^{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\triangle PQR}{\triangle RST}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n+1}}$$

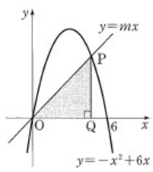
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right\}^{\frac{n+1}{n-1}}=e$$

1. 답 ⑤	2. 답 ⑤	3. 답 ⑤	4. 답 18
5. 답 ⑤	6. 답 ①	7. 답 ③	8. 답 17
9. 답 28	10. 답 ①	11. 답 24	12. 답 ④
13. 답 ②	14. 답 ②	15. 답 ①	16. 답 ④
17. 답 13	18. 답 ③	19. 답 ③	20. 답 ⑤
21. 답 ③	22. 답 ②	23. 답 ①	24. 답 ②
25. 답 ③	26. 답 45	27. 답 ①	28. 답 ①
29. 답 21	30. 답 ③	31. 답 ②	32. 답 ③
33. 답 ②	34. 답 ③	35. 답 ③	36. 답 ②
37. 답 7	38. 답 ①	39. 답 191	40. 답 ②
41. 답 201	42. 답 ②	43. 답 ⑤	44. 답 ④
45. 답 ⑤	45. 답 ⑤	47. 답 ⑤	48. 답 ②
49. 답 6	50. 답 ②	50. 답 ②	52. 답 ④
53. 답 ①	54. 답 ①	55. 답 ⑤	55. 답 ⑤
57. 답 ⑤	58. 답 ③	59. 답 ⑤	59. 답 ⑤
61. 답 ②	62. 답 50	63. 답 ②	64. 답 ⑤
65. 답 45	66. 답 ③	67. 답 ②	68. 답 ③
69. 답 ②	70. 답 ④	71. 답 ①	72. 답 ③
73. 답 ①	74. 답 ⑤	75. 답 ⑤	76. 답 ①
77. 답 ⑤	78. 답 ①	79. 답 ③	80. 답 ①
81. 답 ③	82. 답 $0 \le a \le 6$		83. 답 ③
84. 답 ②	85. 답 ②	86. 답 ③	87. 답 ②
88. 답 ②	89. 답 ③	90. 답 ①	91. 답 ①
92. 답 ②	93. 답 ④	94. 답 ④	95. 답 ③
96. 답 ②	97. 답 55	98. 답 ④	99. 답 16
99. 답 16	101. 답 ③	102. 답 ①	103. 답 155
104. 답 ④	105. 답 ③		

1.답 ⑤

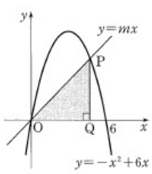
$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\frac{f(2-3h)-f(2)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(2+h)-f(2)}{h}-\frac{f(2-3h)-f(2)}{-3h}\times(-3)\right\}$$
$$=f'(2)+3f'(2)=4f'(2)$$



$f'(x)=(2x+5)(x-2)+(x^2+5x+1)\times1$에서

$f'(2)=0+(4+10+1)=15$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-3h)}{h}=4f'(2)=4\times15=60$$



2. 답 ⑤

$\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{3}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\{f(1+2h)-f(1-3h)\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times(-3)$$
$$=2f'(1)+3f'(1)=5f'(1)$$

$f(x)=3x^2+4x-2$에서 $f'(x)=6x+4$이므로

(주어진 식)$=5f'(1)=50$

3. 답 ⑤

[해설]

$$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)+2(x^2-1)+3(x^3-1)+\cdots+10(x^{10}-1)}{11(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})-(1+2+3+\cdots+10)}{11(x-1)}$$

$f(x)=x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10}$으로 놓으면

$f(1)=1+2+3+\cdots+10$이므로

(주어진 식)$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{11(x-1)}=\frac{1}{11}f'(1)$

$f'(x)=1+2^2x+3^2x^2+\cdots+10^2x^9$이므로

$$f(1)=1+2^2+3^2+\cdots+10^2=\frac{10\times11\times12}{6}=385$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{11}f'(1)=\frac{1}{11}385=35$$

4. 답 18

[해설]

$\frac{3}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때, $h\to0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{3}{n}\right)-f(0)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{h}\{f(h)-f(0)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3\left\{\frac{f(h)-f(0)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}3f'(0)=18$$

5. 답 ⑤

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)$$
$$=3f'(1)=3$$

$$\lim_{h\to0}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=\lim_{h\to0}\frac{x+1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$
$$=\frac{2}{f'(1)}=2$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x^3)-f(1)}{x-2}+\lim_{h\to0}\frac{x^2-1}{f(x)-f(1)}=3+2=5$$

6. 답 ①

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$에서

$$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

$g(x)=x+x^2+x^3+\cdots+nx^{n-1}$에서

$$g'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}$$

$\therefore f'(1)=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore g'(1)=1+2+3+\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f'(1)-g'(1)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

7. 답 ③

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x-1}$ 은 함수 $y=f(x)g(x)$ 의

$x=1$ 에서의 미분계수이다.

$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ $\cdots$ ①

이고, $g'(x)=2x+1$ 이므로

①에 $x=1$ 을 대입하면

$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2\cdot2+1\cdot3=7$

8. 답 17

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-2}=3$에서 $\displaystyle\lim_{x\to2}(x-2)=0$이므로

$$\lim_{x\to2}\{f(x)-1\}=0$$

그런데 $f(x)$는 다항함수이므로 실수전체에서 연속이다.

$\therefore f(2)=1$ ...... ㉠

이 때,

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-1}=f'(2)=3 \quad\cdots\cdots ㉡$$

마찬가지로

$g(2)=4,\ g'(2)=5$ ...... ㉢

$F(x)=f(x)g(x)$

$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$에서

$F'(2)=f'(2)g(2)+f(2)g'(2)$

이므로 여기에 ㉠, ㉡, ㉢을 대입하면

$F'(2)=3\times4+1\times5=17$

9. 답 28

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{f(x+1)-8}{x^2-4}=5$ 에서 $x\to2$ 일 때 (분모) $\to0$ 이므로

(분자) $\to0$ 이어야 한다.

즉, $\displaystyle\lim_{x\to2}\{f(x+1)-8\}=0$ 이어야 하므로 $f(3)=8$

$x+1=t$ 로 놓으면

$$\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t^2-2t-3}=\lim_{t\to3}\frac{f(t)-f(3)}{t-3}\times\lim_{t\to3}\frac{1}{t+1}$$

$=\dfrac{1}{4}f'(3)=5$

따라서, $f'(3)=20$ 에서 $f(3)+f'(3)=28$

10. 답 ①

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}=\lim_{x\to-2}\frac{\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}(x-2)}{\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$$

$x^2=t$로 놓으면 $x\to-2$일 때, $t\to4$이므로

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}=\lim_{t\to4}\frac{f(t)-f(4)}{t-4}=f'(4)$$

또, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다

$f'(-x)=\displaystyle\lim_{t\to-x}\frac{f(t)-f(-x)}{t-(-x)}$에서 $t=-s$로 놓으면

$t\to-x$ 일 때, $s\to x$ 이고 $f(-x)=f(x)$이므로

$$\lim_{t\to-x}\frac{f(t)-f(-x)}{t-(-x)}=\lim_{s\to x}\frac{f(-s)-f(-x)}{-s-(-x)}$$

$$=-\lim_{s\to x}\frac{f(s)-f(x)}{s+(-x)}=-f'(x)$$

즉, $f'(-x)=-f'(x)$이므로 $f'(-2)=-f'(2)=3$

$$\therefore (\text{주어진 식})=\frac{\lim_{x\to-2}\frac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\lim_{x\to-2}(x-2)}{\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$$

$$=\frac{f'(4)(-4)}{f'(-2)}=\frac{f'(4)(-4)}{-f'(2)}=\frac{6(-4)}{3}=-8$$

11. 답 24

$F(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$F(0)=f(0)g(0)=4$ 이므로 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=F'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$

$$=(-6)\cdot4+1\cdot g'(0)=-24+g'(0)=0$$

$\therefore\ g'(0)=24$

12. 답 ④

함수 $f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$f(-x)=-f(x)$

$f'(-4)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(-4+h)-f(-4)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{-f(4-h)+f(4)}{h}$

$=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(4-h)-f(4)}{-h}$

$=f'(4)$

$=5$

$$\lim_{x\to4}\frac{f(x^2)-f(16)}{f(x)-f(4)}=\lim_{x\to4}\frac{\frac{f(x^2)-f(16)}{x-4}}{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}}$$

$$=\lim_{x\to4}\frac{\frac{f(x^2)-f(16)}{x^2-16}\cdot(x+4)}{\frac{f(x)-f(4)}{x-4}}$$

$$=\frac{f'(16)\cdot8}{f'(4)}=8$$

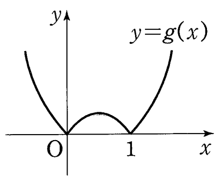
$\therefore\ f'(-4)+\lim_{x\to4}\frac{f(x^2)-f(16)}{f(x)-f(4)}=5+8=13$

13. 답 ②

$$\lim_{x\to2}\frac{2f(x)-xf(2)}{2g(x)-xg(2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\{f(x)-f(2)\}-(x-2)f(2)}{2\{g(x)-g(2)\}-(x-2)g(2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{2\cdot\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-f(2)}{2\cdot\frac{g(x)-g(2)}{x-2}-g(2)}$$
$$=\frac{2f'(2)-f(2)}{2g'(2)-g(2)}=\frac{2\cdot4-4}{2\cdot2-2}=2$$

14. 답 ②

$y=g(x)=|x^2-x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다



ㄱ. $\lim_{h\to-0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h^2-h}{h}$

$=\lim_{h\to-0}(h-1)=-1$

$\lim_{h\to+0}\frac{g(h)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{-h^2+h}{h}$

$=\lim_{h\to+0}(-h+1)=1$

이므로 $\lim_{h\to0}\frac{g(h)}{h}$가 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. $h^2=k$로 놓으면 $h\to0$일 때, $k\to+0$ 이므로

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h^2)-g(1)}{h^2}=\lim_{k\to+0}\frac{g(1+k)-g(1)}{k}$

$=\lim_{k\to+0}\frac{f(1+k)-f(1)}{k}=f'(1)$ (참)

ㄷ. $0\le x\le1$일 때, $g(x)=-f(x)$

$x\le0$ 또는 $x\ge1$일 때, $g(x)=f(x)$,

$g(1)=f(1)=0$이므로

$\lim_{h\to+0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to+0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)-f'(1)=0$

$\lim_{h\to-0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=-\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to-0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=-f'(1)+f'(1)=0$

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}=0$ (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ 뿐이다

15. 답 ①

$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x^3)-f(8)}{x-2}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x^3)-f(8)}{(x-2)(x^2+2x+4)}\times(x^2+2x+4)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x^3)-f(8)}{x^3-8}\times(x^2+2x+4)$$
$$=12f'(8)$$

그런데 $f'(x)=2x+a$에서 $f'(8)=16+a$이므로

$12(16+a)=144$

$\therefore a=-4$

16. 답 ④

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+kh)-f(1)}{kh}k=kf'(1)$

$f(x)=2x^3-3x+1$에서 $f'(x)=6x^2-3$이므로

$kf'(1)=3k=24$

$\therefore k=8$

17. 답 13

$f(x)=x^n+x^2-2$로 놓으면 $f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{x^n+x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

그런데 $f'(x)=nx^{n-1}+2x$이므로

$f'(1)=n+2=15$

$\therefore n=13$

18. 답 ③

$f'(x)=3ax^2+2bx$이므로

$f'(2)=pf(-1)+qf(1)$에서

$12a+4b=p(-a+b)+q(a+b)$

$(-p+q-12)a+(p+q-4)b=0$

모든 실수 a,b 에 대하여 성립하므로

$-p+q-12=0,\ p+q-4=0$

두 식을 연립하여 풀면

$p-4,\ q=8$

$\therefore 2p+q=0$

19. 답 ③

$f(x)f'(x)-f(x)-f'(x)+1=2x^3+2x^2$ 에서

$\{f(x)-1\}\{f'(x)-1\}=2x(x^2+x)=x^2(2x+2)$

$f(x)-1$ 은 이차식, $f'(x)-1$ 은 일차식이고, $f'(x)-1$ 의 일차항의 계수는 $f(x)-1$ 의 이차항의 계수의 2 배이다.

(i) $f(x)-1=x^2+x,\ f'(x)-1=2x$ 인 경우

$f(x)=x^2+x+1$ 에서 $f'(x)=2x+1$ 이므로

$f'(x)-1=2x$

(ii) $f(x)-1=x^2,\ f'(x)-1=2x+2$ 인 경우

$f(x)=x^2+1$ 에서 $f'(x)=2x$ 이므로

$f'(x)-1=2x-1$ 이 되어 모순이다.

(i),(ii)에서 $f(x)=x^2+x+1$

$\therefore\ f(1)=3$

20. 답 ⑤

$f(x)=3$에서 $f'(x)=0$

$h'(x)=f'(x)+g'(x)=0+g'(x)$이므로

$h'(1)=g'(1)=10$

$i'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=0+f(x)g'(x)$

$\therefore i'(1)=f(1)g'(1)=3\times10=30$

21. 답 ③

ㄱ. 주어진 식에 $x=y=0$ 을 대입하면

$f(0+0)=f(0)+f(0)\quad \therefore\ f(0)=0$ (참)

ㄴ. $f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0)+f(h)-f(0)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}=1$ 이므로

$f'(1)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}+1\right\}=2$ (거짓)

ㄷ. $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+xh-f(x)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\left\{\dfrac{f(h)}{h}+x\right\}=x+1$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다.

22. 답 ②

$f(g(x)+x)=\{a-(g(x)+x)^2\}\{b-(g(x)+x)\}+1$

에서 $g(x)+x=t$ 로 놓으면

$f(t)=(a-t^2)(b-t)+1$

$f'(t)=-2t(b-t)+(a-t^2)(-1)$ 이므로

$f'(0)=-a=1$ 에서 $a=-1$

$f'(-1)=-2(b-1)+(a-1)(-1)$

$=-2b+2-a+1=2$

$\therefore a+2b=1\quad\cdots$ ②

①에서 $a=-1$ 이므로 ②에서 $b=1$

$\therefore\ a+b=0$

23. 답 ①

$(x^2-4)f(x)=g(x)-2$에서 $x\neq\pm2$ 일 때

$f(x)=\dfrac{g(x)-2}{x^2-4}$

$f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-2}{x^2-4}=f(2)\quad\cdots$ ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때, (분모)$\to0$, (분자)$\to0$이어야 한다

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{g(x)-2\}=0$에서 $g(2)=2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-2}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{1}{4}g'(2)=\dfrac{1}{4}4=1$

㉠에서 $f(2)=1$

$\therefore f(2)+g(2)=1+2=3$

24. 답 ②

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로 모든 실수에서 연속이다. 따라서 $f(x)$는 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2-0}(-2x^2+7x+6)=\lim\limits_{x\to2+0}(2x^2+ax)$이므로

$10+b=8+2a$

$\therefore b=2a-2\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편, $f'(x)=\begin{cases}4x+a & (x>2)\\ -2x+7 & (x<2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로 $x=2$에서도 미분가능하다.

즉, $\lim\limits_{x\to2-0}(-2x+7)=\lim\limits_{x\to2+0}(4x+a)$이므로

$3=8+a$

$\therefore a=-5$

이것을 ㉠ 에 대입하면 $b=-12$

$\therefore a+b=-17$

25. 답 ③

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=f(1)$

즉, $\lim\limits_{x\to1-0}(x^3-4x)=\lim\limits_{x\to1+0}(ax^2+bx)=a+b$이므로

$-3=a+b\quad\cdots$ ㉠

$f'(x)=\begin{cases}3x^2-4 & (x<1)\\ 2ax+b & (x>1)\end{cases}$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로

$f'(1)=-1=2a+b\quad\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ b=-5$

$\therefore\ a-b=2-(-5)=7$

26. 답 45

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$

$\therefore a+b=3\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $f'(x)=\begin{cases}6x & (x>1)\\ a & (x<1)\end{cases}$이고

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-0}f'(x)=\lim\limits_{x\to1+0}f'(x)$

$\therefore a=6$

㉠에서 $b=-3$

$\therefore a^2+b^2=36+9=45$

27. 답 ①

(i) $|x|>1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$ 이므로

$$f(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\frac{a}{x^{n-2}}+\frac{b}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x$$

(ii) $|x|<1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=0$ 이므로

$f(x)=ax^2+b$

(iii) $x=1$ 일 때, $f(1)=\frac{a+b+1}{2}$

$x=1$ 에서 연속이므로 (i),(ii),(iii)에서 $\frac{a+b+1}{2}=1=a+b$

$\therefore\ a+b=1 \quad \cdots$ ①

$f'(x)=\begin{cases}1 & (|x|>1)\\ 2ax & (|x|<1)\end{cases}$ 이므로

$x=1$ 에서 미분가능하려면 $2a=1 \quad \cdots$ ②

①,②에서 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ ab=\frac{1}{4}$

28. 답 ①

$$f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{n+1}+ax^2+b}{x^n+1}=\begin{cases}2x & (x>1)\\ \frac{2+a+b}{2} & (x=1)\\ ax^2+b & (0<x<1)\end{cases}\quad \text{이므로}$$

$f'(x)=\begin{cases}2 & (x>1)\\ 2ax & (0<x<1)\end{cases}$

(i) $x=1$에서 연속이어야 하므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$\therefore \frac{2+a+b}{2}=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=1$에서 미분가능하려면 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1-0}f'(x)=\lim_{x\to1+0}f'(x)$

$\therefore 2a=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠,㉡에서 $a=1,\ b=1$

$\therefore a-b=0$

29. 답 21

(i) $0<x<1$일 때, $f(x)=2x-1$

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+1}{2}$

(iii) $x>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^b+\frac{2}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=ax^b$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

즉, $1=\frac{a+1}{2}=a \quad \therefore a=1$

30. 답 ③

ㄱ. $x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=f(1)$

즉, $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다 (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=\begin{cases}x-1 & (x\le1)\\ -(x-1) & (x<1)\end{cases}$,

$g(x)=\begin{cases}(x-1)^2 & (x\ge1)\\ -(x-1)^2 & (x<1)\end{cases}$ 이면

$g'(x)=\begin{cases}2(x-1) & (x\ge1)\\ -2(x-1) & (x<1)\end{cases}$ 이므로 $g(x)$는 미분가능한 함수이고,

$f(1)=g'(1)=0$이다

그러나, $f'(x)=\begin{cases}1 & (x>1)\\ -1 & (x<1)\end{cases}$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다 (거짓)

ㄷ. $f(x)$가 다항함수이면 모든 실수에서 미분가능하므로

$(x-1)f(x)=g(x)-g(1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x)=g'(x)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)-f'(0)=g'(0)$

$\therefore f'(0)+g'(0)=f(0)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ,ㄷ이다

31. 답 ②

ㄱ. $f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+|x|-0}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x^3+|x|}{x}$

에서 $\lim_{x\to+0}\frac{x^3+|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x^3+x}{x}=\lim_{x\to+0}(x^2+1)=1$

$\lim_{x\to-0}\frac{x^3+|x|}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{x^3-x}{x}=\lim_{x\to-0}(x^2-1)=-1$

이므로 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)=x^{2009}[x]$

$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x^{2009}[x]}{x}=\lim_{x\to0}x^{2009}[x]$ 이고

$\lim_{x\to+0}x^{2008}[x]=0,\ \lim_{x\to-0}x^{2008}[x]=0$

이므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄷ. $h'(0)=\lim_{x\to0}\frac{h(x)-h(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{x}-0}{x-0}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$

$x\to0$ 일 때, $\cos\frac{1}{x}$ 의 값은 진동하므로 $h'(0)$은 존재하지 않는다.

즉, $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서, $x=0$ 에서 미분가능한 것은 ㄴ이다.

32. 답 ③

ㄱ. $f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h|h|}{h}$

$$=\lim_{h\to0}|h|=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다

ㄴ. $g'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h[h]}{h}=\lim_{h\to0}[h]$

이때, $\lim_{h\to+0}[h]=0$, $\lim_{h\to-0}[h]=-1$ 이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다

ㄷ. $p'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{p(0+h)-p(0)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{h^2(|h|+1)}{h}$

$$=\lim_{h\to0}h(|h|+1)=0$$

이므로 $p(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다

따라서 보기 중 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ,ㄷ이다

33. 답 ②

ㄱ. $\lim_{x\to+0}[x+0.5]=0$, $\lim_{x\to-0}[x+0.5]=0$ 이고,

$f'(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{[h+0.5]-0}{h}=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{[h+0.5]-0}{h}=0$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to0}|x|=0$이고 $g(0)=0$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to+0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{g(h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h|-0}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to0}x|x|=0$이고, $p(0)=0$이므로 $p(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to+0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h|h|-0}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to+0}h=0$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{p(h)-p(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{h|h|-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to+0}\frac{-h^2}{h}=\lim_{h\to-0}-h=0$$

이므로 $p(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 것은 ㄴ이다.

34. 답 ③

ㄱ. $f(1)=0$ 이므로

$$\lim_{x\to1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-0}(x+1)=2$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{\frac{2}{3}(x^3-1)}{x-1}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to1+0}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to1+0}(x^2+x+1)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot3=2$$

$$\therefore\ f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=2$$

따라서, $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.(참)

ㄴ. $|f(x)|=\begin{cases}1-x & (x<0)\\ 1-x^2 & (0\leq x<1)\\ \frac{2}{3}(x^3-1) & (x\geq1)\end{cases}$

$$\lim_{x\to-0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to-0}\frac{(1-x)-1}{x}=-1$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to+0}\frac{(1-x^2)-1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to-0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}\neq\lim_{x\to+0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}$$

따라서, $|f(x)|$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.(거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-0}\dfrac{x^k(1-x)}{x}=\lim_{x\to-0}\dfrac{x^{k-1}(1-x)}{x}$ … ①

$\lim_{x\to+0}\dfrac{x^k(x^2-1)}{x}=\lim_{x\to+0}\dfrac{x^{k-1}(x^2-1)}{x}$ … ②

$k=1$ 일 때, ①$=1$, ②$=-1$

$k\geq2$ 일 때, ①$=$②$=0$

따라서, $x^kf(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k 는 2 이다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

35. 답 ③

ㄱ. 사차함수 $f(x)$에 대하여 주기가 2인 주기함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 필요충분조건은 $f(1)=f(-1)$, $f'(1)=f'(-1)$ (참)

ㄴ. $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$f(1)=1+a+b+c+d$, $f(-1)=1-a+b-c+d$

$f(1)=f(-1)$이므로 $a+c=0$ $\quad\therefore c=-a$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ 이고

$f'(1)=4+3a+2b+c$, $f'(-1)=-4+3a-2b+c$

$f'(1)=f'(-1)$이므로 $8+4b=0$ $\quad\therefore b=-2$

즉, $f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+d$이고

$f'(x)=4x^3+3ax^2-4x-a$이다

$f'(0)=-a$, $f'(1)=4+3a-4-a=2a$이므로

$f'(0)f'(1)=2a^2\leq0$ (거짓)

ㄷ. $f'(-1)=f'(1)=2a$이고

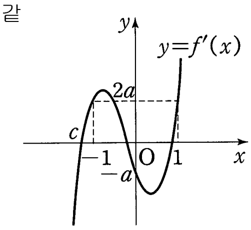
$f'(1)>0$이면 $a>0$

$f'(0)=-a<0$이므로

$y=f'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

구간 $(-\infty,-1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다. (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다



36. 답 ②

$f(x)$ 는 $x=3$, $x=4$ 에서 각각 불연속이므로 미분가능하지 않다. 또

한,

$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}>0,\ \lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}<0$

이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

$\therefore\ m=3$

$f'(x)=0$ 을 만족하는 x 의 값은 $-1<x<1$ 에서 오직 한 개 존재하므로 $n=1$

$\therefore\ m+n=3+1=4$

37. 답 7

$A=\left\{a\,|\,\lim_{x\to a}f(x)=f(a)\right\}$ 를 만족하는 a 는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 연속인 점들이고,

$B=\left\{a\,|\,\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right\}$ 를 만족하는 a 는 $y=f(x)$ 의 그래프에서 미분가능한 점들이다.

그러므로 $A^c\cap B^c$ 의 원소는 미분가능하지 않고, 즉 미분계수가 존재하지 않으면서 연속하지도 않은 점들이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $x=3$ 또는 $x=4$ 일 때이다.

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=4$

따라서, $A^c\cap B^c$ 의 모든 원소의 합은 $3+4=7$ 이다.

38. 답 ①

$f(x)$를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $q(x)$, 나머지를 $mx+n$이라 하면

$f(x)=(x-a)^2q(x)+mx+n$ …… ㉠

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-a)q(x)+(x-a)^2q'(x)+m$ …… ㉡

㉠에서 $f(a)=am+n$

$\therefore n=f(a)-m$

㉡에서 $m=f'(a)$

따라서 구하는 나머지는

$mx+n=f'(a)x+f(a)-af'(a)$

39. 답 191

$f(1)=f(2)=f(3)=k$ (k는 상수) 라 하면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)9x-3)+k$

로 놓을 수 있다.

$\therefore f'(x)=(x-2)(x-3)+(x-1)(x-3)++(x-1)(x-2)$

$f'(1)=56+63+72=191$

40. 답 ②

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=(1-1)^2Q(1)+a+b$

$\therefore a+b=2$

㉠의 양변에 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$x=1$을 대입하면

$f'(1)=2(1-1)Q(1)+(1-1)^2Q'(1)+a$

$\therefore a=f'(1)=-2,\ b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+4$이다.

41. 답 201

몫을 $Q(x)$라 하면

` $x^{200}-200x^2+px-q=(x-1)^2Q(x)$ …… ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$1-200+p-q=0$ …… ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$200x^{199}-400x+p=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

이 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$200-400+p=0$

$\therefore p=100$

㉡ 에 $p=200$을 대입하면 $q=1$

$\therefore p+q=201$

42. 답 ②

구간 $[\alpha,\ \beta]$에서의 평균변화율이 D이므로

$$D=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{(\beta^2+a\beta+b)-(\alpha^2+a\alpha+b)}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{(\beta^2-\alpha^2)+a(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$
$$=\frac{(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+a)}{\beta-\alpha}$$
$$=\alpha+\beta+a$$

한편, $f'(x)=2x+a$이므로

$$M=\frac{f'(\alpha)+f'(\beta)}{2}$$
$$=\frac{(2\alpha+a)+(2\beta+a)}{2}=\alpha+\beta+a$$

$\therefore D=M$

43. 답 ⑤

x 가 1 에서 3 까지 변할 때의 $f(x)=x^2+1$ 의 평균변화율은

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{3^2+1-(1^2+1)}{2}=4$

$f(x)=x^2+1$ 에서 $f'(x)=2x$ 이므로 $f'(2k)=4k$

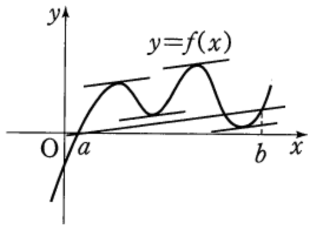
따라서, $4k=4$ 에서 $k=1$

44. 답 ④

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$ 를 잇는 직선의 기울기이고

$f'(c)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 $x=c$ 인 점에서의 접선의 기울기이다.

따라서, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 와 같은 기울기를 갖는 접선은 다음 그림과 같이 4 개 있다.



45. 답 ⑤

ㄱ. 두 점 $A(a,a), B(b,b)$에 대하여 점 B에서의 접선의 기울기가 선분 AB의 기울기보다 크므로

$f'(b) > \dfrac{b-a}{b-a} = 1$ (참)

ㄴ. $0 < a < b$이고, 그래프에서 $0 < f'(a) < f'(b)$이므로

$af'(a) < bf'(b)$

$\therefore \dfrac{f'(a)}{b} < \dfrac{f'(b)}{a}$ (참)

ㄷ. $0 < a < b$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$

$\therefore f'(\sqrt{ab}) < f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ,ㄴ,ㄷ 이다

46. 답 ④

[해설]

x 가 -2 에서 3 까지 변할 때의 함수 $f(x)$ 의 평균변화율은

$\dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \dfrac{3^2-(-2)^2}{5} = 1$

함수 $f(x)=x^2$ 의 $x=k$ 에서의 미분계수 $f'(k)$ 는

$f'(x)=2x$ 에서 $f'(k)=2k$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{\{f(x)\}^2-\{f(k)\}^2}{(x-k)(x+8k)}$

$= \lim\limits_{x\to k}\dfrac{f(x)-f(k)}{(x-k)} \cdot \dfrac{f(x)+f(k)}{(x+8k)}$

$= f'(k) \cdot \dfrac{f(x)+f(k)}{(x+8k)}$

$= 2k \cdot \dfrac{2k^2}{9k} = \dfrac{4}{9}k^2$

$\dfrac{4}{9}k^2 = 1$ 에서 $k = \dfrac{3}{2}$ $(\because\ k>0)$

47. 답 ⑤

$\dfrac{b}{n} = h$라 하면 $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이다.

(주어진 식)

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{b}{h}\{f(a+kh)-f(a-lh)\}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{b}{h}\{f(a+kh)-f(a)+f(a)-f(a-lh)\}$

$= \lim\limits_{h\to 0} b\left\{\dfrac{f(a+kh)-f(a)}{h} - \dfrac{f(a-lh)-f(a)}{h}\right\}$

$= \lim\limits_{h\to 0} b\left\{\dfrac{f(a+kh)-f(a)}{kh}\times k - \dfrac{f(a-lh)-f(a)}{-lh}\times(-l)\right\}$

$= bleft(kf'(a)+lf'(a)\}$

$= b(k+l)f'(a)$

48. 답 ②

주어진 식을 변형하여 인수분해하면

$f'(x)\cdot f(x) - f'(x) - f(x) + 1 = 2x^3 + 2x^2$

$\{f'(x)-1\}\{f(x)-1\} = 2x(x^2+x)$

이 식을 만족하는 것은

$f(x)-1 = x^2+x,\ f'(x) = 2x$

이므로

$f(x) = x^2+x+1$

$f(1) = 1+1+1 = 3$

49. 답 6

[해설]

함수 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x\ )$이고 조건 (가)에서

$f(3g(x)-2kx^3-2) = x$ 이므로

$g(x) = 3g(x)-2kx^3-2$

$\therefore\ g(x) = kx^3+1 \quad \cdots ①$

조건 (나)에서 $f(3)=1$, 즉 $g(1)=3$ 이므로

①에서 $g(1) = k+1 = 3 \quad \therefore\ k=2$

$g(x) = 2x^3+1$ 이므로 $g'(x) = 6x^2$

$\therefore g'(1) = 6$

50. 답 ②

$g(x) = f'(x) = nx^{n-1}+6x+a$이므로 $\{g(x)\}^2$의 차수는 $(2n-1)$이다.

따라서 $\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^2$의 차수는 $2n-3$이므로

$2n-3 = n$에서 $n=3$

$\therefore g(x) = 3x^2+6x+a,\ g'(x) = 6x+6$

주어진 식에서

$\dfrac{d}{dx}\{g(x)\}^2 = 2g(x)\cdot g'(x)$

이므로

$2(3x^2+6x+a)(6x+6) = 36(x^3+3x^2+ax+1)$

양변을 12로 나누고 전개하여 정리하면

$3x^2+9x^2+(a+6)x+a = 3x^3+9x^2+3ax+3$

이 식은 x에 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a = 3$

$\therefore n-a = 3-3 = 0$

51. 답 ⑤

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^m $(a\neq 0)$이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 max^{m-1}이므로 양변의 최고차항을 비교하면

$$max^{m-1+n}=ax^m \text{ (단, } a\neq 0)$$

$\therefore m=1,\ m-1+n=m$

$\therefore m=1,\ n=1$

따라서 $f(x)=ax+b$로 놓으면

$(x+2)a=ax+b \quad \therefore b=2a$

$\therefore f(x)=ax+2a$

$$\therefore \frac{f(2)}{f(-1)}=\frac{2a+2a}{-a+2a}=4$$

52. 답 ④

[해설]

$f(x)=(x+1)^2,\ g(x)=ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=2(x+1),\ g'(x)=2ax+b$

이므로

$f※g=(x+1)^2(2ax+b)-2(x+1)(ax^2+bx+c)$

$=(2a-b)x^2+(2a-2c)x+(b-2c)$

$f※g=0$이 x에 대한 항등식이므로

$(2a-b)x^2+(2a-2c)x+(b-2c)=0$

$b=2a,\ b=2c,\ a=c$

$$\therefore \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\frac{a^2+4a^2+a^2}{2a^2+2a^2+a^2}=\frac{6}{5}$$

53. 답 ①

$f(x)=ax^n+g(x)(a\neq 0,\ g(x)$는 $n-1$차 이하의 다항식)이라 하면

$f'(x)=nax^{n-1}+g'(x)$

따라서 주어진 식에 대입하면

$(x+1)\{nax^{n-1}+g'(x)\}-2ax^n-2g(x)+1=0$

x에 대한 항등식이므로 최고차항 $(na-2a)x^n$이 0이어야 한다.

$a(n-2)=0 \quad \therefore n=2$

이때, $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$로 놓으면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx)+1=0$

$(2a-b)x+b+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

$2a-b=0,\ b+1=0$

$$\therefore a=-\frac{1}{2},\ b=-1$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x$$

$$\therefore f(2)=-\frac{1}{2}\times 4-2=-4$$

54. 답 ①

a, b 가 방정식

$x^2=x+2$, 즉 $x^2-x-2=0$

의 두 근이다. 인수분해하면

$(x+1)(x-2)=0$

에서 $a=-1, b=2$

$y=x^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠에서 $y'=2x$이므로 점 $A(-1, 1)$ 에서 ㉠의 접선의 방정식은

$y=-2(x+1)+1$, 즉 $y=-2x-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또한 점 $B(2,\ 4)$에서의 ㉠의 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{4}(x-2),\ \text{즉 } x+4y-18=0 \qquad \cdots\cdots \text{㉢}$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$x+4(-2x-1)-18=0 \quad -7x=22$

$$\therefore x=-\frac{22}{7}$$

따라서 점 P의 x 좌표는 $-\frac{22}{7}$이다.

55. 답 ⑤

$y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$에서

$(x+1)^2a+(x^3+x+5-y)=0$

모든 실수 a에 대하여 등식이 성립해야 하므로

$x+1=0,\ x^3+x+5-y=0$

$\therefore x=-1,\ y=3$

$\therefore P(-1,\ 3)$

한편, $y'=3x^2+2ax+2a+1$이므로 점 $P(-1,\ 3)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{3-2a+2a+1}=-\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y-3=-\frac{1}{4}(x+1)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$$

56. 답 ②

$y=x^3-4x^2-7x+25$에서 $y'=3x^2-8x-7$이므로 $x=4$인 점에서의 접선의 기울기는

$3\cdot 4^2-8\cdot 4-7=9$

$x=4$일 때, $y=64-64-28+25=-3$이므로 접선의 방정식은

$y+3=9(x-4)$

여서에 $x=0$을 대입하면 구하는 y절편은 -39이다.

57. 답 ⑤

점 $(a,\ b)$ 는 곡선 $y=x^2-x+2$ 위의 점이므로

$b=a^2-a+2 \quad \cdots$ ①

$y=x^2-x+2$ 에서 $y'=2x-1$

$x=a$ 에서의 접선의 기울기가 5 이므로

$2a-1=5 \quad \therefore\ a=3$

① 에 대입하면 $b=8$

$\therefore\ a+b=3+8=11$

58. 답 ③

[해설]

$y=x^3-9x^2+24x-24$에서

$y'=3x^2-18x+24=3(x-3)^2-3$

이므로 미분계수는 $x=3$에서 최솟값 -3을 갖는다.

$x=3$이면 $y=-6$이므로 점 $(3,\ -6)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-6)=-3(x-3) \qquad \therefore y=-3x+3$

따라서 구하는 y의 절편은 3이다.

59. 답 ⑤

$x=a$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=\tan\frac{\pi}{4}=1$

주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-3f(a-h)+2f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{f(a+2h)-f(a)-3f(a-h)+3f(a)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{h}-\frac{3f(a-h)-3f(a)}{h}\right\}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times2-\frac{3f(a-h)-3f(a)}{-h}\times(-1)\right\}\\&=2f'(a)+3f'(a)=5f'(a)=5\end{aligned}$$

60. 답 ②

m의 값은 $f'(a)$와 같다.

① $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=f'(a)+f'(a)=2f'(a)$

②

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+\frac{1}{2}\Delta x)-f(a-\frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{2}\Delta x)-f(a)}{\frac{1}{2}\Delta x}-(-\frac{1}{2})\cdot\frac{f(a-\frac{1}{2}\Delta x)-f(a)}{\frac{1}{2}\Delta x}\right\}$$

$=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f'(a)=f'(a)$

③ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times(-1)$

$=-f'(a)$

④ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x-a}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(x^2)-f(a^2)}{x^2-a^2}\times(x+a)$

$=2af'(a^2)$

⑤ $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{a\{f(x)-f(a)\}}{x^2-a^2}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{a\{f(x)-f(a)\}}{(x-a)(x+a)}$

$=\frac{af'(a)}{2a}=\frac{1}{2}f'(a)$

61. 답 ②

(가)에서 $2f(1)+g(1)=4,\ f(1)-g(1)=-1$ 을 연립하여 풀면

$f(1)=1,\ g(1)=2$

(나)에서 $f(-x)=-f(x)$

$\displaystyle f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{-f(-1+h)+f(1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=f'(1)=3$

$g(-x)=g(x)$ 이므로

$\displaystyle g'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}$

$\displaystyle=\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}$

$\displaystyle=-\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}=-g'(1)=2$

$\therefore\ g'(1)=-2$

함수 $h(x)=f(x)g(x)$ 위의 점 $(1,\ h(1))$ 에서의 접선의 방정식은

$y-h(1)=h'(1)(x-1) \quad \cdots$ ①

이고, $h(1)=f(1)g(1)=1\cdot2=2$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$

$=3\cdot2+1\cdot(-2)=4$

따라서, ①에서 접선의 방정식은 $y-2=4(x-1)$,

즉 $y=4x-2$

$\therefore\ a=4,\ b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=20$

62. 답 50

$f'(x)=4x^3-12x^2+12x$ 이므로 $x=a$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a=4$

$a^3-3a^2+3a-1=0,\ (a-1)^3=0$

$\therefore\ a=1$

$b=f(1)=1-4+6+4=7$

$\therefore a^2+b^2=1^2+7^2=50$

63. 답 ②

$P(-2, 13-4\sqrt{2}), Q(2, 13+4\sqrt{2})$ 이다.

접선 l_2와 $y=f(x)$이 접점을 R라 하자.

직선 PQ@의 기울기가 $2\sqrt{2}$이므로

$f'(x)=6x+2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$에서 $x=0$

$R(0,1)$

한편, 직선 l_1의 방정식은

$y-(13-4\sqrt{2})=2\sqrt{2}(x+2)$

$\therefore 2\sqrt{2x}-y+13=0$

구하는 거리는 점 $R(0,1)$과 직선 l_1사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1+13|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(-1)^2}}=4$$

64. 답 ⑤

함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 위의 점 $(1,\ f(1))$ 에서의 접선의 기울기가 2 이므로 $f'(1)=2$

① $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}=f'(1)=2$

② $\lim_{h\to 1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}=f'(1)=2$

③ $\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f\left(1-\frac{h}{2}\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)+f(1)-f\left(1-\frac{h}{2}\right)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2}+\lim_{h\to 0}\frac{f\left(1-\frac{h}{2}\right)-f(1)}{-\frac{h}{2}}\cdot\frac{1}{2}$

$=f'(1)\cdot\frac{1}{2}+f'(1)\cdot\frac{1}{2}=f'(1)=2$

65. 답 45

(i) $f'(x)=3x^2-6x+3$ 이므로 $f'(0)=3$

따라서, 원점에서의 접선의 방정식은 $y=3x$

이때, $x^3-3x^2+3x=3x$ 에서 $x^2(x-3)=0$ 이므로

$x=3$

(ii) 원점이 아닌 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$y-a^3+3a^2-3a=(3a^2-6a+3)(x-a)$

이 접선이 원점을 지나므로 $x=0,\ y=0$ 을 대입하면

$-a^3+3a^2-3a=-3a^3+6a^2-3a$

$2a^3-3a^2=0,\ a^2(2a-3)=0 \quad \therefore\ a=\frac{3}{2}\ (\because\ a\neq 0)$

(i),(ii)에 의해 $10S=10\left(3+\frac{3}{2}\right)=45$

66. 답 ③

세 점 A, B, P의 좌표를 $A(a, a^2), B(b, b^2), P(c, d)$라 하자

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$, 즉, $y=2ax-a^2$

마찬가지로 점 B에서의 접선의 방정식은 $y=2bx-b^2$

점 $P(c, d)$는 두 접선의 교점이므로

$d=2ac-a^2,\ d=2bc-b^2$

$2ac-a^2=2bc-b^2$이므로 $2c(a-b)=a^2-b^2$

$a\neq b$이므로 $c=\frac{a+b}{2}$

$d=2a\frac{a+b}{2}-a^2=ab$

선분 AB의 중점 M의 좌표를 (X, Y)라 하면

$X=\frac{a+b}{2}=c$

$Y=\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{(a+b)^2-2ab}{2}=\frac{4c^2-2d}{2}=2c^2-d$

점 $P(c, d)$는 직선 $y=x-2$ 위의 점이므로 $d=c-2$

$Y=2c^2-(c-2)=2X^2-X+2$

67. 답 ②

$y=x^3+3x^2$에서 $y'=3x^2+6x$

$P(t, t^3+3t^2)$ 으로 놓으면 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$y=x^3+3x^2$과 ㉠을 연립하면

$x^3+3x^2-(3t^2+6t)x+2t^3+3t^2=0$

$(x-t)^2(x+2t+3)=0$

$\therefore x=t$ 또는 $x=-2t-3$

접선 l이 곡선 $y=x^3+3x^2$과 P이외의 점에서 만나지 않으므로

$t=-2t-3$

$\therefore t=-1$

따라서 접선 l의 방정식은 $y=-3x-1$이므로 접선 l의 x절편은

$x=-\frac{1}{3}$

68. 답 ③

직선 $4x-4y-9=0$ 의 기울기가 1 이므로 구하는 최단거리는 접선의 기울기가 1 인 곡선 $y=x^2$ 위의 접점에서 직선까지의 거리와 같다. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(a,\ a^2)$ 에서의 접선의 기울기가 1 이라고 하면

$y'=2x$ 에서 $2a=1 \quad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

따라서, 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ 이므로 구하는 최단 거리는

$$\frac{|2-1-9|}{\sqrt{4^2+(-4)^2}}=\frac{8}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

69. 답 ②

$y=x^2$에서 $y'=2x$이므로 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=-4(x+2) \quad \therefore y=-4x-4 \ \cdots$ ㉠

또, $y=x^3+ax-2$에서 $y'=3x^2+a$이므로

곡선 $y=x^3+ax-2$ 위의 점 (t, t^3+at-2)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at-2)=(3t^2+a)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+a)x-2t^3-2$ … ㉡

이 때, 두 접선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$3t^2+a=-4,\ -2t^3-2=-4$

$\therefore t=1, a=-7$

70. 답 ④

$f(x)=x^2+1,\ g(x)=ax^2+bx-2$라 하고, 두 포물선의 접점의 x좌표를 α라 하면 두 접선의 방정식은

$y=f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha) \Leftrightarrow y=2\alpha x-\alpha^2+1$

$y-g(\alpha)=g'(\alpha)(a-\alpha) \Leftrightarrow y=(2a\alpha+b)x-a\alpha^2-2$

두 접선이 일치하므로

$2\alpha=2a\alpha+b, -\alpha^2+1=-a\alpha^2-2$

에서 $2\alpha(1-a)=b$ …… ㉠, $(a-1)\alpha^2=-3$ …… ㉡

㉠$\times\alpha+$㉡$\times 2$를 하면

$0=b\alpha-6\ \therefore \alpha=\dfrac{6}{b}$ …… ㉢

㉠에 대입하면

$\dfrac{12}{b}(1-a)=b,\quad \therefore a=1-\dfrac{1}{12}b^2$

$\therefore a+\dfrac{b^2}{12}=1$

71. 답 ①

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$

따라서 곡선 $y=x^3$위의 점 $(\alpha,\ \alpha^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3$ …… ㉠

$y=x^3-4$에서 $y'=3x^2$

곡선 $y=x^3-4$ 위의 점 $(\beta,\ \beta^3-4)$에서의 접선의 방정식은

$y-(\beta^3-4)=3\beta^2(x-\beta)$

$\therefore y=3\beta^2x-2\beta^3-4$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하는 조건은

$3\alpha^2=3\beta^2,\ -2\alpha^3=-2\beta^3-4$

$\therefore \alpha=1,\ \beta=-1$

따라서 두 곡선에 동시에 접하는 직선의 방정식은 $y=3x-2$이므로

$a=3,\ b=-2$

$\therefore a+b=3-2=1$

72. 답 ③

두 점 A, B의 x좌표를 각각, a, b라 하면 a, b는 방정식 $f(x)=x-1$의 두 근이므로 0이 아닌 상수 m에 대하여 $f(x)-(x-1)=m(x-a)(x-b)$로 놓을 수 있다

$\therefore f(x)=m(x-a)(x-b)+x-1$

$f'(x)=m(x-b)+m(x-a)+1$

점 A에서의 접선의 기울기가 -4이므로

$f'(a)=m(a-b)+1=-4$

$\therefore m(a-b)=-5$

따라서, 점 B에서의 접선의 기울기는

$f'(b)=m(b-a)+1=5+1=6$

73. 답 ①

방정식 $f(x)-2x=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(x)-2x=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 놓을 수 있다

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-2=(x-\beta)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\gamma)+(x-\alpha)(x-\beta)$

$f'(\alpha)=14, f'(\beta)=k, f'(\gamma)=6$이므로

$f'(\alpha)-2=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=12$ … ㉠

$f'(\beta)-2=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)=k-2$ … ㉡

$f'(\gamma)-2=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)=4$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 곱하면

$-(\beta-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2=48(k-2)$

$(\beta-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2=48(2-k)$

$(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\gamma-\alpha)=\sqrt{48(2-k)}$ … ㉣

㉠, ㉣에서 $\gamma-\beta=\dfrac{\sqrt{48(2-k)}}{12}$

㉡, ㉣에서 $\gamma-\alpha=\dfrac{\sqrt{48(2-k)}}{2-k}$

㉢, ㉣에서 $\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{48(2-k)}}{4}$

$(\gamma-\beta)+(\beta-\alpha)=\gamma-\alpha$이므로

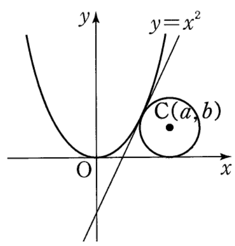
$\dfrac{\sqrt{48(2-k)}}{12}+\dfrac{\sqrt{48(2-k)}}{4}=\dfrac{\sqrt{48(2-k)}}{2-k}$

$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2-k},\quad \dfrac{1}{2-k}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore k=-1$

74. 답 ⑤

곡선 $y=x^2$과 원 C와의 접점의 x좌표를 p라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 $y'=2x$에서 $2p=2\quad \therefore p=1$



따라서, 접점의 좌표는 $(1,1)$이고

접선의 방정식은

$y-1=2(x-1)$, 즉 $2x-y-1=0$

원 C의 중심의 좌표를 (a,b)라고 하면

접점의 원의 중심을 이은 선분과 접선은 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-1}=-\dfrac{1}{2},\ 2b-2=-a+1,\quad a=3-2b$

한편, 원의 중심에서 접선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\dfrac{|2a-b-1|}{\sqrt{5}}=|b|,\ \dfrac{|6-4b-b-1|}{\sqrt{5}}=|b|$

$|5-5b|=\sqrt{5}|b|$

양변을 제곱하여 정리하면 $4b^2-10b+5=0$

$b=\dfrac{5+\sqrt{5}}{4}$이면 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0,$

$b=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$이면 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}>0$

$\therefore b=\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}\quad (\because a>0)$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\dfrac{5-\sqrt{5}}{4}$

75. 답 ⑤

곡선 $y=g(x)$ 위의 한 점 $P(a,\ g(a))$ 에 대하여

$$g'(a)=\lim_{t\to a}\frac{\boxed{g(t)-g(a)}}{t-a}$$

이 때, $Q(t,\ g(t))$ 라 하면 $f(x)$ 의 역함수가 $g(x)$ 이므로 P 와 Q 의 직선 $y=x$ 에 대한 대칭점 P', Q' 의 좌표는 각각 $\boxed{(g(a),\ a)}$, $\boxed{(g(t),\ t)}$이다.

따라서, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P' 에서의 접선의 기울기는

$$\lim_{g(t)\to g(a)}\frac{\boxed{t-a}}{g(t)-g(a)}=\lim_{t\to a}\frac{1}{\dfrac{g(t)-g(a)}{t-a}}$$

$$=\frac{1}{g'(a)}$$

그러므로 $g'(a)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P' 에서의 접선의 기울기의 역수 이다.

76. 답 ①

$f(2)=2^n-2^{n+1}=-2^n$

$f'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n$에서

$f'(2)=n2^{n-1}-(n+1)2^n=(-n-2)2^{n-1}$

따라서, 점 $(2,-2^n)$에서의 접선의 방정식은

$y+2^n=(-n-2)2^{n-1}(x-2)$

이 접선이 점 $(0,a_n)$을 지나므로

$a_n+2^n=(n+2)2^n$

$\therefore a_n^n=(n+1)2^n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)2^n(n+2)2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

77. 답 ⑤

$y=x^4-x^3$에서 $y'=4x^3-3x^2$

두접점이 각각 $P(\alpha,\ \alpha^4-\alpha^3)$, $Q(\beta,\ \beta^4-\beta^3)$ $(\alpha<\beta)$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(\alpha^4-\alpha^3)=(4\alpha^3-3\alpha^2)(x-\alpha)$

$\therefore y=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3$

이때, $y=x^4-x^3$과 $y=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3$에서 y를 소거한 x에 대한 사차방정식은 $\alpha,\ \beta$를 중근으로 갖는다.

$x^4-x^3=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3$

$x^4-x^3-(4\alpha^3-3\alpha^2)x+3\alpha^4-2\alpha^3=0$

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha & 1 & -1 & 0 & -4\alpha^3+3\alpha^2 & 3\alpha^4-2\alpha^3 \\
 & & \alpha & \alpha^2-\alpha & \alpha^3-\alpha^2 & -3\alpha^4+2\alpha^3 \\
\hline
\alpha & 1 & \alpha-1 & \alpha^2-\alpha & -3\alpha^3+2\alpha^2 & \boxed{0} \\
 & & \alpha & 2\alpha^2-\alpha & 3\alpha^3-2\alpha^2 & \\
\hline
 & 1 & 2\alpha-1 & 3\alpha^2-2\alpha & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore (x-\alpha)^2\{x^2+(2a-1)x+3\alpha^2-2\alpha\}=0$

따라서 방정식 $x^2+(2\alpha-1)x+3\alpha^2-2\alpha=0$은 중근 β를 가지므로

$x^2+(2\alpha-1)x+3\alpha^2-2\alpha=(x-\beta)^2$

$\therefore 2\beta=-2\alpha+1,\ 3\alpha^2-2\alpha=\beta^2$

두 식을 연립하여 풀면

$3\alpha^2-2\alpha=\left(-\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$2\alpha^2-\alpha-\dfrac{1}{4}=0$

$8\alpha^2-4\alpha-1=0$

$\therefore \alpha=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4},\ \beta=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{4}=\dfrac{1-3}{16}=-\dfrac{1}{8}$

78. 답 ①

(i) $x>a$이면 $f(x)=x^3-3x^2+9(x-a)+1$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x+9=3(x-1)^2+6>0$

따라서 $x>a$의 범위에서 함수 $f(x)$는 증가한다.

(ii) $x<a$이면 $f(x)=x^3-3x^2-9(x-a)+1$

$\therefore f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

따라서 실수전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 증가하려면 $a\leqq-1$이어야 한다.

79. 답 ③

$f(x)=x^3-ax^2+(6+a)x+5$에서

$f'(x)=3x^2-2ax+(6+a)$

$f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 증가하려면 $f'(x)\geqq 0$이어야 한다.

$\therefore \dfrac{D}{4}=a^2-3(a+6)\leqq 0$

$(a+3)(a-6)\leqq 0$

$\therefore -3\leqq a\leqq 6$

80. 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-3$

$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+b$

$=3x^2+2ax-2a-3$

$=(x-1)(3x+2a+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$또는 $x=\dfrac{-2a-3}{3}$

이때, $\frac{-2a-3}{3}>1$이어야 하므로 $a<-3$

따라서 구하는 조건은

$2a+b+3=0,\ a<-3$

81. 답 ③

$f(x)=x^4-4x^3+2ax^2$에서

$$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax=4x(x^2-3x+a)$$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때, $f'(x)=0$의 한 근이 0이므로 $x^2-3x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$D=(-3)^2-4a>0,\ a\neq 0$$

$$\therefore a<0,\ 0<a<\frac{9}{4} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

따라서 $f(x)$가 극댓값을 갖기 위한 정수 a의 최댓값은 $\boxed{2}$이다. 또, $f(x)$가 극값을 하나만 가지는 경우는 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않을 경우이다.

㉠의 부정이므로 극댓값을 갖지 않을 a의 값의 범위는 $a\geq\frac{9}{4}$ $(\because a\neq 0)$

따라서 극값을 하나만 갖도록 하는 정수 a의 최솟값은 $\boxed{3}$이다.

$\therefore$ (가) 2, (나) 3

82. 답 $0\leq a\leq 6$

$f(x)$가 극값을 갖지 않으면 $f'(x)=6x^2+2ax+a$에서 방정식 $6x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 할 때,

$$\frac{D}{4}=a^2-6a\leqq 0, a)a-6)<0$$

$$\therefore 0\leqq a\leqq 6$$

83. 답 ③

$f(x)=x^3-ax^2+ax$에서 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$$f'(1)=3-a=m$$

$$\therefore a=3-m$$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는

$f'(x)=3x^2-2(3-m)x+3-m=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4}=(3-m)^2-3(3-m)\leq 0$$

$$m(m-3)\leq 0$$

$$\therefore 0\leq m\leq 3$$

따라서 m의 최댓값은 3이다.

84. 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}ax^3+(b-1)x^2+(2-a)x+1$에서

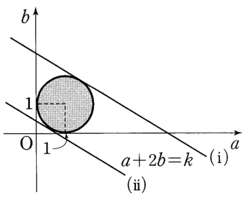
$$f'(x)=ax^2+2(b-1)x+(2-a)$$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D\leq 0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=(b-1)^2-a(2-a)\leq 0$$

$$(b-1)^2+a^2-2a\leq 0$$

$$\therefore (a-1)^2+(b-1)^2\leq 1$$



이 부등식의 영역은 점 $(1,\ 1)$이 중심이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부이다. (단, 경계선 포함)

$a+2b=k$로 놓으면 점 $(1,\ 1)$에서 직선 $a+2b-k=0$까지의 거리가 1일 때, k의 값은 최대이고, 위의 그림에서 (i)의 경우이다.

$$\frac{1+2-k}{\sqrt{1+4}}=1$$

$$|3-k|=\sqrt{5}$$

$$3-k=\pm\sqrt{5}$$

$$\therefore k=3+\sqrt{5}\ \ (\because (i)\text{의 경우})$$

따라서 $a+2b$의 최댓값은 $3+\sqrt{5}$이다.

85. 답 ②

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서

$$f'(-2)=12-4a+b=0,\ f'(0)=b=0$$

$$\therefore a=3,\ b=0$$

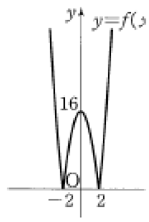
또 $f(-2)=-8+12+c=3$에서 $c=-1$

이때, $f(x)=x^3+3x^2-1$이고 이 함수는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-1$

86. 답 ③

$$f(x)=\begin{cases}16-x^4 & (-2\leqq x\leqq 2)\\ x^4-16 & (x\leqq -2,\ x\geqq 2)\end{cases}$$ 에서

$$f'(x)=\begin{cases}-4x^3 & (-2\leqq x\leqq 2)\\ 4x^3 & (x\geqq 2,\ x\leqq -2)\end{cases}$$



이 때, $f'(-1)=4>0, f(1)=-4<0$

이고 $f'(-2), f'(2)$ 의 값은 좌우 미분계수가 다르므로

존재하지 않는다.

또한 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않으면 불연속이어야 하는 그런 점은 없다.

그리고 극댓점은 $(0,\ 16)$의 한 개이고 극솟점은 (-2, 0), (2, 0) 의 두 개다.

87. 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=k,\ x=-k$이므로 이차방정식의 근과 계서의 관계에 의하여 $k+(-k)=-\frac{2a}{3}, -k^2=\frac{b}{3}$

$\therefore a=0,\ b=-3k^2$

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m은

$m=f'(x)=3x^2+2ax+b=3x^2+b$

이므로 m은 $x=0$일 때 최솟값 b를 가진다.

$\therefore b=-2$

한편 , $f(k)+f(-k)=0$이므로

$c=0$

$\therefore a+b+c=0-2+0=-2$

88. 답 ②

$f(x)=x^3-3ax^2+a-1$에서

$f'(x)=3x^2-5ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$ $(a>0)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극댓값 $f(0)=a-1$,

$x=2a$에서 극솟값 $f(2a)=8a^3-12a^3+a-1=-4a^3+a-1$

을 갖는다.

따라서 두 점 $(0,\ a-1)$, $(2a,\ -4a^3+a-1)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(a-1)=\frac{-4a^3+a-1-(a-1)}{2a-0}(x-0)$$

$$\therefore y=-2a^2x+a-1$$

이 직선이 점 $\left(2,\ -\frac{3}{2}\right)$ 을 지나므로

$-\frac{3}{2}=-4a^2+a-1$

$8a^2-2a-1=0$

$(4a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}(\because a>0)$

89. 답 ③

$f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=9x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=\alpha$, $x=\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{2a}{9}$, $\alpha\beta=\frac{b}{9}$

선분 AB의 중점이 $(0,\ 1)$이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0=-\frac{a}{9}$

$\therefore a=0$, $\alpha=-\beta$, $b=9\alpha\beta=-9\alpha^2$

$\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1=\frac{3(\alpha^3+\beta^3)+b(\alpha+\beta)+2c}{2}$

$\therefore c=1$

극댓값과 극솟값의 차가 $\frac{4}{9}$이므로

$|f(\alpha)-f(\beta)|=|3\alpha^3-3\beta^3+b\alpha-b\beta|$

$=|6\alpha^3-9\alpha^2\times 2\alpha|=\frac{4}{9}$

$|\alpha|^3=\frac{1}{27}$, $|\alpha|=\frac{1}{3}$

$\therefore b=-9\alpha^2=-9\times\frac{1}{9}=-1$

$\therefore a+b+c=0-1+1=0$

90. 답 ①

$f(x)=2x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$f(1)=2+a+b=3$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=6x^2+2ax+b=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{3}$, $\alpha\beta=\frac{b}{6}$

$\beta-\alpha=\frac{\sqrt{10}}{3}$이므로

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}=\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2$

$\therefore a^2-2b=10$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+6a-16=0$

$(a+8)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2$, $b=-1$

$\therefore ab=-2$

91. 답 ①

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(\alpha,\ 0)$, $B(\beta,\ 0)$으로 놓으면

$f(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$=-\{x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta\}$

$f'(x)=-\{3x^2-2(2\alpha+\beta)x+\alpha(\alpha+2\beta)\}$

$=-(x-\alpha)(2x-\alpha-2\beta)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\frac{\alpha+2\beta}{3}$

$\therefore C\left(\frac{\alpha+2\beta}{3},\ 0\right)$

따라서 점 C는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

92. 답 ②

[해설] $f(x)=2x^3-ax$에서 $f'(x)=6x^2-a$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{\frac{a}{6}}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{6}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{\frac{a}{6}}$ 에서 극댓값

$f\left(-\sqrt{\frac{a}{6}}\right)=-2\cdot\frac{a\sqrt{a}}{6\sqrt{6}}+\frac{a\sqrt{6a}}{\sqrt{6}}=\frac{a\sqrt{6a}}{9}$ 를 갖는다.

$\therefore P\left(-\frac{\sqrt{6a}}{6},\ \frac{a\sqrt{6a}}{9}\right)$

따라서 점 P의 자취의 방정식은 $y=-4x^3(x<0)$이다.

곡선 $y=-4x^3(x<0)$위의 점 $A(t,\ -4t^3)(t<0)$에서의 접선이 직선 $y=-12x-13$과 평행할 때, 두 직선 사이의 거리가 구하는 최단 거리가 된다.

$y=-4x^3$에서 $y'=-12x^2$이므로

$-12t^2=-12$

$\therefore t=-1$

따라서 점 $A(-1,\ 4)$에서 직선 $12x+y+13=0$까지의 거리는

$\dfrac{|-12+4+13|}{\sqrt{144+1}}=\dfrac{5}{\sqrt{145}}=\dfrac{\sqrt{145}}{29}$

93. 답 ④

함수 $F(x)$아 감소하는 것은 부등식

$F'(x)=f'(x)-g'(x)<0$즉 $f'(x)<g'(x)$

를 만족할 때이다.

따라서 주어진 그래프에서 $y=g'(x)$ 의 그래프가 $y=f'(x)$의 그래프의 위쪽에 존재하는 x의 값의 범위는

$-2<x<3$

94. 답 ④

방정식 $f(x)=0$의 해는 $y=f(x)$의 x절편이므로

$x=a,\ c,\ e$

방정식 $f'(x)=0$의 해는 $y=f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이므로

$x=b,\ c,\ d$

$\therefore A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

$\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 그리고 $f'(x)\neq 0$

$\therefore B=\{a,\ e\}$

$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 그리고 $f'(x)=0$

$\therefore C=\{c\}$

$\therefore (A-B)\cap(A-C)=\{b,\ c,\ d\}\cap\{a,\ b,\ d,\ e\}$

$=\{b,\ d\}$

95. 답 ③

ㄱ. $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

$x\leftarrow 2$일 때, $f'(x)>0$

$x<-2$일 때 $f'(x)>0$

$-2<x<1$일 때 $f'(x)<0$

$x>1$일 때 $f'(x)>0$

따라서 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄴ $f'(x)-g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

$x<-2$일 때 $f'(x)-g'(x)>0$

$-2<x<2$일 때 $f'(x)-g'(x)<0$

$x>2$일 때 $f'(x)-g'(x)>0$

따라서 $y=f(x)-g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $y=f(x)-g(x)$는 삼차함수이고, $x=-2$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 가지므로 방정식 $f(x)-g(x)=k$는 $f(2)-g(2)<k<f(-2)-g(-2)$ 일 때 서로 다른 세 실근을 갖는다. 따라서 $f(2)-g(2)<f(0)-g(0)<f(-2)-g(-2)$이므로 방정식 $f(x)-g(x)=f(0)-g(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x)-f(0)=g(x)-g(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

그러므로 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

96. 답 ②

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=q,\ x=r$이므로 서로 다른 부호의 근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크다.

ㄱ. $q+r=-\dfrac{2b}{3a}>0$ $\therefore ab<0$ (참)

ㄴ. $qr=\dfrac{c}{3a}<0$

$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세근이 $p,\ r,\ r$이므로

$pr+pr+r^2=r(2p+r)=\dfrac{c}{a}<0$

이때, $r>0$이므로 $2p+r<0$ (참)

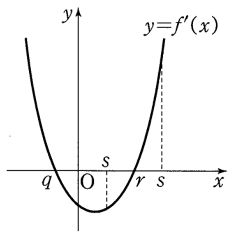
ㄷ. $0<s<r$이면 $f'(s)<0$이므로

$3as^2+2bs+c<0$

$0<r<s$이면 $f'(s)>0$이므로

$3as^2+2bs+c>0$

그러므로 ㄷ은 거짓이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

97. 답 55

[해설]

$xy^2=100$의 양변에 상용로그를 취하면

$\log x+2\log y=2(0\le \log x\le 1)$

$\log x=a,\ \log y=b$라 하면

$a+2b=2,\ 0\le a\le 1$

$\therefore b=1-\dfrac{a}{2}(0\le a\le 1)$

$\therefore (\log x)^3+(\log y)^2=a^3+b^2$

$=a^3+\left(1-\dfrac{a}{2}\right)^2$

$=a^3+\dfrac{a^2}{4}-a+1\ \ (0\le a\le 1)$

$f(a)=a^3+\dfrac{a^2}{4}-a+1$로 놓으면

$f'(a)=3a^2+\dfrac{a}{2}-1=\dfrac{1}{2}(3a+2)(2a-1)$

$f'(a)=0$에서 $a=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

$0\le a\le 1$에서 $f(a)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	↘	$\dfrac{11}{16}$	↗	$\dfrac{5}{4}$

따라서 $f(a)$는 $a=1$일 때, 최댓값 $M=f(1)=\dfrac{5}{4}$,

$a=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $m=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{16}$을 갖는다.

$\therefore \frac{100m}{M}=100\times\frac{11}{16}\times\frac{4}{5}=55$

98. 답 ④

$x+y+z=0$에서 $x+y=-z$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2=(x+y)^2-2xy+z^2=6$에서 ㉠을 대입하여 정리하면

$xy=z^2-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 x, y는 실수이므로 x, y는 방정식

$t^2+zt+z^2-3=0$

의 실근이다. 따라서

$D=z^2-4z^2+12\geq 0$

에서 $-2\leq z\leq 2$ …… ㉢

한편,

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3$$
$$=(-z)^3-3(z^2-3)(-z)+z^3$$
$$=3z^3-9z$$

이고, $f(z)=3z^3-9z$로 놓으면

$f'(z)=9z^2-9=0$에서

$z=\pm 1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $f(z)$의 함숫값을 구하면

$f(1)=-6,\ f(-1)=6$

$f(2)=6,\ f(-2)=-6$

따라서, $x^3+y^2+z^3$의 최댓값은 6이고, 최솟값은 -6이므로 그 합은 0이다.

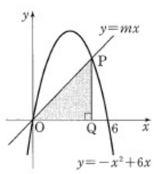
99. 답 16

포물선 $y=-x^2+6$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표는

$-x^2+6x=mx$에서 $x(x+m-6)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-m+6$

$\therefore P(-m+6,\ m(-m+6))$



삼 각 형

POQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}(-m+6)\cdot m(-m+6)$

$=\frac{1}{2}(m^3-12m^2+36m)$

$S'=\frac{1}{2}(3m^2-24m+36)=\frac{3}{2}(m-2)(m-6)$

$0<m<6$에서 S의 증감을 조사하면 오른쪽과 같다.

따라서 S는 $m=2$일 때, 극대이면서 최대가 되고 최댓값은

m	(0)	…	2	…	(6)
S'		+	0	−	
S		↗	극대	↘	

$s=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4^2=16$

100. 답 ②

[해설]

$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm 1$이므로 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	0	…	1	…	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	2	↘	-2

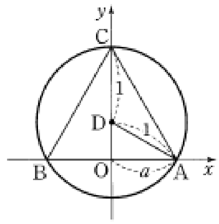
따라서 구하는 최댓값은 $f(1)=2$, 최솟값은 $f(2)=-2$이다.

$\therefore M-m=2-(-2)=4$

101. 답 ③

$\triangle ABC$의 외심을 D라 하자.

$\triangle ABC$의 외접원의 반지름의 길이가 1임을 이용하면 오른쪽 그림에서



$1=\overline{AD}^2=\overline{OA}^2+\overline{OD}^2$

$\therefore a^2+(t-1)^2=1$

$\therefore a^2=2t-t^2$ …… ㉠

이 때, $\triangle ABC$의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot t=t^2(2t-t^2)$ …… ㉡

㉠을 이용하기 위하여 ㉡의 양변을 제곱하면

$S^2=a^2t^2=t^2(2t-t^2)$

$f(t)=2t^3-t^4$이라 하면

$f'(t)=6t^2-4t^3=2t^2(3-2t)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

$1,t<2$에서 $f(t)$의 증감표는 다음과 같다.

t	(1)	…	$\frac{3}{2}$	…	(2)
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(t)\leq f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}(3-\frac{9}{4})=\frac{27}{16}$이므로

$\triangle ABC$의 넓이는 $t=\frac{3}{2}$, 즉 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$일 때, 최댓값

$\sqrt{f(\frac{3}{2})}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$를 갖는다.

102. 답 ①

원기둥의 반지름의 길이를 x, 높이를 y, 부피를 V라 하면

$V=\pi x^2y\quad(0<x<R)$ …… ㉠

$\frac{x}{R}=\frac{h-y}{h}$에서

$y=\frac{h}{R}(R-x)$ …… ㉡

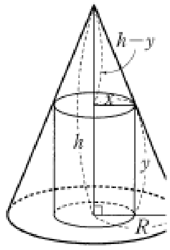
㉡을 ㉠에 대입하면

$V=-\frac{\pi h}{R}(x^3-Rx^2)$

$V'=-\frac{\pi h}{R}x(3x-2R)$

$V'=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}R$

$0<x<R$에서 V의 증감표는 다음과 같다.



x	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}R$	$\cdots$	(R)
V'		+	0	−	
V		↗	극대	↘	

따라서 V는 $x=\frac{2}{3}R$일 때, 극대이면서 최대이므로

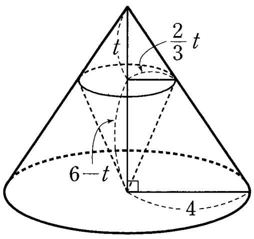
$r=\frac{2}{3}R$

103. 답 155

직원뿔 B의 부피를 V라 하면 오른쪽 그림에서

$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{4}{9}t^2(6-t)$

$=\frac{4}{27}\pi t^2(6-t)$



$f(t)=\frac{4}{27}\pi t^2(6-t)$라 하면

$f'(t)=\frac{4}{27}\pi(12t-3t^2)$

$=\frac{4}{9}\pi t(4-t)$

$f'(x)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=4$

$0<t<6$에서 $f(t)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(t)$는 $t=4$일 때, 극대이면서 최대이므로 직원뿔 B의 부피의 최댓값은

$f(4)=\frac{4}{27}\pi\cdot 16\cdot 2=\frac{128}{27}\pi$

$\therefore p+q=27+128=155$

104. 답 ④

[해설]

$T'(x)=(2x+1)\left(1-\frac{x}{3}\right)+(x^2+x)\left(-\frac{1}{3}\right)$

이므로 이 의약품을 $1\ mg$ 복용하였을 때의 인체감지도는

$T'(1)=3\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$

105. 답 ③

$y=x(x-1)(x+2)=x^3+x^2-2x$ ······ ㉠

에서 $y'=3x^2+2x-2$

점 $P_n(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식은

$y-(x_n^3+x_n^2-2x_n)=(2x_n^2+2x_n-2)(x-x_n)$

$\therefore y=(3x_n^2+2x_n-2)x-2x_n^3-x_n^2$ ······ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$x^3+x^2-2x=(3x_n^2+2x_n-2)x-2x_n^3-x_n^2$

$(x-x_n)^2(x+2x_n+1)=0$

$\therefore x_{n+1}=-2x_n-1$

ㄱ. $x_1=1$이므로

$x_2=-2x_1-1=-3$ (참)

ㄴ. $x_{100}+2x_{99}=-1$ (거짓)

ㄷ. $x_{n+1}+\frac{1}{3}=-2\left(x_n+\frac{1}{3}\right)$, $x_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

즉, 수열 $\left\{x_n+\frac{1}{3}\right\}$은 첫째항이 $\frac{4}{3}$, 공비가 -2인 등비수열을 이루므로

$x_n+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}(-2)^{n-1}$

$x_n=\frac{4}{3}(-2)^{n-1}-\frac{1}{3}=\frac{(-2)^{n+1}-1}{3}$

$\therefore x_{99}=\frac{2^{100}-1}{3}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

1. 답 ⑤	2. 답 ①	3. 답 ②	4. 답 ④
5. 답 ②	6. 답 ②	7. 답 ①	8. 답 125
9. 답 ①	10. 답 ①	11. 답 ⑤	12. 답 ③
13. 답 ④	14. 답 ②	15. 답 ③	16. 답 ⑤
17. 답 ①	18. 답 ④	19. 답 ①	20. 답 ②
21. 답 32	22. 답 12	23. 답 ①	24. 답 ③
25. 답 ③	26. 답 ②	27. 답 ③	28. 답 ③
29. 답 ①	30. 답 ③	31. 답 ④	32. 답 ②
33. 답 ③	34. 답 ④	35. 답 ①	36. 답 ②
37. 답 ③	38. 답 ⑤	39. 답 ①	40. 답 ⑤
41. 답 ⑤	42. 답 ⑤	43. 답 ⑤	44. 답 14
45. 답 ②	46. 답 ④	47. 답 ②	48. 답 ①
49. 답 ①	50. 답 ③	51. 답 243	52. 답 ③
53. 답 ④	54. 답 ①	55. 답 ④	56. 답 ③
57. 답 55	58. 답 ⑤	59. 답 ④	60. 답 ②
61. 답 ④	62. 답 527	63. 답 ②	64. 답 ④
65. 답 155	66. 답 ③	67. 답 ①	68. 답 ③
69. 답 ③	70. 답 ③	71. 답 16	72. 답 ④
73. 답 ②	74. 답 ⑤	75. 답 ②	76. 답 ④
77. 답 ④	78. 답 ⑤	79. 답 ④	80. 답 ③
81. 답 ③	82. 답 ⑤	83. 답 ③	84. 답 ②
85. 답 36	86. 답 ②	87. 답 92	88. 답 22
89. 답 108	90. 답 ⑤	91. 답 ③	92. 답 ④
93. 답 104	94. 답 24	95. 답 ④	96. 답 12
97. 답 ⑤	98. 답 ①	99. 답 ②	100. 답 ③
101. 답 ①	102. 답 20	103. 답 ①	

1. 답 ⑤

[해설]

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^m $(a \neq 0)$이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 max^{m-1}이므로 양변의 최고차항을 비교하면

$max^{m-1+n} = ax^m$ (단, $a \neq 0$)

$\therefore m=1,\ m-1+n=m$

$\therefore m=1,\ n=1$

따라서 $f(x)=ax+b$로 놓으면

$(x+2)a = ax+b \quad \therefore b=2a$

$\therefore f(x)=ax+2a$

$\therefore \dfrac{f(2)}{f(-1)} = \dfrac{2a+2a}{-a+2a} = 4$

2. 답 ①

[해설]

$f(x)=ax^n+g(x)$($a \neq 0$, $g(x)$는 $n-1$차 이하의 다항식)이라 하면

$f'(x)=nax^{n-1}+g'(x)$

따라서 주어진 식에 대입하면

$(x+1)\{nax^{n-1}+g'(x)\}-2ax^n-2g(x)+1=0$

x에 대한 항등식이므로 최고차항 $(na-2a)x^n$이 0이어야 한다.

$a(n-2)=0 \quad \therefore n=2$

이때, $f(0)=0$이므로 $f(x)=ax^2+bx$로 놓으면

$(x+1)(2ax+b)-2(ax^2+bx)+1=0$

$(2a-b)x+b+1=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠은 x에 대한 항등식이므로

$2a-b=0,\ b+1=0$

$\therefore a=-\dfrac{1}{2},\ b=-1$

$\therefore f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2-x$

$\therefore f(2)=-\dfrac{1}{2}\times 4-2=-4$

3. 답 ②

[해설]

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=(1-1)^2Q(1)+a+b$

$\therefore a+b=2$

㉠의 양변에 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

$x=1$을 대입하면

$f'(1)=2(1-1)Q(1)+(1-1)^2Q'(1)+a$

$\therefore a=f'(1)=-2,\ b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+4$이다.

4. 답 ④

[해설]

$f(x)=(x+1)^2$, $g(x)=ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=2(x+1)$, $g'(x)=2ax+b$

이므로

f※g $=(x+1)^2(2ax+b)-2(x+1)(ax^2+bx+c)$

$=(2a-b)x^2+(2a-2c)x+(b-2c)$

f※g $=0$이 x에 대한 항등식이므로

$(2a-b)x^2+(2a-2c)x+(b-2c)=0$

$b=2a,\ b=2c,\ a=c$

$\therefore \dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} = \dfrac{a^2+4a^2+a^2}{2a^2+2a^2+a^2} = \dfrac{6}{5}$

5. 답 ②

[해설]

$f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=f'\left(-\dfrac{1}{3}\right)=0$은 $y=f(x)$의 그래프가 $x=-\dfrac{1}{3}$에서 x축에 접하는 것을 뜻하므로

$f(x)=a\left(x+\dfrac{1}{3}\right)^2$

으로 놓을 수 있다. $f(2)=98$이므로

$\left(\dfrac{7}{3}\right)^2 a = 98$에서 $a=18$

$\therefore c=\dfrac{a}{9}=2$

6. 답 ②

[해설]

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ 이므로

$f'(2)=14$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}f'(1)$

$\therefore f'(1)=-4$

그런데 $f(x)=x^4+ax^2+bx$ 에서

$f'(x)=4x^3+2ax+b$

$\therefore\ f'(2)=32+4a+b=14$ …… ㉠

$\therefore\ f'(1)=4+2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 풀면

$a=-5,\ b=2$

$\therefore\ f'(x)=4x^3-10x+2$

$\therefore f'(-1)=-4+10+2=8$

7. **답 ①**

[해설]

$f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{n+1}+ax^2+b}{x^n+1}=\begin{cases}2x & (x>1)\\ \frac{2+a+b}{2} & (x=1)\\ ax^2+b & (0<x<1)\end{cases}$ 이므로

$f'(x)=\begin{cases}2 & (x>1)\\ 2ax & (0<x<1)\end{cases}$

(i) $x=1$ 에서 연속이어야 하므로

$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$

$\therefore\frac{2+a+b}{2}=2$ …… ㉠

(ii) $x=1$ 에서 미분가능하려면 미분계수가 존재해야 하므로

$\lim_{x\to1-0}f'(x)=\lim_{x\to1+0}f'(x)$

$\therefore 2a=2$ …… ㉡

㉠,㉡ 에서 $a=1,\ b=1$

$\therefore a-b=0$

8. **답** 125

[해설]

$x=-20$ 인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(-20)$ 이다.

$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-6xh-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}-6x\right\}$

$=5-6x$

$\therefore\ f'(-20)=5-6\times(-20)=125$

9. **답 ①**

[해설]

$f(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$ 에서

$f'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$

$g(x)=x+x^2+x^3+\cdots+nx^{n-1}$ 에서

$g'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+(n-1)x^{n-2}$

$\therefore f'(1)=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore g'(1)=1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{f'(1)-g'(1)}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n-1)}{2}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$

10. **답 ①**

[해설]

$y=x^3$ 에서 $y'=3x^2$

따라서 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $(\alpha,\ \alpha^3)$ 에서의 접선의 방정식은

$y-\alpha^3=3\alpha^2(x-\alpha)$

$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3$ …… ㉠

$y=x^3-4$ 에서 $y'=3x^2$

곡선 $y=x^3-4$ 위의 점 $(\beta,\ \beta^3-4)$ 에서의 접선의 방정식은

$y-(\beta^3-4)=3\beta^2(x-\beta)$

$\therefore y=3\beta^2x-2\beta^3-4$ …… ㉡

㉠, ㉡이 일치하는 조건은

$3\alpha^2=3\beta^2,\ -2\alpha^3=-2\beta^3-4$

$\therefore\alpha=1,\ \beta=-1$

따라서 두 곡선에 동시에 접하는 직선의 방정식은 $y=3x-2$ 이므로

$a=3,\ b=-2$

$\therefore a+b=3-2=1$

11. **답 ⑤**

[해설]

$y=x^3+ax^2+(2a+1)x+a+5$ 에서

$(x+1)^2a+(x^3+x+5-y)=0$

모든 실수 a 에 대하여 등식이 성립해야 하므로

$x+1=0,\ x^3+x+5-y=0$

$\therefore x=-1,\ y=3$

$\therefore P(-1,\ 3)$

한편, $y'=3x^2+2ax+2a+1$ 이므로 점 $P(-1,\ 3)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$-\frac{1}{3-2a+2a+1}=-\frac{1}{4}$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{4}(x+1)$

$\therefore y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$

12. **답 ③**

[해설]

주어진 함수는 삼차함수이므로 $a\neq0$

$f'(x)=(x-1)(ax+1)+x(ax+1)+ax(x-1)$

이므로 점 $P(1,\ 0)$ 에서의 접선 l 의 기울기는

$f'(1)=a+1$

접선 l과 수직이면서 점 $P(1,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{a+1}(x-1)\ (a\neq -1)$ $\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-\dfrac{1}{a+1}(x-1)=x(x-1)(ax+1)$

$(x-1)\left(ax^2+x+\dfrac{1}{a+1}\right)=0$

이때, $ax^2+x+\dfrac{1}{a+1}=0$은 $x=1$을 근으로 갖지 않으므로

$D=1-4a\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{-3a+1}{a+1}>0$

$\dfrac{3a-1}{a+1}<0,\ (3a-1)(a+1)<0$

$\therefore\ -1<a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{1}{3}\,(\because a\neq 0)$

13. 답 ④

[해설]

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는다.

$f'(x)=3x^2+2ax+2a=0$ 에서

$\dfrac{D}{4}=a^2-6a\leq 0,\ a(a-6)\leq 0\ \therefore 0\leq a\leq 6$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편 $m=f'(1)=3+4a$이므로 $a=\dfrac{m-3}{4}$

㉠에 대입하면 $0\leq\dfrac{m-3}{4}\leq 6$ $\quad\therefore 3\leq m\leq 27$

따라서, 정수 m의 최댓값은 27, 최솟값은 3이므로 그 합은 30이다.

14. 답 ②

[해설]

$y=x^3+3x^2$에서 $y'=3x^2+6x$

$P(t,t^3+3t^2)$ 으로 놓으면 점 P에서의 접선 l의 방정식은

$y-(t^3+3t^2)=(3t^2+6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2$ $\cdots\cdots$ ㉠

$y=x^3+3x^2$과 ㉠을 연립하면

$x^3+3x^2-(3t^2+6t)x+2t^3+3t^2=0$

$(x-t)^2(x+2t+3)=0$

$\therefore x=t$ 또는 $x=-2t-3$

접선 l이 곡선 $y=x^3+3x^2$과 P이외의 점에서 만나지 않으므로

$t=-2t-3$

$\therefore t=-1$

따라서 접선 l의 방정식은 $y=-3x-1$이므로 접선 l의 x절편은

$x=-\dfrac{1}{3}$

15. 답 ③

[해설]

$y=x(x-1)(x+2)=x^3+x^2-2x$ $\cdots\cdots$ ㉠

에서 $y'=3x^2+2x-2$

점 $P_n(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식은

$y-(x_n^3+x_n^2-2x_n)=(2x_n^2+2x_n-2)(x-x_n)$

$\therefore y=(3x_n^2+2x_n-2)x-2x_n^3-x_n^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$x^3+x^2-2x=(3x_n^2+2x_n-2)x-2x_n^3-x_n^2$

$(x-x_n)^2(x+2x_n+1)=0$

$\therefore x_{n+1}=-2x_n-1$

ㄱ. $x_1=1$이므로

$x_2=-2x_1-1=-3$ (참)

ㄴ. $x_{100}+2x_{99}=-1$ (거짓)

ㄷ. $x_{n+1}+\dfrac{1}{3}=-2\left(x_n+\dfrac{1}{3}\right),\ x_1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$

즉, 수열 $\left\{x_n+\dfrac{1}{3}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{4}{3}$, 공비가 -2인 등비수열을 이루므로

$x_n+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}(-2)^{n-1}$

$x_n=\dfrac{4}{3}(-2)^{n-1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{(-2)^{n+1}-1}{3}$

$\therefore x_{99}=\dfrac{2^{100}-1}{3}$ (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16. 답 ⑤

[해설]

$y=x^4-x^3$에서 $y'=4x^3-3x^2$

두접점이 각각 $P(\alpha,\ \alpha^4-\alpha^3)$, $Q(\beta,\ \beta^4-\beta^3)$ $(\alpha<\beta)$ 이므로 점 P에서의 접선의 방정식은

$y-(\alpha^4-\alpha^3)=(4\alpha^3-3\alpha^2)(x-\alpha)$

$\therefore y=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3$

이때, $y=x^4-x^3$과 $y=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3$에서 y를 소거한 x에 대한 사차방정식은 $\alpha,\ \beta$를 중근으로 갖는다.

$x^4-x^3=(4\alpha^3-3\alpha^2)x-3\alpha^4+2\alpha^3$

$x^4-x^3-(4\alpha^3-3\alpha^2)x+3\alpha^4-2\alpha^3=0$

α	1	-1	0	$-4\alpha^3+3\alpha^2$	$3\alpha^4-2\alpha^3$
		α	$\alpha^2-\alpha$	$\alpha^3-\alpha^2$	$-3\alpha^4+2\alpha^3$
α	1	$\alpha-1$	$\alpha^2-\alpha$	$-3\alpha^3+2\alpha^2$	0
		α	$2\alpha^2-\alpha$	$3\alpha^3-2\alpha^2$	
	1	$2\alpha-1$	$3\alpha^2-2\alpha$	0	

$\therefore (x-\alpha)^2\{x^2+(2a-1)x+3\alpha^2-2\alpha\}=0$

따라서 방정식 $x^2+(2\alpha-1)x+3\alpha^2-2\alpha=0$은 중근 β를 가지므로

$x^2+(2\alpha-1)x+3\alpha^2-2\alpha=(x-\beta)^2$

$\therefore 2\beta=-2\alpha+1,\ 3\alpha^2-2\alpha=\beta^2$

두 식을 연립하여 풀면

$3\alpha^2-2\alpha=\left(-\alpha+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$2\alpha^2-\alpha-\dfrac{1}{4}=0$

$8\alpha^2-4\alpha-1=0$

$\therefore \alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4}$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4}$

$\therefore \alpha\beta = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{1+\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1-3}{16} = -\dfrac{1}{8}$

17. 답 ①

[해설]

$f'(x) = 3x^2 - 6ax - 9a^2 = 3(x-3a)(x+a)$에서

$f'(x) = 3(x-3a)(x+a) < 0$이므로

$-a < x < 3a$ 또는 $3a < x < -a$

따라서, 감소상태인 x의 값은 $2a$이다.

18. 답 ④

[해설]

함수 $f(x)$가 모든 실수에서 증가하려면 $f'(x) \geq 0$ 이므로 방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

$f'(x) = x^2 + 4x\cos\theta + 1 = 0$ 에서

$\dfrac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 1 \leq 0$, $-\dfrac{1}{2} \leq \cos\theta \leq \dfrac{1}{2}$

$\therefore \dfrac{\pi}{3} \leq \theta \leq \dfrac{2}{3}\pi\ (\because 0 \leq \theta \leq \pi)$

따라서, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, $\beta = \dfrac{2}{3}\pi$이므로 $\sin(\beta - \alpha) = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

19. 답 ①

[해설]

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$이므로

$f'(x) = 0$에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	a	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$

위의 증감표에서

$x = 0$일 때, 극대이고, 극댓값은 $f(0) = a = 3$ …… ㉠

$x = 2$일 때 극소이고, 극솟값은 $f(2) = a - 4 = b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 3$, $b = -1$

$\therefore a + b = 2$

20. 답 ②

[해설] $f(x) = 2x^3 - ax$에서 $f'(x) = 6x^2 - a$

$f'(x) = 0$에서 $x = \pm\sqrt{\dfrac{a}{6}}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{a}{6}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{a}{6}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

위의 증감표에서 함수 $f(x)$는 $x = -\sqrt{\dfrac{a}{6}}$ 에서 극댓값

$f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{6}}\right) = -2 \cdot \dfrac{a\sqrt{a}}{6\sqrt{6}} + \dfrac{a\sqrt{6a}}{\sqrt{6}} = \dfrac{a\sqrt{6a}}{9}$ 를 갖는다.

$\therefore P\left(-\dfrac{\sqrt{6a}}{6}, \dfrac{a\sqrt{6a}}{9}\right)$

따라서 점 P의 자취의 방정식은 $y = -4x^3\ (x < 0)$이다.

곡선 $y = -4x^3\ (x < 0)$위의 점 $A(t, -4t^3)\ (t < 0)$ 에서의 접선이 직선 $y = -12x - 13$과 평행할 때, 두 직선 사이의 거리가 구하는 최단 거리가 된다.

$y = -4x^3$에서 $y' = -12x^2$이므로

$-12t^2 = -12$

$\therefore t = -1$

따라서 점 $A(-1, 4)$에서 직선 $12x + y + 13 = 0$까지의 거리는

$\dfrac{|-12+4+13|}{\sqrt{144+1}} = \dfrac{5}{\sqrt{145}} = \dfrac{\sqrt{145}}{29}$

21. 답 32

[해설]

(가)에서 $f(x)$가 기함수이므로

$f(x) = ax^3 + bx$ (a, b는 정수, $a \neq 0$)로 놓을 수 있다.

(나)에서 $f(1) = a + b = 5$ …… ㉠

$f'(x) = 3ax^2 + b$이고 $f'(1) = 3a + b$이므로 (다)에서

$1 < 3a + b < 7$ …… ㉡

㉠에서 $b = 5 - a$를 ㉡에 대입하면

$1 < 2a + 5 < 7$ $\therefore -2 < a < 1$

그런데 $a \neq 0$인 정수이므로 $a = -1$이고 ㉠에서 $b = 6$

이때, $f(x) = -x^3 + 6x$ 이므로 $f'(x) = -3x^2 + 6$

$f'(x) = 0$ 에서 $x = \pm\sqrt{2}$

따라서 $f(x)$는 $x = \sqrt{2}$일 때 극대이므로

$m = f(\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

$\therefore m^2 = 32$

22. 답 12

[해설]

(가)에서 $f'(2) = 0$

(나)에서 $g(x) = f(x) - f(1)$이라 하면 $f(x)$는 사차함수이므로 $g(x)$도 사차함수이다.

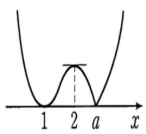
$g(x) = f(x) - f(1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

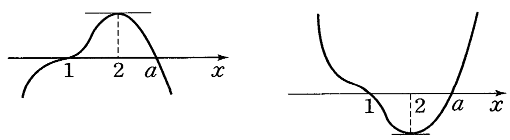
$g'(x) = f'(x)$

$\therefore g'(2) = f'(2) = 0$, $g(1) = f(1) - f(1) = 0$

그런데 (나)에서 $|g(x)|$ 가 $x = a\ (a > 0)$에서만 미분가능하지 않으므로 $x = 1$에서는 미분가능하다.

따라서 $y = |g(x)|$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같고 $y = g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





따라서 $g'(x) = m(x-1)^2(x-2)\ (m \neq 0)$ 로 놓으면

$g'(x) = f'(x)$이므로

$\dfrac{f'(5)}{f'(3)} = \dfrac{48m}{4m} = 12$

23. 답 ①

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지므로

$f'(1)=3+2a+b=0$

$\therefore b=-2a-3$

$\therefore f'(x)=3x^2+2ax+b$

$=3x^2+2ax-2a-3$

$=(x-1)(3x+2a+3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-2a-3}{3}$

이때, $\dfrac{-2a-3}{3}>1$이어야 하므로 $a<-3$

따라서 구하는 조건은

$2a+b+3=0,\ a<-3$

24. 답 ③

[해설]

$f(x)=x^3-ax^2+ax$ 에서 $f'(x)=3x^2-2ax+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기가 m이므로

$f'(1)=3-a=m$

$\therefore a=3-m$

이때, 곡선 $y=f(x)$가 극값을 갖지 않기 위해서는

$f'(x)=3x^2-2(3-m)x+3-m=0$이 서로 다른 두 실근을 갖지 않아야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(3-m)^2-3(3-m)\le 0$

$m(m-3)\le 0$

$\therefore 0\le m\le 3$

따라서 m의 최댓값은 3이다.

25. 답 ③

[해설]

$f(x)=3x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=9x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=\alpha,\ x=\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{9},\ \ \alpha\beta=\dfrac{b}{9}$

선분 AB의 중점이 $(0,\ 1)$이므로

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=0=-\dfrac{a}{9}$

$\therefore a=0,\ \alpha=-\beta,\ b=9\alpha\beta=-9\alpha^2$

$\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}=1=\dfrac{3(\alpha^3+\beta^3)+b(\alpha+\beta)+2c}{2}$

$\therefore c=1$

극댓값과 극솟값의 차가 $\dfrac{4}{9}$이므로

$|f(\alpha)-f(\beta)|=|3\alpha^3-3\beta^3+b\alpha-b\beta|$

$=|6\alpha^3-9\alpha^2\times 2\alpha|=\dfrac{4}{9}$

$|\alpha|^3=\dfrac{1}{27},\ \ |\alpha|=\dfrac{1}{3}$

$\therefore b=-9\alpha^2=-9\times\dfrac{1}{9}=-1$

$\therefore a+b+c=0-1+1=0$

26. 답 ②

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{3}ax^3+(b-1)x^2+(2-a)x+1$에서

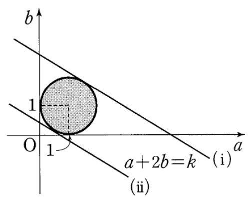
$f'(x)=ax^2+2(b-1)x+(2-a)$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 방정식 $f'(x)=0$의 판별식 $D\le 0$이어야 하므로

$\dfrac{D}{4}=(b-1)^2-a(2-a)\le 0$

$(b-1)^2+a^2-2a\le 0$

$\therefore (a-1)^2+(b-1)^2\le 1$



이 부등식의 영역은 점 $(1,\ 1)$이 중심이고 반지름의 길이가 1인 원의 내부이다. (단, 경계선 포함)

$a+2b=k$로 놓으면 점 $(1,\ 1)$에서 직선 $a+2b-k=0$까지의 거리가 1일 때, k의 값은 최대이고, 위의 그림에서 (i)의 경우이다.

$\dfrac{1+2-k}{\sqrt{1+4}}=1$

$|3-k|=\sqrt{5}$

$3-k=\pm\sqrt{5}$

$\therefore k=3+\sqrt{5}$ ($\because$ (i)의 경우)

따라서 $a+2b$의 최댓값은 $3+\sqrt{5}$이다.

27. 답 ③

[해설]

$f(x)=x^4-4x^3+2ax^2$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+4ax=4x(x^2-3x+a)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 갖기 위해서는 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때, $f'(x)=0$의 한 근이 0이므로 $x^2-3x+a=0$은 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$D=(-3)^2-4a>0,\ \ a\ne 0$

$\therefore a<0,\ \ 0<a<\dfrac{9}{4}$ …… ㉠

따라서 $f(x)$가 극댓값을 갖기 위한 정수 a의 최댓값은 $\boxed{2}$이다. 또, $f(x)$가 극값을 하나만 가지는 경우는 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않을 경우이다.

㉠의 부정이므로 극댓값을 갖지 않을 a의 값의 범위는 $a\ge\dfrac{9}{4}$ ($\because a\ne 0$)

따라서 극값을 하나만 갖도록 하는 정수 a의 최솟값은 $\boxed{3}$이다.

$\therefore$ (가) 2, (나) 3

28. 답 ③

[해설]

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근을 p, q, r라 하면
$f(x)=(x-p)(x-q)(x-r)$로 놓을 수 있다. 즉,
$x^3+ax^2+bx+c=x^3-(p+q+r)x^2+(pq+qr+pr)x-pqr$
이므로 $p+q+r=-a$
$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$을 만족하는 x의 값이 α, β이므로

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3}a$$

$$\therefore p+q+r=-a=\frac{3}{2}(\alpha+\beta)$$

29. 답 ①

[해설]

$g(x)$를 $(x-\alpha)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $A(x-\alpha)+B$라 하면
$g(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+A(x-\alpha)+B$ 이고,
$g(\alpha)=f(\alpha)-f(\alpha)=\boxed{0}$이므로 $B=0$
삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극값을 가지므로 $f'(\alpha)=0$ 이고,
$g'(x)=2(x-\alpha)Q(x)+(x-\alpha)^2Q'(x)+A$
이 때, $g'(x)=f'(x)$ 이므로

$$g'(\alpha)=f'(\alpha)=\boxed{0} \quad \therefore A=0$$

따라서, $g(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어 떨어진다.

30. 답 ③

[해설]

ㄱ. $x\to\infty$일 때, $f(x)\to\infty$이므로 $a>0$ (참)
ㄴ. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
$f'(x)=0$의 두 근이 0, p이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$$0+p=-\frac{2b}{3a}>0$$

ㄱ에서 $a>0$이므로 $b<0$ (참)
ㄷ. $f'(0)=0$이므로 $f'(0)=c=0$ (거짓)
따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

31. 답 ④

[해설]

방정식 $f(x)=0$의 해는 $y=f(x)$의 x절편이므로
$x=a,\ c,\ e$
방정식 $f'(x)=0$의 해는 $y=f(x)$가 극값을 갖는 x의 값이므로
$x=b,\ c,\ d$
$\therefore A=\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$
$\dfrac{f(x)}{f'(x)}=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 그리고 $f'(x)\neq 0$
$\therefore B=\{a,\ e\}$
$\{f(x)\}^2+\{f'(x)\}^2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ 그리고 $f'(x)=0$
$\therefore C=\{c\}$

$$\therefore (A-B)\cap(A-C)=\{b,\ c,\ d\}\cap\{a,\ b,\ d,\ e\}=\{b,\ d\}$$

32. 답 ②

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=q$, $x=r$이므로 서로 다른 부호의 근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크다.

ㄱ. $q+r=-\dfrac{2b}{3a}>0$ $\quad\therefore ab<0$ (참)

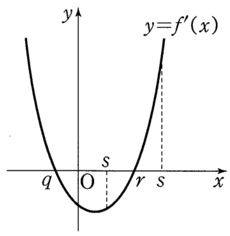
ㄴ. $qr=\dfrac{c}{3a}<0$

$ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세근이 p, r, r이므로

$$pr+pr+r^2=r(2p+r)=\frac{c}{a}<0$$

이때, $r>0$이므로 $2p+r<0$ (참)

ㄷ. $0<s<r$이면 $f'(s)<0$이므로
$3as^2+2bs+c<0$
$0<r<s$이면 $f'(s)>0$이므로
$3as^2+2bs+c>0$
그러므로 ㄷ은 거짓이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

33. 답 ③

[해설]

ㄱ. $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$
$x\leftarrow 2$일 때, $f'(x)>0$
$x<-2$일 때 $f'(x)>0$
$-2<x<1$일 때 $f'(x)<0$
$x>1$일 때 $f'(x)>0$
따라서 $y=f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 갖는다. (참)
ㄴ $f'(x)-g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$x<-2$일 때 $f'(x)-g'(x)>0$
$-2<x<2$일 때 $f'(x)-g'(x)<0$
$x>2$일 때 $f'(x)-g'(x)>0$
따라서 $y=f(x)-g(x)$는 $x=2$에서 극솟값을 갖는다. (거짓)
ㄷ. $y=f(x)-g(x)$는 삼차함수이고, $x=-2$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 가지므로 방정식 $f(x)-g(x)=k$는 $f(2)-g(2)<k<f(-2)-g(-2)$ 일 때 서로 다른 세 실근을 갖는다. 따라서 $f(2)-g(2)<f(0)-g(0)<f(-2)-g(-2)$이므로 방정식 $f(x)-g(x)=f(0)-g(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. 따라서 방정식 $f(x)-f(0)=g(x)-g(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)
그러므로 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

34. 답 ④

[해설]

$f'(x)$의 그래프로부터 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극소	↘

ㄱ, 함수 $f(x)$는 $x=0$ 일 때, 극솟값을 가지므로 $f(0)=0$ 이면 $f(4)>0$ (거짓)

ㄴ. $f'(x)=ax(x-4)$ $(a\neq 0)$로 놓을 수 있다.

함수 $y=f(x)$의 $x=-1$에서의 접선의 기울기가 -5이므로

$f'(-1)=5a=-5,\quad \therefore a=-1$

$f'(x)=-x(x-4)$에서 $f'(2)=4$

그러므로 곡선 $y=f(x)$의 $x=2$에서의 접선의 기울기는 4이다. (참)

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=4$ 에서 극대이고 최대이므로 극댓값과 최댓값은 같다. (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

35. 답 ①

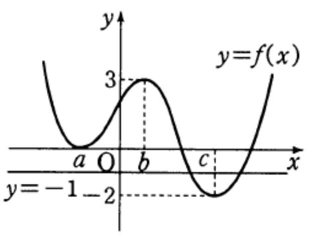
[해설]

주어진 $f'(x)$의 그래프를 이용하여 $f(x)$에 대한 증감표를 만들면 다음과

같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↗	3	↘	-2	↗

따라서, $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



방정식 $f(x)+1=0$의 실근은 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-1$ 교점의 x좌표이므로 그래프에서와 같이 서로 다른 두 양근을 갖는다.

36. 답 ②

[해설]

$F(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $F'(x)=f'(x)-g'(x)$

$F'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=c$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $a<x<b$에서 $F(x)$는 감소한다. (거짓)$F(x)$

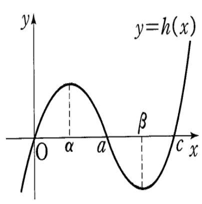
ㄴ. $F(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=F'(x)$이므로

$y=h(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다. $h'(\alpha)=0,\ h'(\beta)=0$이므로

방정식 $h'(x)=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이고, 이들은 모두 양수이다. (거짓)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ뿐이다.



37. 답 ③

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1$ (참)

ㄴ. 주어진 그래프를 이용하여 $f(x)$의 증감표를 만들면 다음과 같다.

x	(-2)	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$-$	0	$-$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↘	극소	↗	극대	↘	

즉, 구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값ㅅ, $x=2$에서 극댓값을 갖는다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

38. 답 ⑤

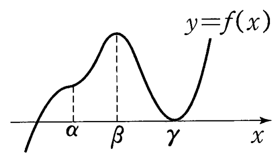
[해설]

$f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=\beta,\ x=\gamma$에서 극값을 갖는다. (참)

ㄴ. $f(\gamma)=0$일 때, $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

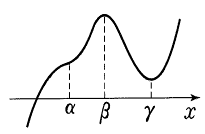


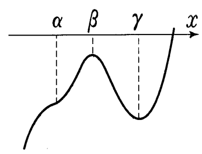
$y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점이 2개이므로 방정식 $y=f(x)$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. 방정식 $f(x)-k=0$의 실근의 개수는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로 두 그래프의 교점이 2개이려면 $k=f(\beta)$ 또는 $k=f(\gamma)$이어야 한다.

$f(\beta)f(\gamma)>0$이면 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

(i) $f(\beta)>0,\ f(\gamma)>0$ (ii) $f(\beta)<0,\ f(\gamma)<0$





따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점이 1개이므로 방정식 $f(x)=0$은 한 개의 실근을 갖는다. (참)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

39. 답 ①

[해설]

두 점 $A,\ B$의 좌표를 각각 $A(\alpha,\ 0),\ B(\beta,\ 0)$으로 놓으면

$f(x)=-(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$=-\{x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x-\alpha^2\beta\}$

$f'(x)=-\{3x^2-2(2\alpha+\beta)x+\alpha(\alpha+2\beta)\}$

$=-(x-\alpha)(2x-\alpha-2\beta)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=\alpha$ 또는 $x=\dfrac{\alpha+2\beta}{3}$

$\therefore C\left(\dfrac{\alpha+2\beta}{3},\ 0\right)$

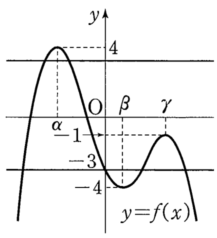
따라서 점 C는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$

40. 답 ⑤

[해설]

주어진 도함수의 그래프의 개형과 주어진 함숫값을 참고로 하여 사차함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 추측하면 오른쪽 그림과 같다.



방정식 $|f(x)|-3=0$을 풀면 $|f(x)|=3$에서 $f(x)=\pm 3$

따라서 방정식 $f(x)=3$의 실근은 2개, $f(x)=-3$의 실근은 4개이므로 구하는 실근의 개수는 6개다.

41. 답 ⑤

[해설]

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$k+5$	↘	$k-27$	↗

위의 증감표에서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.

$y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 3이어야 하므로

$f(-1)=k+5=3$에서 $k=-2$

$f(3)=k-27=3$에서 $k=30$

그런데 $k>0$이므로 $k=30$

42. 답 ⑤

[해설]

원점을 지나는 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $f(-x)=f(x)$를 만족한다.

따라서, $f(x)=ax^4+bx^2\,(a\neq 0)$으로 놓을 수 있다.

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(2)=0$이다.

$f'(x)=4ax^3+2bx$에서 $f'(2)=32a+4b=0$

$\therefore b=-8a$

함수 $f(x)=ax^4-8ax^2$의 그래프와 x축과의 교점의 좌표는 방정식 $ax^4-8ax^2=0$의 근이므로

$ax^2(x^2-8)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

따라서, 교점의 x좌표 중 양수인 것은 $2\sqrt{2}$이다.

43. 답 ⑤

[해설]

극대와 극소를 모두 가지므로 함수 $f(x)$는 삼차함수이고, 왼쪽에서 극솟값을 가지므로 $a<0$이다.

$f'(x)=3ax^2+2bx+(a^2-40)$이고, $f'(x)=0$의 두 근이 $x=2$와 $x=3$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2+3=-\frac{2b}{3a},\quad 2\times 3=\frac{a^2-40}{3a}$$

$a^2-18a-40=0$에서 $(a-20)(a+2)=0$

$a<0$이므로 $a=-2$

$\therefore b=-\dfrac{15}{2}a=15$

$\therefore |ab|=30$

44. 답 14

[해설]

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

따라서, $f(x)$는 $x=-2$일 때 극댓값을 갖고, 극댓값은

$f(-2)=-8+24=16$

$\therefore a=-2,\ b=16$

$\therefore a+b=14$

45. 답 ②

[해설]

$f(x)=x^3-3ax^2+a-1$에서

$f'(x)=3x^2-5ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$ $(a>0)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 함수 $f(x)$는

$x=0$에서 극댓값 $f(0)=a-1$,

$x=2a$에서 극솟값 $f(2a)=8a^3-12a^3+a-1=-4a^3+a-1$

을 갖는다.

따라서 두 점 $(0,\ a-1)$, $(2a,\ -4a^3+a-1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(a-1)=\frac{-4a^3+a-1-(a-1)}{2a-0}(x-0)$$

$\therefore y=-2a^2x+a-1$

이 직선이 점 $\left(2,\ -\dfrac{3}{2}\right)$을 지나므로

$-\dfrac{3}{2}=-4a^2+a-1$

$8a^2-2a-1=0$

$(4a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}\ (\because a>0)$

46. 답 ④

[해설]

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

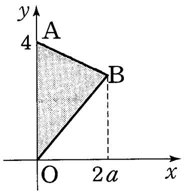
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$4-4a^2$	$\nearrow$

위의 증감표에서 $f(x)$는 $x=0$일 때 극댓값, $x=2a$일 때 극솟값을 가지므로

$A(0,\ 4),\ B(2a,\ 4-4a^2)$

따라서, 삼각형 AOB의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2a=2$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

47. 답 ②

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$의 두 근이 $x=k,\ x=-k$이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 $k+(-k)=-\dfrac{2a}{3},-k^2=\dfrac{b}{3}$

$\therefore a=0,\ b=-3k^2$

곡선 $y=f(x)$에 접하는 접선의 기울기 m은

$m=f'(x)=3x^2+2ax+b=3x^2+b$

이므로 m은 $x=0$일 때 최솟값 b를 가진다.

$\therefore b=-2$

한편 , $f(k)+f(-k)=0$이므로

$c=0$

$\therefore a+b+c=0-2+0=-2$

48. 답 ①

[해설]

$f'(x)=x^3+ax^2+bx+2$ $\cdots\cdots$ ㉠

방정식 $f'(x)=0$의 근은 $x=-2$, c이고, 특히 $x=c$는 중근을 갖는다.

$\therefore f'(x)=(x+2)(x-c)^2$

$=x^3+(2-2c)x^2+(c^2-4c)x+2c^2$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=2-2c, b=c^2-4c, 2=2c^2$

$\therefore c=1, a=0, b=-3 \quad (\because c>0)$

$\therefore a+b+c=-2$

49. 답 ①

[해설]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a>0)$로 놓으면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

방정식 $f'(x)=0$의 두 근이 $1,\ 3$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\dfrac{2b}{3a}$ 에서 $\dfrac{b}{a}=-6$

$1\cdot 3=\dfrac{c}{3a}$에서 $\dfrac{c}{a}=9$

방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 실근이 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a\alpha\beta\gamma$$

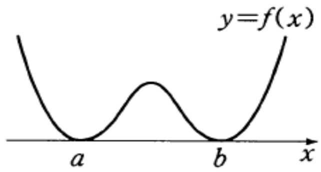
$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}=6,\ \ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}=9$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=36-18=18$$

50. 답 ③

[해설]

(가),(나)의 조건을 만족하는 사차함수$f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(x)=k(x-a)^2(x-b)^2\,(k>0)$ 으로 놓으면

$f'(x)=2k(x-a)(x-b)^2+2k(x-a)^2(x-b)$

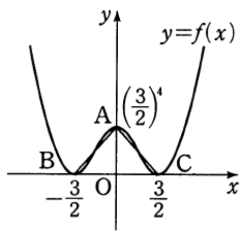
$=2k(x-a)(x-b)(2x-a-b)$

$f'(x)=0$에서 $x=a,\ x=b,\ x=\dfrac{a+b}{2}$

$a<\dfrac{a+b}{2}<b$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 일 때, 극댓값을 갖는다.

51. 답 243

[해설]



$f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2$에서

$f'(x)=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{3}\right)^2$

$\quad +2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$

$=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}+x-\dfrac{3}{2}\right)$

$=4x\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$

x	$\cdots$	$-\frac{3}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

그러므로 점 A의 좌표는 $\left(0,\left(\dfrac{3}{2}\right)^4\right)$ 이고

$b<c$라 하면 점 B, C 의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2},0\right),\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ 이다.

따라서, $\triangle ABC$의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\left(2\times\dfrac{3}{2}\right)\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^4=\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}$

$\therefore k=243$

52. 답 ③

[해설]

ㄱ. $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면

$b=d=0$

따라서, $g(x)=ax^2+c$이므로 $g'(x)=2ax$

$g'(1)=2a, g'(2)=4a$ 이고, $a>0$이므로

$g'(1)<g'(2)$ (참)

ㄴ. (반례) $f(x)=x^3$이면 극값을 갖지 않는다. 이 때,

$g(x)=x^2$이고 $y=x^2$의 그래프는 x축과 한 점에서 만난다. (거짓)

ㄷ. $f(x)$가 $x=-5$와 $x=1$에서 극값을 가지면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$의 두 근이 -5와 1 이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$-\dfrac{2B}{3A}=-5+1=-4$ $\therefore b=6a$

$g'(x)=2ax+v=2ax+6a=2a(x+3)=0$ 에서

$x=-3$이고 $x<-3$일 때, $g'(x)<0, x>-3$ 일 때, $g'(x)>0$

이므로

$g(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 같는다. (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이 다.

53. 답 ④

[해설]

방정식 $f(x)=0$ 의 세 실근을 $a-3,\ a,\ a+3$ 이라하면

$\alpha+\beta+\gamma=3a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3a^2-9,\ \alpha\beta\gamma=a^3-9a$

이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 1 이므로

$f(x)=x^3-3ax^2+(3a^2-9)x-a^3+9a$ 로 놓을수 있다.

$f'(x)=3x-6ax+(3a^2-9)$ 에서 방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근을

$p,\ q\ (p<q)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=2a,\ pq=a^2-3$ 이므로

$(p-q)^2=(p+q)^2-4pq=4a^2-4(a^2-3)=12$

$\therefore p-q=-2\sqrt{3}\ (\because p<q)$

극댓값은 $f(p)$, 극솟값은 $f(q)$이므로

$f(p)-f(q)=(p^3-q^3)-3a(p^2-q^2)+(3a^2-9)(p-q)$

$=(p-q)\{(p+q)^2-pq\}-3a(p-q)(p+q)+(3a^2-9)(p-q)$

$=-2\sqrt{3}(3a^2+3)+12\sqrt{3}a^2-6\sqrt{3}a^2+18\sqrt{3}$

$=12\sqrt{3}$

54. 답 ①

[해설]

$f(x)=2x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$가 점 (1, 3)을 지나므로

$f(1)=2+a+b=3$ …… ㉠

$f'(x)=6x^2+2ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{b}{6}$

$\beta-\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$ 이므로

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{2b}{3}=\left(\dfrac{\sqrt{10}}{3}\right)^3$

$\therefore a^2-2b=10$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^2+6a-16=0$

$(a+8)(a-2)=0$

$a>0$이므로 $a=2,\ b=-1$

$\therefore ab=-2$

55. 답 ④

[해설]

$f'(x)=3x^2+2ax+b$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로 근과 계수의 관계에 대하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3},\ \alpha\beta=\dfrac{b}{3}$

$f'(\alpha)=0$이므로 $3\alpha^2+2a\alpha+b=0$ …… ㉠

$f(\alpha)=f(2)$ 에서

$\alpha^3+a\alpha^2+b\alpha+c=8+4a+2b+c$

$(\alpha^3-8)+a(\alpha^2-4)+b(\alpha-2)=0$

$(\alpha-2)\{(\alpha^2+2\alpha+4)+a(\alpha+2)+b\}=0$

$\alpha\neq 2$이므로 $(\alpha^2+2\alpha+4)+a(\alpha+2)+b=0$

$\alpha^2+(a+2)\alpha+2a+b+4=0$ …… ㉡

㉠－㉡을 하면

$2\alpha^2+(a-2)\alpha-2a-4=0$

$(\alpha-2)\{2\alpha+(a+2)\}=0$

$\alpha\neq 2$이므로 $\alpha=-\dfrac{a+2}{2}$

$\alpha+\beta=-\dfrac{2a}{3}$ 에서

$\beta=-\alpha-\dfrac{2a}{3}=\dfrac{a+2}{2}-\dfrac{2a}{3}=1-\dfrac{a}{6}$

$\therefore 3\beta-\alpha=3-\dfrac{a}{2}+\dfrac{a+2}{2}=4$

56. 답 ③

[해설]

진수조건에 의하여

$5-x>0,\ x+4>0\ \therefore -4<x<5$

$f(x)=\log_9(5-x)+\log_3(x+4)=\log_9(5-x)+2\log_9(x+4)$

$=\log_9(5-x)(x+4)^2=\log_9(-x^3-3x^2+24x+80)$

$y=-x^3-3x^2+24x+80$ 이라 하면

$y'=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$

$y'=0$에서 $x=2\ (\because -4<x<5)$

x	(-4)	$\cdots$	2	$\cdots$	(5)
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	극대	↘	

위의 증감표에서 y는 $x=2$일때, 극대이고 최대이므로 $f(x)$도 $x=2$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서, 구하는 최댓값은

$f(2)=\log_9 108=1+\log_9 12=\dfrac{3}{2}+\log_3 2$

57. 답 55

[해설]

$xy^2=100$의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log x+2\log y=2\,(0\le \log x\le 1)$$

$\log x=a,\ \log y=b$라 하면

$$a+2b=2,\ 0\le a\le 1$$

$$\therefore b=1-\frac{a}{2}\,(0\le a\le 1)$$

$$\therefore (\log x)^3+(\log y)^2=a^3+b^2$$

$$=a^3+\left(1-\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=a^3+\frac{a^2}{4}-a+1\ \ (0\le a\le 1)$$

$f(a)=a^3+\dfrac{a^2}{4}-a+1$로 놓으면

$$f'(a)=3a^2+\frac{a}{2}-1=\frac{1}{2}(3a+2)(2a-1)$$

$f'(a)=0$에서 $a=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $a=\dfrac{1}{2}$

$0\le a\le 1$에서 $f(a)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	1	$\searrow$	$\frac{11}{16}$	$\nearrow$	$\frac{5}{4}$

따라서 $f(a)$는 $a=1$일 때, 최댓값 $M=f(1)=\dfrac{5}{4}$,

$a=\dfrac{1}{2}$일 때 최솟값 $m=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{16}$을 갖는다.

$$\therefore \frac{100m}{M}=100\times\frac{11}{16}\times\frac{4}{5}=55$$

58. 답 ⑤

[해설]

함수 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 방정식 $h(x)=0$의 세근은 a,b,c이다.

$\therefore h(a)=h(b)=h(c)=0$

또한, 미분가능한 함수는 주어진 구간의 양 끝 값과 극값 중에서 최댓값을 갖는다.

함수 $h(x)$는 구간 (b,c) 에서 미분가능하고

$h(b)=h(c)=0$이므로 $h(x)$의 최댓값은 극값에서 존재한다.

$\therefore h'(d)=0$

따라서 $h'(d)=f'(d)-g'(d)=0$에서

$f'(d)=g'(d)$

59. 답 ④

[해설]

$x+y+z=0$에서 $x+y=-z$ …… ㉠

$x^2+y^2+z^2=(x+y)^2-2xy+z^2=6$에서 ㉠을 대입하여 정리하면

$xy=z^2-3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x,\ y$는 실수이므로 $x,\ y$는 방정식

$$t^2+zt+z^2-3=0$$

의 실근이다. 따라서

$$D=z^2-4z^2+12\ge 0$$

에서 $-2\le z\le 2$ …… ㉢

한편,

$$x^3+y^3+z^3=(x+y)^3-3xy(x+y)+z^3$$

$$=(-z)^3-3(z^2-3)(-z)+z^3$$

$$=3z^3-9z$$

이고, $f(z)=3z^3-9z$로 놓으면

$f'(z)=9z^2-9=0$에서

$z=\pm 1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $f(z)$의 함숫값을 구하면

$$f(1)=-6,\ f(-1)=6$$

$$f(2)=6,\ f(-2)=-6$$

따라서, $x^3+y^2+z^3$의 최댓값은 6이고, 최솟값은 -6이므로 그 합은 0이다.

60. 답 ②

[해설]

음료수를 가장 많이 담을 수 있다는 것은 부피가 가장 크다는 것이다. 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면 겉넓이는

$$2\pi r^2+2\pi rh=54\pi$$

$\therefore\ h=\dfrac{27-r^2}{r}$ …… ㉠

따라서 부피 V는

$$V=\pi r^2\cdot\frac{27-r^2}{r}=\pi r(27-r^2)$$

$$\therefore \frac{dV}{dr}=\pi(27-r^2)+\pi r(-2r)$$

$$=-3\pi(r+3)(r-3)$$

$\dfrac{dV}{dr}=0$에서 $r=3\ (\because\ r>0)$

$r>0$이므로 부피 V는 $r=3$에서 극대이면서 최대이다.

이 때, ㉠에서 $h=6(\mathrm{cm})$

61. 답 ④

[해설]

$$F=p^2(4-\frac{2p}{3})+c=-\frac{2p^3}{3}+4p^2+c$$

투여량 p에 대한 혈압F의 변화율은

$$\frac{dF}{dp}=-2p^2+8p=-2(p^2-4p)=-2(p-2)^2+8$$

이므로 $p=2$일때 투여량 p에 대한 혈압F 의 변화율이 가장 크다.

따라서, 투여량이 $2mL$ 일 때 더 이상의 투여를 중단한다.

62. 답 527

[해설]

점 P의 좌표를 $(x,\ -x^2+5x)$라 하면, $0\le x\le 5$일 때, 두 정사각형 $OABC,\ PQRS$가 겹친다. 평행이동한 정사각형과 정사각형 $OABC$가

겹치는 부분의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$S(x)=x(-x^2+5x)=-x^3+5x^2$

$S'(x)=-3x^2+10x=-3x(x-\frac{10}{3})$ 이므로

$S'(x)=0$ 에서 $x=0,\ \frac{10}{3}$

x	0	$\cdots$	$\frac{10}{3}$	$\cdots$	5
$S'(x)$	0	+	0	−	
$S(x)$		↗	극대	↘	

위의 증감표에서 $S(x)$는 $x=\frac{10}{3}$ 일때, 극대이고 최대이므로 최댓값은

$S(\frac{10}{3})=-\frac{1000}{27}+5\cdot\frac{100}{9}=\frac{500}{27}$

$\therefore p+q=27+500=527$

63. 답 ②

[해설]

점 P 의 좌표를 $(x,\ 0)$ $(0<x<1)$이라 하면

$\triangle AOP \sim \triangle PBQ$ 이므로

$\overline{AO}:\overline{OP}=\overline{PB}:\overline{BQ}$ 에서

$1:x=(1-x):\overline{BQ}$ $\quad\therefore \overline{BQ}=x(1-x)$

삼각형 OPQ 의 넓이는 $f(x)$라 하면

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x(1-x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^2$

$f'(x)=-\frac{3}{2}x^2+x=-x\left(\frac{3}{2}x-1\right)$

$f'(x)=0$에서 $x=\frac{2}{3}\ (\because x\neq 0)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서, $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}$일 때 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{27}$

64. 답 ④

[해설]

$f'(x)=2(x+1)$이므로 $P(t,\ (t+1)^2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t+1)^2=2(t+1)(x-t)$

점 Q 의 x좌표는 $y=0$일 때이므로

$-(t+1)^2=2(t+1)(x-t)$

$2(x-t)=-(t+1)$

$x=t-\frac{t+1}{2}=\frac{t-1}{2}$

$\therefore Q\left(\frac{t-1}{2},\ 0\right)$

삼각형 POQ 의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-t}{2}\cdot(t+1)^2=-\frac{1}{4}(t^3+t^2-t-1)$

$S'(t)=-\frac{1}{4}(3t^2+2t-1)=-\frac{1}{4}(t+1)(3t-1)$

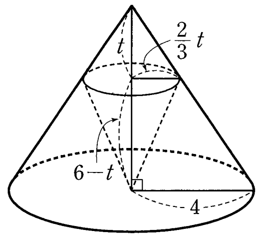
$S'(t)=0$에서 $t=\frac{1}{3}\ (\because -1<t<1)$

t		$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

65. 답 155

[해설]

직원뿔 B의 부피를 V라 하면 오른쪽 그림에서



$V=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{4}{9}t^2(6-t)$

$=\frac{4}{27}\pi t^2(6-t)$

$f(t)=\frac{4}{27}\pi t^2(6-t)$라 하면

$f'(t)=\frac{4}{27}\pi(12t-3t^2)$

$=\frac{4}{9}\pi t(4-t)$

$f'(x)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=4$

$0<t<6$에서 $f(t)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	4	$\cdots$	(6)
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	극대	↘	

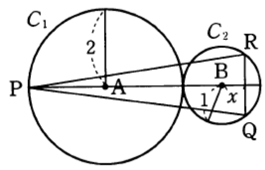
따라서 $f(t)$는 $t=4$일 때, 극대이면서 최대이므로 직원뿔 B의 부피의 최댓값은

$f(4)=\frac{4}{27}\pi\cdot 16\cdot 2=\frac{128}{27}\pi$

$\therefore p+q=27+128=155$

66. 답 ③

[해설]



위의 그림과 같이 이등변삼각형 PQR 에서 밑변 QR의 길이가 일정할

때, 넓이가 최대가 되는 경우는 점 P가 직선 AB와 원 C_1의 교점일 때 이다. 점 B와 변 QR사이의 거리를 x, 삼각형 PQR의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-x^2}\cdot(4+1+x)=\sqrt{1-x^2}(x+5)$

S^2이 최대일 때, S도 최대이므로

$f(x)=S^2=(1-x^2)(x^2+2x+25)$라 하면,

$f'(x)=-2x(x^2+10x+25)+(1-x^2)(2x+10)$

$=-2x(x+5)^2+2(1-x^2)(x+5)$

$=-2(x+5)(2x^2+5x-1)$

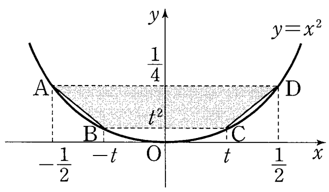
$f'(x)=0$ 에서 $0<x<1$ 이므로 $x=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$	$\cdots$	(1)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서, $x=\dfrac{-5+\sqrt{33}}{4}$ 일 때, 넓이 S는 최대이다.

67. 답 ①

[해설]
사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면



$$S=\frac{1}{2}(2t+1)\left(\frac{1}{4}-t^2\right)$$
$$=\frac{1}{8}(-8t^3-4t^2+2t+1)$$
$$\therefore\ S'=\frac{1}{8}(-24t^2-8t+2)$$
$$=-\frac{1}{4}(12t^2+4t-1)$$
$$=-\frac{1}{4}(6t-1)(2t+1)$$

$S'=0$에서 $t=\dfrac{1}{6}$ $(\because\ t>0)$

$0<t<\dfrac{1}{2}$에서 S의 증감표는 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\dfrac{1}{6}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{1}{2}\right)$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	극대	↘	

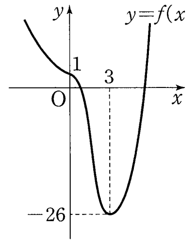
따라서 S는 $t=\dfrac{1}{6}$일 때 극대이면서 최대이므로 S의 최댓값은 $\dfrac{4}{27}$이다.

68. 답 ③

[해설] $f(x)=x^4-4x^3+1$로 놓으면
$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1	↘	-26	↗

오른쪽 그림에서 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2개다.



69. 답 ③

[해설]
ㄱ. $f_1(x)=x+f_0(x)=x+1$

$$f_2(x)=\frac{1}{1\cdot 2}x^2+f_2(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$$
$$f_3(x)=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+f_2(x)=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$$
$$f_4(x)=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4+f_3(x)=\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+1$$
$$\vdots$$

이므로 $f'_n(x)=f_{n-1}(x)$임을 추정할 수 있다. (참)

ㄴ. $f'_3(x)=f_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2+x+1=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+\dfrac{1}{2}>0$

이므로 $f_3(x)$는 증가함수이고, $f_3(0)=1$이므로 방정식 $f_3(x)=0$은 음의 실근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. 방정식 $f_3(x)=0$의 음의 실근을 α라 하면
$f'_4(\alpha)=f_3(\alpha)=0$이 되므로
$x>\alpha$일 때, $f'_4(x)=f_3(x)>0$이고,
$x<\alpha$일 때, $f'_4(x)=f_3(x)<0$이다.
따라서 $f_4(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이다.
한편, $f_4(\alpha)=4\alpha^4+f_3(\alpha)=4\alpha^4>0$이므로 방정식
$f_4(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. (참)
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

70. 답 ③

[해설]
$(\log_3 x)^3-2\log_3 x^3-3^{\log_3 a}=0$을 정리하면

$(\log_3 x)^3-6\log_3 x-a=0 \qquad (a>0) \quad \cdots\cdots$ ㉠

로그의 진수 조건을 생각하면 ㉠은 서로 다른 세 양의 근을 가져야 하므로 이것은 $\log_3 x=t$로 치환하여 나오는 삼차방정식

$f(t)=t^3-6t-a=0$

이 서로 다른 세 실근을 가지는 것과 마찬가지다.
즉, $y=f(t)$가 서로 다른 부호의 극값을 가지면 된다.
$f'(t)=3t^2-6=3(t^2-2)=0$에서 $t=\pm\sqrt{2}$이므로

$f(\sqrt{2})f(-\sqrt{2})=(-4\sqrt{2}-a)(4\sqrt{2}-a)<0$

$\therefore\ -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$

$a>0$이므로

$0<a<4\sqrt{2}=5.6\cdots$

따라서 자연수 a는 a, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

71. 답 16

[해설]

$x^3-4x^2+6x=2x^2-3x+a$

$x^3-6x^2+9x-a=0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x-a$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$=3(x-1)(x-3)$

교점이 2개 이상이려면 방정식 $f(x)=0$의 해가 2개 이상이어야 하므로

$f(1)f(3)=(4-a)(-a)\le 0$

$a(a-4)\le 0 \qquad \therefore 0\le a\le 4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=0^2+4^2=16$

72. 답 ④

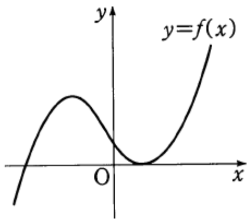
[해설]

$y=\dfrac{16}{x},\ y=-x^2+a$에서 $\dfrac{16}{x}=-x^2+a$

$x^3-ax+16=0\cdots\cdots$ ㉠

두함수의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-ax+16$이라 하면, $f(0)>0$ 이므로 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.



$f(x)=x^3-ax+16$에서 $f'(x)=3x^2-a$

$f'(x)=0$에서 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$

$f(x)$는 $x=\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ 에서 극솟값을 0을 가지므로

$\dfrac{a\sqrt{a}}{3\sqrt{3}}-\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{3}}+16=0,\ a\sqrt{a}=24\sqrt{3}$ 양변을 제곱하면

$a^3=12^3 \quad \therefore a=12$

73. 답 ②

[해설]

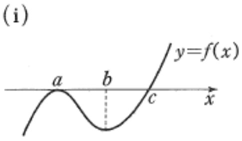
ㄱ. (반례) $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,

$f(a)=0,\ f'(b)=0,\ f'(c)=0$ 이므로

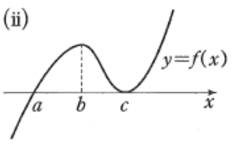
$A=\{a\},\ B=\{b,\ c\}$ 따라서, $n(A)=1$ 이지만 $n(B)=2$ 이다. (거짓)

ㄴ. $n(A)=2$ 이면 $f(x)$의 그래프는 다음과 같이 극대인 점에서 x축과 접하는 경우와 극소인 점에서 $f(x)$축과 접하는 경우가 있다.

(i)

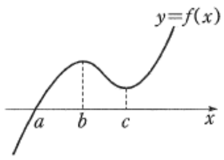


(ii)



(ⅰ)의 경우 $A=\{a,c\},\ B=\{a,\ b\},A\cap B=\{a\}$ 이므로 $n(A\cap B)=1$ 이다.(ⅱ)의 경우도 마찬가지로 $n(A\cap B)=1$ 이다.(참)

ㄷ. (반례) $f(x)$의 그래프가 다음과 같을 때,



$A=\{a\},\ B=\{b,\ c\},A\cap B=\varnothing,A\cup B=\{a,b,c\}$ 이므로 $n(A\cup B)=3$ 이지만 $n(A\cap B)=0$ 이다.(거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄴ 이다.

74. 답 ⑤

[해설]

$x^3-3x+2-k=0$에서 $x^3-3x+2=k$

$f(x)=x^3-3x+2$로 놓으면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증감을 조사하면 아래와 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4(극대)	↘	0(극소)	↗

주어진 삼차방정식이 한 개의 양근과 두 개의 허근을 가질 때는 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 y축의 오른쪽에 한 개만 있을 때이므로 구하는 k의 값의 범위는 $k>4$

75. 답 ②

[해설]

$2x^3-3x^2-12x=p$에서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x$로 놓으면

$f'(x)=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

위의 증감표에서 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄱ. 극댓값 $f(-1)=7$, 극솟값 $f(2)=-20$이므로

$-20<p<7$일 때, 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

ㄴ. ㄷ. $f(x)=7$에서 $x=2,\ x=-\dfrac{5}{2}$

$f(x)=-20$에서 $x=2,\ x=-\dfrac{5}{2}$

$\therefore -\frac{5}{2} < a < -1,\ -1 < \beta < 2,\ 2 < \gamma < \frac{7}{2}$

(ㄴ:참, ㄷ:거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

76. 답 ④

[해설]

방정식 $x^3-2x^2-4x+a=0$의 실근은 곡선 $y=-x^3+2x^2+4x$와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다.

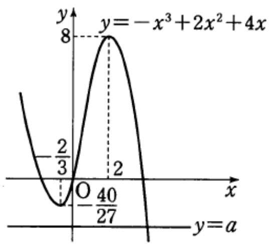
주어진 방정식이 한 개의 양의 실근을 가지므로 두 그래프는 x좌표가 양수인 한 점에서 만난다.

$y'=-3x^2+4x+4=-(x-2)(3x+2)$ 이므로

$y'=0$에서 $x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{40}{27}$	↗	8	↘

위의 증감표에 의하여 $y=-x^3+2x^2+4x$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서, 곡선 $y=-x^3+2x^2+4x$ 와 직선 $y=a$가 오직 한 점에서 만나고 교점의 x좌표가 양수이기 위한 a의 값의 범위는 $a<\frac{40}{27}$

즉, $m=27,\ n=40$ 이므로 $m+n=67$

77. 답 ④

[해설] $x^3-4x+a=0$에서 $x^3-4x=-a$

$f(x)=x^3-4x$로 놓으면

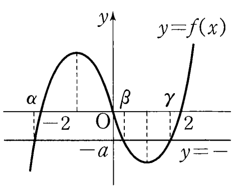
$f'(x)=3x^2-4$

이므로 $y=f(x)$는 $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$에서 극값을 갖는다.

$f(x)=x(x+2)(x-2)$이므로

$y=f(x)$의 그래프는 x축과 $x=0,\ x=\pm2$에서 만난다.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$가 만나는 점의 좌표가 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$이므로



$\alpha<-2<0<\beta<\gamma<2$

따라서 $|\beta|<|\gamma|<|\alpha|$가 성립한다.

78. 답 ⑤

[해설]

접점을 $(t,\ t^3)$이라 하면 접선의 기울기는 $3t^2$이므로 접선의 방정식은

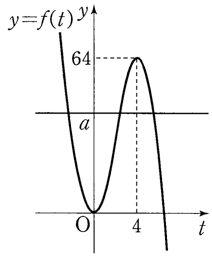
$y-t^3=3t^2(x-t)$

$\therefore\ y=3t^2x-2t^3$

이것이 점 $A(4,\ a)$를 지나므로

$a=12t^2-2t^3$

그러므로 함수 $f(t)=12t^2-2t^3$의 그래프와 직선 $y=a$가 세 점에서 만날 조건이 구하는 a의 값의 범위이다.



$f'(t)=24t-6t^2=-6t(t-4)$

$f'(t)=0$에서 $t=0$ 또는 $t=4$

즉, $t=0$에서 극솟값이 0, $t=4$에서 극댓값이 64이므로 오른쪽 그림에서

$0<a<64$

79. 답 ④

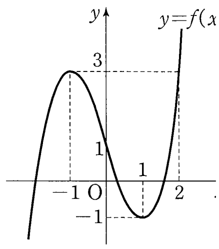
[해설]

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3$

$\quad=3(x+1)(x-1)$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$f(1)=-1<0,\ f(2)=3>0$

이므로 주어진 삼차방정식의 가장 큰 해 a의 값의 범위는

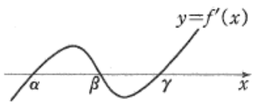
$1<a<2$

$\therefore\ n=1$

80. 답 ③

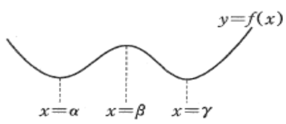
[해설]

ㄱ. $f'(x)=0$은 최고차항의 계수가 양수인 삼차방정식이고, 서로 다른 세 실근을 가지므로 $y=f'(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



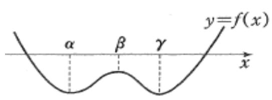
$x=\beta$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=\beta$에서 극댓값을 갖는다.(참)

ㄴ. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형의 다음과 같다.

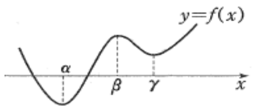


$f(\alpha)f(\beta)f(\gamma)<0$ 인 경우는 다음의 세 가지가 있다.

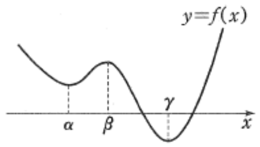
(ⅰ) $f(\alpha)<0,\ f(\beta)<0,\ f(\gamma)<0$ 인 경우



(ⅱ) $f(\alpha)<0,\ f(\beta)>0,\ f(\gamma)>0$ 인 경우



(iii) $f(\alpha)>0$, $f(\beta)>0$, $f(\gamma)<0$ 인 경우



즉, 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.(참)

ㄷ. ㄴ의 (iii)에서 방정식 $f(x)=0$의 두 실근은 모두 β보다 크다. (거짓)

그러므로 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

81. 답 ③

[해설]

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 모든 실수 x에 대하여

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가함수이다.

$h(0)=f(0)-g(0)=0$ 이므로

$h(1)>h(0)$에서 $f(1)-g(1)>0$ $\therefore f(1)>g(1)$(참)

ㄴ. ㄱ에 의하여 $x>0$이면 $h(x)>h(0)=0$ 이므로

$f(x)-g(x)>0$ $\therefore \dfrac{f(x)-g(x)}{x}>0$(참)

ㄷ. $h(x)$는 증가함수이므로 방정식 $h(x)=0$의 실근은 오직 한 개다. 즉 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 오직 한 개 이다.(거짓)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

82. 답 ⑤

[해설] $f(x)=x(x-3a)^2-4$로 놓으면 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하기 위해서는 우선 $f(1)\ge 0$이 성립해야 한다.

$f(1)=(1-3a)^2-4\ge 0$

$(3a+1)(a-1)\ge 0$

$\therefore\ a\le -\dfrac{1}{3}$ 또는 $a\ge 1$

한편, $f(x)=x(x-3a)^2-4=x^3-6ax^2+9a^2-4$에서

$f'(x)=3x^2-12ax+9a^2=3(x-a)(x-3a)$

(i) $a\le -\dfrac{1}{3}$이면 $x\ge 1$일 때 $f'(x)>0$이므로 $x\ge 1$에서 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 $x\ge 1$에서 $f(x)\ge f(1)\ge 0$

(ii) $a\ge 1$이면 $3a>1$이고 $f(3a)=-4<0$이므로 주어진 조건을 만족하지 않는다.

(i), (ii)에서 실수 a의 값의 범위는 $a\le -\dfrac{1}{3}$이므로 구하는 a의 최댓값은 $-\dfrac{1}{3}$이다.

83. 답 ③

[해설] $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-8k^3x+192$로 놓으면

$f'(x)=x^3-8k^3=(x-2k)(x^2+2kx+4k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=2k$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=2k$일 때 극소이면서 최소이므로 최솟값 $f(2k)\ge 0$이면 된다. 즉,

$f(2k)=4k^4-16k^4+192$

$=-12k^4+192$

$=-12(k^2+4)(k^2-4)\ge 0$

$k^2+4>0$이므로

$k^2-4=(k+2)(k-2)\le 0$

따라서 구하는 k의 값의 범위는

$-2\le k\le 2$

84. 답 ②

[해설]

$f(x)=3x^4-4x^3$, $g(x)=-x^2+6x+k$로 놓으면 주어진 부등식을 만족하기 위해서는 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 커야 한다.

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-1	↗

위의 증감표에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=-1$이다.

$g(x)=-(x-3)^2+k+9$이므로 $g(x)$의 최댓값은 $k+9$이다.

따라서, $k+9<-1$에서$k<-10$이므로 구하는 정수 k의 최댓값은 -11이다.

85. 답 36

[해설]

$x^3-9x-a=0$에서 $x^3-9x=a$

$f(x)=x^3-9x$라 하면

$f(x)=x(x+3)(x-3)$

$f'(x)=3x^2-9=3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$6\sqrt{3}$	↘	$-6\sqrt{3}$	↗

$f(2\sqrt{3})=6\sqrt{3}$, $f(-2\sqrt{3})=-6\sqrt{3}$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 $f(x)=a$가 서로 다른 세 실근을 가질 때, $-6\sqrt{3}<a<6\sqrt{3}$

이때, $f(x)=a$의 실수해는

$-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3}$에 존재한다.

이 구간에 속하는 정수는

$x=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3$ 이고

$f(0)=0$, $f(3)=f(-3)=0$

$f(1)=-8$, $f(-1)=8$

$f(2)=-10,\ f(-2)=10$

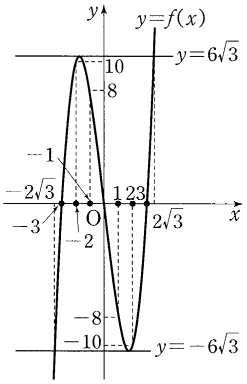
이므로 $f(x)=a$가 적어도 하나의 정수해를 가지는

$a(|a|<6\sqrt{3})$의 값은

$a=0,\ \pm 8,\ \pm 10$

따라서 모든 a의 절댓값의 합은

$0+8+8+10+10=36$



86. 답 ②

[해설]

$F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$F(x)=4x^3-3x^2-6x-a$

$\therefore F'(x)=12x^2-6x-6=6(x-1)(2x+1)$

$F'(x)=0$에서 $x=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

이므로 $F(x)$는 $x=-\dfrac{1}{2}$ 에서 극대, $x=1$에서 극소이다.

따라서 $-2\le x\le 2$에서 $F(x)\ge 0$이려면 이 구간에서 $y=F(x)$의 그래프가 x축 위쪽에 존재해야 한다.

$\therefore\ F(-2)=-32-a\ge 0,\ F(1)=-5-a\ge 0$

$\therefore a\le 32$

그러므로 a의 최댓값은 -32이다.

87. 답 92

[해설]

$x^3+k\ge x^2-3x \Leftrightarrow x^3-x^2+3x+k\ge 0$

이므로 $f(x)=x^3-x^2+3x+k\ (x\ge -4)$의 최솟값이 0보다 크거나 같아야 한다

$f'(x)=3x^2-2x+3$

$=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}>0$

그러므로 $f(x)$는 증가함수이고,

$f(-4)=k-92$

이므로 k의 값의 범위는

$k-92\ge 0 \qquad \therefore\ k\ge 92$

따라서 구하는 k의 최솟값은 92이다.

88. 답 22

[해설]

$f(x)=5x^3-10x^2+k,\ g(x)=5x^2+2$ 부등식 $f(x)\geqq g(x)$ 에서

$f(x)-g(x)=5x^3-15x^2+k-2\geqq 0$

$h(x)=5x^3-15x^2+k-2$로 놓으면

$h'(x)=15x^2-30x=15x(x-2)$

$h'(x)=0$에서 $x=0,\ 2$

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	극소	↗	

위의 증감표에서 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이다.

즉, $0<x<3$에서 $h(x)\geqq 0$이려면 $h(2)\geqq 0$ 이어야 하므로

$h(2)=40-60+k-2\geqq 0 \quad \therefore k\geqq 22$

따라서, 상수 k의 최솟값은 22이다.

89. 답 108

[해설]

조건 (가)에 의해서

$$ax^3+bx^2+cx+d=x^3\left(\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}+d\right)$$

$\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d=dx^3+cx^2+bx+a$

$\Leftrightarrow a=d,\ b=c$

$\therefore\ f(x)=ax^3+bx^2+bx+a$

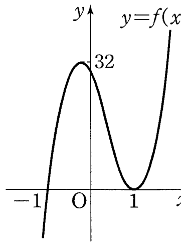
$=(x+1)\{a(x^2-x+1)+bx\}$

$=(x+1)\{ax^2+(b-a)x+a\}$

$=a(x+1)\left\{x^2-\left(1-\dfrac{b}{a}\right)x+1\right\}$

이때, 이차방정식

$x^2-\left(1-\dfrac{b}{a}\right)x+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠



이 중근을 가지면 그 중근은 $x=1$ 또는 $x=-1$이어야 한다.

㉠이 $x=-1$인 중근을 가지면 나머지 한 근도 -1이므로

$f(x)=a(x+1)^3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 조건 (나)를 만족하지 않는다.

그러므로 ㉠은 $x=1$을 중근으로 가져야 하므로

$1-\dfrac{b}{a}=2$에서 $b=-a$

$\therefore\ f(x)=a(x+1)(x-1)^2$

$=a(x^3-x^2-x+1)$

$\alpha=-1,\ \beta=1$이고

$f'(x)=a(3x^2-2x-1)=a(x-1)(3x+1)$

조건 (다)에서 $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=32,\ a>0$이므로

$a\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)^2=32$에서 $a=27$

$\therefore\ a=d=27, b=c=-27$

$\therefore\ a-b-c+d=27-(-27)-(-27)+27$

$=108$

90. 답 ⑤

[해설]

두 점 P, Q의 좌표가 각각

$t^4-12t^3+48t^2,\ mt$

이므로 이것들을 t에 대하여 미분한

$4t^3-36t^2+96t$, m
은 각각 두 점 P, Q의 속도가
된다.
P, Q의 속도가 같게 되는 때가
3회 있기 위한 조건은 삼차방정
식
$4t^3-36t^2+96t=m$
이 서로 다른 세 실근을 갖는 것이다.
$y=4t^3-36t^2+96t$라 하면
$y'=12t^2-72t+96=12(t-2)(t-4)$
$y'=0$에서 $t=2$ 또는 $t=4$
따라서 $t=2$일 때 극댓값이 80, $t=4$일 때 극솟값이 64이므로 구하는 m의 값의 범위는 $64<m<80$

91. 답 ③

[해설]
두 점 A, B의 속도를 각각 v_A, v_B라 하면
$$v_A=2t+8,\ v_B=4t-4$$
점 B의 속도가 점 A의 속도보다 크거나 같게 되려면
$$v_B \ge v_A,\ \text{즉 } 4t-4 \ge 2t+8$$
에서 $t \ge 6$이다.
따라서 6초 후부터 점 B의 속도가 점 A의 속도보다 크거나 같다.

92. 답 ④

[해설]
$x(t)=-t^3+2kt^2-k^2t+a$에서
$$v(t)=\frac{dx}{dt}=-3t^2+4kt-k^2$$
$$=-(3t-k)(t-k)$$
$v(t)=0$에서 $t=\dfrac{k}{3}$ 또는 $t=k$
$k>0$에서 속도 $v(t)$의 부호가 첫 번째로 바뀌는 것은 $t=\dfrac{k}{3}$일 때 이므로 $\dfrac{k}{3}=\dfrac{1}{3}$에서 $k=1$
그러므로 속도 $v(t)$의 부호가 두 번째로 바뀌는 것은 $t=1$일 때이다.
따라서 $x(1)=-1+2-1+a=5$에서 $a=5$

93. 답 104

[해설]
$y'=2x$이므로 점 $P(s,\ s^2)$에서 접선의 방정식은
$$y-s^2=2s(x-s)$$
$y=0$을 대입하면 점 Q의 x좌표는 $x=\dfrac{s}{2}$이다.
$s-10t^2+8t$이므로 $x-5t^2+4t$이다.
$\dfrac{dx}{dt}=10t+4$이므로 $t=10$일 때의 점 Q의 속도는
$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=10}=10\times10+4=104$$

94. 답 24

[해설]
시각이 t일 때의 속도와 가속도를 각각 $v(t)$, $a(t)$라 하면
$$v(t)=\frac{dx}{dt}=6t^2-12t,\ a(t)=\frac{dv}{dt}=12t-12$$
$v(t)=6t^2-12t=18$에서
$$t^2-2t-3=0,\ (t+1)(t-3)=0$$
$t \ge 0$이므로 $t=3$
$t=3$일 때 가속도는
$$a(3)=12\times3-12=24$$

95. 답 ④

[해설]
t초 후의 속도 v는
$$v=\frac{ds}{dt}=48-4t$$
정지한 것은 $v=0$일 때이므로
$$48-4t=0 \qquad \therefore\ t=12$$
즉, 제동을 건 후 기차가 멈추는 것은 12초 후이다.
따라서 움직인 거리는
$$s=48\times12-2\times12^2$$
$$=288(\text{m})$$

96. 답 12

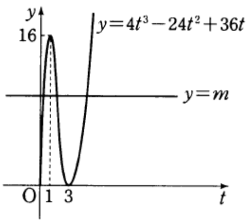
[해설]
시각 t일 때의 두 점 P, Q의 속도는 각각
$v_P=P'(t)=t^2+4$, $v_Q=Q'(t)=4t$
$v_P=v_Q$에서 $t^2+4=4t$, $(t-2)^2=0$ $\quad\therefore\ t=2$
$t=2$일 때 두 점 P, Q의 위치는 각각
$P(2)=\dfrac{8}{3}+8-\dfrac{2}{3}=10$, $Q(2)=8-10=-2$
따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는 $10-(-2)=12$

97. 답 ⑤

[해설]
시각 t에서의 두 점 P, Q의 좌표를 각각
$x_P=t^4-8t^3+18t^2$, $x_Q=mt$ 라 하면
속도를 각각 v_P, v_Q라 하면
$$v_P=\frac{dx_P}{dt}=4t^3-24t^2+36,\ v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=m$$
$v_P=v_Q$ 에서 $4t^3-24t^2+36t=m \cdots\cdots$ ㉠
t에 관한 방정식 ㉠의 0이 아닌 실근이 3개이려면
$y=4t^3-24t^2+36t$의 그래프가 직선 $y=m$ 이 원점이 아닌 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.
$y'=12t^2-48t+36=12(t-1)(t-3)$ 이므로
$y'=0$에서 $t=1$ 또는 $t=3$

t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'		+	0	−	0	+
y	0	↗	16	↘	0	↗

위 증감표에 의해 $y=4t^3-24t^2+36t$의 그래프는 다음과 같다.



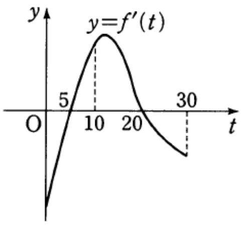
따라서, m의 값의 범위는 $0<m<16$ 이므로 정수 m의 값은 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 15$ 의 15개이다.

98. 답 ①

[해설]

시각 x에서의 점 P의 속도 $v(t)$는 $v(t)=f'(t)$

이고 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $t=5$일 때, $v(5)=0$ 이므로 $t=5$일때, 점 P는 처음 멈춘다. (참)

ㄴ. $t=5,\ t=20$ 일 때, $v(t)=0$이고 이 점의 좌우에서 속도 $v(t)$의 부호가 변하므로 점 P는 출발 후 방향을 두 번 바꾼다. (거짓)

ㄷ. 위의 그래프에서 $t>20$일 때, $v(t)<0$ (거짓)

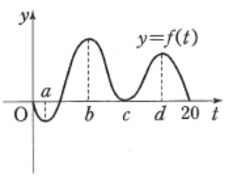
따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ 이다.

99. 답 ②

[해설]

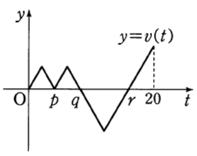
물체 A의 운동방향이 바뀔 때는 $y=f(t)$의 그래프가 증가하다가 감소

하거나, 감소하다가 증가할 때이다.



즉, 오른쪽 그림에서 $y=f(t)$의 극점의 x좌표인 $a,\ b,\ c,\ d$에서 각각 운동방향이 바뀐다. $\therefore x=4$

물체 B의 운동방향이 바뀔 때는 B의 속도의 부호가 바뀔 때이다.



오른쪽 그림에서 $v(t)=0$ 일 때의 t의 값은 $t=p,\ t=q,\ t=r$

이때, $t=p$ 의 좌우에서는 $y=v(t)$의 부호가 바뀌지 않지만 $t=p,\ t=r$ 의 좌우에서는 $y=v(t)$의 부호가 바뀌므로 운동방향이 바뀐다.

$\therefore y=2 \quad \therefore x+y=4+2=6$

100. 답 ③

[해설]

길이가 변하기 시작한지 t초 후의 부피를 V라 하면

$V=\pi(20-0.2t)^2(5+0.5t)$

$\quad=\pi(0.04t^2-8t+400)(0.5t+5)$

$\dfrac{dV}{dt}=\pi(0.08t-8)(0.5t+5)+0.5\pi(0.04t^2-8t+400)$

따라서, $t=10$ 일때, 부피의 변화율은 $-72\pi+162\pi=90\pi(cm^3/초)$

101. 답 ①

[해설]

t초 후의 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$9+0.2t,\ \ 4+0.3t$

이 직사각형이 정사각형이 되므로

$9+0.2t=\ 4+0.3t$ 에서 $t=50$

t초 후의 직사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(9+0.2t)(4+0.3t)=0.06t^2+3.5t+36$

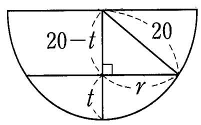
이므로 $S'(t)=0.12t+3.5$

따라서, $t=50$일 때의 넓이의 변화율은

$0.12\times 50+3.5=9.5(cm^2/초)$

102. 답 20

[해설]



물을 넣기 시작한 지 t초가 되는 순간 수면의 높이는 $t\,cm$이므로 이때의 수면의 높이는 $t\,cm$이므로 이때의 수면의 반지름의 길이를 $r\,cm$, 수면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$r^2=20^2-(20-t)^2=40t-t^2$

$S(t)=\pi r^2=\pi(40t-t^2)$

$S'(t)=\pi(40-2t)$

따라서, $t=10$일 때, 수면의 넓이의 변화율은

$S'(10)=\pi(40-20)=20\pi\ \ (cm^2/초)$

$\therefore a=20$

103. 답 ①

[해설]

출발 후 t분 동안 $P,\ Q$가 움직인 거리는 각각

$$\int_0^t 9(t^2+t+4)dt=3t^2+\frac{9}{2}t^2+36t$$

$$\int_0^t 3(2t^2+11t)dt=2t^3+\frac{33}{2}t^2$$

$P,\ Q$가 움직인 거리의 차가 $8k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$일 때, $P,\ Q$는 만난다.

$f(t)=3t^2+\dfrac{9}{2}t^2+36t-\left(2t^3+\dfrac{33}{2}t^2\right)$으로 놓으면

$f(t)=t^3-12t^2+36t$

$f'(t)=3t^2-24t+36=3(t-2)(t-6)$

$f'(t)=0$에서 $t=2$ 또는 $t=6$

$0<t\le 10$에서 $f(t)$의 증감을 조사하면 다음 표와 같다.

t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	6	$\cdots$	10
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	(0)	↗	32 극대	↘	0 극소	↗	160

따라서 $0<t\le 10$에서 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직

선 $y=8k$와의 교점의 개수는
$k=0$일 때, 1개
$k=1,\ 2,\ 3$일 때, 3개
$k=4$일 때, 2개
$k=5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 20$ 일 때, 1개
그러므로 $P,\ Q$가 만나는 횟수는
$1+3\times3+2+1\times16=28$

1. 정답 ④ 1. 정답 ④ 3. 정답 72
4. 정답 ② 5. 정답 ④ 6. 정답 ②
7. 정답 ④ 8. 정답 3 9. 정답 ④ 10. 정답 ③
11. 정답 ② 12. 정답 ⑤ 13. 정답 ③ 14.
정답 ⑤ 15. 정답 ② 16. 정답 12 17. 정답 ④ 18.
답 6 19. 정답 ② 20. 정답 ④ 21. 정답 $\frac{1}{2}$ 22.
정답 ④23. 정답 ① 24. 정답 ④ 25. 정답 ④ 26.
정답 ⑤ 27. 정답 $\frac{1}{240}$ 28. 정답 ④ 29. 정답 ③ 30.
정답 ③ 31. 정답 11 32. 정답 ③ 33. 정답 ② 34.
정답 $\frac{dy}{dx}=-2t$ 35. 정답 ① 36. 정답 ① 37. 정답 ③
38. 정답 ⑤ 39. 정답 ① 40. 정답 ③ 41.
정답 ②42. 정답 31 43. 정답 (1) $y'=-\sin 2x$ (2)
$y'=\frac{2}{2x+3}$ 44. 정답 ② 45. 정답 $\frac{1}{e}$ 46. 정답 ①
47. 정답 9 48. 정답 ④ 49. 정답 ③ 50.
정답 ③ 51. 정답 ③ 52. 정답 ② 53. 정답 4 54.
정답 ④55. 답 ④ 56. 정답 ⑤ 57. 정답 ② 58.
답 ④ 59. 정답 ① 60. 정답 ③ 61. 정답 ③ 62.
답 ④ 63. 정답 ① 64. 정답 답 ④ 65. 정답 ② 66.
정답 ④67. 정답 64 68. 정답 ① 69. 정답 0 70.
정답 5 71. 정답 41 72. 정답 ④ 73. 정답 $y=2x-2\pi$
74. 정답 $y=ex$ 75. 정답 ③ 76. 정답 ④ 77.
정답 ②78. 정답 $\frac{5}{2}$ 79. 정답 ② 80. 정답 8 81.
정답 ①82. 정답 50 83. 정답 ① 84. 정답 ② 85.
정답 ⑤86. 정답 ④ 87. 정답 234 88. 정답 ③ 89.
정답 ④90. 정답 ② 91. 정답 ④ 92. 정답 ⑤ 93.
정답 ③94. 정답 ③ 95. 정답 $c=\frac{\pi}{2}$ 96. 정답 $c=2$ 97.
답 e^2-e 98. 정답 10 99. 정답 $\frac{1}{2}$ 100. 정답 ①
101. 정답 ⑤ 102. 정답 ① 103. [정답] ④ 104.
정답 ① 105. 정답 ⑤ 106. 정답 ④ 107. 답 2π 108.
정답 ③ 109. 정답 ① 110. 정답 ① 111. 정답 ⑤ 112.
정답 ① 113. 정답 ④ 114. 정답 0 115. 정답 ① 116.
정답 ④ 117. 정답 2 118. 정답 ② 119. 정답 ③ 120.
정답 1 121. 정답 ⑤ 122. 정답 ② 123. 정답 $0<a<\frac{1}{4}$
124. 정답 ⑤ 125. 정답 ⑤ 126. 정답 $\pi<x<2\pi$
127. 정답 ③ 128. 정답 ① 129. 정답 ⑤ 130.
정답 ① 131. 정답 최댓값 : 1, 최솟값 : 0 132. 정답 ② 133.
정답 ④ 134. 정답 ④ 135. 정답 ④ 136. 정답 ② 137.
정답 ③ 138. 답 : 존재하지 않는다. 139. 정답 : 1 140.
정답 : 2 141. 정답 ② 142. 정답 ③ 143. 정답 ② 144.
정답 ①145. 정답 ② 146. 정답 ① 147. 정답 ③ 148.
정답 ③149. [정답] ② 150. 정답 풀이참조 151. 정답
$e^x>x-1$ 152. 정답 ① 153. 정답 ④ 154. 정답
① 155. 정답 풀이참조 156. 정답 $f(x)>g(x)$ 157.
정답 ②158. 정답 ② 159. 정답 ① 160. 정답 e^{10} 161.
정답 0 162. 답 : ① 163. 정답 ③ 164. 정답 ⑤ 165.
정답 ③ 166. 정답 ② 167. 정답 ② 168. 정답 ⑤ 169.
정답 16초 170. 정답 ① 171. 정답 400 172. 정답 ③
173. 정답 ① 174. 정답 83 175. 정답 ④ 176.
정답 ⑤177. 정답 ③ 178. 정답 ② 179. 정답 ① 180.
정답 ⑤181. 정답 ④ 182. 정답 ① 183. 정답 ① 184.
정답 ② 185. 정답 ② 186. 정답 ③ 187. 정답 ④ 188.
정답 ⑤ 189. 정답 7 190. 정답 ④ 1. 정답 ④

1. 정답 ④

[해설]

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ 라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$$\lim_{h\to0}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{8}+h}-\sqrt[3]{\frac{1}{8}}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(\frac{1}{8}+h)-f(\frac{1}{8})}{h}=f'(\frac{1}{8})=\frac{4}{3}$$

2. 정답 -2

[해설]

$$f'(x)=\frac{3(1+x^2)-2x(3x-4)}{(1+x^2)^2}=\frac{-(3x+1)(x-3)}{(1+x^2)^2}$$

$\therefore f'(-1)=-2$

3. 정답 *72*

[해설]

$f(x)=\dfrac{ax}{2x-1}$에서

$$f'(x)=\frac{a(2x-1)-2ax}{(2x-1)^2}=\frac{-a}{(2x-1)^2}$$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$에서 $f'(1)=-a=6$ $\therefore a=-6$

$\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=b$에서 $f'(0)=b=-a=6$

$\therefore a^2+b^2=(-6)^2+6^2=72$

4. 정답 ②

[해설]

$$f'(x)=\frac{g(x)-1-xg'(x)}{\{g(x)-1\}^2}$$

$$f'(1)=\frac{g(1)-1}{\{g(1)-1\}^2}\qquad(\because g'(1)=0)$$

$$=\frac{1}{g(1)-1}$$

$f'(1)=-\dfrac{1}{2}$이므로 $\dfrac{1}{g(1)-1}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ g(1)=-1$

5. 정답 ④

[해설]

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-1}$에서

$$f'(x)=\frac{2(x^2-1)-2x(2x-3)}{(x^2-1)^2}=-\frac{2(x^2-3x+1)}{(x^2-1)^2}$$

이므로 $f'(2)=\dfrac{2}{9}$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(2+3x)-f(2-6x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(2+3x)-f(2)}{3x}\cdot3-\frac{f(2-6x)-f(2)}{-6x}\cdot(-6)\right\}$$

$$=9f'(2)=9\times\frac{2}{9}=2$$

6. 정답 ②

[해설]

$F'(x)=\dfrac{\{f(x)-3\}-xf'(x)}{\{f(x)-3\}^2}$에서

$$F'(0)=\frac{\{f(0)-3\}-0\cdot f'(0)}{\{f(0)-3\}^2}=\frac{1}{f(0)-3}=1$$

$\therefore f(0)=4$

7. 정답 ④

[해설]

함수 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (x<1)\\ ax+b & (x\ge1)\end{cases}$ 가 $x=1$에서 연속이므로

$a+b=1$ ⋯⋯㉠

한편, $f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2} & (x<1)\\ a & (x>1)\end{cases}$ 이고

$x=1$ 에서 함수 $f(x)$의 미분계수가 존재해야 하므로

$a=-1$

㉠에서 $b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$

8. 정답 3

[해설]

$f'(x)=3(2x^2-3x+2)^2(2x^2-3x+2)'$

$=3(2x^2-3x+2)^2(4x-3)$

이므로 $f'(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $f'(1)=3$

9. 정답 ④

[해설]

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+x)-f(1-x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(1+x)-f(1)}{x}+\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}\right\}=2f'(1)$$

$f(x)=(2\sqrt{x}-1)^3$에서

$$f'(x)=3(2\sqrt{x}-1)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{3(2\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$$

$\therefore 2f'(1)=2\times3=6$

10. 정답 ③

[해설]

$g(x)=x^2+1$에서 $g(1)=2,\ g'(x)=2x$에서 $g'(1)=2$

$h(x)=f(g(x))$에서 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$ ⋯⋯ ㉠

㉠에서 $x=1$을 대입하면 $h'(1)=f'(g(1))g'(1)$

$30=f'(2)\cdot 2$

$\therefore f'(2)=15$

11. 정답 ②

[해설]

$h(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$ ⋯⋯㉠

$f(0)=1$이고 $f'(x)=\dfrac{x^2+2-(x+2)\cdot 2x}{(x^2+2)^2}$

$\therefore f'(0)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$

$4=g'(1)\cdot\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore g'(1)=8$

12. 정답 ⑤

[해설]

$f(1)=3,\ f(3)=2,\ f'(1)=4,\ f'(3)=3$이고

$f(f(1))=f(3)=2$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(f(1))}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(f(x))-f(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(f(1))f'(1)=f'(3)f'(1)$

$3\times 4=12$

13. 정답 ③

[해설]

$f'(x)=10(x+\sqrt{1+x^2})^9\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\dfrac{10(x+\sqrt{1+x^2})^{10}}{\sqrt{1+x^2}}$

$f(x)=(x+\sqrt{1+x^2})^{10}$에서 $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{10}{\sqrt{1+x^2}}$

$\therefore\dfrac{f'(1)}{f(1)}=\dfrac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

14. 정답 ⑤

[해설]

$f'(x)=2x-\dfrac{1}{x^2}$에서 $f'(1)=2-1=1$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=2f'(1)=2$

15. 정답 ②

[해설]

$y=f(g(x))$를 x에 관하여 미분하면

$y'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$x=1$에서의 미분계수가 -8 ⋯⋯⋯㉠

$f'(g(1))\cdot g'(1)=-8$

$g(1)=3$ 이므로 ㉠은

$f'(3)\cdot g'(1)=-8$ ⋯⋯⋯⋯㉡

$f'(3)=4$이므로 ㉡은

$4\cdot g'(1)=-8$

$\therefore g'(1)=-2$

16. 정답 12

[해설]

$f(g(x))=h(x)$라 하면

$h(1)=f(g(1))=f(1)=-1$

이므로 주어진 식은 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(1)\cdot g'(1)=4\times 3=12$

17. 정답 ④

[해설]

$g(x)=f(3x-1)$에서

$g'(x)=3f'(3x-1)$⋯⋯㉠

㉠에 $x=1$을 대입하면 $g'(1)=3f'(2)$

한편, $f(x)=x^3-2x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-4x$이므로 $f'(2)=12-8=4$

$\therefore g'(1)=3\times 4=12$

18. 답 6

[해설]

$f(x)=2\sin x+\cos x$

$p(x)=h(g(f(x)))$

$f'(x)=2\cos x-\sin x$

$f'(0)=2,\ f(0)=1$

$p'(x)=h'(g(f(x)))\cdot g'(f(x))\cdot f'(x)$

$p'(0)=h'(g(f(0)))\cdot g'(f(0))\cdot f'(0)$

$=h'(g(1))\cdot g'(1)\cdot 2=12$

$\therefore h'(g(1))g'(1)=6$

19. 정답 ②

[해설]

$\{f(x)\}^3=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$에서 양변을 x에 관하여 미분하면

$$3\{f(x)\}^2 f'(x)=\frac{2(x+1)(x^2+1)-(x+1)^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

$f(x)\neq 0$, 즉 $x\neq -1$이면

$f'(x)=\frac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{1}{3\{f(x)\}^2}>0$일 때,

$(x+1)(x-1)<0$에서

$-1<x<1$

$\therefore \alpha=-1,\ \beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=2$

20. 정답 ④

[해설]

$f(x)=12x-f(f(x))$에서 $f'(x)=12-f'(f(x))f'(x)$

$x=0$을 대입하면

$f'(0)=12-f'(f(0))f'(0)$

$f'(0)=12-f'(0)f'(0)\ (\because f(0)=0)$

$f'(0)^2+f'(0)-12=0$

$(f'(0)+4)(f'(0)-3)=0\ \therefore f'(0)=3\ \because (f'(0)>0)$

$f(x)$가 다항함수일 때, 그 차수를 n이라 하면 (가)로부터 $n\neq 0$이다. (나)에서 양변의 차수가 같으므로 $n=n^2$, $\therefore n=1$

$f(x)=ax+b$로 놓으면 $f(0)=0, f'(0)=3$이므로 $a=3, b=0$

따라서 $f(x)=3x$이고 $f(k)=3k=6$이므로 $k=2$이다.

21. 정답 $\frac{1}{2}$

[해설]

$3x^2+3y^2y'+3xy'+3y=0$

$\therefore y'=-\frac{x^2+y}{y^2+x}$

$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=0\\y=-2}}=\frac{1}{2}$

22. 정답 ④

[해설]

$x^2-xy+y^2=3$의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\{x^2\}-\frac{d}{dx}\{xy\}+\frac{d}{dx}\{y^2\}=\frac{d}{dx}\{3\}$$

$$2x-(y+x\frac{dy}{dx})+2y\frac{dy}{dx}=0,\ (-x+2y)\frac{dy}{dx}=y-2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y-2x}{2y-x}$$

따라서 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{y-2x}{2y-x}$에

$x=1,\ y=-1$을 대입한 값과 같으므로 $\frac{-1-2}{-2-1}=1$

23. 정답 ①

[해설]

주어진 식의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$2(3x+2y)(3+2\cdot\frac{dy}{dx})+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{9x+6y}{6x+5y}\ \cdots\cdots㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}=-\frac{6y}{5y}=-\frac{6}{5}$$

24. 정답 ④

[해설]

주어진 식의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$2x+2y\cdot\frac{dy}{dx}+ay+ax\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ay+2x}{2y+ax},\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=2\\y=3}}=-\frac{3a+4}{6+2a}=1$$

$\therefore a=-2$

또, 주어진 곡선이 점 $(2, 3)$을 지나므로

$4+9-2\times 2\times 3+b=0$

$\therefore b=-1$

$\therefore a+b=(-2)+(-1)=-3$

25. 정답 ④

[해설]

$2x^2+4xy+5y^2=5$의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$4x+4(y+x\cdot\frac{dy}{dx})+10y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}+5y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2(x+y)}{2x+5y}$$

따라서 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{2(x+y)}{2x+5y}$에 $x=2,\ y=-1$을 대입한 값과 같으므로

$$-\frac{2\cdot(2-1)}{2\cdot 2-5}=2$$

26. 정답 ⑤

[해설]

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=1$의 양변에 xy를 곱하여 정리하면

$x^2-xy+y^{2=0}$

양변을 x에 관하여 미분하면

$$2x-(1\cdot y+x\cdot\frac{dy}{dx})+2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$(x-2y)\frac{dy}{dx}=2x-y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-2y}$$

27. 정답 $\frac{1}{240}$

[해설]

$32=(y^3+1)^5$에서 $y^3+1=2$

$\therefore y=1$

$$\frac{dx}{dy}=5(y^3+1)^4(y^3+1)' \quad =15y^2(y^3+1)^4$$

따라서 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{15y^2(y^3+1)^4}$에 $y=1$을 대입하면

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=32}=\left[\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]_{y=1}=\frac{1}{15\times 2^4}=\frac{1}{240}$$

28. 정답 ④

[해설]

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-3}{x-1}=4$에서 $x\to1$ 일 때, 극한값이 존재하고

(분모) $\to0$ 이므로(분자)$\to0$이어야 하므로 $g(1)=3$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{g(x)-3}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=4$$

함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 관하여 미분하면 $f'(g(x))g'(x)=1$

$x=1$을 대입하면 $f'(g(1))g'(1)=1$

$$\therefore f'(3)=\frac{1}{4}$$

<<참고>> $g(1)=3\Leftrightarrow f(3)=1$에서 $f'(3)=\frac{1}{g'(1)}=\frac{1}{4}$

29. 정답 ③

[해설]

$y=x^2+x-2\ (x>0)$의 역함수는

$x=y^2+y-2\,(y>0)$ .... ㉠

㉠의 양변을 y에 관하여 미분하면 $\frac{dx}{dy}=2y+1$

㉠에서 $x=0$이면 $y=1$이므로

$$g'(0)=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}=\left[\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]_{y=1}$$

$$=\left[\frac{1}{2y+1}\right]_{y=1}=\frac{1}{3}$$

30. 정답 ③

[해설]

주어진 그래프에서 $f(c)=b$이므로 $g(b)=c$

$$g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(c)}$$

<< 참고 >>

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

양변을 x에 관하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$에서 $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

$f(c)=b\Leftrightarrow g(b)=c$이므로

$$g'(b)=\frac{1}{f'(g(b))}=\frac{1}{f'(c)}$$

31. 정답 11

[해설]

$$\lim_{h\to0}\frac{\sum_{k=1}^{n}g(1+kh)-ng(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\sum_{k=1}^{n}\{g(1+kh)-g(1)\}}{h}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\lim_{h\to0}\frac{g(1+kh)-g(1)}{kh}\cdot k$$

$$=g'(1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

한편, $g(1)=a$이면 $f(a)=a^3-a^2+a=1$에서 $a=1$

$$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'(1)}$$

$f'(x)=3x^2-2x+1$에서 $f'(1)=2$ 이므로 $g'(1)=\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=33$에서 $n=11$

32. 정답 ③

[해설]

함수 $y=f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$g(x)=f^{-1}(x)$

$y=f(\frac{1}{2}x-3)$ 의 역함수 $h(x)$를 구하기 위하여 x, y를 바꾸면

$$x=f(\frac{1}{2}y-3)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}y-3=f^{-1}(x)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}h(x)-3=g(x)$$
$$\therefore h(x)=2g(x)+6$$
$$\therefore \frac{d}{dx}h(x)=2\frac{d}{dx}g(x)$$

33. 정답 ②

[해설]

$f\left(2g(x)-\frac{x+1}{x-1}\right)=x$에서 $2g(x)-\frac{x+1}{x-1}=f^{-1}(x)$

$f^{-1}(x)=g(x)$이므로 $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$f(2)=a$라 하면 $g(a)=2$이므로

$\frac{a+1}{a-1}=2 \qquad \therefore a=3$

$g'(x)=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$이므로

$f'(2)=\frac{1}{g'(3)}=-2$

34. 정답 $\frac{dy}{dx}=-2t$

[해설]

$x=-3t+1$에서 $\frac{dx}{dt}=-3$

$y=2+3t^2$에서 $\frac{dy}{dt}=6t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6t}{-3}=-2t$

35. 정답 ①

[해설]

$\frac{dx}{dt}=\sin t+t\cos t,\ \frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\cos t-\sin t)}{\sin t+t\cos t}$

$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}\cdot(0-1)}{1+\frac{\pi}{2}\cdot 0}=-e^{\frac{\pi}{2}}$

36. 정답 ①

[해설]

$t=1$일 때, $x=1,\ y=0$

$x=t^3,\ y=t-t^2$에서

$\frac{dx}{dt}=3t^2,\ \frac{dy}{dt}=1-2t$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-2t}{3t^2}$

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=1}=-\frac{1}{3}$

따라서 접선의 방정식은 $y-0=-\frac{1}{3}(x-1)$

$\therefore g(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$

$\therefore g(10)=-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}=-3$

37. 정답 ③

[해설]

$\frac{dx}{dt}=3t^2,\ \frac{dy}{dt}=4t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4}{3t}$

한편, $x=8$이면 $t=2$이므로

$f'(8)=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=8}=\left[\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right]_{t=2}=\frac{2}{3}$

$\therefore 2f'(8)=\frac{4}{3}$

38. 정답 ⑤

[해설]

$x=\theta-\sin\theta,\ y=1-\cos\theta$에서

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$를 대입하면

$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

39. 정답 ①

[해설]

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-1}{2}=t-\frac{1}{2}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{2}$

40. 정답 ③

[해설]

$x=t+\frac{1}{t},\ y=t-\frac{1}{t}$ 에서

$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2},\ \frac{dy}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1-\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2+1}{t^2-1}$$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{t=3}=\left[\frac{t^2+1}{t^2-1}\right]_{t=3}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

41. 정답 ②

[해설]

$x=\cos^3\theta$에서 $\frac{dx}{d\theta}=-3\cos^2\theta\sin\theta$

$y=\sin^3\theta$에서 $\frac{dy}{d\theta}=3\sin^2\theta\cos\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3\sin^2\theta\cos\theta}{-3\cos^2\theta\sin\theta}=-3\tan\theta$$

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$$

따라서 접선의 기울기는 -1이다.

42. 정답 31

[해설]

$\frac{dx}{dt}=1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}$

$\frac{dy}{dt}=1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+3t+5t^2+\cdots+(2n-1)t^{n-1}}{1+2t+3t^2+\cdots+nt^{n-1}}$$

$$S(n)=\lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}$$

$$=\frac{1+3+5+\cdots(2n-1)}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{2n}{n+1}$$

$S(10)=\frac{20}{11}$ 이므로 $p=11,\ q=20$

$\therefore p+q=11+20=31$

43. 정답 **(1)** $y'=-\sin2x$ **(2)** $y'=\frac{2}{2x+3}$

(3) $y'=e^x(\sin x+\cos x)$ **(4)** $y'=2\cdot3^{2x+3}\ln3$

[해설]

(1) $y'=(2\cos x)(\cos x)'=-2\cos x\sin x=-\sin2x$

(2) $y'=\frac{(2x+3)'}{2x+3}=\frac{2}{2x+3}$

(3) $y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

(4) $u=2x+3$으로 놓으면, $y=3^u$이므로

$y'=3^u\ln3\cdot\frac{du}{dx}=3^{2x+3}\cdot(\ln3)\cdot2=2\cdot3^{2x+3}\ln3$

44. 정답 ②

[해설]

$f(1)=a+\ln b=3$ ……㉠

$f'(x)=\ln bx+1$에서

$f'(1)=\ln b+1=2$

$\therefore \ln b=1\quad \therefore b=e$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a=2,\ b=e$

$\therefore b^{\ln a}=e^{\ln2}$

45. 정답 $\frac{1}{e}$

[해설]

$f(x)=\ln(\log_3 x)$에서

$$f'(x)=\frac{(\log_3x)'}{\log_3x}=\frac{\frac{1}{x\ln3}}{\log_3x}=\frac{\frac{1}{x\ln3}}{\frac{\ln x}{\ln3}}=\frac{1}{x\ln x}$$

$$f'(e)=\frac{1}{e\ln e}=\frac{1}{e}$$

46. 정답 ①

[해설]

$f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}$

$f''(x)=ae^{ax+b}+ae^{ax+b}+a^2xe^{ax+b}$

$=2ae^{ax+b}+a^2xe^{ax+b}$

$f'(0)=e^b=7,\ f''(0)=2ae^b=28$

$e^b=7$이므로 $a=2$

$\therefore a+e^b=2+7=9$

47. 정답 9

[해설]

$x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\sin0=1-0+b\quad \therefore b=-1$

$f(x)$를 미분하면 $f'(x)=\begin{cases} e^x-a & (x<0)\\ \pi\cos\pi x & (0<x<1)\\ c+c\ln x & (x>1)\end{cases}$

$x=0$에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to+0}f'(x)=\lim_{x\to-0}f'(x)$,

즉 $1-a=\pi,\quad \therefore a=1-\pi$

$x=1$에서 미분가능하므로 $\lim_{x\to1-0}f'(x)=\lim_{x\to1+0}f'(x)$,

즉 $\pi\cos\pi=c,\quad \therefore c=-\pi$

$\therefore\ a+b+c=(1-\pi)+(-1)+(-\pi)=-2\pi$

48. 정답 ④

[해설]

(ⅰ) $x=0$에서 연속이므로 $b=0$ ……㉠

(ⅱ) $x=0$에서 미분가능하므로

$f'(x)=\begin{cases} a & (-1<x<0) \\ \cos x & (0<x<1) \end{cases}$에서

$f'(0)=a=1$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $a+b=1$

49. 정답 ③

[해설]

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}h\sin\frac{1}{h}=0$$

$x\neq0$일 때 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$에서

$\lim_{x\to0}2x\sin\frac{1}{x}=0$이고 $\lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}$은 진동이므로 $\lim_{x\to0}f'(x)$은 존재하지 않는다.

$f'(0)=0$이고 $f'(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

50. 정답 ③

[해설]

함수 $y=f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f^{-1}(1)=a$라 하면

$f(a)=\tan a=1\quad\therefore\ a=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<a<\frac{\pi}{2}\right)$

$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)$에서 $x=\tan y$

양변을 y에 관하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\sec^2 y$

따라서 구하는 접선의 기울기는

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1}=\left[\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right]_{y=\frac{\pi}{4}}=\left[\cos^2 y\right]_{y=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}$$

51. 정답 ③

[해설]

(주어진 식)$=\lim_{t\to0}\frac{f(\ln(1+2t))-f(\ln1)}{t}$이므로

$f(\ln x)=F(x)$라 하면 $F'(x)=f'(\ln x)\cdot\frac{1}{x}$

$\therefore$(주어진 식)$=\lim_{t\to0}\frac{F(1+2t)-F(1)}{t}=2F'(1)$

$=2f'(\ln1)\cdot\frac{1}{1}=2f'(0)=3$

$\therefore\ f'(0)=\frac{3}{2}$

52. 정답 ②

[해설]

$f(e)=1,\ f'(e)=0$이므로 $g(e)=1$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-1}{h}=\lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-g(e)}{h}$$

$$=2\lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-g(e)}{2h}$$

$$=2g'(e)$$

$g'(x)=f'(x)\ln x+f(x)\cdot\frac{1}{x}$에서

$g'(e)=f'(e)\ln e+f(e)\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$

$$\therefore\ \lim_{h\to0}\frac{g(e+2h)-1}{h}=\frac{2}{e}$$

53. 정답 4

[해설]

$$f'(x)=\frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{6}}=4$$

54. 정답 ④

[해설]

$x^x=f(x)$로 놓으면 $\ln f(x)=x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$

$\therefore f'(x)=f(x)(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$

한편, $\lim_{x\to2}\frac{x^x-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$

따라서 $f'(2)=4(\ln2+1)=6.7724\cdots$이므로

정수부분은 6이다.

55. 답 ④

[해설]

$f(x)=\frac{\sin x}{1+e^x}$에서 $f'(x)=\frac{\cos x(1+e^x)-e^x\sin x}{(1+e^x)^2}$

$f'(0)=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}$

56. 정답 ⑤

[해설]

$x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉 $\ln a=b$ ……㉠

$f(x)$를 미분하면

$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1) \\ be^{x-1} & (x>1)\end{cases}$이고

$x=1$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0-0}f'(x)=\lim_{x\to 0+0}f'(x) \quad \therefore 1=b$

㉠에서 $a=e$

$\therefore ab=e\times 1=e$

57. 정답 ②

[해설]

$f(x)=\ln(2\sin x)$에서 $f'(x)=\frac{2\cos x}{2\sin x}=\cot x$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\ln\left(2\sin\frac{\pi}{6}\right)=0$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+2h\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+2h\right)-f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2h}\cdot 2$

$=2f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cot\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$

58. 답 ④

[해설]

$h(x)=(g\circ f)(x)=(\ln x)^2$이므로

$h'(x)=\frac{2}{x}\ln x \quad \therefore h'(1)=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{h'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h'(x)-h'(1)}{x-1}=h''(1)$

$h''(x)=-\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{2}{x^2} \quad \therefore h''(1)=2$

59. 정답 ①

[해설]

(ⅰ)

$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{\tan h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{\tan h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{\tan h}\cdot\lim_{h\to 0}h=1\cdot 0=0$

(ⅱ) $x\neq 0$일 때,

$f'(x)=\frac{3x^2\tan x-x^3\sec^2 x}{\tan^2 x}=\frac{3x^2}{\tan^2 x}-\frac{x^3}{\sin^2 x}$

$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left\{3x\cdot\frac{x}{\tan x}-x\cdot\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}$

$=3\times 0\times 1-0\times 1=0$

$\lim_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$이므로 $f'(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

60. 정답 ③

[해설]

$f'(x)=\cos x(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x+\cos x-\sin^2 x$

$=\cos^2 x+\cos x-(1-\cos^2 x)$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$0\leq x\leq 2\pi$에서 $x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},\ \pi$

$\therefore \frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}+\pi=3\pi$

61. 정답 ③

[해설]

$f(1)=1$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}\cdot\frac{1}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\cdot f'(1)$

$f(x)=x(2\ln x+1)$을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2\ln x+1+x\cdot\frac{2}{x}=2\ln x+3$이므로

$f'(1)=3$

$\therefore$(주어진 식)$=\frac{1}{3}\cdot 3=1$

62. 답 ④

[해설]

$f(x)=\ln x$에서 $f^{-1}(x)=e^x$

$F(x)=(f^{-1}\circ g)(x)$라 하면

$F(x)=f^{-1}(g(x))=e^{x^2}$

$F'(x)=2x\cdot e^{x^2}$

따라서 $x=1$에서의 미분계수는 $2e$

63. 정답 ①

[해설]

$e^{2x}(1+\ln y)=2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^{2x}(1+\ln y)+\frac{e^{2x}}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-2y(1+\ln y)$

따라서 점 $(0,\ e)$에서의 접선의 기울기는

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{\substack{x=0\\y=e}}=-2e(1+\ln e)=-4e$$

64. 정답 답 ④

[해설]

$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{t\sin x-x\sin t}{t-x}$

$=\lim\limits_{t\to x}\dfrac{(t-x)\sin x-x(\sin t-\sin x)}{t-x}$

$=\lim\limits_{t\to x}\left(\sin x-x\cdot\dfrac{\sin t-\sin x}{t-x}\right)$

$=\sin x-x(\sin x)'=\sin x-x\cos x$

$f(x)=\sin x-x\cos x$에서

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}$

65. 정답 ②

[해설]

$y=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$이라 하면

$e^{2x}-2ye^x-1=0$

이 때, $e^x=t(t>0)$라 하면

$t^2-2yt-1=0 \quad \therefore t=y+\sqrt{y^2+1}\,(\because\ t>0)$

즉, $e^x=y+\sqrt{y^2+1}$ 이므로 $g(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

따라서, $g'(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 이므로

$g'(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

66. 정답 ④

[해설]

$F(x)=f(\ln(1+5x)),\ \ G(x)=f(e^{3x}-1)$이라 하면

$F'(x)=f'(\ln(1+5x))\cdot\dfrac{5}{1+5x},\ \ G'(x)=f'(e^{3x}-1)\cdot 3e^x$

$F(0)=G(0)=f(0)$

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\ln(1+5x))-f(e^{3x}-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-G(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(x)-f(0)-G(x)+f(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{F(x)-F(0)}{x}-\dfrac{G(x)-G(0)}{x}\right\}$

$=F'(0)-G'(0)=5f'(0)-3\cdot f'(0)=2f'(0)$

$=4(\because f'(0)=2)$

67. 정답 64

[해설]

$F(x)=(f\circ g)(x)$라 하면

(주어진 식)$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(e+eh)-F(e-eh)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(e+eh)-F(e)+F(e)-F(e-eh)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(e+eh)-F(e)}{h}-\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(e-eh)-F(e)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(e+eh)-F(e)}{eh}\cdot e+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(e-eh)-F(e)}{-eh}\cdot e$

$=eF'(e)+eF'(e)$

$=2eF'(e)$

그런데 $f(x)=-2\ln x,\ g(x)=(-\ln x)^2=(\ln x)^2$ 이므로

$f'(x)=\dfrac{-2}{x},\ g'(x)=\dfrac{2}{x}\ln x$

$\therefore F'(e)=(f\circ g)'(e)=f'(g(e))g'(e)$

$=f'(1)g'(e)\quad(\because g(e)=1)$

$=\dfrac{-2}{1}\cdot\dfrac{2}{e}\ln e=\dfrac{-4}{e}$

$\therefore k=2eF'(e)=2e\cdot\dfrac{-4}{e}=-8$

$\therefore k^2=64$

68. 정답 ①

[해설]

$f(x)=\dfrac{2}{x-2}$에서

$f'(x)=-\dfrac{2}{(x-2)^2},\ f''(x)=\dfrac{4}{(x-2)^3}$

이 때, $f'(1)=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=f''(1)=-4$

69. 정답 0

[해설]

$f(x)=e^{-x}\cos x$에서

$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x \quad \cdots\cdots ㉠$

$f''(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x+e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$

$=2e^{-x}\sin x \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $f'(0)=-1,\ f''(0)=0$이므로

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(10h)+1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(0+10h)-f'(0)}{10h}\cdot10$

$=10f''(0)=0$

70. 정답 5

[해설]

$f'(x)=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)$

$f''(x)=e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)+e^{ax}(ab\cos bx-b^2\sin bx)$

$= e^{ax}\{(a^2-b^2)\sin bx + 2ab\cos bx\}$

따라서 $f'(0)=b=4$, $f''(0)=2ab=8$이므로

$a=1$, $b=4$ $\quad \therefore a+b=5$

71. 정답 41

[해설]

$f'(x) = 2e^{2x}\sin x + e^{2x}\cos x = e^{2x}(2\sin x + \cos x)$

$f''(x) = 2e^{2x}(2\sin x + \cos x) + e^{2x}(2\cos x - \sin x)$

$= e^{2x}(3\sin x + 4\cos x)$ ……㉠

$af'(x) + bf(x) = e^{2x}\{(2a+b)\sin x + a\cos x\}$ ……㉡

㉠=㉡에서

$2a+b=3$, $a=4$ $\quad \therefore b=-5$

$\therefore a^2+b^2 = 4^2+(-5)^2 = 41$

72. 정답 ④

[해설]

ㄱ. $f''(x)<0$이면 $y=f'(x)$가 감소함수이므로 $0<a<b$이면 $f'(b)<f'(a)$이다. (참)

ㄴ. $g'(x)=f'(x)-1$이고 $y=f'(x)$가 감소함수이므로

$x>0$일 때, $f'(x)<f'(0)=\dfrac{1}{2}$이다.

따라서 $g'(x)<0$이고 $g''(x)=f''(x)<0$이므로 $y=g(x)$의 그래프는 위로 볼록이고 감소한다.

따라서 두 점 $A(a, g(a))$, $B(b, g(b))$에 대하여 점 A에서의 접선의 기울기가 직선 AB의 기울기보다 크다.

$\therefore g'(a) > \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}$ (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $y=g(x)$는 감소함수이므로 $1<x<2$에서

$g(2)<g(x)<g(1)$이고 조건 ㈐에서

$g(2)=f(2)-2<1+\dfrac{1}{2}\times 2-2=0$

$g(1)=f(1)-1>0$

따라서 $g(1)g(2)<0$이므로 중간값의 정리에 의하여 $g(x)=0$을 만족하는 실수 x가 구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나 존재한다. (참)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ 이다.

73. 정답 $y=2x-2\pi$

[해설]

$f'(x)=2\cos 2x$이므로 곡선 위의 점 $(\pi,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $2\cos 2\pi = 2$

따라서, 구하는 접선의 방정식은

$y-0=2(x-\pi)$에서 $y=2x-2\pi$

74. 정답 $y=ex$

[해설]

접점을 $(a,\ e^a)$로 놓으면 $f'(x)=e^x$ 이므로 기울기는 $f'(a)=e^a$

즉, 접선의 방정식은 $y-e^a=e^a(x-a)$

$y=e^a x+e^a(1-a)$

이 직선이 원점을 지나므로 $e^a>0$이므로 $a=1$

따라서, 구하는 접선의 방정식은 $\therefore y=exy=e^x$

75. 정답 ③

[해설]

$f'(x)=a$, $g'(x)=\dfrac{1}{x}$이고 $x=b$에서 공통 접선을 가지므로

$a=\dfrac{1}{b}$ $\quad ab=1$

또, $x=b$에서 함숫값이 같으므로

$\ln b = ab = 1$

$\therefore b=e$

76. 정답 ④

[해설]

$f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}$ 이므로 곡선 위의 점 $\left(t,\ \dfrac{e^t}{t}\right)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}$ 이다.

그러므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(t,\ \dfrac{e^t}{t}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=\dfrac{e^t(t-1)}{t^2}(x-t)+\dfrac{e^t}{t}$ …… ㉠

직선 ㉠이 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-\dfrac{e^t(t-1)}{t}+\dfrac{e^t}{t}$

양변에 $-t$를 곱하여 정리하면

$e^t(t-2)=0$ $\quad \therefore t=2\ (\because e^t>0)$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{e^2}{4}(x-2)+\dfrac{e^2}{2}$

따라서 $g(x)=\dfrac{e^2}{4}x$ 이므로 $g\left(\dfrac{8}{e^2}\right)=2$

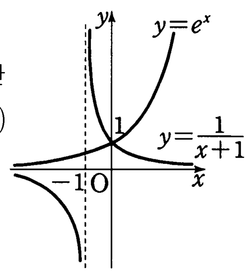
77. 정답 ②

[해설]

$y=xe^x-1$에서 $y'=e^x+xe^x$

곡선 $y=xe^x-1$위의 점 $(a,\ ae^a-1)$에서의 접선의 기울기가 1이라고 하면 $e^a+ae^a=e^a(1+a)=1$ …… ㉠

㉠에서 $e^a=\dfrac{1}{a+1}$ 이므로 a는 두 곡선 $y=e^x$, $y=\dfrac{1}{x+1}$ 의 교점의 x좌표이다.



오른쪽 그림과 같이 두 곡선은 점 $(0,\ 1)$에서 만나므로 $a=0$ 그러므로 접점의 좌표는 $(0,\ -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+1=1(x-0)$에서 $y=x-1$

따라서 $f(x)=x-1$이므로 $f(1)=0$

78. 정답 $\frac{5}{2}$

[해설]

두 곡선 $y=a-2\sin^2 x$, $y=2\cos x$가 $x=p\left(0<p<\frac{\pi}{2}\right)$에서 접하고

있다고 하면 $f(p)=g(p)$, $f'(p)=g'(p)$

$f'(x)=4\sin x\cos x$이고 $g'(x)=-2\sin x$이므로

$-4\sin p\cos p=-2\sin p$ …… ㉠

$a-4\sin^2 p=2\cos p$ …… ㉡

㉠에서 $\sin p\neq 0\left(\because 0<p<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

$\cos p=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore p=\frac{\pi}{3}$

따라서, $p=\frac{\pi}{3}$를 ㉡에 대입하면 $a=\frac{5}{2}$

79. 정답 ②

[해설]

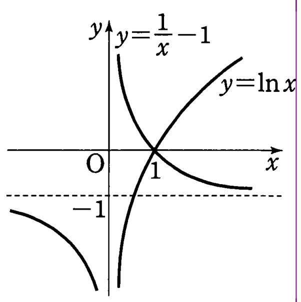
$y=e^{x-b}$에서 $y'=e^{x-b}$이고 $y=\ln x+1$ 에서 $y'=\frac{1}{x}$

두 곡선이 $x=a$에서 공통접선을 가지므로

$e^{a-b}=\frac{1}{a}$, $e^{a-b}=\ln a+1$

그러므로 $\ln a+1=\frac{1}{a}$에서 $\ln a=\frac{1}{a}-1$

a는 두 곡선 $y=e^{x-b}$, $y=\ln x+1$ 의 교점의 x좌표이다. 오른쪽 그림과 같이 두 곡선이 점 $(1,\ 0)$에서 만나므로 $a=1$



따라서, 이 값을 $e^{a-b}=\frac{1}{a}$에 대입하면 $b=1$

$\therefore a+b=2$

80. 정답 8

[해설]

$f'(x)=\cos x$이므로 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-\sin a=\cos a(x-a)$ …… ㉠

㉠과 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$가 같은 식이므로

$\cos a=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $a=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$(단, n은 정수)

또, $-a\cos a+\sin a=-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ㉡이므로

$a=2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$를 ㉡에 대입하면 a의 값을 구하면

$a=\frac{\pi}{4}$

$\therefore 16\{g(a)\}^2=16\{f(a)\}^2=16\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2=8$

81. 정답 ①

[해설]

접점에서의 θ의 값은 $\theta-\sin\theta=\frac{3}{2}\pi+1$, $1-\cos\theta=1$에서 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 이다.

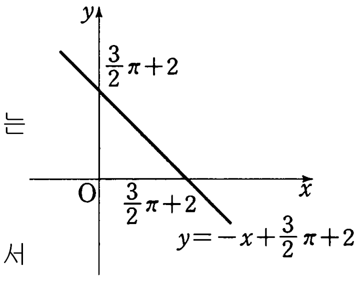
$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$

그러므로 $\theta=\frac{3}{2}\pi$일 때, 접선의 기울기는

-1이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\left(x-\frac{3}{2}\pi-1\right)$에서



$y=-x+\frac{3}{2}\pi+2$

따라서 구하는 도형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\pi+2\right)^2=\frac{1}{8}(3\pi+4)^2$

82. 정답 50

[해설]

$x^3+y^3-5xy+1=0$의 양변을 x에 관하여 미분하면 $3x^2-5y+(3y^2-5x)\frac{dy}{dx}=0$이므로

점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 1이다.

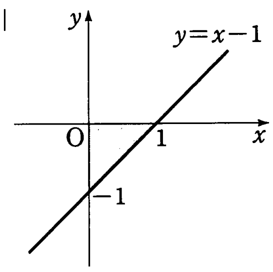
그러므로 구하는 접선의 방정식은ㅁ

$y-1=1\cdot(x-2)$에서 $y=x-1$

따라서 구하는 도형의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

$\therefore 100S=50$



83. 정답 ①

해설

$y^2=x^3+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\cdot\frac{dy}{dx}=3x^2$ $\quad\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y}$

$x=2$, $y=3$일 때 접선의 기울기는 $\frac{dy}{dx}=\frac{3\cdot2^2}{2\cdot3}=2$이므로

점$(2,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2)$ $\therefore y=2x-1$ …… ㉠

㉠을 $y^2=x^3+1$에 대입하면

$(2x-1)^2=x^3+1$, $x^3-4x^2+4x=0$

$\therefore x(x-2)^2=0$

따라서 접선이 이 곡선과 다시 만나는 점의 x좌표는 0이고 y좌표는 -1이므로

$a+b=-1$

84. 정답 ②

[해설]

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$이므로 접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t^2})$이라 하면 접선의 방정식은 $y=-2te^{-t^2}(x-t)+e^{-t^2}$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-2ate^{-t^2}+2t^2e^{-t^2}+e^{-t^2}=0,\quad e^{-t^2}(2t^2-2at+1)=0$

이 때, $e^{-t^2}>0$이므로 $2t^2-2at+1=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

따라서 $\dfrac{D}{4}=a^2-2>0$이어야 하므로 $a<-\sqrt{2}$ 또는 $a>\sqrt{2}$

85. 정답 ⑤

[해설]

$y=xe^x+e$에서 $y'=e^x+xe^x$이므로 곡선 위의 점 $(t,\ te^t+e)$ $(t,\ te^t+e)$에서의 접선의 기울기는 e^t+te^t이다. 따라서 점 $(t,\ te^t+e)$에서의 접선의 방정식은 $y=e^t(t+1)(x-t)+te^t+e$에서

$y=e^t(t+1)x-te^t+e$

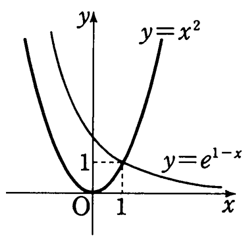
이 직선이 원점을 지나면

$0=-t^2e^t+e$에서 $t^2e^t=e$ …… ㉠

㉠에서 $t^2=e^{1-t}$이므로 t는 두 곡선 $y=x^2,\ y=e^{1-x}$의 교점의 x좌표이다.

오른쪽 그림과 같이 두 곡선은 점 $(1,\ 1)$에서 만나므로 $t=1$

그러므로 접선의 기울기는 $2e$이다.



이 때, $\tan\theta=m$이라 하면

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{m-1}{m+1}=2e$$

$$\therefore m=-\frac{2e+1}{2e-1}$$

86. 정답 ④

[해설]

$y'=-2\sin 2x$이므로 곡선 $y=\cos 2x$ 위의 점 $p(t,\ \cos 2t)$에서의 접선의 기울기는 $-2\sin 2t$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 수직이고 점 P에서 만나는 직선 l의 방정식은

$y-\cos 2t=\dfrac{1}{2\sin 2t}(x-t)$에서

$y=\dfrac{1}{2\sin 2t}x-\dfrac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t$

직선 l의 y절편이 $f(t)$이므로

$f(t)=-\dfrac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t$

$$\therefore \lim_{t\to 0}f(t)=\lim_{t\to 0}\left(-\frac{t}{2\sin 2t}+\cos 2t\right)=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

87. 정답 234

[해설]

직선 $x-y+5=0$에 $x=1$을 대입하여 접점의 좌표를 구하면 $(1,\ 6)$이다.

곡선 $y=f(x)$는 점 $(1,\ 6)$을 지나므로

$f(1)=\sqrt{1+a+b}=6$ …… ㉠

또 접선의 기울기가 1이므로 $f'(x)=\dfrac{3x^2+a}{2\sqrt{x^3+ax+b}}$에서

$f'(1)=\dfrac{3+a}{2\sqrt{1+a+b}}=\dfrac{3+a}{12}=1$

$\therefore a=9$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=26$

$\therefore ab=234$

88. 정답 ③

[해설]

$y=e^{x-k}$에서 $y'=e^{x-k}$

원점과 점 $(2,\ 8)$을 지나는 직선의 방정식은 $y=4x$이므로

접점의 좌표를 $(t,\ e^{t-k})$이라 하면

$e^{t-k}=4$ …… ㉠

또 접점은 직선 $y=4x$ 위의 점이므로

$e^{t-k}=4t$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$t=1$이고 $k=1-\ln 4=\ln\dfrac{e}{4}$

89. 정답 ④

[해설]

$y=xe^x$ 에서 $y'=e^x+xe^x$

접점의 좌표를 $(t,\ te^t)$이라 하면 접선의 방정식은

$y-te^t=(e^t+te^t)(x-t)$

이 접선이 점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$-te^t=(e^t+te^t)(4-t)$

$e^t(t^2-4t-4)=0$

그런데 $e^{t^2}\neq 0$이므로 $t^2-4t-4=0$

이 방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-4$

또 두 접선의 기울기는 $e^\alpha(1+\alpha),\ e^\beta(1+\beta)$이므로

$m_1m_2=e^a(1+\alpha)e^\beta(1+\beta)$

$\quad=e^{a+\beta}(1+\alpha+\beta+\alpha\beta)=e^4$

90. 정답 ②

[해설]

$y'=\dfrac{2}{x}$이므로 $x=a$와 $x=b$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{2}{a},\ \dfrac{2}{b}$이다.

여기서 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{2}{a}-\frac{2}{b}}{1+\frac{2}{a}\cdot\frac{2}{b}}\right|=\frac{\frac{2}{a}-\frac{2}{b}}{1+\frac{2}{a}\cdot\frac{2}{b}}\left(\because \frac{2}{a}>\frac{2}{b}\right)$$

$\tan 45^\circ=1$

$ab+2a-2b+4=0$

$(a-2)(b+2)=-8$

이 때, $a<b$이므로 $a-2<b+2$

$\therefore \begin{cases}a-2=-1\\b+2=8\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a-2=-2\\b+2=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}a-2=-4\\b+2=2\end{cases}$

또는 $\begin{cases}a-2=-8\\b+2=1\end{cases}$

그런데 진수 조건에서 $a>0$이므로

$a=1,\ b=6$이 되어 $ab=6$

***91.* 정답 ④**

[해설]

$y=e^x$ 에서 $y'=e^x$

곡선 $y=e^x$ 위의 한 점$(t,\ e^{-t})$에서의 접선의 기울기는 e^t이고 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-e^{-t}$이므로 접선과 접선에 수직인 직선의 방정식은 각각

$y-e^t=e^t(x-t),\ y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$

그러므로 이 두 직선의 x절편은 각각 $t-1,\ e^{2t}+t$이다.

$a=t-1,\ b=e^{2t}+t$

ㄱ. 점 $(t,\ e^{-t})$에서의 접선의 기울기를 m이라고 하면

$\lim_{t\to-\infty} m=\lim_{t\to-\infty} e^t=0$이다.(참)

ㄴ. $b-a=e^{2t}+1$이므로 $\lim_{t\to-\infty}(b-a)=\lim_{t\to-\infty}(e^{2t}+1)=1$(거짓)

ㄷ. 임의의 실수 t에 대하여 $t-a=1$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

***92.* 정답 ⑤**

[해설]

곡선 위의 점을 $P\left(t,\ \frac{a}{t}\right)$라 하고 $xy=a$를 x에 관하여 미분하면

$y+x\frac{dy}{dx}=0$에서 $\frac{dy}{dx}=-\frac{a}{x^2}$

그러므로 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{a}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y=-\frac{a}{t^2}(x-t)+\frac{a}{t}$

즉, $y=-\frac{a}{t^2}x+\frac{2a}{t}$ ...... ㉠

이 때, 점 Q의 좌표는 $(2t,\ 0)$이고 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \frac{2a}{t}\right)$이다.

ㄱ. $\overline{QR}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2t}{2},\ \frac{2a}{2t}\right)$, 즉 $\left(t,\ \frac{a}{t}\right)$

따라서 점 P는 $\overline{QR}$의 중점이다.(참)

ㄴ. 곡선이 제 1사분면위에 있으므로

$\overline{QR}^2=4t^2+\frac{4a^2}{t^2}\geq 2\sqrt{16a^2}=8a$에서 $\overline{QR}\geq 2\sqrt{2a}$ (참)

ㄷ. $\triangle OQR=\frac{1}{2}\times 2t\times\frac{2a}{t}=2a$이므로 $\triangle OQR$의 넓이는 a의 값에 의해서만 변한다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, , ㄴ, ㄷ이다.

***93.* 정답 ③**

[해설]

P_1과 x축과 이루는 각을 θ라 하면 $P_1(\cos\theta, \sin\theta)$으로 들 수 있고 접선은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이 된다.

$Q_1\left(\frac{1}{\cos\theta}, 0\right)$이고 삼각형 P_1OQ_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\tan\theta$가 된다.

넓이가 $\frac{1}{4}$이므로 $\tan\theta=\frac{1}{2}$이다.

$$\therefore \triangle OP_2Q=\frac{1}{2}\cdot\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{3}{2}$$

94. 정답 ③

[해설]

$y=e^{-x}$ 에서 $y'=-e^{-x}$

$x=0$ 일 때 $y'=-1$ 이므로 $A(0, 1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-2=1\cdot(x-0)$ $\qquad\therefore x+1$

한편, 점 $P(t, e^{-t})$ 에서의 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-e^{-t}=e^t(x-t)$ $\qquad\therefore e^tx-te^t+e^{-t}$

이 두 직선의 교점의 x 좌표를 구하면

$e^tx-te^t+e^{-t}=x+1$

$x(e^t-1)=te^t-e^{-t}+1$

$x(e^t-1)=te^t+e^{-t}(e^t-1)$

$\therefore x=\frac{te^t}{e^t-1}+e^{-t}$

$\therefore f(t)=\frac{te^t}{e^t-1}+e^{-t}$

$\therefore \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\frac{te^t}{e^t-1}+\lim_{t\to0}e^{-t}=1+1=2$

***95.* 정답 $c=\frac{\pi}{2}$**

[해설]

$f(x)=\sin x$는 구간 $[0,\ \pi]$에서 연속이고 구간 $(0,\ \pi)$에서 미분가능하다. 또, $f(0)=f(\pi)=0$이므로 구간 $(0,\ \pi)$에서 $f'(c)=0$인 점 c가 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=\cos x$ 이므로

$f'(c)=\cos c=0$ 에ㅐ서 $c=\frac{\pi}{2}$

96. 정답 $c=2$

[해설]

$f(x)=x^2$은 구간 $[1,\ 3]$에서 연속이고 구간 $(1,\ 3)$에서 미분가능하므로 $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$를 만족하는 c가 개구간 $(1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x$이고 $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{9-1}{2}=4$이므로

$f'(c)=2c=4$에서 $c=2$

97. 답 e^2-e

[해설]

$f(x)=\ln x$는 폐구간 $[e,\ e^2]$에서 연속이고 개구간 $(e,\ e^2)$에서 미분가능하며

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{2-1}{e^2-e}=f'(c)=\dfrac{1}{c}$인 c가 개구간 $(e,\ e^2)$에 적어도 하나 존재한다.

이 때, $e^2-e=c$이므로 구간의 양 끝점을 지나는 직선에 평행한 직선과 곡선 $f(x)=\ln x$와의 접점의 좌표는 e^2-e이다.

98. 정답 10

[해설]

$f(10)=10f'(c)+f(0)$에서

$\dfrac{f(10)-f(0)}{10}=f'(c)$ …… ㉠

$f(x)=\sin\pi x$는 폐구간 $[0,\ 10]$에서 연속이고 개구간 $(0,\ 10)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 ㉠을 만족하는 c가 개구간 $(0,\ 10)$에 존재한다.

$f(10)-f(0)=\sin 10\pi-\sin 0=0$

이 때, $f'(x)=\pi\cos\pi x$이므로 $\pi\cos\pi c=0$인 c를 구한다.

따라서, c는 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \cdots,\ \dfrac{19}{2}$로 모두 10개 존재한다.

99. 정답 $\dfrac{1}{2}$

[해설]

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)$에서

$f'(x+\theta h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ …… ㉠

$f(x)$가 다항함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 ㉠을 만족하는 $\theta(0<\theta<1)$가 존재한다.

$f'(x)=3ax^2$이므로 $f'(x+\theta h)=3a(x+\theta h)^2$이다.

또, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=3ax^2+3axh+ah^2$이므로 ㉠에서

$3ax^2+3axh+ah^2=3a(x+\theta h)^2$

$x^2+xh+\dfrac{h^2}{3}=(x+\theta h)^2$

$\therefore \theta=\dfrac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+xh+\dfrac{h^2}{3}}-x\right)$

$\therefore \lim\limits_{h\to 0}\theta=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\left(\sqrt{x^2+xh+\dfrac{h^2}{3}}-x\right)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{xh+\dfrac{h^2}{3}}{h\left(\sqrt{x^2+xh+\dfrac{h^2}{3}}+x\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{x+\dfrac{h}{3}}{\sqrt{x^2+xh+\dfrac{h^2}{3}}+x}$$

$$=\frac{x}{2x}(\because x>0)=\frac{1}{2}$$

100. 정답 ①

[해설]

함수 $f(x)=e^{-x}$의 폐구간 $[\ln 4,\ \ln 4+1]$에서 연속이고 개구간에서 $(\ln 4,\ \ln 4+1)$ 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(\ln 4+1)-f(\ln 4)}{(\ln 4+1)-\ln 4}=f'(c)(\ln 4<c<\ln 4+1)$인 c가 존재한다.

$f'(x)=e^{-x}$이므로 $e^{-\ln 4-1}-e^{-\ln 4}=-e^{c}$

$\dfrac{1}{4e}-\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{e^c},\ \dfrac{e-1}{4e}=\dfrac{1}{e^c},\ e^c=\dfrac{4e}{e-1}$

$\therefore c=\ln\dfrac{4e}{e-1}$

101. 정답 ⑤

[해설]

$f(x)=\ln(x+4)$로 놓으면 $f'(x)=\dfrac{1}{x+4}$이고 평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{\ln(b+4)-\ln(a+4)}{b-a}=\dfrac{1}{c+4}(0<a<c<b)$인 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데 $b\to a$이면 $c\to a$이므로

$\lim\limits_{b\to a}\left(\dfrac{1}{b-a}\ln\dfrac{b+4}{a+4}\right)=\lim\limits_{b\to a}\dfrac{\ln(b+4)-\ln(a+4)}{b-a}$

$=\lim\limits_{c\to a}=\dfrac{1}{c+4}=\dfrac{1}{a+4}$

102. 정답 ①

[해설]

조건 ㈎에 의하여 함수 $f(x)$는 폐구간 $[e,\ e^2+4]$에서 상수함수이다.

따라서 조건 ㈏에 의하여 폐구간 $[e,\ e^2+4]$에서 $f(x)=e$

그런데 $e<6<e^2+4$이므로 $f(6)=e$

103. [정답] ④

해설

ㄱ. $f(x)=|\cos x|$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$이고

구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 $f(x)=|\cos x|=\cos x$이므로 $f'(x)=-\sin x$

따라서 $f'(c)=-\sin c=0$에서 $c=0$이므로 $f'(c)=0$인 c가

구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 존재한다.

ㄴ. $f(x)=|\tan x|$일 때, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=0$이지만

구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 $f'(x)=\sec^2 x$ 또는 $f'(x)=-\sec^2 x$이므로

$f'(c)=0$인 c가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=x+\sin x$는 구간 $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$에서 연속이고,

구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=f'(c)$ 즉, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}f'(c)$를 만족하

는 상수 c가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에 존재한다.

따라서 보기에서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}f'(c)$를 만족하는 상수 c가 구간 $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$에 적어도 하나 존재하는 함수는 ㄱ, ㄷ 이다.

104. 정답 ①

[해설]

$f(x)$가 폐구간 $[0,\ t]$에서연속이고 구간 $(0,\ t)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(0)}{t-0}=\dfrac{e^t-1}{t}=f'(c)=e^c$인 c가 존재한다.

그러므로 식을 정리하면 ㈎ : $e^t-1=e^c t$

이 때, $\dfrac{e^t-1}{t}=e^c$이므로 양변에 자연로그를 취하면

$\ln\dfrac{e^t-1}{t}=c$이고 $0<c<t$이므로 $0<\ln\dfrac{e^t-1}{t}<t$

즉, ㈏ : $\ln\dfrac{e^t-1}{t}$

$0<\ln\dfrac{e^t-1}{t}<t$의 양변에 $\dfrac{1}{t}$을 곱하면 $0<\dfrac{1}{t}\ln\dfrac{e^t-1}{t}<1$

따라서 주어진 식과 비교하면 $a=0,\ b=1$이므로 ㈐ : 1

105. 정답 ⑤

[해설]

함수 $f(x)=\boxed{e^{-x}}$으로 놓고 폐구간을 $\boxed{[\sin x,\ x]}$로 잡아 평균값정리를 적용시키면

$\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=f'(c)$ $(\sin x<c<x)$인 c가 존재한다.

$\dfrac{f(x)-f(\sin x)}{x-\sin x}=\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}=-e^{-c}$

$\sin x<c<x$이고 $\lim\limits_{x\to+0}c=0$이므로 $\lim\limits_{x\to+0}\sin x=\lim\limits_{x\to+0}x=0$

따라서

$$\lim_{x\to+0}\frac{e^{-\sin x}-e^{-x}}{e^{x+\sin x}(x-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{e^{x+\sin x}}\times\lim_{x\to+0}\frac{e^{-x}-e^{-\sin x}}{x-\sin x}\cdot(-1)$$
$$=\lim_{x\to+0}\frac{1}{e^{x+\sin x}}\times\lim_{x\to+0}(-e^{-c})\cdot(-1)$$
$$=1\times\lim_{c\to0}e^{-c}=1$$

106. 정답 ④

[해설]

다항함수 $f(x)=x^3-6x^2+8x+3$은 실수 전체의 집합에 대하여 미분가능하므로 폐구간 $[a,\ b]$에서 평균값의 정리를 적용하면

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다.

그러면 $f'(c)$는 두 점 $P,\ Q$를 잇는 직선의 기울기이므로

$f'(c)=m$이다.

그런데 $-2\leqq a\leqq b\leqq3$이므로 $-2<c<3$이고

$f'(x)=3x^2-12x+8$

따라서 $m=f'(c)=3c^2-12c+8=3(c-2)^2-4$이므로

$-4\leqq m<44$

107. 답 2π

[해설]

$f'(x)=1-\cos x$이고 구간 내에서 $-1\leqq\cos x<1$이므로

$0<f'(x)\leqq2$이다.

따라서 $f(x)$는 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 증가하는 함수이다.

$\therefore a+b=2\pi$

108. 정답 ③

[해설]

$f(x)$가 "$x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이다."라는 관계를 만족하므로 구간 내에서 증가함수이다. 즉,

$f'(x)=a\cos(ax+1)$이 $[0,\ 1]$에서 항상 $f'(x)>0$이다.

(ⅰ) $a>0$일 때, $x=0$이면

$f'(0)=a\cos(0+1)=a\cos1>0$이고

$x=1$일 때

$f'(1)=a\cos(a+1)>0$이 성립해야 한다.

즉, $1<a+1<\frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore 0<a<\frac{\pi}{2}-1$

(ⅱ) $a<0$일 때, $f'(0)=a\cos(0+1)=a\cos1<0$이므로 모순이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해서 $0<a<\frac{\pi}{2}-1$

109. 정답 ①

[해설]

주어진 두 조건을 만족하는 함수는 극값이 구간 $(0,\ \pi)$에 존재하는 함수 중 극솟값이 존재하는 함수이다.

그런데 ㄱ과 ㄴ은 함수의 그래프를 생각해 보면 ㄱ만이 주어진 구간에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$이므로

$x=\dfrac{\pi}{2}$에서 조건 (가)를 만족한다.

$f''(x)=\cos x-x\sin x$에서

$f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}<0$이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

따라서 조건을 만족하는 함수는 ㄱ이다.

110. 정답 ①

[해설]

$$f'(x)=2(x+a)e^x+(x^2+2ax+b)e^x$$
$$=\{x^2+2(a+1)x+2a+b\}e^x$$

모든 실수 x에서 함수 $f(x)$가 항상 증가하기 위해서는

$$x^2+2(a+1)x+2a+b\geq 0$$

이어야 한다.

이 때, 방정식 $x^2+2(a+1)x+2a+b=0$의 판별식 $D\leq 0$이어야 한다.

$D/4=(a+1)^2-(2a+b)\leq 0$

따라서 $b\geq a^2+1$에서 b의 최솟값은 $a=0$일 때 1이다.

111. 정답 ⑤

[해설]

$f'(x)=2\sin 4x\cdot(\sin 4x)'=2\sin 4x\cdot 4\cos 4x$

$0<x<2\pi$에서 $0<4x<8\pi$

$f'(x)=0$이면 $\sin 4x=0$ 또는 $\cos 4x=0$

그러므로 극점들의 x좌표는 $4x$가 $\dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \cdots,\ \dfrac{15}{2}\pi$인 경우이다.

따라서 극점의 개수는 15이다.

112. 정답 ①

[해설]

$\cos x=t$로 놓으면 $\sin^2 x=1-t^2$이므로

$f(t)=t^3-a(1-t^2)+at+a=t^3+at^2+at$ …… ㉠

이고 t구간은 $(-1,\ 1)$이다.

㉠의 도함수를 구하면 $f'(t)=3t^2+2at+a$

㉠이 $-1<t<1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

(i) $f'(-1)=3-a>0$ $\quad\therefore a<3$

(ii) $f'(1)=3a+3>0$ $\quad\therefore a>-1$

(iii) $D/4=a^2-3a>0$ $\quad\therefore a<0$또는 $a>3$

(i), (ii), (iii)에서 $-1<a<0$

113. 정답 ④

[해설]

$AC=g(x)$ 라고 놓으면 $g'(q)=0$ 이므로

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x},\ g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$이므로

$g'(q)=\dfrac{f'(q)q-f(q)}{q^2}$에서

$f'(q)=\dfrac{f(q)}{q}=g(q)$이므로 AC와 MC의 $x=q$에서의 값이 같다.

또, $x<q$인 x에 대하여 $g'(x)=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}<0$이므로

$f'(x)<\dfrac{f(x)}{x}=g(x)$, 즉 $MC<AC$

따라서, 주 조건을 만족시키는 그래프는 ④번이다.

114. 정답 0

[해설]

$y''=3x^2-1$이므로 $3x^2-1=0$에서 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이다.

$\therefore \alpha+\beta=0$

115. 정답 ①

[해설]

평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x_1)$인 x_1이 개구간 $(a,\ b)$ 안에 존재하고 $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}=f'(x_2)$인 x_2이 개구간 $(b,\ c)$안에 존재하고 한다.

그러므로 주어진 조건으로부터 $0<x_1<x_2<\pi$에 대하여 $f'(x_1)>f'(x_2)$가 성립하므로 $y=f'(x)$는 감소함수이어야 한다.

ㄱ. $f'(x)=\cos x$이므로 $0<x<\pi$에서 $f'(x)$는 감소함수이다.

ㄴ. $f'(x)=1-\sin x$이고 $f''(x)=-\cos x$이므로 $f'(x)$는 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서는 감소함수이고 $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$에서는 증가함수이다.

ㄷ. $f'(x)=e^x$이고 $f''(x)=e^x>0$이므로 $f'(x)$는 증가함수이다.

따라서 주어진 조건을 만족하는 것은 ㄱ뿐이다.

116. 정답 ④

[해설]

$f'(x)=\dfrac{x^2+3-2x(x-1)}{(x^2+3)^2}=\dfrac{-(x-3)(x+1)}{(x^2+3)^2}$이고 함수 $f(x)$가 증가하는 구간에서 $f'(x)>0$이다.

그런데 $(x^2+3)^2>0$이므로 $-(x-3)(x+1)>0$에서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(-1,\ 3)$이다.

따라서 α의 최솟값은 -1, β의 최댓값은 3이므로 그 합은 2이다.

117. 정답 2

[해설]

$f'(x)=2x+\frac{8}{x^2}$이고 $f''(x)=2-\frac{16}{x^3}$

함수 $f'(x)$가 증가하는 구간은 $f''(x)>0$인 구간을 의미한다.

x가 양의 실수이므로 $2-\frac{16}{x^3}>0$에서

$2(x-2)(x^2+2x+4)>0$

따라서 $x>2$에서 $\alpha \geqq 2$이므로 α의 최솟값은 2이다.

118. 정답 ②

[해설]

$f'(x)=e^{-x}(1-x)=0$에서 $x=1$

$f''(x)=-e^{-x}(1-x)-e^{-x}=e^{-x}(x-2)$에서

$f''(1)=-e^{-1}<0$이므로 $x=1$에서 극댓값 $f(1)=e^{-1}$을 갖고 변곡점은 점 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

119. 정답 ③

[해설]

ㄱ. $f'(x)=\frac{a(x^2+1)-ax\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-ax^2+a}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{a}{(x^2+1)^2}(x+1)(x-1)$

따라서 $f'(0)=2$에서 $a=2$이다.(참)

ㄴ. $a=2$를 대입하면 $f(x)=\frac{ax}{x^2+1}$이고

$f'(x)=-\frac{2}{(x^2+1)^2}(x+1)(x-1)=0$에서

$x=1$일 때 극댓값 $f(1)=1$을 갖는다.(거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$이므로 점근선의 방정식은 $y=0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

120. 정답 1

[해설]

$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}=0$에서 $x=0$

$f''(x)=\frac{-2(x^2+1)^2+8x^2(x^2+1)^2}{(x^2+1)^4}=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

이므로 $f''(0)=-2<0$

따라서, $x=0$에서 극댓값 $f(0)=1$을 갖는다.

121. 정답 ⑤

[해설]

$f'(x)=1+2\cos x$, $f''(x)=-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=-\frac{1}{2}$이므로 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$와 $x=\frac{4}{3}\pi$에서 극값을 갖는다.

그런데 $f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)=-2\sin\frac{2}{3}\pi=-\sqrt{3}<0$,

$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-2\sin\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}>0$ 이므로

$f(x)$는 $x=\frac{2}{3}\pi$에서 극댓값 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$을 갖고 $x=\frac{4}{3}\pi$에서 극솟값 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$을 갖는다.

한편 구간 $\left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 모두 옳다.

122. 정답 ②

[해설]

$f'(x)=-2\sin x+2\sin 2x=-2\sin x+4\sin x\cos x$

$=-2\sin x(1-2\cos x)$

$f''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$

$f'(x)=0$인 x의 값을 구간 $(0, 2\pi)$에서 구하면

$x=\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$

그런데 $f''(\pi)=-2\cos\pi+4\cos 2\pi>0$,

$f''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\cos\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{2}{3}\pi<0$,

$f''\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-2\cos\frac{5}{3}\pi+4\cos\frac{10}{3}\pi<0$

따라서 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=\frac{3}{2}$이고,

극솟값은 $f(\pi)=-3$이므로

$10(\alpha-\beta)=45$

123. 정답 $0<a<\frac{1}{4}$

[해설]

함수 $f(x)$의 정의역은 $x>0$

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}-1=\frac{-x^2+x-a}{x^2}$이므로

$f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+x-a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 그러므로

(i) $D=1-4a>0$에서 $a<\frac{1}{4}$

(ii) 두 근의 합은 1이므로 양수이다.

(iii) 두 근의 곱은 a이고 이 값이 양수이어야 하므로 $a>0$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$0<a<\frac{1}{4}$

124. 정답 ⑤

[해설]

$f'(x)=-2x\sin x^2$이고 $f''(x)=-2\sin x^2-4x^2\cos x^2$

ㄱ. $f'(0)=0$이고 $-\sqrt{\pi}<x<0$에서 $f'(x)>0$, $0<x<\sqrt{\pi}$에서

$f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.(참)

ㄴ. 구간 $\left(0, \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)$에서 $\sin x^2>0$이고 $\cos x^2>0$이다.

그러므로 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록한 함수이다. (참)

ㄷ. $f(\sqrt{\pi})=f(0)+\dfrac{f'(x)}{x}$에서 $-2=-2\sin x^2$이므로 $x=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$

이다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

125. 정답 ⑤

[해설]

점 $A(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

즉, $g(x)=f'(a)x-f'(a)a+f(a)$

또, $y=g(x)$는 점 $B(b,\ f(b))$에서도 곡선 $y=f(x)$에 접하므로

점 $B(b,\ f(b))$에서의 접선 $y-f(b)=f'(b)(x-b)$와 일치한다.

그러므로 $f'(a)=f'(b)$이고

$af'(a)-f(a)=bf'(b)-f(b)$

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$이고

$g'(x)=f'(a)$이므로 $h'(x)=f'(x)-f'(a)$

그러므로 $h'(b)=f'(b)-g'(b)=0$ (참)

ㄴ. $h'(x)=f'(x)-f'(a)=0$에서 $x=a$ 또는 $x=b$가 이 방정식의 근이고 $h(a)=h(b)$이므로 롤의 정리에 의해 $h'(c)=0$인 c가 a와 b 사이에 하나 이상 존재한다. 따라서 방정식 $h'(x)=0$은 3개 이상의 실근을 갖는다. (참)

ㄷ. $h'(x)=f'(x)-f'(a)$에서 $h''(x)=f''(x)$이므로

$h''(a)=f''(a)=0$

그런데 점 $(a, f(a))$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이므로

점 $(a,\ h(a))$는 곡선 $y=h(x)$의 변곡점이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

126. 정답 $\pi<x<2\pi$

[해설]

$f'(x)=\cos x$ 이고 $f''(x)=-\sin x$

그런데 아래로 볼록하면 $f''(x)>0$인 구간이므로

$-\sin x>0$ 에서 $\sin x<0$

따라서 $\pi<x<2\pi$

127. 정답 ③

[해설]

$y'=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$이고 $y''=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}$

ㄱ. $\dfrac{1-\ln x}{x^2}=0$에서 $x=e$이므로 $x=e$에서 극값을 갖는다. (참)

ㄴ. $y''=\dfrac{-3+2\ln x}{x^3}=0$에서 $x=e\sqrt{e}$이므로 $x=e\sqrt{e}$에서 곡선의 오목과 볼록이 바뀐다. (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$이고 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$이므로 점근선은 x축과 y축이다. (참)

따라서 **보기** 중 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

128. 정답 ①

[해설]

$y'=5x^4-15x^2$이고 $y''=20x^3-30x$

$y'=5x^2(x^2-3)$에서 $x=0,\ \pm\sqrt{3}$이고

$y''=10x(2x^2-3)=0$에서 $x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

따라서 변곡점의 개수는 3개이고 극값을 갖는 x좌표는 $x=\pm\sqrt{3}$이므로

$3\times(-\sqrt{3})\times(\sqrt{3})=-9$

129. 정답 ⑤

[해설]

$f'(x)=1+\cos x$이고 $f''(x)=-\sin x$

ㄱ. $f''(x)=0$에서 $x=0,\ \pi,\ 2\pi$이므로 점 $(\pi,\ \pi)$는 변곡점이다. (참)

ㄴ. $f''(x)=-\sin x$의 값은 구간 $(\pi,\ 2\pi)$ㅇ서 항상 양수이므로 구간 $(\pi,\ 2\pi)$에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록한 함수이다.(참)

ㄷ. $f'(\theta)=\dfrac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}$에서 $1+\cos\theta=\dfrac{\pi}{\pi}=1$

그러므로 $\cos\theta=0$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$이다.(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

130. 정답 ①

[해설]

$g(x)$이 도함수를 구하면 $g'(x)=f'(x)+xf''(x)$

함수 $f(x)$가 구간 $(-a,\ -c)$와 구간 $(c,\ a)$에서 증가하므로 이 구간에서 $f'(x)>0$이고 구간 $(-b,\ 0)$에서는 위로 볼록하므로 $f''(x)<0$, 구간 $(0,\ b)$에서는 아래로 볼록하므로 $f''(x)>0$이다.

그러므로 구간 $(-b,\ -c)$와 구간 $(c,\ b)$에서는 $g'(x)>0$이지만 구간 $(-a,\ -b), (-c,\ c), (b,\ a)$에서는 $f'(x)$와 $xf''(x)$의 부호가 서로 달라서 $g'(x)$의 부호를 판단할 수 없다.

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

131. 정답 최댓값 : 1, 최솟값 : 0

[해설]

$f'(x)=2x\cos x^2$

$f'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$

$f(0)=0,\ f\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi^2}{4}$

그런데 $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2<\pi$이다.

따라서 최댓값은 1이고, 최솟값은 0이다.

132. 정답 ②

[해설]

(ⅰ) $f'(x)=-\sin^2x+\cos x+\cos^2x=2\cos^2x+\cos x-1$
$=(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2},\ -1$

$0\leq x\leq\pi$에서 $x=\frac{\pi}{3},\ \pi$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다. $\therefore M=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(ⅱ) $g'(x)=1-\ln x$

$g'(x)=0$에서 $x=e$

$x>0$에서 $g''(x)=-\frac{1}{x}<0$이므로 곡선 $y=g(x)$는 위로 볼록하다.

따라서 $g(x)$의 최댓값은 $g(e)=e$이다. $\therefore m=e$

$\therefore 4M+m=3\sqrt{3}+e$

133. 정답 ④

[해설]

$f'(x)=(2x-2)e^{x^2-2x-a}$이므로 $f'(x)=0$으로부터 극값은 $x=1$을 갖는다.

또, $f''(x)=2e^{x^2-2x-a}+(2x-2)^2e^{x^2-2x-a}>0$이므로 아래로 볼록한 함수이다.

그러므로 $x=1$에서 극솟값을 갖고 $x=1$이 범위 내의 값이므로

최솟값은 $f(1)=e^{-a-1}+b=0$ …… ㉠

최댓값은 $f(0)=e^{-a}+b=e^{-3}-e^{-4}$ …… ㉡

따라서 ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-e^{-4}$

$\therefore ab=-3e^{-4}$

134. 정답 ④

[해설]

$1+2x-x^2\geq 0$일 때 무리함수가 정의되므로

$x^2-2x-1\leq 0$에서 $1-\sqrt{2}\leq x\leq 1+\sqrt{2}$

$f'(x)=1+\frac{2-2x}{2\sqrt{1+2x-x^2}}=1+\frac{1-x}{\sqrt{1+2x-x^2}}=0$에서

$1+2x-x^2=(x-1)^2$

$2x^2-4x=0$

그런데 $x=0$은 무연근이므로 $x=2$

$f(1-\sqrt{2})=1-\sqrt{2},\ f(1+\sqrt{2})=1+\sqrt{2},\ f(2)=3$이므로

최댓값 $M=3$이고 최솟값 $m=1-\sqrt{2}$

$\therefore M-m=2+\sqrt{2}$

135. 정답 ④

[해설]

$f'(x)=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-2=\ln x-1$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=e$

그러므로 양 끝점에서의 함숫값과 극값을 구하면

$f(1)=-2,\ f(e)=-e,\ f(e^2)=0$

따라서 $m=-e$이고 $M=0$이므로 $M-m=e$

136. 정답 ②

[해설]

$F(x)=(f\circ g)(x)=e^{2x}-2e^x-1$이고

$F'(x)=2e^x(e^x-1)$이므로 $F(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

그러므로

$F(-2)=e^{-4}-2e^{-2}-1,\ F(0)=-2,\ F(3)=e^6-2e^3-1$

따라서 최댓값은 e^6-2e^3-1이고 최솟값은 -2이므로 그 합은 e^6-2e^3-3이다.

137. 정답 ③

[해설]

중심 O에서 변 AD에 내신 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AD}=2\overline{DH}$

$\overline{DH}=\overline{OD}sin(\frac{\pi}{2}-\theta)=\cos\theta$

$\overline{OH}=\overline{OD}cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$

따라서 $S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})\sin\theta=(1+\cos\theta)\sin\theta$이므로

$S'(\theta)=-\sin^2\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$

$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$S'(\theta)=0$이므로 $\cos\theta=\frac{1}{2},\ \theta=\frac{\pi}{3}\quad(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2})$

다음 증감표에서 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 극대이면서 최대이다.

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(\theta)$의 최댓값은 $S(\frac{\pi}{3})=(1+\cos\frac{\pi}{3})\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

138. 답 : 존재하지 않는다.

[해설]

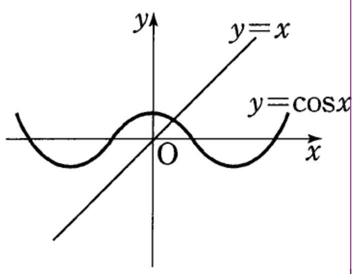
$e^x>0$ 이므로 $y=e^x$ 의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

따라서 방정식 $e^x=0$ 의 실근은 존재하지 않는다.

139. 정답 : 1

[해설]

$y=x$ 와 $y=\cos x$ 의 그래프를 그리면 각각 그림과 같으므로 교점이 1개 존재한다. 따라서 방정식 $x=\cos x$ 의 실근의 개수는 1이다.



140. 정답 : 2

[해설]

$f(x)=e^x-3x$ 라고 놓으면 $f'(x)=e^x-3=0$ 에서 $x=\ln 3$

$f(\ln 3)=e^{\ln 3}-3\ln 3=3-3\ln 3<0$

또, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$

이므로 그래프를 그리면 근이 2개 존재한다.

141. 정답 ②

[해설]

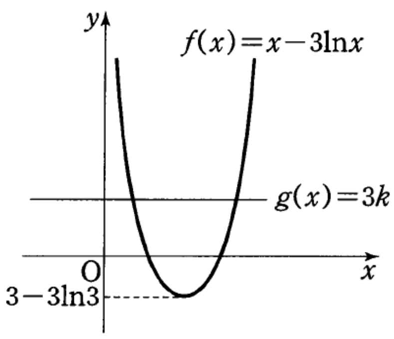
$x-3\ln x=3k$ 에서 $f(x)=x-3\ln x,\ g(x)=3k$ 로 놓으면

$f'(x)=1-\dfrac{3}{x}=\dfrac{x-3}{x}$

$f'(x)=0$ 에서 $x=3$

$f(x)$ 의 증가, 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

x	(0)	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$3-3\ln 3$	↗



$f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극소이자 최소이다.

그러므로 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 가 만나는 k값의 범위는

$3k\geqq 3-3\ln 3$　　$\therefore\ k\geqq 1-\ln 3$

따라서 k의 최솟값은 $1-\ln 3$ 이다.

142. 정답 ③

[해설]

$f(x)=e^x,\ g(x)=kx$ 라 하면 $f'(x)=e^x$

원점에서 곡선 $f(x)=e^x$ 에 그은 접선의 접점을 $(t,\ e^t)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t(-t)$

$\therefore\ t=1$

접선의 방정식은 $y=ex$

접선의 기울기가 e 이므로 $k\geqq e$ 이면 $f(x)=e^x,\ g(x)=kx$ 의 그래프는 만나므로 방정식 $e^x=kx$ 는 실근을 갖는다.

따라서 k의 최솟값은 e이다.

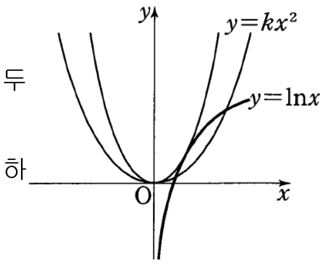
143. 정답 ②

[해설]

$\ln x=kx^2$에서

두 함수 $y=\ln x,\ y=kx^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나면 된다.

두 함수의 그래프가 $x=\alpha$ 에서 접한다고 하면



$\ln\alpha=k\alpha^2,\ \dfrac{1}{\alpha}=2k\alpha$

$\therefore\ \alpha=e^{\frac{1}{2}},\ k=\dfrac{1}{2e}$

따라서 구하는 k값의 범위는

$0<k<\dfrac{1}{2e}$

144. 정답 ①

[해설]

$f(x)=x-\sin x$ 로 놓으면 $f'(x)=1-\cos x\geqq 0$

따라서 $f(x)$ 는 증가함수이고 $f(0)=0$ 이므로 실근은 $x=0$ 한 개뿐이다.

145. 정답 ②

[해설]

곡선 $y=\log x$ 에 직선 $y=kx$ 가 접할 때, 접점의 좌표를 $(t,\ kt)$ 라고 하자.

그러면 $\log t=kt,\ \dfrac{1}{t\ln 10}=k$

두 식을 연립하면 $\log t=\dfrac{1}{\ln 10}=\log e$ 에서

$t=e,\ k=\dfrac{1}{e\ln 10}$

따라서 구하는 범위는 $0<k<\dfrac{1}{e\ln 10}$

146. 정답 ①

[해설]

$f(x)=x^2-a\cos x,\ g(x)=2x+a\sin x$ 로 놓으면

$f'(x)=2x+a\sin x=g(x)$

$f(x)=0$ 의 근을 m개라고 가정하자. 즉, $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$ $(\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m)$ 을 방정식 $f(x)$ 의 근이라고 가정하자.

그러면 $g(x)=f'(x)$ 이므로 방정식 $g(x)=0$ 의 근은 $y=f(x)$ 의 극값의 x좌표를 의미한다.

그런데 $f(x)$ 가 미분가능한 함수이므로 롤의 정리에 의하여 α_1과 α_2

사이, α_2 와 α_3 사이, $\cdots$, α_{m-1} 과 α_m 사이에 각각 $g(x)=0$ 의 근이 적어도 하나 이상 존재한다.

$\therefore\ n \geqq m-1$

따라서 $h(a)=m-n \leqq 1$ 이므로 $h(a)$ 의 최댓값은 1이다.

***147.* 정답 ③**

[해설]

$f(x)=e^x-3x$ 로 놓으면 $f'(x)=e^x-3$ 이므로

$f'(x)=0$ 으로부터 $x=\boxed{\ln 3}$ 에서 극값을 갖는다.

또 $f''(x)=e^x>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 그래프는 -2와 2 사이에서 아래로 $\boxed{볼록}$ 하다. 그런데

$f(-2)=e^{-2}+6>0,\ f(\ln 3)=3-3\ln 3<0,\ f(2)=e^2-6>0$

이고 함수 $f(x)=e^x-3x$ 가 연속함수이므로 $\boxed{중간값의 정리}$에 의하여 방정식 $e^x=3x$ 는 -2와 2 사이에서 $\boxed{2}$개 이상의 실근을 갖는다.

***148.* 정답 ③**

[해설]

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\ln(1+x^2)$ 으로 놓으면

$f'(x)=x-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{x(x-1)(x+1)}{1+x^2}$ 이므로

$f'(x)=0$ 으로부터 $x=0,\ -1,\ 1$ 에서 극값을 갖는다.

그러므로 함수의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{1}{2}-\ln 2$	↗	0	↘	$\frac{1}{2}-\ln 2$	↗

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

149. [정답] ②

$f'(x)=\dfrac{e^x(1+2e^x)-(1+e^x)2e^x}{(1+2e^x)^2}=\dfrac{-e^x}{(1+2e^x)^2}$ 에서

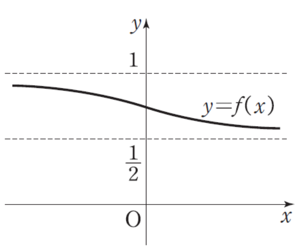
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다. 이 때,

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+e^x}{1+2e^x}=1$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{1+2e^x}=\frac{1}{2}$

이므로 $\dfrac{1}{2}<f(x)<1$이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 $y=f(x)$는 극댓값과 극솟값을 모두 갖지 않으며 방정식 $f(x)=2$를 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.



또, 방정식 $f(x)=\dfrac{3}{4}$은 한 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

***150.* 정답　풀이참조**

[해설]

$f(x)=e^x$ 으로 놓으면 $f'(x)=e^x$ 이고 $x>0$ 인 모든 실수에 대하여 $f'(x)>0$

그러므로 $f(x)$ 는 증가함수이고 $f(0)=e^0=1>0$

따라서 모든 양의 실수 x에 대하여 $e^x>0$

***151.* 정답 $e^x>x-1$**

[해설]

$f(x)=e^x-(x-1)=e^x-x+1$ 로 놓으면

$f'(x)=e^x-1$ 이고 $x>0$ 인 모든 실수에 대하여 $f'(x)>0$

그러므로 $f(x)$ 는 증가함수이고 $f(0)=e^0-0+1=2>0$

따라서 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$ 이므로

$e^x>x-1$

***152.* 정답 ①**

[해설]

$f(x)=x-\ln\{k(1+x)\}=x-\ln(1+x)-\ln k$ 로 놓으면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$

이므로 $f(x)$ 는 $x>0$ 일 때 증가한다.

그러므로 $x>0$ 일 때 $f(x)>0$ 이 성립하려면 $f(0)\geqq 0$ 이 된다.

$f(0)=-\ln k\geqq 0$

$\ln k\leqq 0\qquad \therefore\ k\leqq 1$

따라서 양수 k의 최댓값은 1이다.

***153.* 정답 ④**

[해설]

$f(x)=\sin 2x+2\sin x$ 로 놓으면 함수 $f(x)$ 는 주기가 2π 인 주기함수이므로 $0\leqq x\leqq 2\pi$ 에서 조건을 만족시키면 된다.

$f'(x)=2\cos 2x+2\cos x$

$=2(2\cos^2 x-1)+2\cos x$

$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$

에서 $x=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi,\ \pi$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	극대	↘	변곡	↘	극소	↗	0

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$y=f(x)$ 는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 극대이자 최대가 된다.

$f(x)\leqq f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq a$ 에서 $a\geqq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 이다.

154. 정답 ①

[해설]

$f(x)=\cos x-(k-\frac{1}{2}x^2)$ 이라 하면

$f'(x)=-\sin x+x$

$f''(x)=-\cos x+1$

이 때, $x>0$ 에서 $f''(x)\geqq 0$ 이므로 $f'(x)$ 는 증가함수이다.

따라서 $x>0$ 에서 $f'(x)>f'(0)=0$이므로 $f(x)$ 도 증가함수이다.

$\therefore\ f(x)>f(0)=1-k$

그러므로 $f(x)>0$ 이 항상 성립하려면 $1-k\geqq 0$

$\therefore\ k\leqq 1$

155. 정답 풀이참조

[해설]

$f(x)=xe^x-x$ 라고 할 때

$f'(x)=e^x+xe^x-1=(1+x)e^x-1$

$x<0$ 이므로 $1+x<1$ 이고 $0<e^x<1$ 이다.

즉, $(1+x)e^x<1$ 이므로 $f'(x)<0$

그러므로 $f(x)$ 는 감소함수이다.

그런데 $f(0)=0$

따라서 $x<0$ 이면 $f(x)>0$ 이므로 $xe^x>x$

156. 정답 $f(x)>g(x)$

[해설]

$h(x)=f(x)-g(x)=\ln(1+x)^2-(-x^2+2x)$ 로 놓으면

$h'(x)=\frac{2}{1+x}+2x-2=\frac{2x^2}{1+x}$

그런데 정의역이 양의 실수이므로 $h'(x)>0$

즉, $h(x)$ 는 증가함수이다.

또, $h(0)=\ln 1+0^2-2\times 0=0$ 이므로 $h(x)>0$

따라서 $f(x)>g(x)$

157. 정답 ②

[해설]

ㄱ. $f'(x)=-e^{100+x}+(100-x)e^{100+x}=(99-x)e^{100+x}$

이므로 $x=99$ 에서 극값을 갖는다.

$x<99$ 이면 $f'(x)>0$ 이고 $x>99$ 이면 $f'(x)<0$ 이므로

$f(99)$ 는 극댓값이다. (거짓)

ㄴ. $x<99$ 일 때 $f'(x)>0$ 이므로 $x<99$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가함수이다. (참)

ㄷ. $99e^{101}=f(1)$ 이고 $101e^{99}=f(-1)$ 이므로 $99e^{101}$ 이 $101e^{99}$ 보다 큰 수이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄴ 이다.

158. 정답 ②

[해설]

$f(a)=f(c)=f(e)=0$ 이므로

$f(x)=k(x-a)(x-c)(x-e)$ (단, $k>0$) $\cdots$ ㉠

또, 문제에서 $f'(b)=f'(d)=0$ 이므로

$f'(x)=3k(x-b)(x-d)$ $\cdots$ ㉡

$\frac{d}{dx}\ln f(x)\geqq 0$ 에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}\geqq 0$ 이므로

$f'(x)f(x)\geqq 0$ (단, $f(x)\neq 0$)

그러므로 ㉠, ㉡에서

$f'(x)f(x)=3k^2(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e)\geqq 0$

(단, $x\neq a,\ x\neq c,\ x\neq e$)

또, $\ln f(x)$ 가 정의되기 위해서는 $f(x)>0$ 이므로 $a<x<c$ 또는 $x>e$ 이다.

따라서 구하는 범위는 $a<x\leqq b,\ x>e$ 이므로

$\frac{a+b}{2},\ e+1$ 의 2개가 주어진 부등식을 만족한다.

159. 정답 ①

[해설]

$f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$ 이라 하면

$f'(x)=x-\sin x$ 이고

$f''(x)=\boxed{1-\cos x}$

$0<x<\pi$ 에서 $f''(x)\ \boxed{>}\ 0$ 이고 $f'(0)=0$ 이므로

$f'(x)\ \boxed{>}\ 0$

따라서 $f(x)$ 는 증가함수이고 $f(0)=0$ 이므로

$f(x)$ (>) 0

$\therefore \cos x>1-\frac{x^2}{2}$

160. 정답 e^{10}

[해설]

$f(t)=e^t$ 으로 놓으면 $f''(t)=e^t$

따라서 시각 $t=10$ 에서의 점 P의 가속도는 $f''(10)=e^{10}$

161. 정답 0

[해설]

y축 방향으로의 속도이므로 $v_y=\frac{dy}{dt}$ 이다.

즉, $v_y=(\cos\pi t)'=-\pi\sin\pi t$

따라서 $t=4$ 일 때의 y축 방향으로의 속도는 0이다.

162. 답 : ①

[해설]

속도 v는 $v=\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}$

가속도 a는

$$a=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2(t^2+1)-2t\cdot 2t}{(t^2+1)^2}=\frac{-2(t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$

따라서 $t=1$ 일 때 $v=1,\ a=0$

163. 정답 ③

[해설]

$\frac{dx}{dt}=2\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-2\sin t$에서

$t=2$ 일 때, $\vec{v}=(2\cos 2,\ -2\sin 2)$

$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{4\cos^2 2+4\sin^2 2}=\sqrt{4}=2$

$\frac{d^2x}{dt^2}=-2\sin t,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-2\cos t$에서

$t=2$ 일 때, $\vec{a}=(-2\sin 2,\ -2\cos 2)$

$\therefore\ |\vec{a}|=\sqrt{4\sin^2 2+4\cos^2 2}=\sqrt{4}=2$

따라서 속력과 가속도의 크기를 차례로 구하면 2, 2이다.

164. 정답 ⑤

[해설]

$\frac{dx}{dt}=10, \frac{dy}{dt}=6-6t$ 이므로

$t=1$ 일 때 $\vec{v}=(10,\ 0)$ $\quad\therefore\ |\vec{v}|=10$

$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\ \frac{d^2y}{dt^2}=-6$ 이므로

$t=1$ 일 때, $\vec{a}=(0,\ -6)$ $\quad\therefore\ |\vec{a}|=6$

따라서 속력은 10, 가속도의 크기는 6이다.

165. 정답 ③

[해설]

$v_x=\frac{dx}{dt}=1-\cos t,\ v_y=\frac{dy}{dt}=\sin t$

$\therefore \vec{v}=(1-\cos t,\ \sin t)$

$t=\frac{\pi}{3}$ 일 때,

$\vec{v}=(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2})$

$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=1$

166. 정답 ②

[해설]

시각 t에서의 각 성분에 따른 속도를 구하면

$v_x=\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t,\ v_y=\frac{dy}{dt}=2\cos 2t$

속도의 크기는

$|\vec{v}|=\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}$

$=\sqrt{4(\cos^2 2t+\sin^2 2t)}=2$

마찬가지로 각 성분에 따른 가속도는

$\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=-4\cos 2t, \frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 2t$

가속도의 크기는

$|\vec{a}|=\sqrt{(\frac{d^2x}{dt^2})^2+(\frac{d^2y}{dt^2})^2}=\sqrt{16(\cos^2 2t+\sin^2 2t)}=4$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

167. 정답 ②

[해설]

$v=\frac{d}{dt}x(t)=2\pi\cos\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{2}\pi\sin\frac{\pi}{2}t$

$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2}{dt^2}x(t)=-\pi^2\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{3}{4}\pi^2\cos\frac{\pi}{2}t$

따라서 $t=10$ 일 때

$v=2\pi\cos 5\pi-\frac{3}{2}\pi\sin 5\pi=-2\pi$

$a=-\pi^2\sin 5\pi-\frac{3}{4}\pi^2\cos 5\pi=\frac{3}{4}\pi^2$

이므로 속도와 가속도의 합은

$-2\pi+\frac{3}{4}\pi^2$

168. 정답 ⑤

[해설]

$\frac{dx}{dt}=20\cos\theta,\ \frac{dy}{dt}=20\sin\theta-10t$ 이므로

$\vec{v}=(20\cos\theta,\ 20\sin\theta-10t)$

공이 최고 높이에 오르면 $\frac{dy}{dt}=0$ 이 되므로

$\vec{v}=(20\cos\theta,\ 0)$

$\therefore\ |\vec{v}|=\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}=20\cos\theta$

169. 정답 16초

[해설]

x를 t초 후의 B지점으로부터 자동차까지의 거리라 하면 $x=100t$ 이다.

또, y를 t초 후의 A지점으로부터 자동차까지의 거리라 하자.

$\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로 $x^2+1200^2=y^2$

양변을 시각 t에 대하여 미분하면 $2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}$

그런데 $\frac{dx}{dt}=100$ 이고 $\frac{dy}{dt}=80$ 을 대입하면

$200x=160y$, 즉 $5x=4y$

이 식을 $x^2+1200^2=y^2$ 에 대입하면 $x=1600,\ y=2000$

따라서 자동차가 B지점으로부터 $1600m$ 떨어진 위치에 도착할 때까지 걸리는 시간이므로 16초이다.

170. 정답 ①

[해설]

점 Q는 점 P의 x축 위로의 정사영이므로 점 Q의 x좌표는 점 P의 x좌표와 같고 점 Q의 y의 좌표는 0 이다.

즉, 점 P의 좌표가 $(x,\ y)$ 일 때, 점 Q의 좌표는 $Q(x,\ 0)$ 이고 이동 속도가 1 이므로 $\dfrac{dx}{dt}=1$

그러므로 t초 후의 점 Q의 좌표는 $Q(1+t,\ 0)$이고 이에 따라 점 P의 좌표는 $P(1+t,\ \dfrac{4}{1+t})$ 이다.

점 P의 x축과 y축 방향으로의 속도를 구하면

$v_x=\dfrac{dx}{dt}=1,\ v_y=\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{4}{(1+t)^2}$ 이고

가속도는 $\dfrac{dv_x}{dt}=0,\ \dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{8}{(1+t)^3}$

따라서 점 P가 점 $(2,\ 2)$ 를 지날 때, $t=1$ 이므로 가속도의 크기는

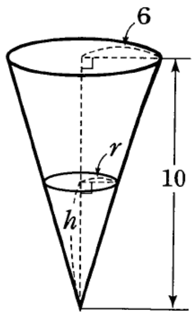
$\sqrt{0^2+1^2}=1$

171. 정답 400

[해설]

그릇에 $30\,cm^3$/초의 속도로 물이 흘러 들어가고 꼭짓점으로부터 $10\,\mathrm{cm}^3$/초의 속도로 물이 흘러 나가므로

$\dfrac{dV}{dt}=20\ (\mathrm{cm}^3/\text{초})$



t초 후 수면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

$6 : 10=r : h$ 에서 $r=\dfrac{3}{5}h$

그러므로 t초 후의 물의 부피는 $V=\dfrac{\pi}{3}r^2h=\dfrac{3\pi}{25}h^3$

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{9\pi h^2}{25}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ 이므로 $\dfrac{dV}{dt}=20,\ h=5$를 대입하면

$a=\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{20}{9\pi}(\mathrm{cm}/\text{초})$

$\therefore\ 180\pi\times a=180\pi\times\dfrac{20}{9\pi}=400$

172. 정답 ③

[해설]

t초 후의 점 P의 위치를 $(0,\ 0,\ z)$라 하면

$\triangle ABP$ 는 밑변을 $\overline{AB}$로 하는 이등변삼각형이므로 이 삼각형의 높이 h는 점 P와 점 $(1,\ 1,\ 0)$ 사이의 거리와 같다.

$h=\sqrt{(1-0)^2+(1-0)^2+(0-z)^2}$

$=\sqrt{z^2+2}$

시각 t에서 $z=2t$ 이므로

$\triangle ABP$ 의 넓이 $S(t)$ 는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{4t^2+2}$

$S'(t)=\sqrt{2}\times\dfrac{4t}{\sqrt{4t^2+2}}$

$\therefore\ S'(2)=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{8}{3}$

다른 풀이

$S=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{z^2+2}\ \sqrt{2z^2+4}$

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{dS}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{2z}{\sqrt{2z^2+4}}\ \dfrac{dz}{dt}$

$\dfrac{dz}{dt}=2$이고 $t=2$일 때 $z=4$이므로

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{2\cdot 4}{\sqrt{2\cdot 4^2+4}}\cdot 2=\dfrac{8}{3}$

173. 정답 ①

[해설]

공의 반지름의 길이를 r라 하면 공의 부피 V는 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$이다.

이 식의 양변을 시각 t에 대하여 미분하면

$\dfrac{dV}{dt}=4\pi r^2\dfrac{dr}{dt}$ $\cdots$ ㉠

그런데 공에 바람을 넣어 공의 부피가 커지는 속도가 5이므로 $\dfrac{dV}{dt}=5$ 이고 $r=15$ 가 되는 순간의 반지름의 길이의 변화율이므로 두 값을 대입하여 $\dfrac{dr}{dt}$ 의 값을 구한다. 따라서

$\dfrac{dr}{dt}=5\times\dfrac{1}{4\pi\times 15^2}=\dfrac{1}{180\pi}$

174. 정답 83

[해설]

t초 후에 $\overline{OP}$ 가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

$\theta=\dfrac{1}{40}t\ \left(0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

색칠한 부분의 넓이 S는

$S=\dfrac{\pi}{2}+2\times(\dfrac{1}{2}\times\theta)+2\times\dfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta$

$=\dfrac{\pi}{2}+\theta+\dfrac{1}{2}sin\,2\theta$

즉, $S=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{40}t+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{t}{20}$

점 P의 좌표가 $(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2})$ 일 때, $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $t=\dfrac{20}{3}\pi$

그런데 $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{40}\cos\dfrac{t}{20}$ 이므로

$t=\dfrac{20}{3}\pi$일 때, $\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{3}{80}$

$\therefore\ a+b=83$

175. 정답 ④

[해설]

점 P는 반지름의 길이가 1인 원 위를 1초에 $\frac{\pi}{2}$ 씩 이동하므로 중심각의 크기도 1초에 $\frac{\pi}{2}$ 씩 커진다. 즉, t초 후에 $\angle AOP=\frac{\pi}{2}t$

또, 점 Q는 매초 1의 속도로 점 A에서 원점을 향하여 이동하므로 t초 후 점 Q 의 x좌표는 $1-t$ 이다.

$\angle AOP$ 와 점 Q의 x좌표로부터 t초 후 색칠한 부분의 넓이 S 는

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}t-\frac{1}{2}\times(1-t)\times\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$=\frac{\pi}{4}t-\frac{1}{2}(1-t)\sin\frac{\pi}{2}t$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi(1-t)}{4}\cos\frac{\pi}{2}t$$

따라서 $t=1$ 일 때, S의 변화율은 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 이다.

176. 정답 ⑤

[해설]

점 Q의 좌표를 $Q(x,0)$이라 하고 t초 후의 중심각의 크기를 θ라 하면 호 AP의 길이가 θ이므로 $x=\cos\theta$, $\theta=2t$ 이다. 따라서

$$f(t)=\overline{OQ}=|x|=|\cos\theta|=|\cos 2t|=\begin{cases}\cos 2t & \left(0\le t<\frac{\pi}{4}\right)\\ -\cos 2t & \left(\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

$$\therefore f'(t)=\begin{cases}-2\sin 2t & \left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)\\ 2\sin 2t & \left(\frac{\pi}{4}<t<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$인 순간 $f(t)$의 변화율은

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi=\sqrt{3}$$

177. 정답 ③

[해설]

$\angle POQ=\theta$, $\overline{PQ}=x$라 하면

$$\overline{PQ}^2=10^2+8^2-2\times10\times8\cos\theta=164-160\cos\theta$$

$$\therefore x^2=164-160\cos\theta$$

이 식의 양변을 시각 t에 대하여 미분하면

$$2x\cdot\frac{dx}{dt}=160\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

이때, 두 점 P, Q는 1초에 각각 $\frac{2\pi}{60}$, $\frac{4\pi}{60}$ 회전하므로

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{4\pi}{60}-\frac{2\pi}{60}=\frac{\pi}{30}$$

$\angle POQ=\frac{\pi}{3}$일 때, $x=\sqrt{164-160\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{84}$

이므로 선분 PQ의 길이의 변화율 $\frac{dx}{dt}$는

$2\sqrt{84}\cdot\frac{dx}{dt}=160\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\pi}{30}$ 에서

$$\frac{dx}{dt}=\frac{2\sqrt{7}}{21}\pi\text{(라디안/초)}$$

178. 정답 ②

[해설]

양수 x에 대하여 $0<\frac{1}{1+x^2}<1$이므로

$$F(x)=\frac{f(x)}{1+x^2}+\frac{f(x)}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{f(x)}{(1+x^2)^n}+\cdots$$

$$=\frac{\frac{f(x)}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\frac{f(x)}{x^2}$$

$$F'(x)=\frac{f'(x)x^2-2xf(x)}{x^4}=\frac{f'(x)\cdot x-2f(x)}{x^3}$$

$$\therefore F'(2)=\frac{f'(2)\cdot 2-2f(2)}{2^3}$$

$$=\frac{5\cdot 2-2\cdot(-3)}{8}$$

$$=\frac{16}{8}=2$$

179. 정답 ①

[해설]

$x>1$이므로 $0<\frac{1}{x}<1$

$e^{-n\ln x}=x^{-n\ln x}=\frac{1}{x^n}$이므로

$$f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\cdots+\frac{1}{x^n}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{x}}=\frac{x}{x-1}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f(2)=2,\ f'(2)=-1$$

$$\therefore f(2)\times f'(2)=-2$$

180. 정답 ⑤

[해설]

$\angle PAB=\theta$이므로

$\angle POB=2\theta$, $\angle POA=\pi-2\theta$

$\triangle POA=S_1$, 부채꼴 POB의 넓이를 S_2라 하면

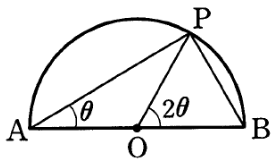
$$S_1=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin(\pi-2\theta)=2\sin2\theta$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times2\times2\times2\theta=4\theta$$

$S=S_1+S_2=2\sin2\theta+4\theta$이므로

$$\frac{dS}{d\theta}=4\cos2\theta+4$$

$$\left[\frac{dS}{d\theta}\right]_{\theta=\frac{\pi}{6}}=4\cos\frac{\pi}{3}+4=6$$



181. 정답 ④

[해설]

$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$으로 놓으면 $f''(0)=2a_2$

$f(x)=(1+x)(1+2x)(1+3x)\cdots(1+10x)$에서 이차항의 계수 a_2는 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\cdots,\ 10\}$에서 서로 다른 두 수의 곱을 모두 합한 것이다.

$$\therefore a_2=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+10)^2-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}(A^2-B)$$

$$\therefore f''(0)=A^2-B$$

182. 정답 ①

[해설]

삼각형에서 제이코사인법칙을 이용하면

$$6^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos\theta$$

$$x^2-4x\cos\theta=32$$

양변을 t에 대하여 미분하면

$$2x\cdot\frac{dx}{dt}-4\cos\theta\cdot\frac{dx}{dt}-4x(-\sin\theta)\cdot\frac{d\theta}{dt}=0$$

$\frac{d\theta}{dt}=5$이므로

$$\frac{dx}{dt}=\frac{10x\sin\theta}{2\cos\theta-x}$$

183. 정답 ①

[해설]

$\angle\mathrm{PAT}=\theta,\ \angle\mathrm{OAT}=\frac{\pi}{2},\ \overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AT}}$이므로

$$\angle\mathrm{PTA}=\angle\mathrm{APT}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2},\quad \angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OPA}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AT}}=2\overline{\mathrm{OA}}\cos\angle\mathrm{OAP}=2\cdot6\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=12\sin\theta$$

$$f(\theta)=\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AT}}\tan\angle\mathrm{PTA}=\overline{\mathrm{AT}}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=12\sin\theta\cdot\cot\frac{\theta}{2}=24\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$=24\cos^2\frac{\theta}{2}=12(1+\cos\theta)$$

$$\therefore f'(\theta)=-12\sin\theta$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-12\times\frac{1}{2}=-6$$

184. 정답 ②

[해설]

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$의 양변을 x에 관하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

x에 대하여 정리하면

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}=-\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

곡선 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 위의 임의의 점 $P(t,\ 1-\sqrt{t})$에서의 접선의 방정식은 $y-(1-\sqrt{t})^2=-\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}(x-t)$에서

$$y=-\frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}x--\sqrt{t}+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 ㉠의 x절편이 $\sqrt{t}$이므로 직선 ㉠이 x축과 만나는 점을 Q라 하면 $Q(\sqrt{t},\ 0)$이다.

직선 ㉠의 y절편이 $1-\sqrt{t}$이므로 직선 ㉠이 y축과 만나는 점을 Q라 하면 $Q(0,\ 1-\sqrt{t})$이다.

그러므로 $\triangle OQR$의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{t}(1-\sqrt{t})=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{t}-t)$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{t}-1)^2+\frac{1}{8}$$

따라서 $S(t)$의 최대값은 $\sqrt{t}=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{8}$이므로 $\frac{a}{b}=2$

185. 정답 ②

[해설]

$f(x)=e^{\frac{\pi}{3}}$을 x에 관하여 계속 미분하면

$$f'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{\pi}{3}},\ f''(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^2e^{\frac{\pi}{3}},\ f'''(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^2e^{\frac{\pi}{3}}$$

$\cdots,\ f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^ne^{\frac{\pi}{3}}$임을 추정할 수 있다.

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f^{(n)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^ne^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}e^{\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore\ F(3)=\frac{1}{2}e$$

<<참고>> $f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^ke^{\frac{x}{3}}$이므로

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^ke^{\frac{x}{3}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}e^{\frac{x}{3}}$$

에서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$f^{(n)}(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^ne^{\frac{x}{3}}$$

186. 정답 ③

[해설]

$\overrightarrow{OA}=(t,\ e^{-t}-1)$, $\overrightarrow{OB}=(t,\ t^2)$이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=t^2+t^2e^{-t}-t^2=t^2e^{-t}$

그러므로 $F(t)=t^2e^{-t}$으로 놓으면 $-1\leq t\leq 3$이고

$F'(t)=2te^{-t}-t^2e^{-t}=(2t-t^2)e^{-t}=0$에서

$t=0$ 또는 $t=2$

그런데 $F(-1)=e$, $F(0)=0$, $F(2)=4e^{-2}$, $F(3)=9e^{-3}$

따라서 최댓값 $M=e$, 최솟값 $m=0$이므로

$M-m=e$

187. 정답 ④

[해설]

$y=f(x)$ 위의 한 점 $(a,\ f(a))$에서 접선의 방정식은

$y=f'(a)(x-a)+f(a)$이다.

그런데 접선의 방정식이 $y=-\dfrac{3}{a}x+f(a)+3$이므로

$-\dfrac{3}{a}x+f(a)+3=f'(a)x-af'(a)+f(a)$는 x에 대한 항등식이다.

그러므로 $-\dfrac{3}{a}x=f'(a)$, $f(a)+3y=-af'(a)+f(a)$이다.

$f(x)$이 도함수는 $f'(x)=-\dfrac{3}{x}$이므로 $f(x)$는 로그함수의 꼴이다.

그런데 $a>0$이므로 $-\dfrac{3}{a}<0$이 되어 접선의 기울기가 음수이다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ④번이다.

188. 정답 ⑤

[해설]

$y=e^{-x^2+1}$에서 $y'=-2xe^{-x^2+1}$

점 P에서 그은 접선의 방정식은

$y-e^{1-a^2}=-2ae^{-a^2+1}(x-a)$이므로 x절편은 $\dfrac{1}{2a}+a$이다.

$\triangle PQH$의 넓이 S는

$S=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{2a}\right)e^{1-a^2}=-\dfrac{1}{4a}e^{1-a^2}$

$\dfrac{dS}{da}=\dfrac{1}{4a^2}e^{1-a^2}+\dfrac{1}{2}e^{1-a^2}=\left(\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{2}\right)e^{1-a^2}>0$

따라서 S는 증가함수이므로 $a=-1$에서 최댓값을 갖는다.

189. 정답 7

[해설]

방정식 $\dfrac{g'(x)}{f'(x)}+\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=2$ 의 양변에

$f'(x)g'(x)$ 를 곱하여 정리하면

$\{f'(x)\}^2-2f'(x)g'(x)+\{g'(x)\}^2=0$ 이므로

$\{f'(x)-g'(x)\}^2=0$

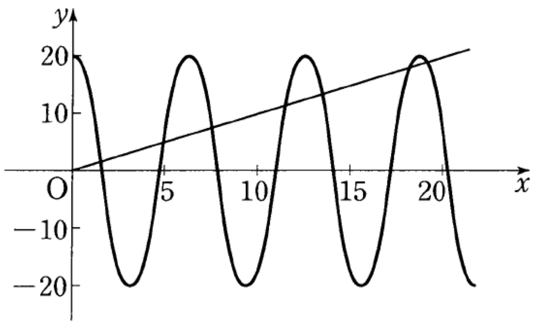
그런데 $f'(x)g'(x)\neq 0$ 이므로 구하는 방정식의 근은

$f'(x)-g'(x)=0$ 의 근이다.

$\dfrac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=40\cos x-2x$ 에서 주어진 분수방정식의 근의 개수는 곡선 $y=20\cos x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 개수와 같다.

따라서 다음 그래프로부터 7개의 근이 존재함을 알 수 있다.

$(\because\ 6\pi<20<7\pi)$



190. 정답 ④

[해설]

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\ln\left|\sin\dfrac{xk}{n}\right|\right)\dfrac{x}{n}=\int_0^x \ln|\sin x|dx$ 이므로

$f'(x)=\ln|\sin x|$

$f''(x)=\dfrac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)'=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\tan x$