[준킬러][수학2] 2미분1

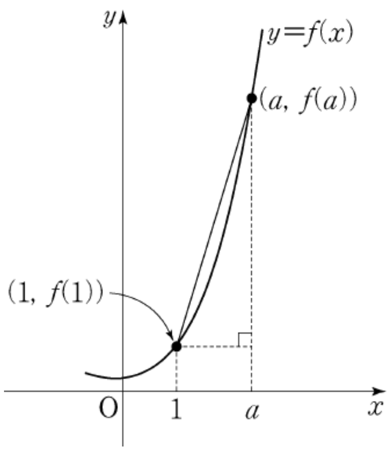
04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

02 미분계수2 (평균변화율과 미분계수)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 06월 16

1. 양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1 보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1, f(1))$과 점 $(a, f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?



① 1 ② $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{2}$

④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

04 수2 03 미분계수와 도함수

01 미분계수

06 미분계수6 (극한식의 해석, 식 변형)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

2. 두 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$
(나) $f_i'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$ $(i=1, 2)$
(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0

④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

04 수2 03 미분계수와 도함수

02 도함수의 정의와 미분법 공식

06 미분법 공식5 (곱의 미분법, 극한식의 해석)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 17

3. $f(1)=-2$인 다항함수 $f(x)$에 대하여 일차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=8$

(나) $g(0)=g'(0)$

$f'(1)$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7

④ 8 ⑤ 9

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

01 활용1 (함수 구하기, 인수정리)

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

4. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(6)$의 최댓값과 최솟값의 합은?

(가) $f(2)=f'(2)=0$

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq-3$이다.

① 128 ② 144 ③ 160

④ 176 ⑤ 192

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

02 활용2 (함수 구하기, 해석)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 11

5. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. $m \ge n$

ㄴ. $ab \ge 9$

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am=bn$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 23

6. 최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하면?

(가) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$

(나) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 18

7. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 28

8. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3$

(나) 1이 아닌 상수 α에 대하여 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha$이다.

$\alpha\times f(4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 14

9. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<1) \\ 2f(1)-f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$ (a는 상수)이고 $g(1)=1$이면 $g(a)=1$이다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=4$ (b는 상수)이면 $g(4)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

05 활용5 (조건항등식)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 19

10. 최고차항의 계수가 1인 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$$

를 만족시킨다. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^2g'(x)}=3,\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-1$$

일 때, $f(2)+g(3)$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

06 활용6 (문자 2개 항등식)

[출처] 2006 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 23

11. 다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$$

을 만족시킨다. $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$일 때, $f'(0)$의 값을 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$$

를 만족시킨다. $f(1)=4$, $g(0)=1$일 때, $f'(2)$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 28

④ 32 ⑤ 36

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

07 활용7 (조건항등식, 미정계수법)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

13. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 $g(x)$는 $f(x)$의 도함수이고, $h(x)$는 $g(x)$의 도함수라 하자. 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$$

이 성립할 때, $f(-1)$의 값을 구하시오.

04 수2 03 미분계수와 도함수

03 미분법 공식의 활용

08 활용8 (부등식의 해석)

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

14. 삼차함수 $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 $0 \le x \le 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|P'(x)| \le 1$을 만족할 때, a의 최댓값은? (단, a, b, c, d는 실수이다.)

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2

④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

04 미분가능조건1 (구간정의함수)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 24

15. 삼차함수 $f(x)=x^3+3x^2-9x$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<a) \\ m-f(x) & (a\le x<b) \\ n+f(x) & (x\ge b)\end{cases}$$

로 정의한다. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 상수 a, b와 m, n의 값을 정할 때, $m+n$의 값을 구하시오.

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 11월 17

16. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1\le x<1$일 때, $g(x)=f(x)$이다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고 $f'(-1)=f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$이다.

ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고, $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 7

17. 삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분 가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\le 0$

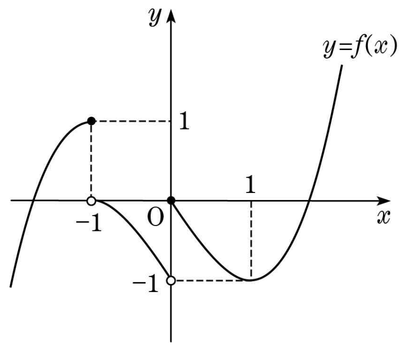
ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 20

18. 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}(x^3-3x) & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 0) \\ \frac{1}{2}(x^3-3x)-1 & (-1<x<0) \end{cases}$$



옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $\lim_{x\to -1+} f(f'(x))=0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 28

19. 삼차함수 $f(x)=x^3-x^2-9x+1$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ f(2k-x) & (x < k) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 $\frac{q}{p}$라 할 때, p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

20. 다항함수 $g(x)$와 자연수 k에 대하여 함수 $f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x \leq 0) \\ g(x) & (0 < x < 2) \\ k(x-2)+1 & (x \geq 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하도록 하는 가장 낮은 차수의 다항함수 $g(x)$에 대하여 $\frac{1}{4} < g(1) < \frac{3}{4}$일 때, k의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 19

21. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \leq x) \\ x & (f(x) > x) \end{cases}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(1)=\frac{1}{2}$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \leq x$이다.

ㄷ. 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

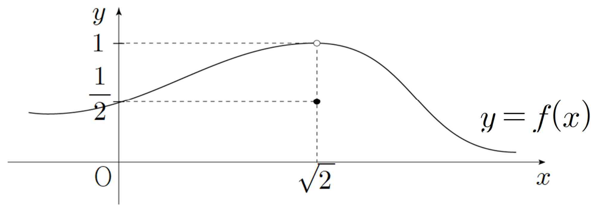
04 수2 03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

06 미분가능조건3 (곱함수)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 11

22. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



<보 기>

ㄱ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[xf(x)]=1$

ㄴ. 함수 $[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x-\sqrt{2})[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 16

23. 두 함수 $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases}2x+1 & (x\ge 0)\\ -x-1 & (x<0)\end{cases}$에 대하여 $x=0$에서 미분가능한 함수만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $xf(x)$

ㄴ. $f(x)g(x)$

ㄷ. $|f(x)-g(x)|$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 29

24. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-4} & (x \neq 4) \\ 2 & (x=4) \end{cases}$$

에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $h'(4)=6$이다. $f(0)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 14

25. 정수 k와 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<0) \\ x-1 & (0 \leq x < 1) \\ 0 & (1 \leq x \leq 3) \\ -x+4 & (x>3) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x-k)|$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

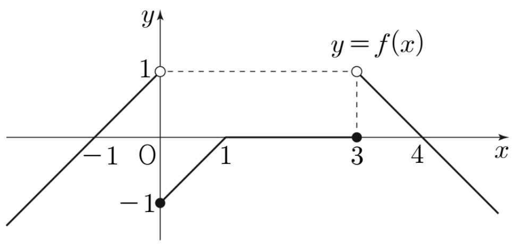
<보 기>

ㄱ. $k=-3$일 때, $\lim_{x \to 0-} g(x)=g(0)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)+g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k가 존재한다.

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은 -5이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



04 수2　　03 미분계수와 도함수

04 미분가능성과 연속성

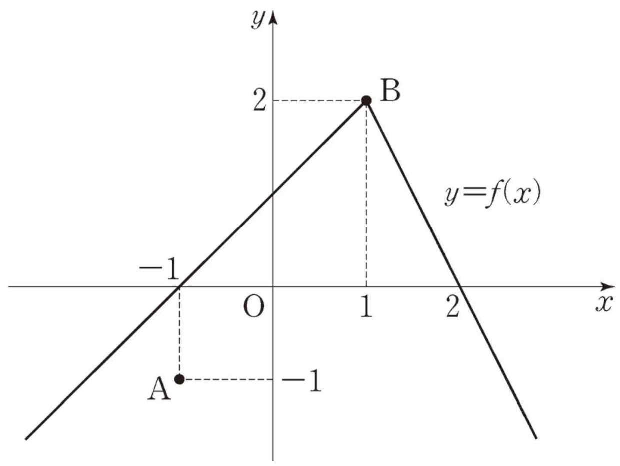
07 미분가능조건4 (정의된 함수)

[출처]　　2016 모의_공공 평가원 고3 06월 29

26. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x<1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $(x,\ f(x))$에서 점 A까지의 거리의 제곱과 점 B까지의 거리의 제곱 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합이 p일 때, $80p$의 값을 구하시오.



[출처]　　2019 모의_공공 교육청 고2 11월 20

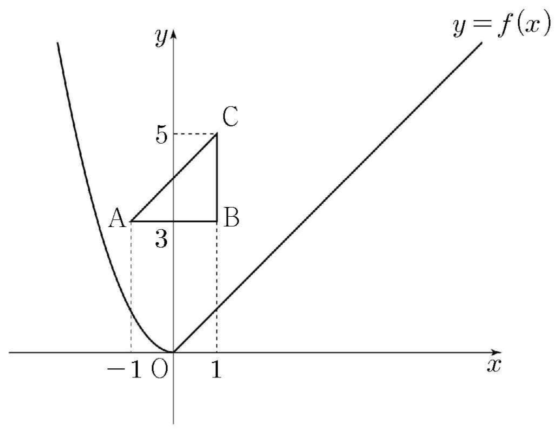
27. 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x<0) \\ x & (x \geq 0) \end{cases}$$

이고, 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(-1,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$, $\mathrm{C}(1,\ 5)$가 있다. 실수 x에 대하여 점 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$와 삼각형 ABC의 세 변 위의 임의의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 최댓값을 $g(x)$라 하자. 함수 $g(x)$에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $g(0)=26$
ㄴ. 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 10이다.
ㄷ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은 2이다.



① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

03 접점3 (해석)

[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

28. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=x^3 f(x)-7$

(나) $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=2$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a, b는 상수이다.)

04 수2 04 접선의 방정식

01 접선의 방정식

05 기울기2 (접점의 좌표)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 18

29. 곡선 $y=x^3-3x^2+2x$에 기울기가 m인 접선을 두 개 그었을 때, 두 접점을 P, Q라 하자. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?
(단, P, Q는 서로 다른 점이다.)

<보 기>

ㄱ. 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.

ㄴ. $m>-1$

ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m이 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

01 활용1 (접선과 교점의 관계)

[출처] 2011 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

30. 곡선 $f(x)=x^4-3x^2+6x+1$ 위의 서로 다른 두 점에서 접하는 직선의 방정식은?

① $y=6x-\frac{5}{4}$ ② $y=3x-\frac{5}{2}$ ③ $y=6x+\frac{5}{4}$

④ $y=3x+\frac{5}{4}$ ⑤ $y=3x+\frac{5}{2}$

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 10월 20

31. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A $(-1, -1-a)$에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선이 이 곡선과 만나는 다른 한 점을 C라 하자. 두 점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $f(b)+f(c)=-80$을 만족시킨다. 상수 a의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12

④ 14 ⑤ 16

[준킬러][수학2] 2미분1

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 18

32. 서로 다른 두 점에서 만나는 두 곡선

$$C_1 : y = x^2 - 2x + 2,\ C_2 : y = -x^2 + ax + b$$

의 한 교점을 P라 하고, 점 P에서 두 곡선 C_1, C_2에 접하는 직선을 각각 l, m이라 하자. 두 접선 l, m이 서로 수직일 때, 곡선 C_2는 두 실수 a, b의 값에 관계없이 일정한 점 Q를 지난다. 다음은 점 Q의 좌표를 구하는 과정이다.

> $f(x) = x^2 - 2x + 2$, $g(x) = -x^2 + ax + b$라 하고,
>
> 두 곡선 C_1, C_2의 한 교점 P의 x좌표를 t라 하자.
>
> 두 접선 l, m이 서로 수직이므로
>
> $f'(t)g'(t) = -1$에서
>
> $4t^2 - 2(a+2)t + \boxed{\text{(가)}} = 0$ ……㉠
>
> $f(t) = g(t)$에서
>
> $2t^2 - (a+2)t + 2 - b = 0$ ……㉡
>
> ㉠, ㉡에서 $b = \boxed{\text{(나)}} - a$를 $y = -x^2 + ax + b$에 대입하고 a에 관하여 정리하면,
>
> $a(x-1) - x^2 - y + \boxed{\text{(나)}} = 0$ ……㉢
>
> ㉢에서 $x - 1 = 0$, $-x^2 - y + \boxed{\text{(나)}} = 0$을 만족시키는 x와 y의 값을 구하면 점 Q의 좌표는 $(1, \boxed{\text{(다)}})$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $h(a)$라 하고, (나)와 (다)에 알맞은 수를 각각 α, β라 할 때, $h(\alpha) \times h(\beta)$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

33. 실수 k에 대하여 함수

$$f(x) = x^3 + kx^2 + (2k-1)x + k + 3$$

의 그래프가 k의 값에 관계없이 항상 점 P를 지난다. 곡선 $y = f(x)$위의 점 P에서의 접선이 곡선 $y = f(x)$와 오직 한 점에서 만난다고 할 때, k의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2

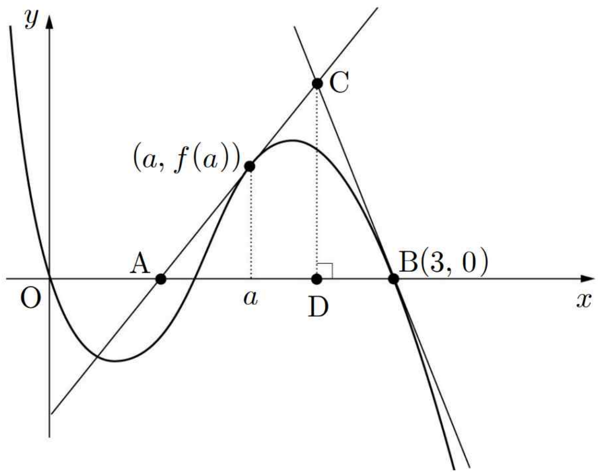
04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

02 활용2 (접선에 대한 조건)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 12

34. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x 축과 만나는 점을 A, 점 B$(3, 0)$ 에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x 축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{AD} : \overline{DB}=3:1$ 일 때, a 의 값들의 곱은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

35. 좌표평면 위의 점 (a, b)에서 곡선 $y=x^2$에 그은 두 접선이 서로 수직이고

$$a^2+b^2 \leq \frac{37}{16}$$

일 때, $a+b$의 최댓값을 p, 최솟값을 q라 하자. pq의 값은?

① $-\frac{33}{16}$ ② $-\frac{35}{16}$ ③ $-\frac{37}{16}$

④ $-\frac{39}{16}$ ⑤ $-\frac{41}{16}$

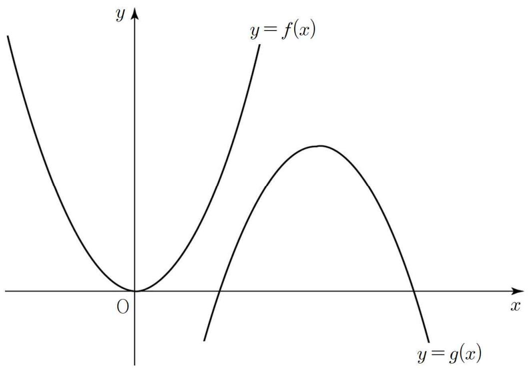
04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

03 활용3 (공통접선)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 14

36. 두 함수 $f(x)=x^2$ 과 $g(x)=-(x-3)^2+k(k>0)$ 에 대하여



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P(1, 1)에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 l 에 곡선 $y=g(x)$ 가 접할 때의 접점을 Q, 곡선 $y=g(x)$ 와 x 축이 만나는 두 점을 각각 R, S라 할 때, 삼각형 QRS의 넓이는?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5

④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

37. 두 곡선 $y=2x^2+6$, $y=-x^2$ 에 모두 접하고 기울기가 양수인 직선 l 이 있다. 직선 l 과 곡선 $y=2x^2+6$ 의 접점을 P, 직선 l 과 곡선 $y=-x^2$ 의 접점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는?

① $2\sqrt{31}$ ② $8\sqrt{2}$ ③ 12

④ $5\sqrt{6}$ ⑤ $3\sqrt{17}$

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

04 활용4 (곡선과 원의 접선)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

38. 곡선 $y=x^3+1$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선을 l이라 하자. 중심이 y축 위에 있는 원이 점 $(1,\ 2)$에서 직선 l에 접할 때, 이 원의 넓이는?

① $\frac{5}{9}\pi$ ② $\frac{8}{9}\pi$ ③ π

④ $\frac{10}{9}\pi$ ⑤ $\frac{13}{9}\pi$

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

05 활용5 (함수 구하기)

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

39. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(0)=-3$

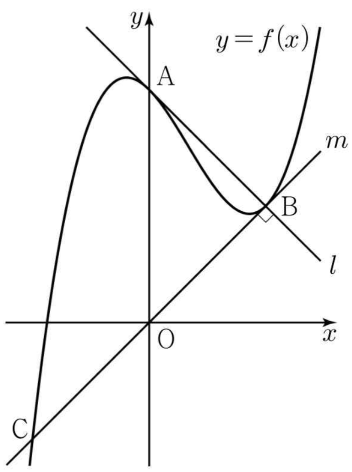
(나) 모든 양의 실수 x에 대하여
$6x-6\le f(x)\le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40

④ 42 ⑤ 44

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

40. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$가 y축과 만나는 점을 A라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 할 때, 직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 A가 아닌 점을 B라 하자. 또, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 B에서의 접선을 m이라 할 때, 직선 m이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점 중에서 B가 아닌 점을 C라 하자. 두 직선 l, m이 서로 수직이고 직선 m의 방정식이 $y=x$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 C에서의 접선의 기울기는? (단, $f(0)>0$이다.)



① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 17

41. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 4)$에서의 접선이 점 $(-1, 1)$에서 이 곡선과 만날 때, $f'(3)$의 값은?

① 10 ② 11 ③ 12
④ 13 ⑤ 14

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 10

42. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은?

① -18 ② -17 ③ -16
④ -15 ⑤ -14

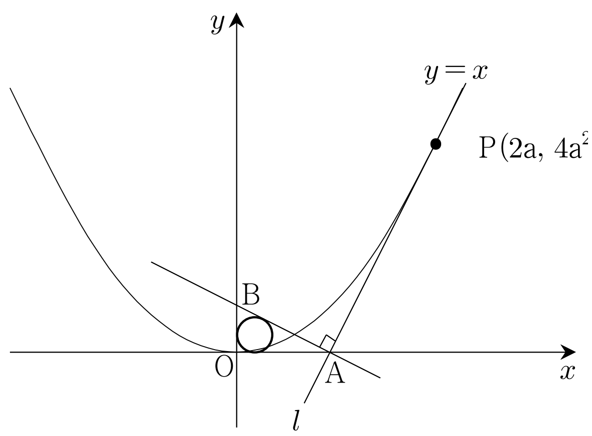
04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

06 활용6 (정의된 함수)

[출처] 2009 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

43. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(2a,\ 4a^2)$에서의 접선 l이 x축과 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 접선 l에 수직인 직선이 y축과 만나는 점을 B라 하자. 삼각형 OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(a)$라 할 때, $\lim_{a\to\infty} r(a)$의 값은? (단, $a>0$, O는 원점이다.)



① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{3}{16}$

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 21

44. 좌표평면에서 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선이 y축과 만나는 점을 P라 할 때, 원점에서 점 P까지의 거리를 $g(t)$라 하자. 함수 $f(x)$와 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=2$
> (나) 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$f(3)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 21 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 33

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

45. 삼차함수 $f(x)=x^3+x^2$의 그래프 위의 두 점 $(t,\ f(t))$와 $(t+1,\ f(t+1))$에서의 접선의 y절편을 각각 $g_1(t)$와 $g_2(t)$라 하자. 함수 $h(t)=|g_1(t)-g_2(t)|$의 최솟값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

04 수2 04 접선의 방정식

02 접선의 방정식의 활용

07 활용7 (추론과 이해)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 7

46. 삼차함수 $f(x)=x(x-1)(ax+1)$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(1,0)$을 접점으로 하는 접선을 l이라 하자. 직선 l에 수직이고 점 P를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는?

① $-1<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $0<a<1$

② $-\frac{1}{3}<a<0$ 또는 $0<a<1$

③ $-1<a<0$ 또는 $0<a<\frac{1}{3}$

④ $-1<a<0$ 또는 $\frac{1}{3}<a<1$

⑤ $-2<a<-\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3}<a<2$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 30

47. 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0\le x\le 2$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t\mid p\le t\le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 29

48. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases}0 & (x\le a)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a)\end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & (x\le k)\\ 12(x-k) & (x>k)\end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

49. 함수 $f(x)=(x-2)^3$과 두 실수 m, n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (|x|<a) \\ mx+n & (|x|\geq a) \end{cases} \quad (a>0)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a=1$일 때, $m=13$이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, $m=48$이다.

ㄷ. $f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키는 자연수 a의 개수는 5이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[준킬러][수학2] 2미분1(빠른 정답)

준킬러수2 2023.01.06

1. [정답] ⑤
2. [정답] ①
3. [정답] ①
4. [정답] ①
5. [정답] ⑤

6. [정답] 19
7. [정답] ④
8. [정답] 18
9. [정답] ②
10. [정답] ②

11. [정답] 28
12. [정답] ①
13. [정답] 54
14. [정답] ⑤
15. [정답] 118

16. [정답] ③
17. [정답] ②
18. [정답] ②
19. [정답] 13
20. [정답] 3

21. [정답] ⑤
22. [정답] ③
24. [정답] 32
25. [정답] ④

26. [정답] 186
27. [정답] ③
28. [정답] 97
29. [정답] ③
30. [정답] ①

31. [정답] ③
32. [정답] ②
33. [정답] ③
35. [정답] ②

37. [정답] ⑤
38. [정답] ④
39. [정답] ①
40. [정답] ②

41. [정답] ①
42. [정답] ⑤
43. [정답] ③
44. [정답] ④
45. [정답] ①

46. [정답] ③
47. [정답] 32
48. [정답] 32
49. [정답] ⑤

[준킬러][수학2] 2미분1(해설)

준킬러수2 2023.01.06

1) [정답] ⑤

[해설]

주어진 그래프에서 $a>1$일 때,

$(1, f(1))$, $(a, f(a))$ 거리가 a^2-1이므로

$\sqrt{(a-1)^2+(f(a)-f(1))^2}=a^2-1$

양변을 제곱 후 정리하면

$f(a)-f(1)=\sqrt{a^4-3a^2+2a}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$f'(1)=\lim_{a\to1^+}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\lim_{a\to1^+}\frac{\sqrt{a^4-3a^2+2a}}{a-1}$$

$$=\lim_{a\to1^+}\frac{(a-1)\sqrt{a(a+2)}}{a-1}=\lim_{a\to1^+}\sqrt{a(a+2)}=\sqrt{3}$$

2) [정답] ①

[해설]

(나)에서

$$f_1{}'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)+2kx}{f_1(x)+kx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f_1(x)}{x}+2k}{\frac{f_1(x)}{x}+k}$$

$f_1{}'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}$이므로 $f'_1(0)=\frac{f'_1(0)+2k}{f'_1(0)+k}$

$f'_1(0)=a$(a는 실수)라 하면

$a=\frac{a+2k}{a+k}$, $a+2k=a^2+ak$ …… ㉠

같은 방법으로 $f'_2(0)=b$라 하면

$b=\frac{b+2k}{b+k}$, $b+2k=b^2+bk$ …… ㉡

㉠-㉡에서 $a-b=(a-b)(a+b+k)$

(다)에서 $ab=-1$이므로 $a\neq b$

$\therefore\ a+b=1-k$ …… ㉢

또한 $ab=\frac{a+2k}{a+k}\cdot\frac{b+2k}{b+k}=-1$

$5k^2+3(a+b)k-2=0$

위의 식에 ㉢을 대입하여 정리하면

$2k^2+3k-2=(2k-1)(k+2)=0$

즉, $k=\frac{1}{2}$, -2

그런데 $k=-2$이면 a, b는 실수가 아니다.

$\therefore\ k=\frac{1}{2}$

3) [정답] ①

[해설]

(가)에서 $\lim_{x\to1}\{f(x)g(x)+4\}=0$

함수 $f(x)$와 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=-2g(1)=-4$에서 $g(1)=2$ …… ㉠

$g(x)$는 일차함수이므로 $g(x)=ax+b$라 하면

$g'(x)=a$ …… ㉡

(나)에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$

그런데 ㉠에서 $a+b=2$이므로 $a=1$, $b=1$

㉡에서 $g'(1)=1$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}$는 함수 $f(x)g(x)$의 $x=1$에서의 미분계수이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

즉, $f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=2f'(1)-2=8$

따라서 $f'(1)=5$

4) [정답] ①

[해설]

(가)로부터

$f(x)=(x-2)^2(x-c)=x^3-(4+c)x^2+(4+4c)x-4c$

(나)에서

$f'(x)=3x^2-2(4+c)x+(4+4c)\geq-3$

$3x^2-2(4+c)x+(7+4c)\geq0$

$\frac{D}{4}=(4+c)^2-3(7+4c)=c^2-4c-5$

$=(c-5)(c+1)\le 0,\ -1\le c\le 5$

$f(6)=16(6-c)$의 최대와 최소는 각각 $c=-1,\ c=5$일 때 이므로 $16(6+1)+16(6-5)=128$

5) [정답] ⑤

[해설]

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1$이므로 $f(x)$의 최고차항은 x^m이다.

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$이므로 $m=a$이다.

한편, $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=b$이므로 $f(x)$의 계수가 0이 아닌 항 중 차수가 가장 낮은 항은 bx^n이다. 이때 $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$이므로

$bn=9$이다.

ㄱ. $f(x)$의 최고차항이 x^m이고 차수가 가장 낮은 항이 bx^n 이므로 $m\geqq n$ (참)

ㄴ. $m=a,\ bn=9$이므로 $ab=m\times\frac{9}{n}\geqq 9$ ($\because\ m\geqq n$) (참)

ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $m=a=3,\ bn=9$이므로

$am=bn$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

6) [정답] **19**

[해설]

i) (가)의 분수식에서 다항함수가 수렴하기 위해 (분자)와 (분모)의 차수가 같아야 한다. $f(x)$의 차수를 n이라 하면

$f(x)=a_nx^n+g(x)$ (단, $a_n\neq 0$, 1이고 $g(x)$는 $n-1$차 이하의 다항식)으로 둘 수 있다.

(분자)의 차수는

$2n$

$\because\ \{f(x)\}^2-f(x^2)=a_n{}^2x^{2n}+2a_nx^ng(x)+\{g(x)\}^2-a_nx^{2n}+g(x^2)$
$=a_n(a_n-1)x^{2n}+\cdots\cdots$

(분모)의 차수는 $n+3$

$2n=n+3$ $\therefore\ n=3$

ii) $\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$로 수렴하므로 최고차항의 계수는 $\frac{a_n(a_n-1)}{a_n}=a_n-1=4$ $\therefore\ a_n=5$

$\therefore\ f(x)=5x^3+ax^2+bx+c,\ f'(x)=15x^2+2ax+b,$
$f''(x)=30x+2a$

iii) $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=4$에서 $f'(0)=0,\ f''(0)=4$

$\therefore\ b=0,\ a=2$

$f'(x)=15x^2+4x$이므로 $f'(1)=19$

7) [정답] ④

[해설]

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}f(x)=0$에서 $f(x)$는 삼차함수이므로 $f(2)=0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=0$,
$f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$(a는 상수)

로 놓을 수 있다. 이때

$f'(x)=(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)$

이므로 $f'(2)=2+a$

한편,

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\left[\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{\{f'(x)\}^2}\right]=\frac{1}{4}$

에서

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2),\ \lim_{x\to 2}\{f'(x)\}^2=\{f'(2)\}^2$이고

극한값이 존재한다.

즉, $f'(2)\neq 0$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=f'(2)\times\frac{1}{\{f'(2)\}^2}=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{2+a}$

$\frac{1}{2+a}=\frac{1}{4}$에서 $a=2$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x+2)$이므로

$f(3)=2\times1\times5=10$

8) [정답] 18

[해설]

조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$이고

$\lim_{x\to1}(x-1)=0$이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=0$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $f(1)=0$ …… ㉠

조건 (나)에서 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\alpha(\alpha\neq1)$이고

$\lim_{x\to2}(x-2)f'(x)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=0$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $f(2)=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x+a)$ (k, a는 상수, $k\neq0$)

$f'(x)=k\{(x-2)(x+a)+(x-1)(x+a)+(x-1)(x-2)\}$

$a\neq-2$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}=\lim_{x\to2}\frac{k(x-1)(x+a)}{f'(x)}$$
$$=\frac{2+a}{2+a}$$
$$=1\neq\alpha$$

그러므로 $a=-2$이며 $f(x)=k(x-1)(x-2)^2$

$$\alpha=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)f'(x)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{k(x-1)(x-2)^2}{(x-2)\{k(x-2)^2+2k(x-1)(x-2)\}}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-1)}{(x-2)+2(x-1)}$$
$$=\frac{1}{0+2\times1}=\frac{1}{2}$$

조건 (가)에서

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=3$이므로 $k=3$

따라서 $\alpha\times f(4)=\frac{1}{2}\times(3\times3\times2^2)=18$

9) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$,

$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}\{2f(1)-f(x)\}=f(1)$,

$g(1)=2f(1)-f(1)=f(1)$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}=a$에서 극한값이

존재하고 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{h\to0+}\{g(-1+h)+g(-1-h)-6\}=0$에서 $g(-1)=3$

$\therefore f(-1)=3$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(-1+h)+g(-1-h)-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\left\{\frac{g(-1+h)-g(-1)}{h}-\frac{g(-1-h)-g(-1)}{-h}\right\}$$
$$=g'(-1)-g'(-1)$$
$$=0$$

$\therefore a=0$

또한, $g(1)=1$에서 $f(1)=1$

$f(x)=x^2+px+q$라 하면

$f(-1)=3$에서 $1-p+q=3$, $p-q=-2$ …… ㉠

$f(1)=1$에서 $1+p+q=1$, $p+q=0$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $p=-1$, $q=1$

따라서 $f(x)=x^2-x+1$이므로

$g(a)=g(0)=f(0)=1$ (참)

ㄷ. $b\neq1$이면 $\lim_{h\to0+}\frac{g(b+h)+g(b-h)-6}{h}=0$이므로 $b=1$이다.

$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)+g(1-h)-6}{h}=4$에서 극한값이 존재하고

(분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\lim_{h\to0+}\{g(1+h)+g(1-h)-6\}=0$에서

$g(1)=3$ $\therefore f(1)=3$

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)+g(1-h)-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{2f(1)-f(1+h)+f(1-h)-6}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{f(1-h)-f(1+h)}{h}$$
$$=-2f'(1)$$

따라서 $-2f'(1)=4$에서 $f'(1)=-2$

$f(x)=x^2+rx+s$라 하면 $f'(x)=2x+r$

$f(1)=3$에서 $1+r+s=3$, $r+s=2$ …… ㉢

$f'(1)=-2$에서 $2+r=-2$, $r=-4$

$r=-4$를 ㉢에 대입하면 $s=6$

따라서 $f(x)=x^2-4x+6$이므로

$g(4)=2f(1)-f(4)=6-6=0$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

10) [정답] ②

[해설]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이므로 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$의 모든 항의 차수는 홀수이다. 두 홀수 m, n에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항을 각각 x^m, x^n이라 하면, 두 도함수 $f'(x)$, $g'(x)$의 최고차항은 각각 mx^{m-1}, nx^{n-1}이다.

$m-1=2+(n-1)$이고 $\frac{m}{n}=3$

그러므로 $m=3$, $n=1$

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수), $g(x)=x$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(x^3+ax)x}{x^2}=a=-1$$

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x$

따라서 $f(2)+g(3)=6+3=9$

11) [정답] 28

[해설]

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에서

$x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$

$\therefore f(0)=1$

$$f'(0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2x+f'(0) \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서

$x\to1$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

$\therefore f(1)=f'(1)$

㉠에서 $f'(1)=2+f'(0)$이므로

$f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}f'(1)-1$$

$=14$

$\therefore f'(1)=30$

$\therefore f'(0)=f'(1)-2=28$

[다른풀이]

후에 배우는 부정적분을 이용

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$에서 $x=0, y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$

$\therefore f(0)=1$

$f'(0)=k$라 하면

$$k=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$$

$$=2x+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-1}{h}=2x+k$$

$\therefore f(x)=\int(2x+k)\,dx=x^2+kx+C$ (C는 상수)

$f(0)=1$이므로 $C=1$

$\therefore f(x)=x^2+kx+1$

따라서, $f'(x)=2x+k$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+kx+1-2x-k}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2+k(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-1+k}{x+1}$$

$=\dfrac{k}{2}$

$=14$

$\therefore\ k=28$

12) [정답] ①

[해설]

$x\{f(x+y)-f(x-y)\}=4y\{f(x)+g(y)\}$에서

$x\times\dfrac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}=2\{f(x)+g(y)\}$

$f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 연속이고 미분가능하다.

따라서

$\lim\limits_{y\to0}\left\{x\times\dfrac{f(x+y)-f(x-y)}{2y}\right\}=xf'(x)$,

$\lim\limits_{y\to0}2\{f(x)+g(y)\}=2\{f(x)+g(0)\}=2\{f(x)+1\}$

$\therefore\ xf'(x)=2\{f(x)+1\}$

$f(x)$가 최고차항의 계수가 a인 n차 함수라 하면

$xf'(x)$의 최고차항의 계수는 an이고 $2\{f(x)+1\}$의 최고차항의 계수는 $2a$이므로 $n=2$이다.

$f(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$x(2ax+b)=2(ax^2+bx+c+1)$에서 $b=0$, $c=-1$

또한 $f(1)=a+b+c=a+0-1=4$에서 $a=5$

$\therefore\ f(x)=5x^2-1$

$\therefore\ f'(x)=10x$

$\therefore\ f'(2)=20$

[다른 풀이] 이과용

$xf'(x)=2\{f(x)+1\}$에서

$\dfrac{f'(x)}{f(x)+1}=\dfrac{2}{x}$

위 식의 양변을 x에 대하여 적분하면

$\ln\,(f(x)+1)=2\ln x+C$

$f(1)=4$이므로 $C=\ln 5$

따라서 $\ln\,(f(x)+1)=\ln 5x^2$에서

$f(x)+1=5x^2$ 즉, $f(x)=5x^2-1$

13) [정답] **54**

[해설]

$f'(x)=g(x)$, $g'(x)=h(x)$

$f(x)+h(x)=2g(x)+x^4+1$에서

좌변 $f(x)+h(x)$의 최고차항은 $f(x)$의 최고차항과 같고 $g(x)$의 차수는 $f(x)$보다 작으므로 우변 $2g(x)+x^4+1$의 최고차항은 x^4이다.

따라서 $f(x)$는 최고차항이 x^4인 사차함수이다.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$라 하면

$g(x)=f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$h(x)=g'(x)=12x^2+6ax+2b$

이고

$f(x)+h(x)=x^4+ax^3+(b+12)x^2+(6a+c)x+2b+d\cdots\cdots$ ㉠

$2g(x)+x^4+1=x^4+8x^3+6ax^2+4bx+2c+1\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 계수를 비교하면

$a=8,\ b+12=6a,\ 6a+c=4b,\ 2b+d=2c+1$

$\therefore\ a=8,\ b=36,\ c=96,\ d=121$

$\therefore\ f(-1)=1-a+b-c+d$

$=1-8+36-96+121$

$=54$

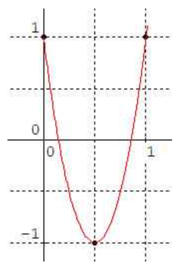
14) [정답] ⑤

[해설]

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,

$P'(x)=3ax^2+2bx+c$, $P'(0)=c$

$P'(1)=3a+2b+c$, $P'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}a+b+c$



$a=\dfrac{2}{3}P'(1)+\dfrac{2}{3}P'(0)-\dfrac{4}{3}P'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$P'(0)=P'(1)=1$, $P'\left(\frac{1}{2}\right)=-1$일 때

a는 최댓값 $\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$이다.

15) [정답] 118

[해설]

함수 $g(x)$는 연속이고 미분가능하므로

$f(a)=m-f(a)$, $m-f(b)=n+f(b)$ …… ㉠

$$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (a \leqq x < b) \\ f'(x) & (x \geqq b) \end{cases}$$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

따라서 극대값은 $f(-3)=27$, 극소값은 $f(1)=-5$

㉠에서

$m=2f(-3)=54$,

$n=m-2f(1)=54+10=64$

$a=-3,\ b=1,\ m=54,\ n=64$

$\therefore\ m+n=118$

16) [정답] ③

[해설]

$f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수에서 미분가능.

$g(x)$는 주기함수로 $x=-1,1$에서 미분가능하다면 모든 실수에서 미분가능하므로 $f(-1)=f(1)$이고, $f'(-1)=f'(1)$이면 모든 실수에서 미분가능. (ㄱ참)

모든 실수에서 미분가능하므로 ㄱ에서

$f(-1)=f(1)=p$

$f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+ax+b)+p$로 둘 수 있다.

$f'(x)=(x-1)(x^2+ax+b)+(x+1)(x^2+ax+b)+(x-1)(x+1)(2x+a)$

$f'(1)=2(1+a+b)$, $\quad f'(-1)=-2(1-a+b)$

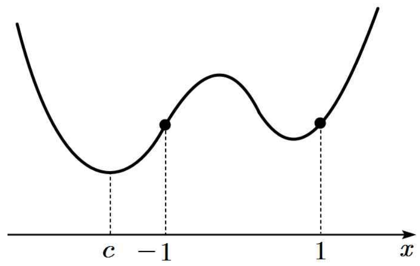
$f'(-1)=f'(1)$이므로 $b=-1$

$f'(1)=2a$, $\quad f'(0)=-a$

$\therefore\ f'(0)f'(1)=-2a^2\ \leq 0$ 즉, $a=0$일 때가 거짓임을 보이는 반례가 된다. (반례: $f(x)=(x^2-1)^2+p$의 꼴) (ㄴ거짓)

ㄴ에서 $f'(1)=2a>0$이면 $f'(-1)>0$이고, 최고차 계수가 1인 사차함수이므로 $x\to-\infty$일 때 $f(x)\to\infty$가 되어야 한다.

$f'(x)$는 $x<-1$일 때 $f'(x)<0$이되는 x가 있고, 중간값 정리에 의해 $f'(c)=0$인 c가 $(-\infty,-1)$에 적어도 1개 존재한다. (ㄷ참)



이상에서 옳은 것은 ㄱ,ㄷ

17) [정답] ②

[해설]

$f'(x)=k(x-1)(x+1)$이고 $f(-1)=3,\ f(1)=-1$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x+1$,

$f'(x)=3x^2-3$

$g'(x)=\begin{cases} 0 & (x<-1,\ x>1) \\ 3x^2-3 & (-1\leqq x\leqq 1) \end{cases}$에서

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$ (참)

ㄴ. $g'(x)\leqq 0$ (참)

ㄷ. $g'(x)\geqq-3$이므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3 (거짓)

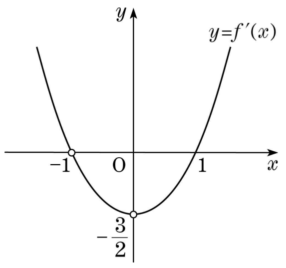
18) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=0$에서만 불연속이고,

$f'(x)=\frac{1}{2}(3x^2-3)$ (단, $x\neq-1,\ x\neq 0$)

따라서 도함수 $f'(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $y=f'(x)$의 그래프에서 $\lim_{x\to 0}f'(x)=-\frac{3}{2}$

ㄷ. $f'(x)=t$라 하면 $x\to-1+$ 일 때 $t\to 0-$ 이다.

$\therefore \lim_{x\to-1+} f(f'(x))=\lim_{t\to 0-}f(t)=-1$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

19) [정답] **13**

[해설]

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 직선 $x=k$에 대하여 대칭인 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $x=k$에서 미분가능하면 된다.

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k-}\frac{f(2k-x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[\frac{\{(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)+1\}}{x-k}\right.$$

$$\left.-\frac{(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}\right]$$

$$=\lim_{x\to k-}\left[(k-x)\right.$$

$$\left.\times\frac{\{(2k-x)^2+k(2k-x)+k^2-(3k-x)-9\}}{x-k}\right]$$

$$=-3k^2+2k+9$$

또,

$$\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{f(x)-f(k)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x^3-x^2-9x+1)-(k^3-k^2-9k+1)}{x-k}$$

$$=\lim_{x\to k+}\frac{(x-k)\{x^2+kx+k^2-(x+k)-9\}}{x-k}$$

$$=3k^2-2k-9$$

$$\lim_{x\to k-}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}=\lim_{x\to k+}\frac{g(x)-g(k)}{x-k}$$

이므로

$$-3k^2+2k+9=3k^2-2k-9$$

$$3k^2-2k-9=0$$

그러므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

따라서 $p=3,\ q=2$이므로 $p^2+q^2=13$이다.

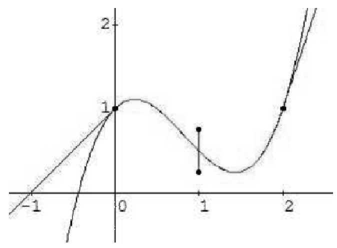
[참고]

함수 $y=f(2k-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $x=k$에 대하여 대칭이다. 따라서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=k$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하기 위해서는 $f'(k)=0$이어야 한다.

20) [정답] 3

[해설]

가장 낮은 차수의 다항함수 $g(x)$는 삼차함수이고, 그림과 같이 양쪽 직선이 접선이다.



$g(x)=x(x-2)(ax+b)+1=ax^3-2ax^2+bx^2-2bx+1$ 라고 놓을 수 있다.

$g'(x)=3ax^2-4ax+2bx-2b$

$g'(0)=-2b=1$에서 $b=-\frac{1}{2}$

$g(1)=-a-b+1=-a+\frac{3}{2}$,

$\frac{1}{4}<-a+\frac{3}{2}<\frac{3}{4}$, 즉 $\frac{3}{4}<a<\frac{5}{4}$

$k=g'(2)=2(2a+b)=4a-1$이므로 $2<k<4$

$\therefore\ k=3$

21) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $f(1)=\frac{1}{2}\le 1$ 이므로 $g(1)=f(1)=\frac{1}{2}$

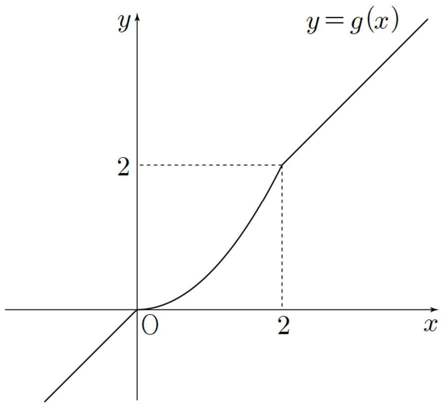
ㄴ. (i) $f(x)\le x$ 인 경우 $g(x)=f(x)\le x$

(ii) $f(x)>x$ 인 경우 $g(x)=x$

(i), (ii)에 의하여

모든 실수 x에 대하여 $g(x)\le x$

ㄷ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $g(x)$는 $x<0$, $0<x<2$, $x>2$에서미분가능하므로 $x=0$, $x=2$에서의 미분가능성을 조사해보면

(i) $x=0$일 때,

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{h-0}{h}=1$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{\frac{1}{2}h^2-0}{h}=0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=2$일 때,

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{\frac{1}{2}(2+h)^2-2}{h}$$

$=2$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(2+h)-g(2)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(2+h)-2}{h}$$

$=1$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2이다.

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22) [정답] ③

[해설]

ㄱ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}[xf(x)]=1$ (참)

ㄴ. $g(x)=[xf(x)]$라 하면,

$g(\sqrt{2})=0$, $\lim_{x\to\sqrt{2}}g(x)=1$ 이므로

$[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to\sqrt{2}}\frac{(x-\sqrt{2})[xf(x)]-0}{x-\sqrt{2}}=1$ (참)

23)

24) [정답] **32**

[해설]

$$h'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)\times\frac{1}{x-4}-2f(4)}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-2(x-4)f(4)}{(x-4)^2}\quad\cdots\cdots ㉠$$

에서 $\lim_{x\to 4}(x-4)^2=0$이므로

$$\lim_{x\to 4}\{f(x)-2(x-4)f(4)\}=f(4)=0$$

$f(x)=(x-4)(x^2+ax+b)$라 두고 ㉠에 대입하면

$$h'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+ax+b)}{(x-4)^2}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+ax+b}{x-4}\quad\cdots\cdots ㉡$$

이고 $\lim_{x\to 4}(x-4)=0$이므로

$$\lim_{x\to 4}(x^2+ax+b)=16+4a+b=0$$

$b=-4a-16$이고 이를 ㉡에 대입하면

$$h'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+ax-4a-16}{x-4}$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+a+4)}{x-4}$$

$=a+8=6$

에서 $a=-2, b=-8$이다.

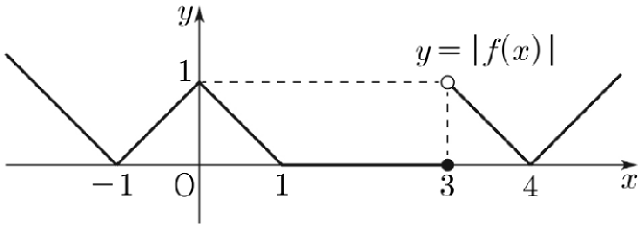
$$\therefore f(x)=(x-4)^2(x+2)$$

따라서 $f(0)=16\times 2=32$

25) [정답] ④

[해설]

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이므로 함수 $g(x)$는 $x=k+3$에서만 불연속이다.

ㄱ. $k=-3$일 때

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} |f(x+3)|=0,$

$g(0)=|f(0+3)|=0$에서 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1,\ f(0)=-1$에서 $\lim\limits_{x\to 0-} f(x)\neq f(0)$

$k\neq -3$일 때 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} \{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

$k=-3$일 때 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} \{f(x)+g(x)\}\neq f(0)+g(0)$

그러므로 모든 정수 k에 대하여

함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하기 위해서는 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0-} g(x),$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)g(x)=-\lim\limits_{x\to 0+} g(x),$

$f(0)g(0)=-g(0)$에서

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=-\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=-g(0)$

모든 정수 k에 대하여 $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=0$

그러므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이 되도록 하는 정수 k의 값은 $-4,\ -2,\ -1,\ 1$

(i) $k=-4$ 또는 $k=1$일 때

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-} \frac{(x+1)(-x)}{x}$$

$$=-1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+} \frac{(x-1)x}{x}$$

$$=-1$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ii) $k=-2$일 때

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(iii) $k=-1$일 때

$$\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-} \frac{(x+1)(-x)}{x}$$

$$=-1$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x-0}=0$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 정수 k의 값의 합은 $-4+(-2)+1=-5$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

26) [정답] 186

[해설]

함수 $y=f(x)$위의 점을 P라 하고 구간을 나누어 함수 $g(x)$를 구하면 다음과 같다.

(i) $x<1$일 때, $\mathrm{P}(x,\ x+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+1)^2+(x+2)^2$

$=2x^2+6x+5$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(x-1)^2$

$=2x^2-4x+2$

이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2\geq\overline{\mathrm{BP}}^2$을 풀면

$2x^2+6x+5\geq 2x^2-4x+2$

$10x\geq -3$

$x\geq -\dfrac{3}{10}$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\dfrac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\dfrac{3}{10}\leq x<1\right) \end{cases}$$

(ii) $x\geq 1$일 때, $\mathrm{P}(x,\ -2x+4)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x+1)^2+(-2x+5)^2$

$=5x^2-18x+26$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-1)^2+(-2x+2)^2$

$=5x^2-10x+5$

이때, $\overline{AP}^2 \geq \overline{BP}^2$을 풀면

$5x^2-18x+26 \geq 5x^2-10x+5$

$8x \leq 21$

$x \leq \frac{21}{8}$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases} 5x^2-10x+5 & \left(1 \leq x < \frac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x \geq \frac{21}{8}\right) \end{cases}$$

그러므로 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & \left(x<-\frac{3}{10}\right) \\ 2x^2-4x+2 & \left(-\frac{3}{10} \leq x < 1\right) \\ 5x^2-10x+5 & \left(1 \leq x < \frac{21}{8}\right) \\ 5x^2-18x+26 & \left(x \geq \frac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이때, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

한편

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6 & \left(x<-\frac{3}{10}\right) \\ 4x-4 & \left(-\frac{3}{10}<x<1\right) \\ 10x-10 & \left(1<x<\frac{21}{8}\right) \\ 10x-18 & \left(x>\frac{21}{8}\right) \end{cases}$$

이므로

$$\lim_{x\to-\frac{3}{10}-} g'(x) \neq \lim_{x\to-\frac{3}{10}+} g'(x)$$

$$\lim_{x\to1-} g'(x) = \lim_{x\to1+} g'(x)$$

$$\lim_{x\to\frac{21}{8}-} g'(x) \neq \lim_{x\to\frac{21}{8}+} g'(x)$$

그러므로 $x=a$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않는 a의 값은 $-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$ 이다.

따라서

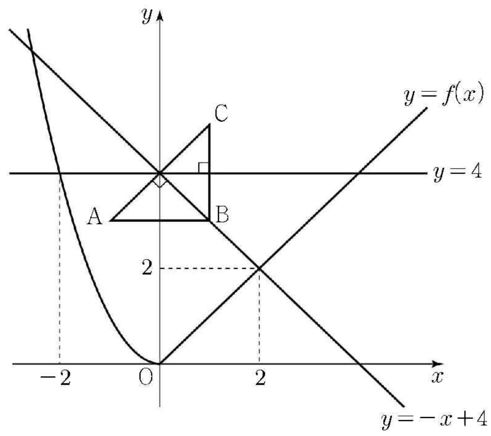
$80p=80\left(-\frac{3}{10}+\frac{21}{8}\right)$

$=-24+210$

$=186$

27) [정답] ③

[해설]



그림과 같이 선분 BC의 수직이등분선 $y=4$는 함수 $y=f(x)$ $(x<0)$의 그래프와 점 $(-2, 4)$에서 만나고, 선분 AC의 수직이등분선 $y=-x+4$는 함수 $y=f(x)$ $(x \geq 0)$의 그래프와 점 $(2, 2)$에서 만난다.

점 $\mathrm{P}(x, f(x))$에 대하여

$\overline{PQ}^2$의 값이 최대가 되도록 하는 점 Q는

$x<-2$일 때 점 $\mathrm{B}(1, 3)$

$-2 \leq x < 2$일 때 점 $\mathrm{C}(1, 5)$

$x \geq 2$일 때 점 $\mathrm{A}(-1, 3)$이다.

(i) $x<-2$일 때

점 $\mathrm{P}(x, x^2)$에 대하여 $g(x)=\overline{PB}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x^2-3)^2=x^4-5x^2-2x+10$

(ii) $-2 \leq x < 0$일 때

점 $\mathrm{P}(x, x^2)$에 대하여 $g(x)=\overline{PC}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x^2-5)^2=x^4-9x^2-2x+26$

(iii) $0 \leq x < 2$일 때

점 $\mathrm{P}(x, x)$에 대하여 $g(x)=\overline{PC}^2$이므로

$g(x)=(x-1)^2+(x-5)^2=2x^2-12x+26$

(iv) $x \geq 2$일 때

점 $\mathrm{P}(x, x)$에 대하여 $g(x)=\overline{PA}^2$이므로

$g(x)=(x+1)^2+(x-3)^2=2x^2-4x+10$

(i)~(iv)에 의하여

$$g(x)=\begin{cases} x^4-5x^2-2x+10 & (x<-2) \\ x^4-9x^2-2x+26 & (-2 \leq x < 0) \\ 2x^2-12x+26 & (0 \leq x < 2) \\ 2x^2-4x+10 & (x \geq 2) \end{cases}$$

ㄱ. $g(0)=26$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to2-} g(x) = \lim_{x\to2-}(2x^2-12x+26)=10$,

$g(2)=\lim_{x\to2+} g(x) = \lim_{x\to2+}(2x^2-4x+10)=10$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$0 \leq x \leq 2$에서 함수 $y=2(x-3)^2+8$은

$x=2$일 때 최솟값 10을 갖고,

$2 \le x \le 3$에서 함수 $y=2(x-1)^2+8$은

$x=2$일 때 최솟값 10을 가지므로

닫힌구간 [0, 3]에서 함수 $g(x)$의 최솟값은 10이다. (참)

ㄷ. $\lim_{x \to -2-} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim_{x \to -2-} \frac{x^4-5x^2-2x+10-10}{x+2}=-14$

$\lim_{x \to -2+} \frac{g(x)-g(-2)}{x-(-2)}$

$=\lim_{x \to -2+} \frac{x^4-9x^2-2x+26-10}{x+2}=2$이므로

함수 $g(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하지 않다.

$\lim_{x \to 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim_{x \to 0-} \frac{x^4-9x^2-2x+26-26}{x}=-2$

$\lim_{x \to 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x}$

$=\lim_{x \to 0+} \frac{2x^2-12x+26-26}{x}=-12$이므로

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

$\lim_{x \to 2-} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2-} \frac{2x^2-12x+26-10}{x-2}=-4$

$\lim_{x \to 2+} \frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

$=\lim_{x \to 2+} \frac{2x^2-4x+10-10}{x-2}=4$이므로

함수 $g(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

따라서 미분가능하지 않은 모든 a의 값의 합은

$-2+0+2=0$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

28) [정답] 97

[해설]

조건 (가)의 $g(x)=x^3f(x)-7$에 $x=2$를 대입하면

$g(2)=8f(2)-7$ ……㉠

이때 조건 (나)에서 $x \to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to 2}\{f(x)-g(x)\}=0$이고, 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)-g(2)$ ……㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $g(2)=8g(2)-7$에서 $g(2)=f(2)=1$

조건 (나)에서 ㉡에 의하여

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)-f(2)\}-\{g(x)-g(2)\}}{x-2}$$

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=f'(2)-g'(2)=2$$

$g(x)=x^3f(x)-7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

위의 식에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=12f(2)+8f'(2)=12\times1+8\{g'(2)+2\}=8g'(2)+28$

즉, $7g'(2)=-28$이므로 $g'(2)=-4$

그러므로 곡선 $y=g(x)$위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선의 방정식은 $y-1=-4(x-2)$, 즉 $y=-4x+9$

따라서 $a=-4$, $b=9$이므로 $a^2+b^2=16+81=97$

29) [정답] ③

[해설]

두 접점의 좌표를

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^3-3\beta^2+2\beta)$라 하면

ㄱ. $y'=3x^2-6x+2$이므로 기울기가 m인 접선의 두 접점의 x좌표는 $3x^2-6x+2-m=0$을 만족하므로 $\alpha+\beta=2$이다. (참)

ㄴ. 기울기가 m인 접선의 두 접점이 존재하므로 α, β는 서로 다른 실수이다.

$3x^2-6x+2-m=0$ 이 서로 다른 실근을 가지므로

$3^2-3(2-m)>0$ $\therefore m>-1$ (참)

ㄷ. 두 접선은 평행하므로 두 접선 사이의 거리가 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 되기 위해서는 두 접점 P, Q를 지나는 직선과 접선이 수직이어야 한다. 즉, 기울기의 곱은 -1이다.

$$m\times\frac{(\alpha^3-3\alpha^2+2\alpha)-(\beta^3-3\beta^2+2\beta)}{\alpha-\beta}=-1$$

$m\{\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

$m\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+2\}=-1$

그런데, α, β는 $3x^2-6x+2-m=0$ 의 두 근이므로

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{2-m}{3}$ $\quad\therefore m\left(\frac{2-m}{3}\right)=1$

$\therefore m^2-2m+3=0$

판별식 $\frac{D}{4}=1^2-3=-2<0$이므로 실수 m이 존재하지 않는다.

따라서 두 접선 사이의 거리와 $\overline{\mathrm{PQ}}$가 같아지는 실수 m은 존재하지 않는다. (거짓)

30) [정답] ①

[해설]
구하는 직선의 방정식을 $g(x)=mx+n$이라 하면
$f(x)-g(x)=0$은 서로 다른 두 중근을 갖는다.
즉, $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$꼴이다.
(α, β는 서로 다른 실수)
이때, $f(x)-g(x)$의 x^3의 계수가 0이므로 $\alpha+\beta=0$이어야 한다. 이때, 좌변 $f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$이 짝함수이므로 우변도 짝함수이어야 한다.
따라서 $m=6$이다. ($\because x$의 홀수차수항이 없어야 하므로)
이때, $f(x)-g(x)=x^3-3x^2+1-n$이고
$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2=(x-\alpha)^2(x+\alpha)^2=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$
이므로 계수비교법에 의해서 $2\alpha^2=3$이고 $1-n=\alpha^4$이다.
$\therefore\ n=1-\alpha^4=1-\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$
$\therefore\ g(x)=6x-\frac{5}{4}$

31) [정답] ③

[해설]
$f(x)=x^3+ax$를 미분하면 $f'(x)=3x^2+a$,
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 기울기는
$f'(-1)=3+a$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은
$y=(3+a)(x+1)+(-1-a)$
이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 구하면
$x^3+ax=(3+a)(x+1)+(-1-a)$
$x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-2)=0$
$\therefore\ b=2$
따라서 점 B의 좌표는 $(2,\ 8+2a)$이다. 마찬가지로 점 B에서의 접선의 방정식은
$y=(12+a)(x-2)+(8+2a)$
이 접선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 구하면
$x^3+ax=(12+a)(x-2)+(8+2a)$
$x^3-12x+16=0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+4)=0$
$\therefore\ c=-4$
주어진 조건에서
$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=8+2a-64-4a=-80$
$\therefore\ a=12$

[다른 풀이]
점 A에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 하면
$f(x)-g(x)=(x+1)^2(x-b)$
$g(x)$는 일차식이므로 $f(x)-g(x)$는 이차항을 갖지 않는다.
즉, 이차항의 계수는 0이므로 $-b+2=0$
$\therefore\ b=2$
점 B에서의 접선의 방정식을 $y=h(x)$라 하면
$f(x)-h(x)=(x-2)^2(x-c)$
마찬가지로 이차항의 계수는 0이므로 $-c-4=0$
$\therefore\ c=-4$
따라서
$f(b)+f(c)=f(2)+f(-4)=-56-2a=-80$
$\therefore\ a=12$

32) [정답] ②

[해설]
$f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=-x^2+ax+b$라 하고,
두 곡선 C_1, C_2의 한 교점 P의 x좌표를 t라 하자.
두 접선 l, m이 서로 수직이므로
$f'(t)g'(t)=-1$에서
$4t^2-2(a+2)t+\boxed{2a-1}=0$ …… ㉠
$f(t)=g(t)$에서
$2t^2-(a+2)t+2-b=0$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $b=\boxed{\frac{5}{2}}-a$를 $y=-x^2+ax+b$에 대입하고 a에 관하여 정리하면,

$a(x-1)-x^2-y+\boxed{\frac{5}{2}}=0$ …… ㉢

㉢에서 $x-1=0$, $-x^2-y+\boxed{\frac{5}{2}}=0$을 만족시키는

x와 y의 값을 구하면 점 Q의 좌표는 $\left(1, \boxed{\frac{3}{2}}\right)$이다.

$\therefore h(a)=2a-1$, $\alpha=\frac{5}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$

따라서 $h(\alpha)\times h(\beta)=h\left(\frac{5}{2}\right)\times h\left(\frac{3}{2}\right)=4\times 2=8$

33) [정답] ③

[해설]
k값에 관계없이 성립하므로 k에 관한 항등식이다.
즉, $x^2+2x+1=0$이므로 $x=-1$
따라서 점 P는 P$(-1,\ 3)$
점 P에서의 접선이 곡선 $y=f(x)$와 오직 한 점에서 만나므로 점 P는 변곡점이다.

$f'(x)=3x^2+2kx+2k-1$

$f''(x)=6x+2k$

$f''(-1)=0$이므로 $-6+2k=0$

$\therefore k=3$

34)

35) [정답] ②

[해설]
곡선 $y=x^2$ 위의 점을 $(t,\ t^2)$이라 하면 접선의 기울기는
$y'=2x$에서 $m=2t$이므로 접선의 방정식은
$y-t^2=2t(x-t)$
그런데 이 접선이 $(a,\ b)$를 지나므로 $b-t^2=2t(a-t)$
즉, $t^2-2at+b=0$
이차방정식 $t^2-2at+b=0$을 만족하는 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
근과 계수의 관계에서 $\alpha\beta=b$
그런데, 두 접선이 서로 수직이므로 $2\alpha\cdot 2\beta=-1$이어야 한다.

따라서 $4b=-1$, $b=-\frac{1}{4}$

조건에서 $a^2+b^2\le\frac{37}{16}$이므로 $a^2+\frac{1}{16}\le\frac{37}{16}$

즉, $a^2\le\frac{9}{4}$이므로 $-\frac{3}{2}\le a\le\frac{3}{2}$

따라서 $a+b$의 최댓값은 $a=\frac{3}{2}$일 때이고, 최솟값은

$a=-\frac{3}{2}$일 때이므로

최댓값 p는 $p=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

최솟값 q는 $q=-\frac{3}{2}-\frac{1}{4}=-\frac{7}{4}$

$\therefore pq=-\frac{35}{16}$

36)

37) [정답] ⑤

[해설]

$l : y=ax+b$라 하자.

l이 두 곡선 $y=2x^2+6$, $y=-x^2$에 접하므로 판별식을 이용하면, $a^2-48+8b=0$, $a^2-4b=0$이고 이를 풀면 $a=4, b=4$이다.$(a>0)$

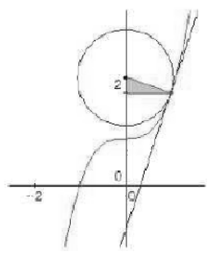
따라서 직선이 $y=4x+4$이고

두 곡선의 도함수가 $y'=4x$, $y'=-2x$이며 접선의 기울기가 4이므로 P$(1,8)$, Q$(-2,\ -4)$이다.

따라서 $\overline{PQ}=3\sqrt{17}$이다.

38) [정답] ④

[해설]



그림과 같이 원의 반지름의 기울기가 $-\frac{1}{3}$이므로

중심은 $\left(0,\ 2+\frac{1}{3}\right)$

따라서 반지름 r에 대하여

$S=\left(1+\frac{1}{9}\right)\pi=\frac{10}{9}\pi$

39) [정답] ①

[해설]

조건 (나)의 부등식에 $x=1$을 대입하면 $0 \le f(1) \le 0$이므로
$f(1)=0$
$x>1$일 때,
$\frac{6x-6}{x-1} \le \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \le \frac{2x^3-2}{x-1}$에서
$\lim_{x\to 1+} \frac{6x-6}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{6(x-1)}{x-1} = 6$,
$\lim_{x\to 1+} \frac{2x^3-2}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 6$
이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
$\lim_{x\to 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 6$
따라서 다항함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로
$f'(1)=6$
조건 (나)에 의하여 다항함수 $f(x)$는 일차함수 또는 이차함수 또는 삼차함수이다.
(i) $f(x)$가 일차함수인 경우
$f(x)=x-3$이고, $f'(x)=1$
$f'(1)=1 \ne 6$이므로 조건을 만족시키는 일차함수는 존재하지 않는다.
(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우
$f(x)=x^2+ax-3$(a는 상수)로 놓으면 $f(1)=0$이므로
$a=2$ $f(x)=x^2+2x-3$, $f'(x)=2x+2$
$f'(1)=4 \ne 6$이므로 조건을 만족시키는 이차함수는 존재하지 않는다.
(iii) $f(x)$가 삼차함수인 경우
$f(x)=x^3+bx^2+cx-3$(b, c는 상수)로 놓으면
$f(1)=0$이므로 $b+c=2$ ……㉠
$f'(x)=3x^2+2bx+c$에서
$f'(1)=6$이므로 $2b+c=3$…… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=1$, $c=1$이므로
$f(x)=x^3+x^2+x-3$
(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=x^3+x^2+x-3$이므로
$f(3)=27+9+3-3=36$

40) [정답] ②

[해설]

점 B, C의 x좌표를 각각 b, c라 하면

직선 m과 곡선 $y=f(x)$가 두 점 B, C에서 만나고 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)-x=(x-b)^2(x-c)$ …… ㉠

로 놓을 수 있다.

점 B는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 좌표는 (b, b)이다.

직선 l은 점 B를 지나며 직선 $y=x$와 수직이므로 기울기가 -1이다. 따라서 직선 l의 방정식은 $y=-x+2b$이다.

점 A는 직선 l의 y절편이므로 점 A의 좌표는 $(0, 2b)$, 즉 $f(0)=2b$이다.

문제의 조건에서 $f(0)>0$이므로 $b>0$이다.

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-b^2c=2b$

$\therefore\ bc=-2$ ($\because\ b>0$) …… ㉡

직선 l은 점 A에서 곡선 $y=f(x)$와 접하므로
$f'(0)=-1$이다.

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)-1=2(x-b)(x-c)+(x-b)^2$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-1=2bc+b^2=-2$

$b^2=2$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ b=\sqrt{2}$ ($\because\ b>0$)

$b=\sqrt{2}$를 ㉡에 대입하면 $c=-\sqrt{2}$

구하는 값은 $f'(c)$이므로 ㉢에 $x=c$를 대입하면

$f'(c)-1=(c-b)^2=(-2\sqrt{2})^2=8$

$\therefore\ f'(c)=9$

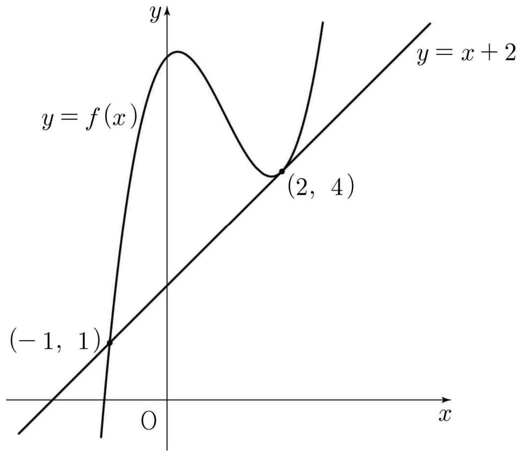
41) [정답] ①

[해설]

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 두 점 (2, 4), (−1, 1)을 지나는 직선의 방정식이
$y=x+2$ 이므로



$f(2)=4$ 에서 $4a+2b+c=-4$ …… ㉠

$f(-1)=1$ 에서 $a-b+c=2$ …… ㉡

$f'(2)=1$ 에서 $4a+b=-11$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에 의하여 $a=-3$, $b=1$, $c=6$

$f'(x)=3x^2-6x+1$

따라서 $f'(3)=10$

[다른 풀이]

두 점 (2, 4), (−1, 1)을 지나는 직선의 방정식이 $y=x+2$ 이므로

$f(x)-(x+2)=(x-2)^2(x+1)$

$f(x)=x^3-3x^2+x+6$

$f'(x)=3x^2-6x+1$

따라서 $f'(3)=10$

42) [정답] ⑤

[해설]

점 (0, 0)이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(0)=0$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (0, 0)에서의 접선의 방정식은

$y-0=f'(0)(x-0)$, $y=f'(0)x$ …… ㉠

점 (1, 2)가 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점이므로

$1\times f(1)=2$, $f(1)=2$

$y=xf(x)$에서 $y'=f(x)+xf'(x)$이므로

곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식은

$y-2=\{f(1)+f'(1)\}(x-1)$, $y=\{f'(1)+2\}(x-1)+2$

$y=\{f'(1)+2\}x-f'(1)$ …… ㉡

$f(x)$는 삼차함수이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$(a, b, c, d는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$f(0)=0$에서 $d=0$

이때 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$이므로

$f(1)=2$에서 $a+b+c=2$ …… ㉢

한편, ㉠, ㉡에서 두 접선이 일치하므로

$f'(0)=f'(1)+2$이고 $-f'(1)=0$

즉, $f'(1)=0$, $f'(0)=2$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로

$f'(0)=2$에서 $c=2$

이때 $f'(x)=3ax^2+2bx+2$이므로

$f'(1)=0$에서 $3a+2b+2=0$ …… ㉣

㉢에 $c=2$를 대입하면 $a+b=0$ …… ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$

따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$이므로

$f'(2)=-24+8+2=-14$

43) [정답] ③

[해설]

$f'(x)=2x$ 이므로 점 P 에서의 접선의 방정식은

$y=4a(x-2a)+4a^2=4ax-4a^2$

이고 점 A 의 좌표는 $(a, 0)$ 이다. 점 A 를 지나고 직선 l 에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{4a}(x-a)$

$x+4ay-a=0$ …… ㉠

따라서 점 B 는 $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ 이다.

삼각형 OAB 에 내접하는 원의 중심을 (r, r) 이라 하면 직선 ㉠까지의 거리가 r 이므로

$\dfrac{|r+4ar-a|}{\sqrt{1+16a^2}}=r$

$|r+4ar-a|^2=r^2(1+16a^2)$

$r^2+16a^2r^2+a^2+8ar^2-8a^2r-2ar=r^2+16a^2r^2$

$8ar^2-2a(1+4a)r+a^2=0$

$a\{8r^2-2(1+4a)r+a\}=0$

$a>0$ 이므로

$r=\dfrac{(1+4a)-\sqrt{(1+4a)^2-8a}}{8}$

$\therefore\ r=\dfrac{(1+4a)-\sqrt{1+16a^2}}{8}$ $(\because\ 0<r<a)$

따라서

$$\lim_{a\to\infty} r(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{(1+4a)-\sqrt{1+16a^2}}{8}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{8a}{8\left\{(1+4a)+\sqrt{1+16a^2}\right\}}=\frac{1}{8}$$

44) [정답] ④

[해설]

조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로 $\quad 1+a+b=2$

$\therefore a+b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

따라서 점 $(t,\ f(t))$, 즉 $(t,\ t^3+at^2+bt)$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

이므로 점 P의 좌표는 $(0,\ -2t^3-at^2)$이다.

$\therefore g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2|2t+a|$

함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$-\dfrac{a}{2}=0$이어야 하므로 $\quad a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로

$f(3)=3^3+3=30$

45) [정답] ①

[해설]

$f'(x)=3x^2+2x$이고, $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y=(3t^2+2t)(x-t)+t^3+t^2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$(t+1,\ f(t+1))$에서의 접선의 방정식은

$y=(3(t+1)^2+2(t+1))(x-t-1)+(t+1)^3+(t+1)^2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 각각의 y절편 $g_1(t)$, $g_2(t)$를 구하면

$g_1(t)=-2t^3-t^2,\ g_2(t)=-2(t+1)^3-(t+1)^2$

$\therefore h(t)=|g_1(t)-g_2(t)|$

$=|6t^2+8t+3|$

$=\left|6\left(t+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{1}{3}\right|$

따라서 $h(t)$의 최솟값은 $t=-\dfrac{2}{3}$일 때 $\dfrac{1}{3}$

46) [정답] ③

[해설]

주어진 함수는 삼차함수이므로 $a\neq 0$

$f'(x)=(x-1)(ax+1)+x(ax+1)+ax(x-1)$

이므로 점 P(1, 0)에서의 접선 l의 기울기는

$f'(1)=a+1$

또한 접선 l과 수직이면서 점 P(1, 0)을 지나는

직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{a+1}(x-1)\ (a\neq -1)\cdots$㉠

따라서 ㉠과 곡선 $y=f(x)$가 서로 다른 세 점에서

만나야 하므로 $-\dfrac{1}{a+1}(x-1)=x(x-1)(ax+1)$

$(x-1)(ax^2+x+\dfrac{1}{a+1})=0$

이 때 $ax^2+x+\dfrac{1}{a+1}=0$은 $x=1$을 근으로 갖지 않으므로

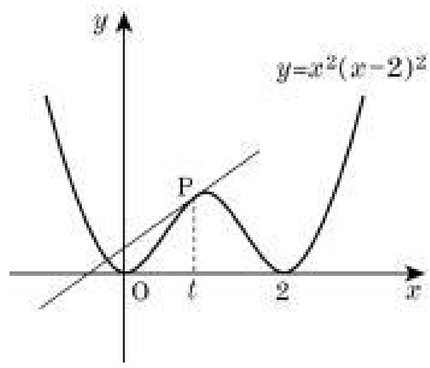
$D=1-4a\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{-3a+1}{a+1}>0$

$\dfrac{3a-1}{a+1}<0,\ (3a-1)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<0$ 또는 $0<a<\dfrac{1}{3}\ (\because a\neq 0)$

47) [정답] 32

[해설]



직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$는 곡선 위의 점 P$(t,\ f(t))$에서의 접선이므로 접선이 주어진 곡선의 위쪽에 놓이려면 접점은 곡선이 위로 볼록한 부분의 점이다.

그런데 위로 볼록한 부분에 있는 점에서의 접선 중에는 구간 $[0, 2]$에서 $y=f(x)$의 그래프 아래쪽을 지나는 직선이 생길 수 있다.

그러므로 원점에서 그은 접선의 접점과 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 조사하면 된다.

$y=x^2(x-2)^2$에서

$y'=2x(x-2)^2+2x^2(x-2)=4x(x-1)(x-2)$

점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은

$y-a^2(a-2)^2=4a(a-1)(a-2)(x-a)$

$x=0,\ y=0$을 대입하면

$-a^2(a-2)^2=-4a^2(a-1)(a-2)\ \therefore a=\dfrac{2}{3}$

한편 곡선 $y=x^2(x-2)^2$은 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 점 $(2, 0)$에서 그은 접선의 접점의 x좌표를 b라 하면

$\dfrac{2}{3}+b=2$에서 $b=\dfrac{4}{3}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 실수 t의 값의 범위는

$\dfrac{2}{3}\le t\le\dfrac{4}{3}$이다. $\therefore 36pq=36\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{4}{3}=32$

48) [정답] 32

[해설]

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$x=a$에서 미분가능해야 한다.

$\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{0-0}{x-a}=0$이므로

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{(x-1)^2(2x+1)}{x-a}=0$에서

$x\to a+$일 때 (분모)$\to 0$이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to a+}(x-1)^2(2x+1)=0,\ (a-1)^2(2a+1)=0,$

$a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

(i) $a=-\dfrac{1}{2}$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to -\frac{1}{2}+}2(x-1)^2=\frac{9}{2}\ne 0$$

(ii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)^2(2x+1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1+}(x-1)(2x+1)=0$$

(i), (ii)에서 $a=1$

조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는

함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있거나 접해야 한다.

$x>1$일 때,

함수 $f(x)=(x-1)^2(2x+1)$의 그래프와 접하고 기울기가 12인 접선의 접점을 $(m, f(m))(m>1)$이라 하자.

$f(x)=(x-1)^2(2x+1)=2x^3-3x^2+1$이므로

$f'(x)=6x^2-6x$

$f'(m)=12$에서 $6m^2-6m=12,\ m^2-m-2=0,$

$(m+1)(m-2)=0$

$m>1$에서 $m=2$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기가 12인 접선의 방정식은 $y-5=12(x-2)$, 즉

$y=12\left(x-\dfrac{19}{12}\right)$

따라서 $k\ge\dfrac{19}{12}$에서 k의 최솟값은 $\dfrac{19}{12}$이므로

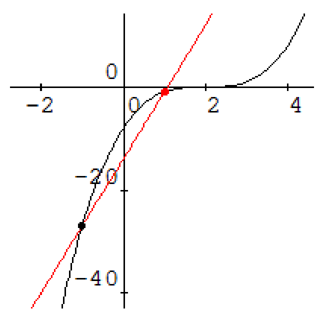
$a+p+q=1+12+19=32$

49) [정답] ⑤

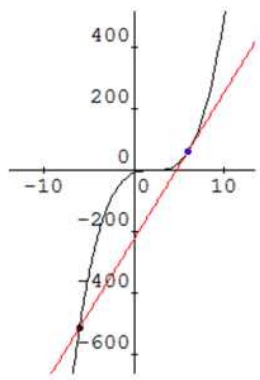
[해설]

ㄱ. $(-1,\ -27),\ (1,\ -1)$으로부터 $m=\dfrac{(-1)-(-27)}{1-(-1)}=13$

ㄱ.



ㄴ.



ㄴ. $x=a$에서의 접선이 점 $(-a, (-a-2)^3)$을 지날 때이므로

$f'(x)=3(x-2)^2$에서 $m=f'(a)=3(a-2)^3$

$y=3(a-2)^2(x-a)+(a-2)^3$

점 $(-a, (-a-2)^3)$을 대입하면

$-(a+2)^3=-6a(a-2)^2+(a-2)^3,\ 4a^3-24a^2=0,\ \therefore a=6$

ㄷ. $x=a$에서 접선은 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$이고,

$x=-a$에서 $y=f(a)-2af'(a)$이다.

$y=mx+n$에서는 $x=-a$이면 $y=n-ma$이다.

$f(a)-2af'(a)>n-ma$를 만족시키려면 ㄴ의 결과에서

$0<a<6$이므로 자연수 a의 개수는 5이다.