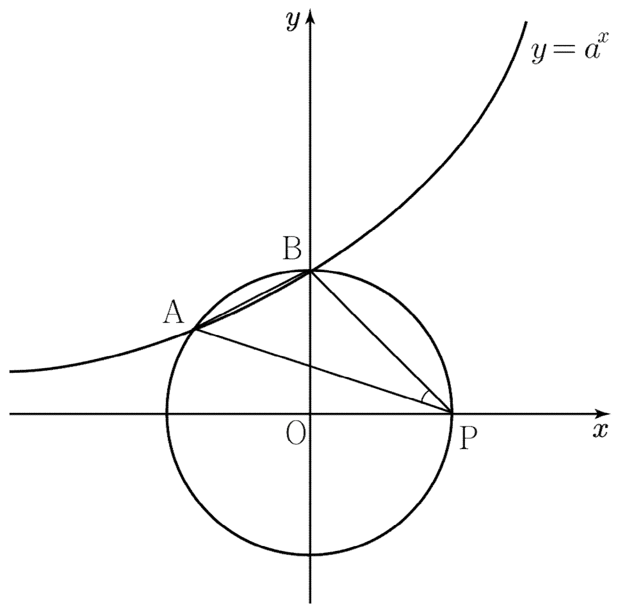
03 수1 05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

09 활용1 (삼각함수의 정의)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 06월 19

1. 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 점 P(1, 0)을 지나는 원과 곡선 $y=a^x\,(a>1)$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\angle \mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{12}$일 때, a의 값은?

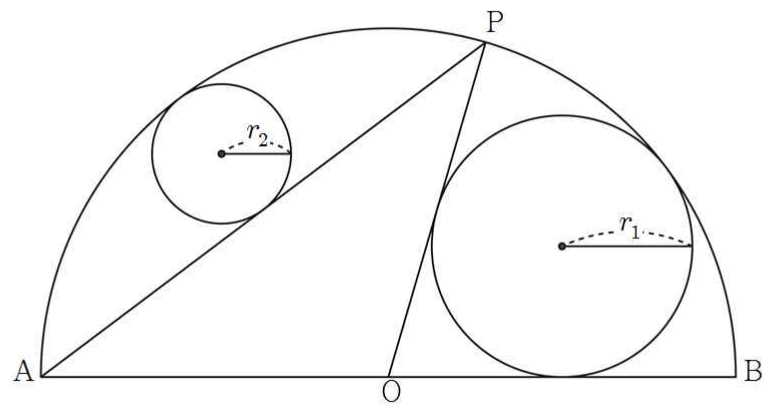


① $\dfrac{7}{6}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{5}{3}$　⑤ $\dfrac{11}{6}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 20

2. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하고 중심이 O인 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P를 $\cos(\angle \mathrm{BAP})=\dfrac{4}{5}$가 되도록 잡는다. 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 반지름의 길이가 r_1, 호 AP를 이등분하는 점과 선분 AP의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이가 r_2일 때, r_1r_2의 값은?



① $\dfrac{3}{40}$　② $\dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{1}{8}$

④ $\dfrac{3}{20}$　⑤ $\dfrac{7}{40}$

03 수1 05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

10 활용2 (특수각의 확장)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 21

3. 음이 아닌 세 정수 a, b, n에 대하여

$$(a^2+b^2+2ab-4)\cos\frac{n}{4}\pi+(b^2+ab+2)\tan\frac{2n+1}{4}\pi=0$$

일 때, $a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi$의 값은? (단, $a \ge b$)

① 4 ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{25}{4}$ ⑤ 7

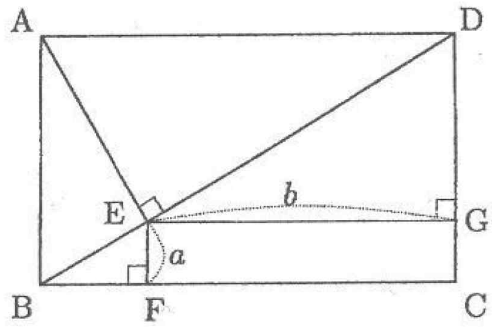
03 수1 05 삼각함수의 정의

02 삼각함수의 정의

11 활용3 (삼각함수 사이의 관계)

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

4. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 대각선 BD에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 두 변 BC와 CD에 내린 수선의 발을 각각 F와 G라 하자. $\overline{\mathrm{EF}}=a$이고 $\overline{\mathrm{EG}}=b$일 때, 대각선 BD의 길이는?



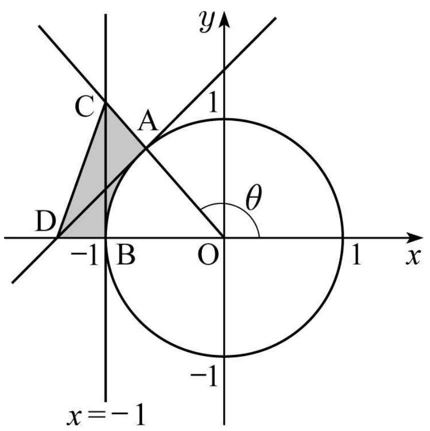
① $\sqrt{2}(a+b)$ ② $2\sqrt{a^2+b^2}$ ③ $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

④ $\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)^3$ ⑤ $\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

03 수1	05 삼각함수의 정의
02 삼각함수의 정의	
12 활용4 (각변형규칙)	

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 03월 21

5. 그림과 같이 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 A가 제 2사분면에 있을 때 동경 OA가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. 점 B$(-1, 0)$을 지나는 직선 $x=-1$과 동경 OA가 만나는 점을 C, 점 A에서의 접선이 x축과 만나는 점을 D라 하자. 다음 중 삼각형 OCD의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 어두운 부분의 넓이와 항상 같은 것은? (단, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)



① $\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}-\pi+\theta\right)$

② $\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

③ $\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}-\theta\right)$

④ $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

⑤ $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}-\theta\right)$

03 수1	06 삼각함수의 그래프
01 삼각함수의 그래프	
02 그래프2 (삼각함수의 그래프)	

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 28

6. $0<a<\frac{4}{7}$인 실수 a와 유리수 b에 대하여 닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}\right]$에서 정의된 함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$가 있다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{7}{2}\pi, 0\right)$을 지날 때, $30(a+b)$의 값을 구하시오.

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

03 그래프3 (평행이동과 대칭이동)

[출처] 2007 모의_공공 경찰대 고3 07월 12

7. <보기>에서 두 함수의 그래프가 여러 번의 대칭이동과 평행 이동으로 일치할 수 있는 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $y=\sqrt{4x-x^2}-1$과 $y=-\sqrt{1-x^2}+4$

ㄴ. $y=2^{x-3}-1$과 $y=3+2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$

ㄷ. $y=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x-1)+3$과 $y=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+3)-1$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

04 그래프4 (표준형 그래프에서 Mm)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 03월 21

8. 하루 중 해수면의 높이가 가장 높아졌을 때를 만조, 가장 낮아졌을 때를 간조라 하고, 만조와 간조 때의 해수면 높이의 차를 조차라 한다.

	시각
만조	04 시 30 분 17 시 00 분
간조	10 시 45 분 23 시 15 분

어느 날 A 지점에서 시각 x(시)와 해수면의 높이 y(m) 사이에는 다음과 같은 식이 성립한다고 한다.

$$y=a\cos b\pi(x-c)+4.5\,(0\le x<24)$$

이 날 A 지점의 조차가 8 m 이고, 만조와 간조 시각이 표와 같다. 이때, $a+100b+10c$ 의 값은?
(단, $a>0$, $b>0$, $0<c<6$ 이다.)

① 35 ② 45 ③ 55
④ 65 ⑤ 75

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 29

9. 함수 $y = k\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + k^2 - 6$의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않도록 하는 모든 정수 k의 개수를 구하시오.

03 수1 06 삼각함수의 그래프

01 삼각함수의 그래프

07 그래프7 (삼각함숫값의 대소비교)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 20

10. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$인 θ에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $0 < \sin\theta < \cos\theta < 1$

ㄴ. $0 < \log_{\sin\theta}\cos\theta < 1$

ㄷ. $(\sin\theta)^{\cos\theta} < (\cos\theta)^{\cos\theta} < (\cos\theta)^{\sin\theta}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

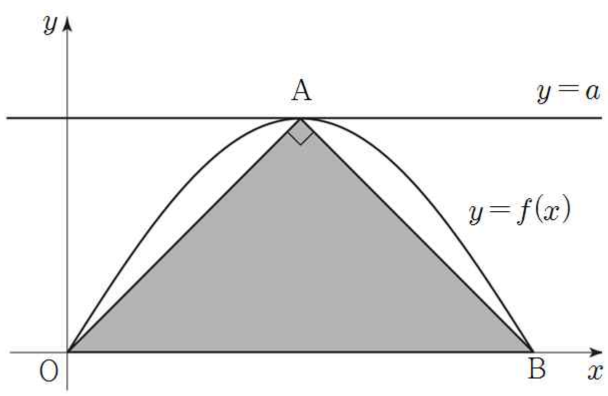
01 활용1 (대칭성과 길이 또는 넓이)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 15

11. 그림과 같이 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx\left(0\le x\le\frac{\pi}{b}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=a$와 만나는 점을 A, x축과 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 B라 하자. $\angle\text{OAB}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, $a+b$의 값은?
(단, O는 원점이다.)



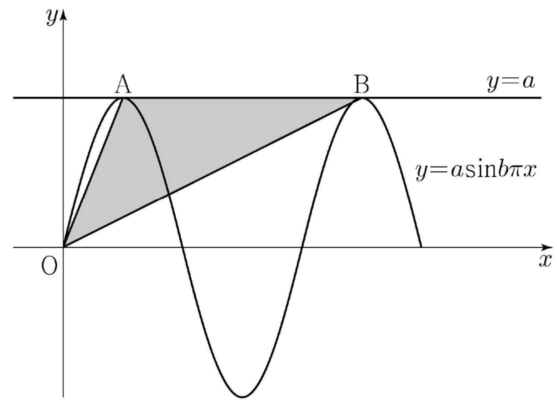
① $1+\frac{\pi}{6}$ ② $2+\frac{\pi}{6}$ ③ $2+\frac{\pi}{4}$

④ $3+\frac{\pi}{4}$ ⑤ $3+\frac{\pi}{3}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 10

12. 두 양수 a, b에 대하여 곡선

$y=a\sin b\pi x\left(0\le x\le\frac{3}{b}\right)$이 직선 $y=a$와 만나는 서로 다른 두 점을 A, B라 하자.
삼각형 OAB의 넓이가 5이고 직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$일 때, $a+b$의 값은?
(단, O는 원점이다.)



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

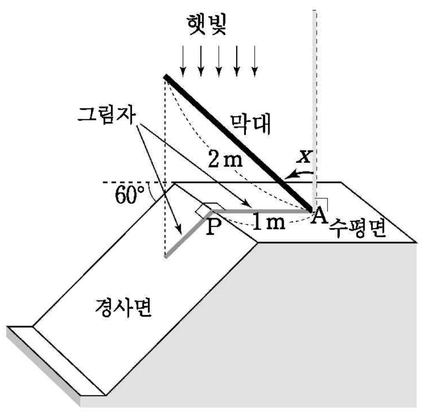
03 수1 　　06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

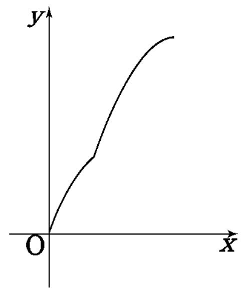
02 활용2 (그래프의 활용)

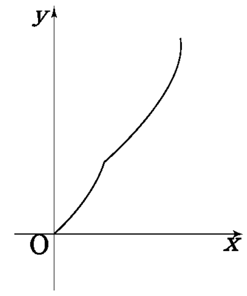
[출처]	2003 모의_공공 평가원 고3 06월 13
[출처]	2003 모의_공공 평가원 고3 06월 13
[출처]	2003 모의_공공 평가원 고3 06월 13

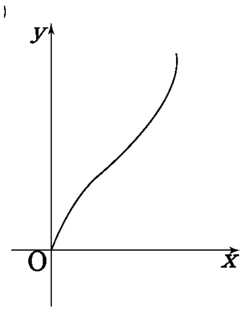
13. 그림과 같이 경사면은 수평면과 60˚를 이루고, 햇빛이 수평면에 수직으로 비치고 있다. 수평면과 경사면의 경계선 위의 한 지점 P에서 경계선과 수직으로 1m 떨어진 수평면 위의 지점 A에 길이가 2m인 막대를 수평면에 수직으로 세웠다.

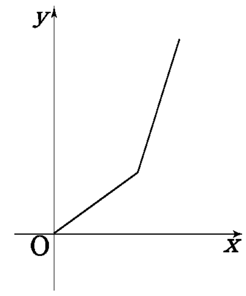


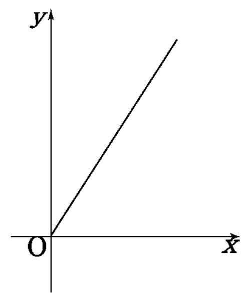
이 막대를 P지점 쪽으로 기울여 막대와 햇빛의 방향이 이루는 각의 크기를 x(rad)라고 할 때, 막대의 그림자의 길이를 $f(x)$라고 하자.
다음 중 $y=f(x)$의 그래프의 개형으로 옳은 것은?
$\left(\text{단, } 0 \le x < \frac{\pi}{2}\right)$

①


②


③


④


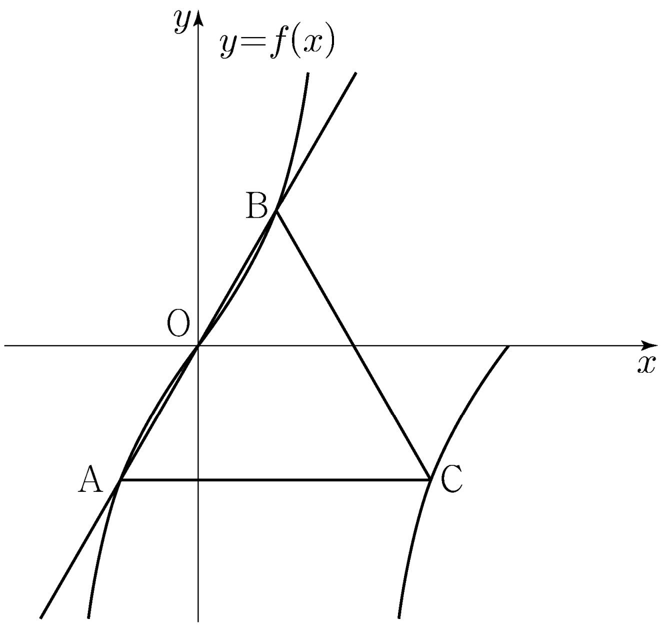
⑤


[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 11

14. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \middle| -\frac{a}{2}<x\le a,\ x\ne\frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 18

15. 자연수 n에 대하여 $-\frac{\pi}{2n}<x<\frac{\pi}{2n}$에서 정의된 함수 $f(x)=3\sin 2nx$가 있다. 원점 O를 지나고 기울기가 양수인 직선과 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점 O, A, B에서 만날 때, 점 $\mathrm{C}\left(\frac{\pi}{2n},\ 0\right)$에 대하여 넓이가 $\frac{\pi}{12}$인 삼각형 ABC가 존재하도록 하는 n의 최댓값은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

03 수1 06 삼각함수의 그래프

02 삼각함수의 그래프 활용

03 활용3 (치환을 이용한 Mm)

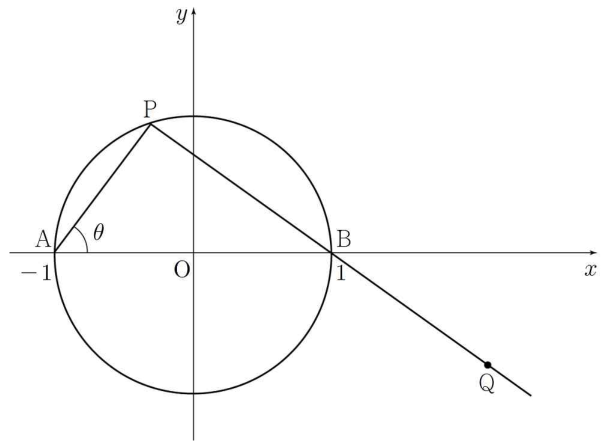
[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 7

16. 함수 $y=a\cos^2 x+a\sin x+b$의 최댓값이 10이고 최솟값이 1일 때, 실수 a, b의 곱 ab의 값은 p도는 q이다. $p+q$의 값은?

① -4　② -2　③ 2
④ 4　⑤ 6

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 19

17. 그림과 같이 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$과 원 $x^2+y^2=1$이 있다. 원 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 할 때, 반직선 PB 위에 $\overline{\mathrm{PQ}}=3$인 점 Q를 정한다. 점 Q의 x좌표가 최대가 될 때, $\sin^2\theta$의 값은?



① $\dfrac{7}{16}$　② $\dfrac{1}{2}$　③ $\dfrac{9}{16}$
④ $\dfrac{5}{8}$　⑤ $\dfrac{11}{16}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

04 삼각방정식4 (대칭성과 실근)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 28

18. 방정식 $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{8}=0$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{q}{p}\pi$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, $0 \le x \le 2\pi$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 9

19. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.)

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 21

20. 자연수 $k(1<k<12)$에 대하여 $0 \le x \le 12$에서 정의된 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}\sin \pi x & (0 \le x < k) \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{x-k}-1 & (k \le x \le 12) \end{cases}$$

라 하자. 실수 $a\left(0<a \le \frac{1}{2}\right)$에 대하여 방정식

$$f(x)+a=0$$

의 모든 실근의 합이 46일 때, $\frac{k}{a}$의 값은?

① 24 ② 27 ③ 30
④ 33 ⑤ 36

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 12

21. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right| \left(0 \le x < \frac{4\pi}{a}\right)$$

의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 서로 다른 점의 개수는 n이다. 이 n개의 점의 x좌표의 합이 39일 때, $n \times a$의 값은?

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$
④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

05 삼각방정식5 (실근의 개수)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 26

22. x에 대한 방정식 $\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|=k$가 서로 다른 3개의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값을 α라 할 때, 40α의 값을 구하시오. (단, $0\le x<2\pi$)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 16

23. $0\le t\le 3$인 실수 t와 상수 k에 대하여

$t\le x\le t+1$에서 방정식 $\sin\frac{\pi}{2}x=k$의 모든 해의 개수를 $f(t)$라 하자. 함수 $f(t)$가

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0\le t<a \text{ 또는 } a<t\le b)\\ 2 & (t=a)\\ 0 & (b<t\le 3)\end{cases}$$

일 때, $a^2+b^2+k^2$의 값은?
(단, a, b는 $0<a<b<3$인 상수이다.)

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 21

24. 자연수n에 대하여 $0\le x\le 2\pi$에서 방정식

$|\sin nx|=\frac{2}{3}$의 서로 다른 실근의 개수를 a_n, 서로 다른 모든 실근의 합을 b_n이라 할 때, $a_5b_6=k\pi$이다. 자연수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 26

25. $0 \le x \le 2\pi$에서 정의된 함수 $y = a\sin 3x + b$의 그래프가 두 직선 $y=9$, $y=2$와 만나는 점의 개수가 각각 3, 7이 되도록 하는 두 양수 a, b에 대하여 $a \times b$의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 21

26. 자연수n에 대하여 $0 < x < \dfrac{n}{12}\pi$일 때, 방정식 $\sin^2(4x) - 1 = 0$의 실근의 개수를 $f(n)$이라 하자. $f(n) = 33$이 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 295 ② 297 ③ 299
④ 301 ⑤ 303

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

27. 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (\cos x \ge \sin x) \\ \sin x & (\cos x < \sin x) \end{cases}, \quad g(x) = \cos ax$$

($a > 0$인 상수)

이다. 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 a의 최솟값을 p라 하자. 닫힌구간 $\left[0, \dfrac{11}{12}\pi\right]$에서 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = \cos px$의 교점의 개수를 q라 할 때, $p+q$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 11

28. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} \sin x & \left(0 \le x \le \frac{k}{6}\pi\right) \\ 2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x & \left(\frac{k}{6}\pi < x \le 2\pi\right) \end{cases}$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수를 a_k라 할 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 6

29. 두 정수 a, b에 대하여

$$a^2+b^2 \le 13,\ \cos\frac{(a-b)\pi}{2}=0$$

을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 17

30. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\sin(a\pi x)+2b\,(0 \le x \le 1)$$

이 있다. 집합 $\{x \mid \log_2 f(x)$는 정수$\}$의 원소의 개수가 8이 되도록 하는 서로 다른 모든 a의 값의 합은?

① 12 ② 15 ③ 18
④ 21 ⑤ 24

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 18

31. 집합 $\{x \mid -\pi \le x \le \pi\}$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\sin 2x+\frac{2}{3}\right|$$

가 있다. 양수 k에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 $y=3k$, $y=k$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 각각 m, n이라 할 때, $|m-n|=3$을 만족시킨다. $-\pi \le x \le \pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=k$의 모든 실근의 합은?

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$
④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

09 방부등식의 활용2 (부등식의 성립조건)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 26

32. $0 \le x < 2\pi$에서 x에 대한 부등식

$$(2a+6)\cos x - a\sin^2 x + a + 12 < 0$$

의 해가 존재하도록 하는 자연수 a의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 24

33. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$(a\sin^2 x - 4)\cos x + 4 \ge 0$$

을 만족시키는 실수 a의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

10 방부등식의 활용3 (여러가지)

[출처] 2008 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

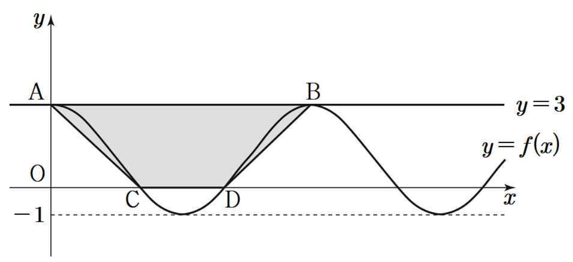
34. $0 \le x \le \pi$일 때, x에 관한 방정식

$\left[\cos x + \frac{1}{2}\right] = x - k$의 정수 해가 존재하도록 하는 k의 값의 합은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대 정수)

① 1 ② 2 ③ 5
④ 7 ⑤ 8

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 18

35. $x \geq 0$에서 정의된 함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$이 만나는 점 중에서 x좌표가 가장 작은 점과 두 번째로 작은 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중에서 x좌표가 가장 작은 점과 두 번째로 작은 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ACDB의 넓이가 6π일 때, $0 \leq x \leq 4\pi$에서 방정식 $f(x)=2$의 모든 해의 합은?
(단, a, b, c는 양수이다.)



① 6π ② $\frac{13}{2}\pi$ ③ 7π
④ $\frac{15}{2}\pi$ ⑤ 8π

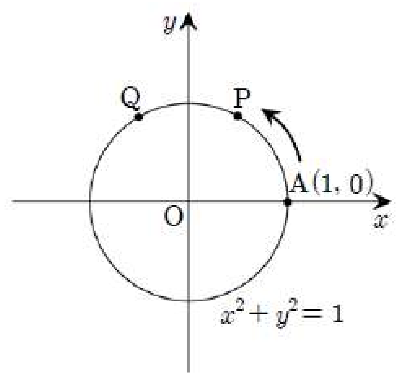
03 수1 06 삼각함수의 그래프

03 삼각방정식과 부등식

11 방부등식의 활용4 (추론과 해석)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 03월 21

36. 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$ 위의 두 점 P, Q가 점 A$(1, 0)$에서 동시에 출발하여 시계 바늘이 도는 방향과 반대 방향으로 매초 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$의 속력으로 각각 움직인다. 출발 후 100초가 될 때까지 두 점 P, Q의 y좌표가 같아지는 횟수는?



① 132 ② 133 ③ 134
④ 135 ⑤ 136

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 21

37. 자연수k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi \,\middle|\, m\text{은 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A_3=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되도록 하는 두 자리 자연수 k의 개수는 22이다.

ㄷ. $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 33이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 21

38. 닫힌구간$[-2\pi,\ 2\pi]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\sin kx+2,\quad g(x)=3\cos 12x$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 k의 개수는?

실수 a가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표이면

$$\{x\,|\,f(x)=a\}\subset\{x\,|\,g(x)=a\}$$

이다.

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

39. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2}-t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2}-t\right)=0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다.

ㄴ. $\{t \mid \beta(t)-\alpha(t)=\beta(0)-\alpha(0)\}=\left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2-t_1=\frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2=\frac{1}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 07 삼각함수의 활용

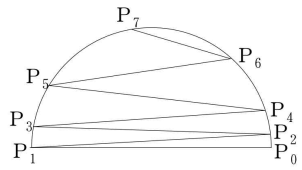
01 사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙1 (기본)

[출처] 2001 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

[출처] 2001 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

40. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 반원에서 지름의 양 끝점을 P_0, P_1이라 하자. 이때, $\angle P_0P_1P_2=1^\circ$, $\angle P_1P_2P_3=2^\circ$, $\cdots$, $\angle P_{k-1}P_kP_{k+1}=(2^{k-1})^\circ$를 만족하는 원 주위의 점 P_2, P_3, $\cdots$, P_7에 대하여 선분 P_6P_7의 길이는?



① $2\cos 32^\circ$
② $2\sin 32^\circ$
③ $2\cos 63^\circ$
④ $2\cos 64^\circ$
⑤ $2\sin 64^\circ$

03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

04 코사인법칙2 (코사인법칙의 변형)

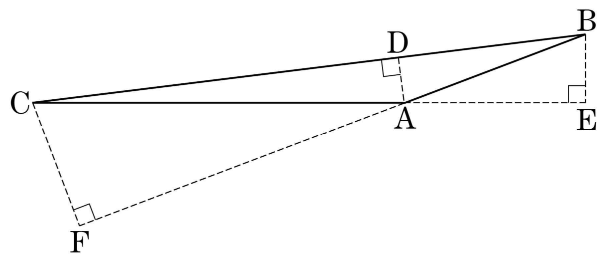
[출처] 2003 모의_공공 교육청 고3 04월 30

[출처] 2003 모의_공공 교육청 고3 04월 30

41. 삼각형의 세 꼭짓점에서 각각의 대변 또는 그 연장선에 내린 수선의 길이의 비가 $2:3:4$이다. 이 삼각형의 내각 중 최대각을 θ라 할 때, $\dfrac{1}{\cos\theta}$의 값을 반올림하여 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오.

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 03월 19

42. 그림과 같이 $A>90^\circ$인 삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C에서 세 직선 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{AD}:\overline{BE}:\overline{CF}=2:3:4$일 때, 삼각형 ABC에서 $\cos C$의 값은?



① $\dfrac{5}{6}$ ② $\dfrac{41}{48}$ ③ $\dfrac{7}{8}$

④ $\dfrac{43}{48}$ ⑤ $\dfrac{11}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

43. 삼각형 ABC에서 $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$이고 $\overline{AB}=6$이다. $\overline{AC}$와 $\overline{BC}$의 합이 24일 때, $\cos B$의 값은?

① $\dfrac{19}{28}$ ② $\dfrac{5}{7}$ ③ $\dfrac{21}{28}$

④ $\dfrac{11}{14}$ ⑤ $\dfrac{23}{28}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

01 사인법칙과 코사인법칙

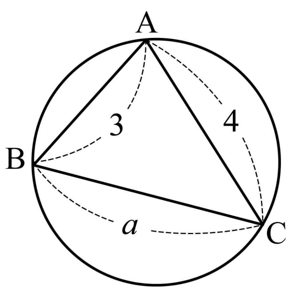
05 사인법칙과 코사인법칙의 동시 적용

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 03월 19

44. 그림과 같이

$\overline{AB}=3,\ \overline{BC}=a,\ \overline{AC}=4$

인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 이 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, 옳은 내용을 <보기>에서 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $a=5$ 이면 $R=\frac{5}{2}$ 이다.

ㄴ. $R=4$ 이면 $a=8\sin A$ 이다.

ㄷ. $1<a\le\sqrt{13}$ 일 때, $\angle A$ 의 최댓값은 60° 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

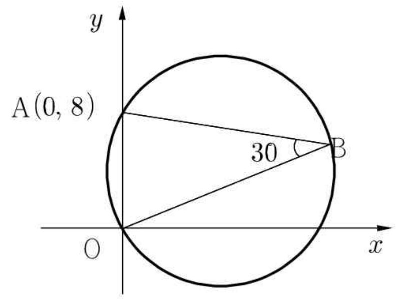
02 활용2 (사인법칙의 활용)

[출처] 2003 모의_공공 교육청 고3 03월 30

[출처] 2003 모의_공공 교육청 고3 03월 30

[출처] 2003 모의_공공 교육청 고3 03월 30

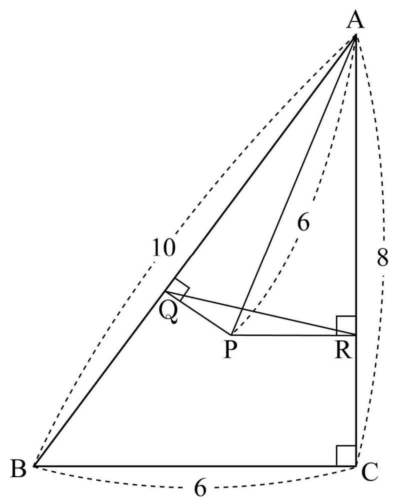
45. 오른쪽 그림과 같이



좌표평면 위의 두 점 O$(0, 0)$, A$(0, 8)$과 제1사분면 위의 점 B에 대하여 $\angle ABO=30$일 때, 세 점 O, A, B를 지나는 원의 중심의 좌표를 (a, b), 반지름의 길이를 r라 하자. 이때, $a+b+r$의 값을 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오. (단, $\sqrt{3}=1.732$로 계산한다.)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 03월 19

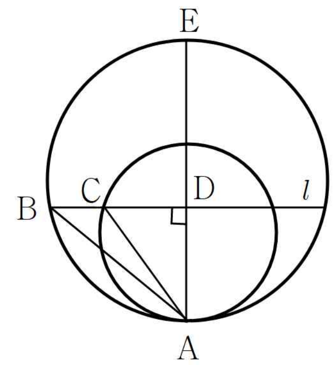
46. 그림과 같이 $\overline{AB}=10$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=8$ 인 삼각형 ABC 와 그 삼각형의 내부에 $\overline{AP}=6$ 인 점 P 가 있다. 점 P 에서 변 AB 와 변 AC 에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라 할 때, 선분 QR 의 길이는?



① $\frac{14}{5}$ ② 3 ③ $\frac{16}{5}$
④ $\frac{17}{5}$ ⑤ $\frac{18}{5}$

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

47. 반지름의 길이가 각각 5와 3인 두 원이 점 A에서 내접할 때, 그림과 같이 큰 원의 지름 AE에 수직인 직선 l이 두 원과 만나는 점을 각각 B와 C라 하자. $\overline{AD}=4$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

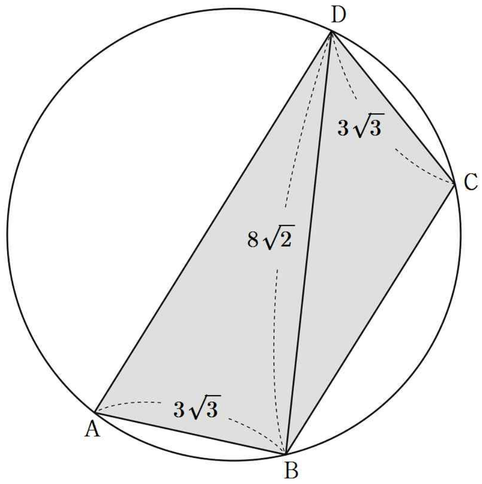


① $\sqrt{12}$ ② $\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{20}$
④ 5 ⑤ $\sqrt{30}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 28

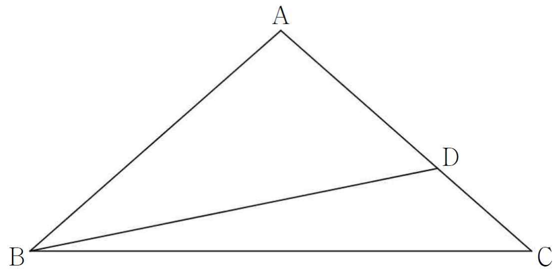
[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 29

48. 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=3\sqrt{3}$, $\overline{BD}=8\sqrt{2}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하자. $\frac{S^2}{13}$의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

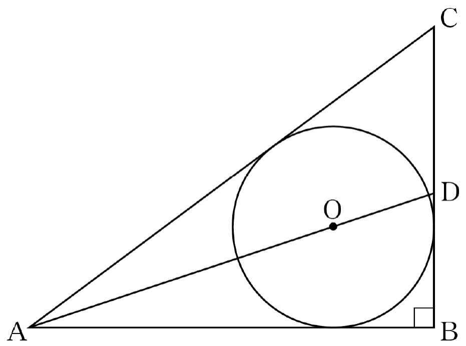
49. 그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 AC를 $5:3$으로 내분하는 점을 D라 하자.
$2\sin(\angle ABD)=5\sin(\angle DBC)$일 때, $\frac{\sin C}{\sin A}$의 값은?



① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{7}{11}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ $\frac{9}{13}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 17

50. 그림과 같이 $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 내접하고 반지름의 길이가 3인 원의 중심을 O라 하자. 직선 AO가 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{DB}=4$이다. 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는?



① $\frac{125}{2}\pi$ ② 63π ③ $\frac{127}{2}\pi$

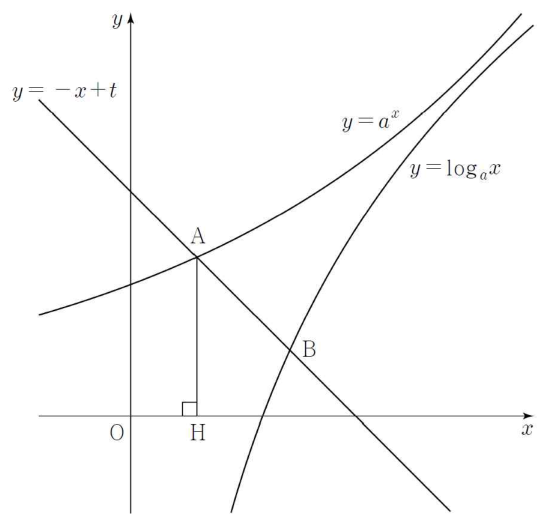
④ 64π ⑤ $\frac{129}{2}\pi$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 29

51. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

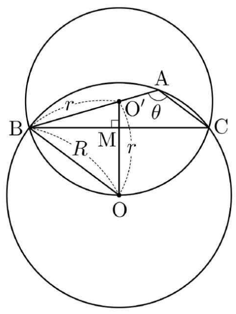
> (가) $\overline{OH} : \overline{AB} = 1 : 2$
>
> (나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 21

52. $\angle BAC=\theta\left(\frac{2}{3}\pi\le\theta<\frac{3}{4}\right)$인 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 세 점 B, O, C를 지나는 원의 중심을 O′이라 하자. 다음은 점 O′이 선분 AB위에 있을 때, $\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$의 값을 θ에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$$
>
> 세 점 B, O, C를 지나는 원의 반지름의 길이를 r라 하자.
>
> 
>
>
> 선분 O′O는 선분 BC를 수직이등분하므로 이 두 선분의 교점을 M이라 하면
>
> $$\overline{O'M}=r-\overline{OM}=r-|R\cos\theta|$$
>
> 직각삼각형 O′BM에서 $R=\boxed{(가)}\times r$이므로
>
> $$\sin(\angle O'BM)=\boxed{(나)}$$
>
> 따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\boxed{(다)}$$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$, $h(\theta)$라 하자. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\beta=-\frac{\sqrt{10}}{5}$인 α, β에 대하여 $f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right\}^2=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

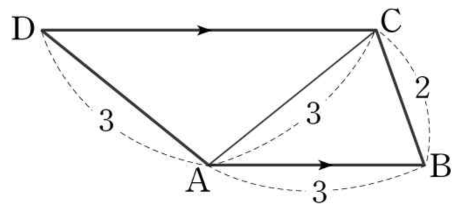
03 수1　　07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

03 활용3 (코사인법칙의 활용)

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 06월 21

53. 다음 그림과 같은 사각형 ABCD에서 $\overline{AB}\,/\!/\,\overline{CD}$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=3$일 때, 대각선 BD의 길이는?

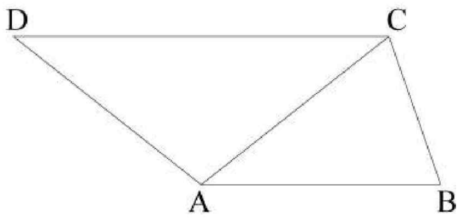


① 5　② $4\sqrt{2}$　③ 6

④ $5\sqrt{2}$　⑤ 8

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고2 06월 21

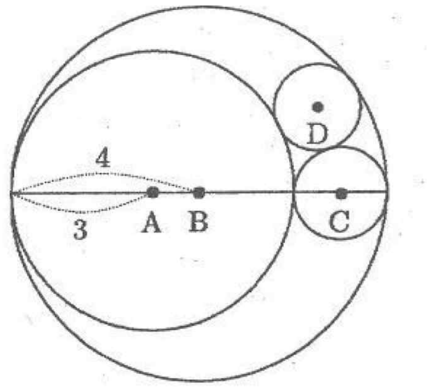
54. 사각형 ABCD에서 변 AB와 변 CD는 평행이고 $\overline{BC}=2$, $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AD}=3$일 때, 대각선 BD의 길이는?



① 5 ② $4\sqrt{2}$ ③ 6
④ $5\sqrt{2}$ ⑤ 8

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

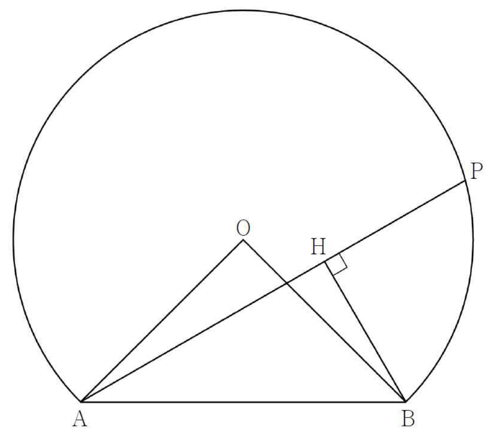
55. 다음 그림과 같이 네 개의 원이 서로 내접 또는 외접하고 있다. 중심이 A인 원의 반지름의 길이는 3이고, 중심이 B인 원의 반지름의 길이는 4이며, 세 중심 A, B, C는 같은 직선에 있다. 이때, 중심이 D인 원의 반지름의 길이는?



① $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{11}{12}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$
④ $\dfrac{12}{13}$ ⑤ $\dfrac{14}{15}$

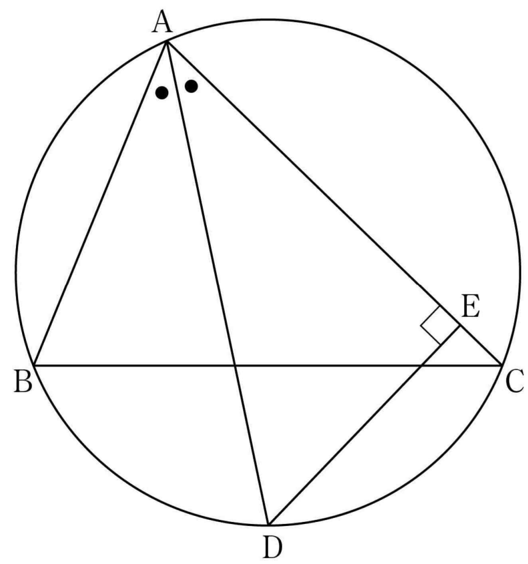
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 27

56. 그림과 같이 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$인 부채꼴 OBA가 있다. 호 BA 위에 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 점 B에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{OH}}^2$의 값은 $m+n\sqrt{3}$이다. m^2+n^2의 값을 구하시오.
(단, m, n은 유리수이다.)



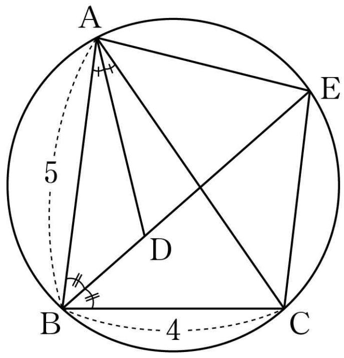
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 21

57. $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{AC}}=8$인 예각삼각형 ABC에서 ∠A의 이등분선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E라 하자. 선분 AE의 길이를 k라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 15

58. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. $\angle ABC$의 이등분선과 $\angle CAB$의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

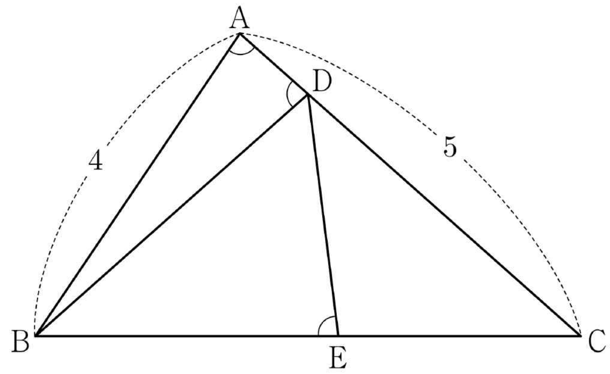
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 12

59. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC=\angle BDA=\angle BED$$

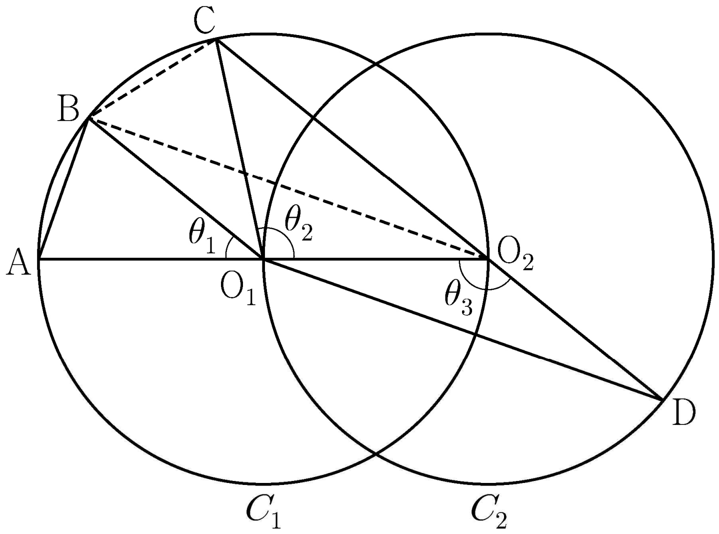
일 때, 선분 DE의 길이는?



① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$
④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 15

60. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다. 이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

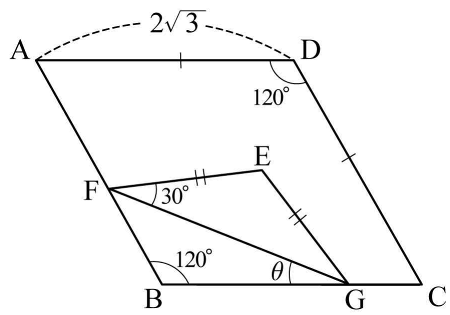
위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은?

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$
④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

03 수1 07 삼각함수의 활용
02 사인법칙과 코사인법칙의 활용
04 활용4 (사인법칙과 코사인법칙의 활용)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 03월 13

61. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 $\angle B=120^\circ$인 마름모 ABCD의 내부에 $\overline{EF}=\overline{EG}=2$이고 $\angle EFG=30^\circ$인 이등변삼각형 EFG가 있다. 점 F는 선분 AB 위에, 점 G는 선분 BC 위에 있도록 삼각형 EFG를 움직일 때, $\angle BGF=\theta$라 하자. <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $0^\circ<\theta<60^\circ$)



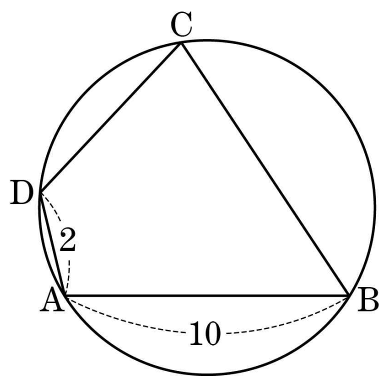
<보 기>

ㄱ. $\angle BFE=90^\circ-\theta$
ㄴ. $\overline{BF}=4\sin\theta$
ㄷ. 선분 BE의 길이는 항상 일정하다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 03월 27

62. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD가 $\overline{AB}=10$, $\overline{AD}=2$, $\cos(\angle BCD)=\frac{3}{5}$을 만족시킨다. 이 원의 넓이가 $a\pi$일 때, a의 값을 구하시오.

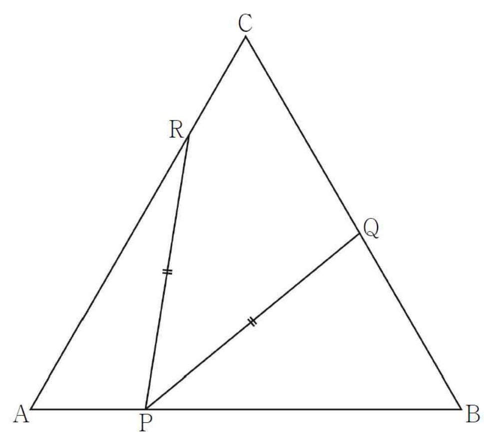


[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 21

63. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다.
선분 AB위의 점 P, 선분 BC위의 점 Q, 선분 CA위의 점 R에 대하여 세 점 P, Q, R가

$$\overline{AP}+\overline{BQ}+\overline{CR}=1,\ \overline{PQ}=\overline{PR}$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 세 점 P, Q, R는 각각 점 A, 점 B, 점 C가 아니다.)



<보 기>

ㄱ. $3\overline{AP}+2\overline{BQ}=2$

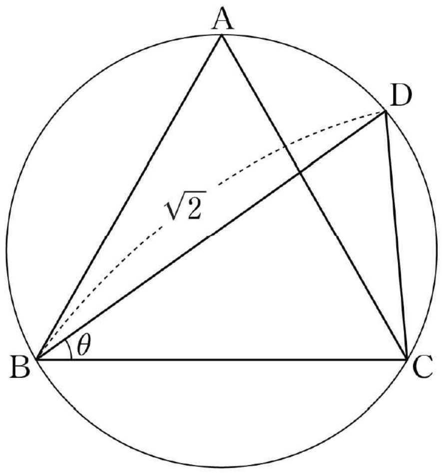
ㄴ. $\overline{QR}=\sqrt{3}\times\overline{AP}$

ㄷ. 삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배일 때, $\overline{AP}=\frac{\sqrt{21}-3}{6}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 19

64. 정삼각형 ABC가 반지름의 길이가 r인 원에 내접하고 있다. 선분 AC와 선분 BD가 만나고 $\overline{BD}=\sqrt{2}$가 되도록 원 위에서 점 D를 잡는다. $\angle DBC=\theta$라 할 때, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$이다. 반지름의 길이 r의 값은?

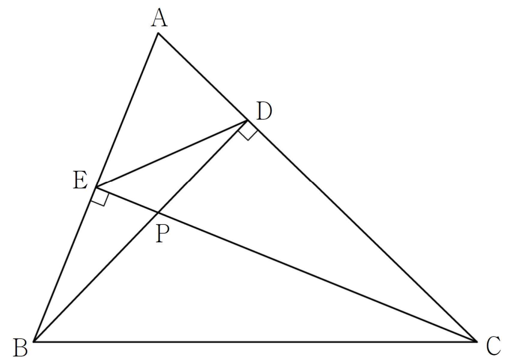


① $\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{6-\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{4}{5}$

④ $\frac{6-\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{2}}{5}$

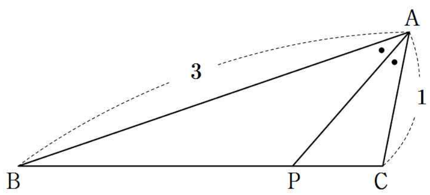
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 29

65. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$인 예각삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고, 두 선분 BD, CE의 교점을 P라 하자. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π일 때, 삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 $a\pi$이다. $55a$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 15

66. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=1$이고 $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 APC의 외접원의 넓이는?



① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{5}{16}\pi$ ③ $\frac{3}{8}\pi$

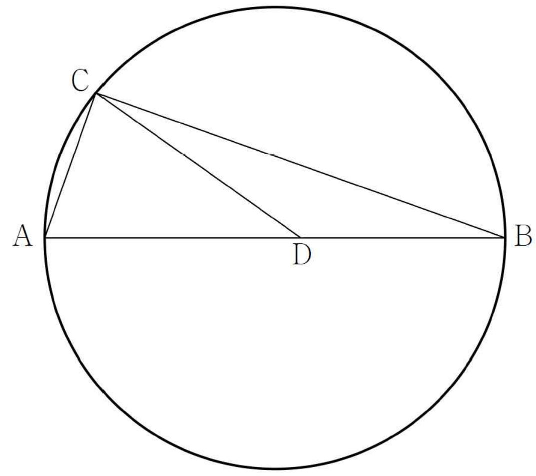
④ $\frac{7}{16}\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 20

67. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 C에 대하여

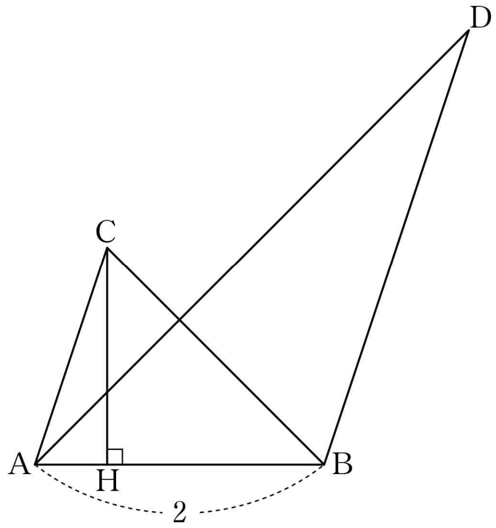
$$\overline{BC}=12\sqrt{2},\ \cos(\angle CAB)=\frac{1}{3}$$

이다. 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점을 D라 할 때, 삼각형 CAD의 외접원의 넓이는 S이다. $\frac{S}{\pi}$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 21

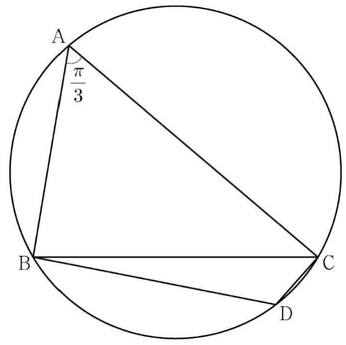
68. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 $1:3$으로 내분한다.



두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 12

69. 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$인 원에 내접하고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 점 A를 포함하지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\sin(\angle BCD)=\frac{2\sqrt{7}}{7}$일 때, $\overline{BD}+\overline{CD}$의 값은?



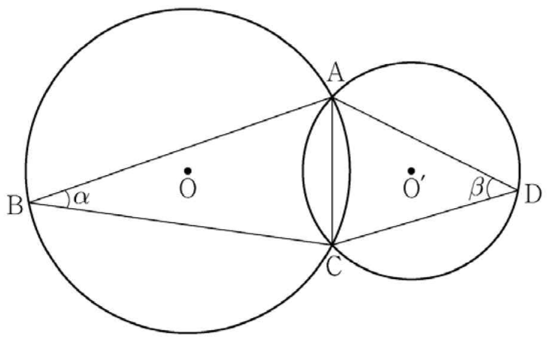
① $\frac{19}{2}$ ② 10 ③ $\frac{21}{2}$
④ 11 ⑤ $\frac{23}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 21

70. 그림과 같이 한 평면 위에 있는 두 삼각형 ABC, ACD의 외심을 각각 O, O′이라 하고 $\angle ABC=\alpha$, $\angle ADC=\beta$라 할 때,

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{3}{2},\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{1}{3},\ \overline{OO'}=1$$

이 성립한다. 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

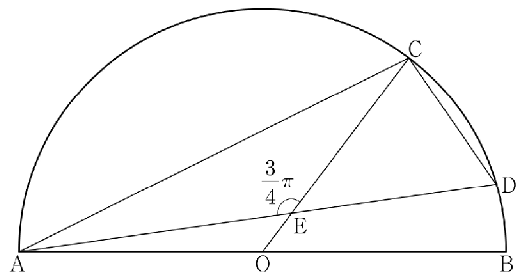


[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 13

71. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은?



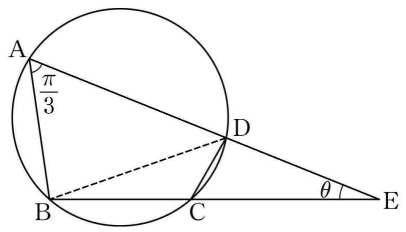
① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$
④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 15

72. 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여

$$\overline{AB}=\overline{BC}=2,\quad \overline{AD}=3,\quad \angle BAD=\frac{\pi}{3}$$

이다. 두 직선 AD, BC의 교점을 E라 하자.



다음은 $\angle AEB=\theta$일 때, $\sin\theta$의 값을 구하는 과정이다.

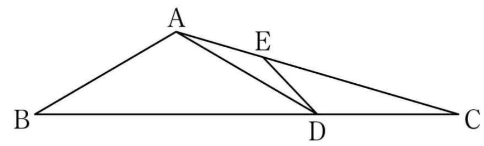
> 삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하면
> $\overline{CD}=$ (가)
> 이다. 삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서
> $\angle AEB$는 공통, $\angle EAB=\angle ECD$
> 이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다.
> 이를 이용하면
> $\overline{ED}=$ (나)
> 이다. 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면
> $\sin\theta=$ (다)
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $(p+q)\times r$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ③ $\frac{9\sqrt{3}}{14}$
④ $\frac{5\sqrt{3}}{7}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{3}}{14}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 13

73. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$, $\overline{CA}=\sqrt{13}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 B가 아닌 점 D를 $\overline{AD}=2$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 양 끝점 A, C가 아닌 점 E를 사각형 ABDE가 원에 내접하도록 잡는다.



다음은 선분 DE의 길이를 구하는 과정이다.

> 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여
> $\cos(\angle ABC)=$ (가)
> 이다. 삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD)=\sqrt{1-(\text{ 가 })^2}$
> 이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 (나) 이다.
> 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여
> $$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$$
> 이므로 $\sin(\angle CAD)=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$이다.
> 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{DE}=$ (다)
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은?

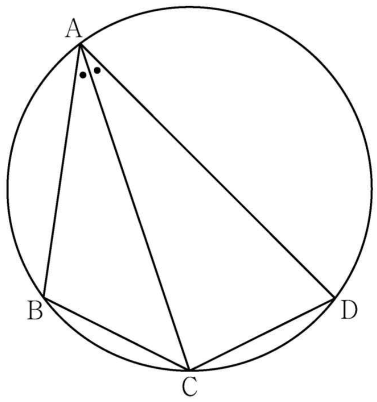
① $\frac{6\sqrt{13}}{13}$ ② $\frac{7\sqrt{13}}{13}$ ③ $\frac{8\sqrt{13}}{13}$
④ $\frac{9\sqrt{13}}{13}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{13}}{13}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 11

74. 그림과 같이 사각형 ABCD가 한 원에 내접하고

$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3\sqrt{5}$, $\overline{AD}=7$, $\angle BAC=\angle CAD$

일 때, 이 원의 반지름의 길이는?



① $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

④ $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

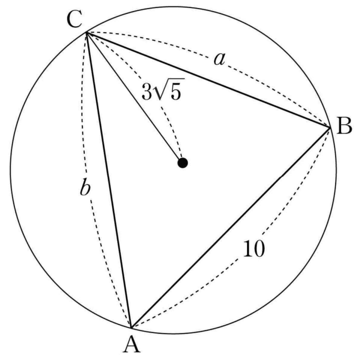
02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

05 활용5 (식의 모양-연결공식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 19

75. 길이가10, a, b인 세 선분 AB, BC, CA를 각 변으로 하는 예각삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 세 꼭짓점을 지나는 원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이고

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$일 때, ab의 값은?



① 140 ② 150 ③ 160

④ 170 ⑤ 180

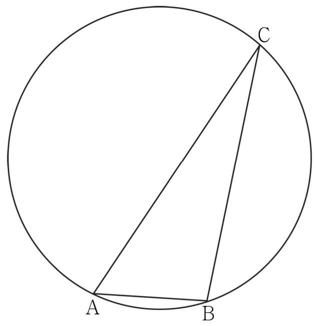
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

06 활용6 (Mm)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 19

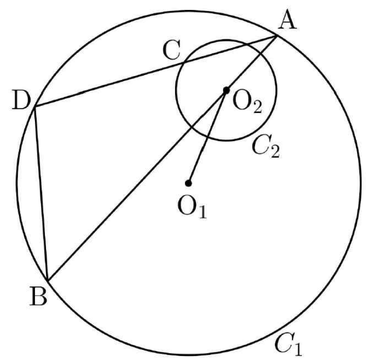
76. 그림과 같이 원 C에 내접하고 $\overline{AB}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$일 때, 원 C위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은?
(단, 점 P는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.)



① $\frac{32}{3}\sqrt{3}$ ② $\frac{34}{3}\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $\frac{38}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{40}{3}\sqrt{3}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 13

77. 그림과 같이 중심이 O_1이고 반지름의 길이가 r $(r>3)$인 원 C_1과 중심이 O_2이고 반지름의 길이가 1인 원 C_2에 대하여 $\overline{O_1O_2}=2$이다. 원 C_1 위를 움직이는 점 A에 대하여 직선 AO_2가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 원 C_2 위를 움직이는 점 C에 대하여 직선 AC가 원 C_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 D라 하자.



다음은 $\overline{BD}$가 최대가 되도록 네 점 A, B, C, D를 정할 때, $\overline{O_1C}^2$을 r에 대한 식으로 나타내는 과정이다.

> 삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.
>
> 이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\frac{1}{\overline{AO_2}}$이므로
>
> $$\overline{BD}=\frac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{\text{(가)}}$$
>
> 이다.
>
> 그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다.
>
> $\overline{AO_2}$의 최솟값은
>
> $\boxed{\text{(나)}}$
>
> 이므로 $\overline{BD}$가 최대일 때,
>
> $$\overline{O_1C}^2=\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(r)$, $g(r)$, $h(r)$라 할 때, $f(4)\times g(5)\times h(6)$의 값은?

① 216 ② 192 ③ 168
④ 144 ⑤ 120

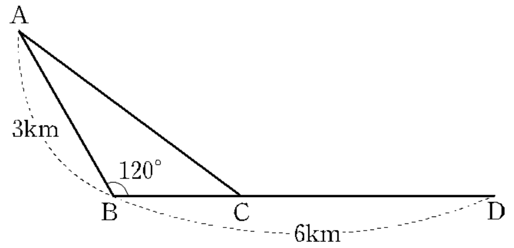
03 수1 07 삼각함수의 활용

02 사인법칙과 코사인법칙의 활용

07 활용7 (실생활 활용)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 16

78. 그림과 같은 $\angle ABC = 120°$, $\overline{AB} = 3\text{km}$, $\overline{BD} = 6\text{km}$ 인 산책로에는 다음과 같은 두 가지 코스가 있다.



[코스1] : A→B→C→D
[코스2] : A→C→D

갑이 시속 3km 의 일정한 속력으로 산책할 경우, [코스1]을 따라갈 때 소요되는 시간이 [코스2]를 따라가는 것보다 10 분 더 걸린다고 한다. $\overline{BC}$ 의 길이는?

① $\dfrac{11}{8}$km ② $\dfrac{5}{4}$km ③ $\dfrac{9}{8}$km

④ 1km ⑤ $\dfrac{7}{8}$km

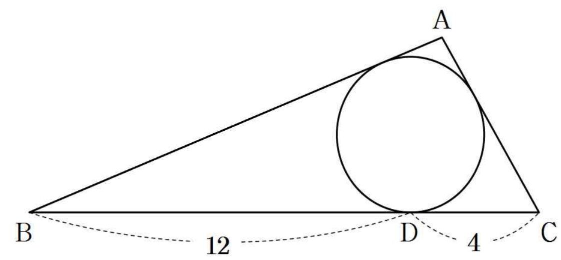
03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

04 넓이4 (내접원과 외접원)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 18

79. 반지름의 길이가 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$인 원이 삼각형 ABC에 내접하고 있다. 원이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하고 $\overline{BD}=12$, $\overline{DC}=4$일 때, 삼각형 ABC의 둘레의 길이는?



① $\dfrac{71}{2}$ ② 36 ③ $\dfrac{73}{2}$

④ 37 ⑤ $\dfrac{75}{2}$

03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

05 넓이5 (사각형의 넓이)

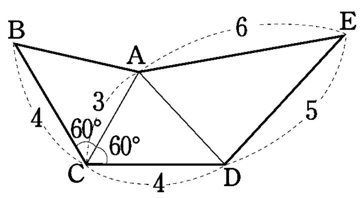
[출처] 2003 모의_공공 평가원 고3 06월 30

[출처] 2020 일반_시중교재 EBS한국교육방송공사 EBS교육방송 편집부 수능특강 대표 기출 문제

80. 그림과 같이 도형 ABCDE 에서

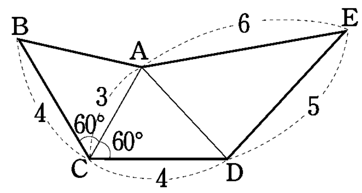
$\angle ACB = \angle ACD = 60^\circ$, $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=\overline{CD}=4$,
$\overline{DE}=5$, $\overline{AE}=6$

이다. 이 도형 ABCDE 의 넓이를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오. (단, $\sqrt{3}=1.732$로 계산한다.)



[출처] 2003 모의_공공 평가원 고3 06월 30

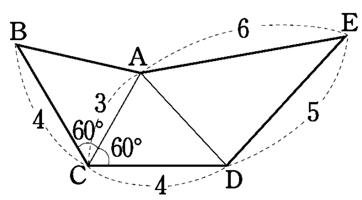
81. 그림과 같이 도형 ABCDE에서
$\angle ACB = \angle ACD = 60^\circ$,
$\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=\overline{CD}=4$,
$\overline{DE}=5$, $\overline{AE}=6$이다.



이 도형 ABCDE의 넓이를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오. (단, $\sqrt{3}=1.732$로 계산한다.)

[출처] 2003 모의_공공 평가원 고3 06월 30

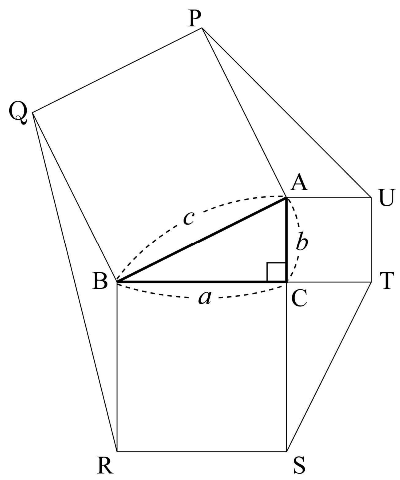
82. 그림과 같이 도형 ABCDE에서
$\angle ACB = \angle ACD = 60^\circ$,
$\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=\overline{CD}=4$, $\overline{DE}=5$,



$\overline{AE}=6$이다. 이 도형 ABCDE의 넓이를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 구하시오. (단, $\sqrt{3}=1.732$로 계산한다.)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 03월 15

83. 그림과 같이 직각삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 각각 한 변으로 하는 정사각형 APQB, BRSC, CTUA를 그린다. 세 변 AB, BC, CA의 길이를 각각 c, a, b라 할 때, 다음 중 육각형 PQRSTU의 넓이를 나타낸 것은?



① $2(a^2+bc)$ ② $2(b^2+ca)$ ③ $2(c^2+ab)$

④ $ab+bc+ca+2a^2$ ⑤ $ab+bc+ca+2c^2$

03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

06 넓이6 (각 표시)

[출처] 2009 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

84. 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AC}=\sqrt{7}$, $\overline{BD}=\sqrt{13}$, $\angle ABC=60^\circ$이고 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\sin^2\theta$의 값은?

① $\frac{27}{91}$ ② $\frac{30}{91}$ ③ $\frac{33}{91}$

④ $\frac{36}{91}$ ⑤ $\frac{39}{91}$

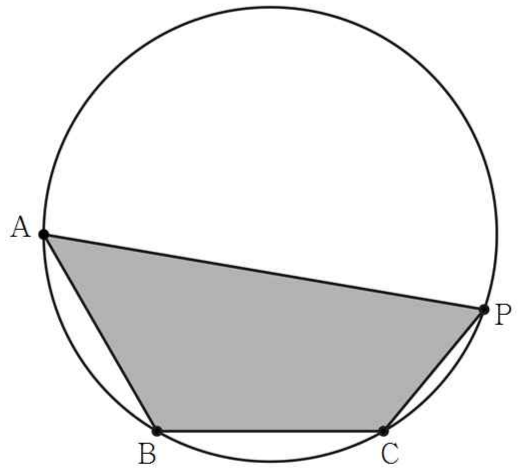
[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 5

85. 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=4$, $\overline{DA}=6$이다. 사각형 ABCD의 넓이는?

① $5\sqrt{2}$ ② $6\sqrt{2}$ ③ $7\sqrt{2}$
④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $9\sqrt{2}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 09월 19

86. 반지름의 길이가 3인 원의 둘레를 6등분하는 점 중에서 연속된 세 개의 점을 각각 A, B, C라 하자. 점 B를 포함하지 않는 호 AC 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{CP}=8$이다. 사각형 ABCP의 넓이는?



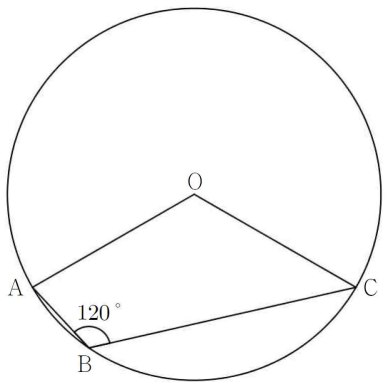
① $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{19\sqrt{3}}{3}$
④ $\frac{22\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

87. 그림과 같이 반지름의 길이가 4이고 중심이 O인 원 위의 세 점 A, B, C에 대하여

$\angle ABC = 120°$, $\overline{AB} + \overline{BC} = 2\sqrt{15}$

일 때, 사각형 OABC의 넓이는?

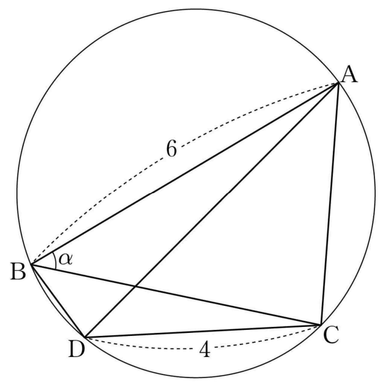


① $5\sqrt{3}$ ② $\frac{11\sqrt{3}}{2}$ ③ $6\sqrt{3}$

④ $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $7\sqrt{3}$

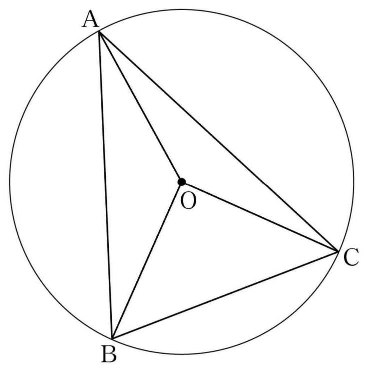
[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 29

88. 그림과 같이 예각삼각형 ABC가 한 원에 내접하고 있다. $\overline{AB} = 6$이고, $\angle ABC = \alpha$라 할 때 $\cos\alpha = \frac{3}{4}$이다. 점 A를 지나지 않는 호 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{CD} = 4$이다. 두 삼각형 ABD, CBD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $S_1 : S_2 = 9 : 5$이다. 삼각형 ADC의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 19

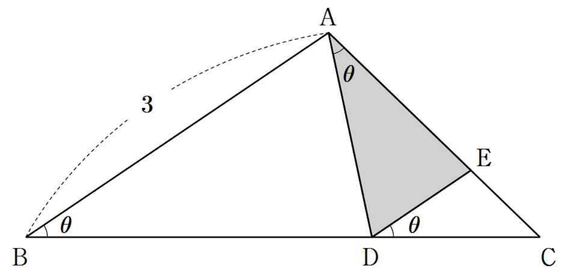
89. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원에 내접하는 예각삼각형 ABC에 대하여 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $3S_1=4S_2$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$ 일 때, 선분 AB의 길이는?



① $2\sqrt{7}$ ② $\sqrt{30}$ ③ $4\sqrt{2}$
④ $\sqrt{34}$ ⑤ 6

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 17

90. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$인 임의의 실수 θ에 대하여 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{CAB}=3\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 BC 위에 점 D를 $\angle\mathrm{DAC}=\theta$가 되도록 잡고, 선분 AC 위에 점 E를 $\angle\mathrm{EDC}=\theta$가 되도록 잡는다. 다음은 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$를 구하는 과정이다.



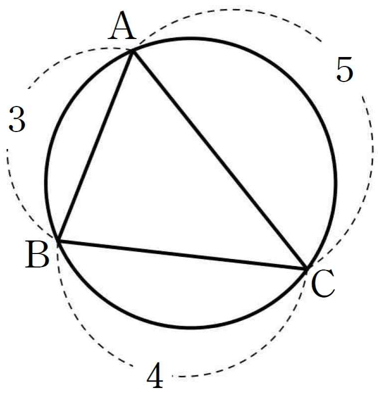
> $\angle\mathrm{ABC}=\theta$, $\angle\mathrm{DAB}=2\theta$이므로 $\angle\mathrm{BDA}=\pi-3\theta$이다.
>
> 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\boxed{(가)}}$$
>
> 이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{3\sin\theta}{\boxed{(가)}}$이다.
>
> 또한 $\angle\mathrm{ADE}=2\theta$이므로
>
> $$\overline{\mathrm{DE}}=\boxed{(나)}\times\overline{\mathrm{AD}}^2$$
>
> 이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는
>
> $$S(\theta)=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)^3\times\boxed{(다)}$$
>
> 이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(\theta)$, $g(\theta)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

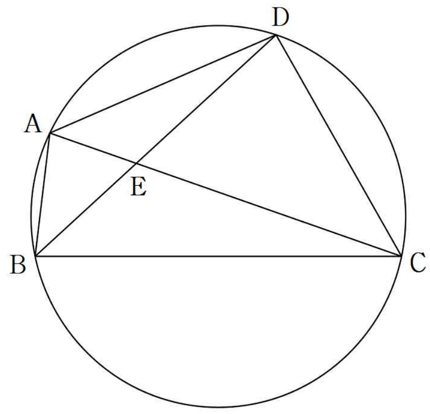
91. 그림과 같이 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 호 AB, 호 BC, 호 CA의 길이가 각각 3, 4, 5이고 삼각형 ABC의 넓이가 S일 때, $\frac{\pi^2 S}{9}$의 값은?



① $2-\sqrt{3}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $1+\sqrt{3}$
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $3+\sqrt{3}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 06월 29

92. $\overline{DA}=2\overline{AB}$, $\angle DAB=\frac{2}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 있다. 두 대각선 AC, BD의 교점을 E라 할 때, 점 E는 선분 BD를 3 : 4로 내분한다. 사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



03 수1 07 삼각함수의 활용

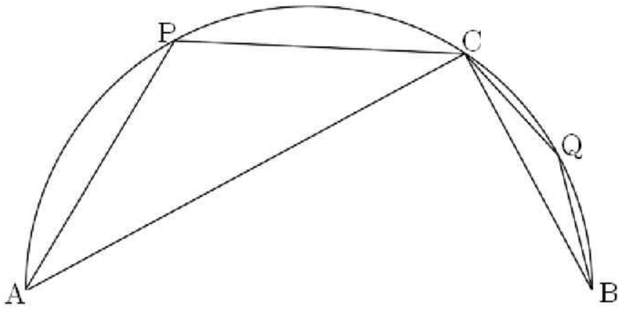
03 삼각형의 넓이

07 넓이7 (넓이관계식)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 06월 30

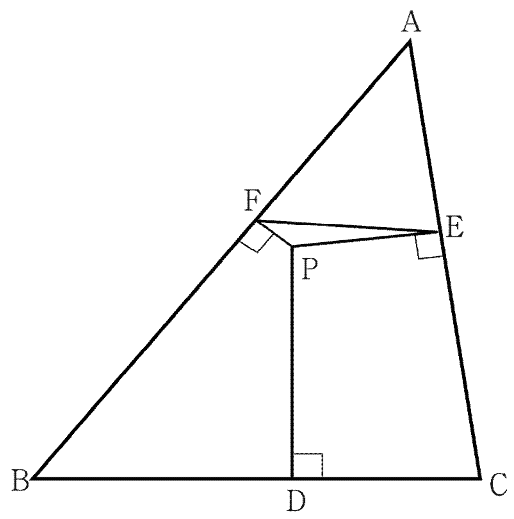
[출처] 2008 모의_공공 교육청 고2 06월 30

93. 길이가 10인 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 반원 위에 $\triangle ABC$의 넓이가 11이 되도록 점 C를 잡는다. $\triangle ACP$와 $\triangle BCQ$의 넓이가 최대가 되도록 $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}$ 위에 점 P, Q를 정할 때, $\triangle ACP$와 $\triangle BCQ$의 넓이의 합을 구하시오.



[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 03월 30

94. 그림과 같이 $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=4$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC의 내부의 한 점 P에서 세 변 BC, CA, AB에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 한다. $\overline{PD}=\sqrt{7}$, $\overline{PE}=\frac{\sqrt{7}}{2}$일 때, 삼각형 EFP의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{7}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 29

95. 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

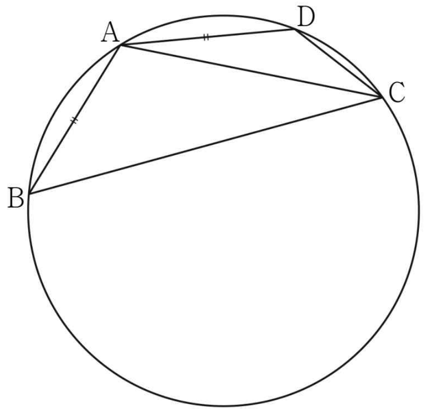
> (가) $\cos A=-\frac{1}{4}$
>
> (나) $\sin B+\sin C=\frac{9}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 15

96. 그림과 같이 반지름의 길이가 $R(5<R<5\sqrt{5})$인 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> ◦ $\overline{AB}=\overline{AD}$이고 $\overline{AC}=10$이다.
> ◦ 사각형 ABCD의 넓이는 40이다.



다음은 선분 BD의 길이와 R의 비를 구하는 과정이다.

> $\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때
> 두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여
> $\cos(\angle ACB)=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{BC}}\right)$,
> $\cos(\angle DCA)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{(가)}}{\overline{CD}}\right)$
> 이다.
> 이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로
> $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.
> 사각형 ABCD의 넓이는
> 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로
> $\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)=40$
> 에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
> $\overline{BD}:R=\boxed{(다)}:1$이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 할 때, $\frac{f(10p)}{q}$의 값은?

① $\frac{25}{2}$　② 15　③ $\frac{35}{2}$　④ 20　⑤ $\frac{45}{2}$

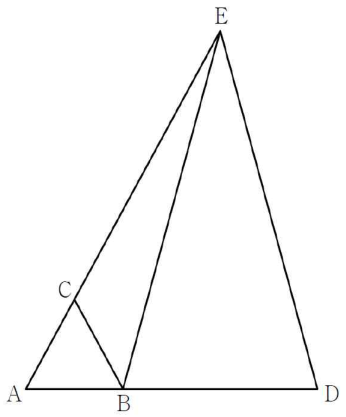
03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

08 넓이8 (포함과 배제)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 16

97. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC에서 선분 AB의 연장선과 선분 AC의 연장선 위에 $\overline{AD}=\overline{CE}$가 되도록 두 점 D, E를 잡는다. $\overline{DE}=\sqrt{13}$일 때, 삼각형 BDE의 넓이는?

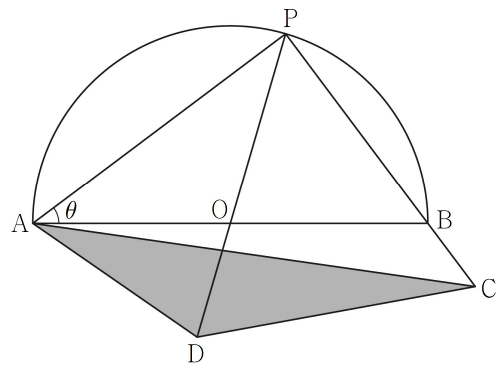


① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$

④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 19

98. 중심이 O이고 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 위에 점 P가 있다. 그림과 같이 선분 PB의 연장선 위에 $\overline{PA}=\overline{PC}$인 점 C를 잡고, 선분 PO의 연장선 위에 $\overline{PA}=\overline{PD}$인 점 D를 잡는다. $\angle PAB=\theta$에 대하여 $4\sin\theta=3\cos\theta$일 때, 삼각형 ADC의 넓이는?



① $\frac{63}{5}$ ② $\frac{127}{10}$ ③ $\frac{64}{5}$

④ $\frac{129}{10}$ ⑤ 13

03 수1 07 삼각함수의 활용

03 삼각형의 넓이

09 넓이9 (Mm)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

99. $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=7$, $\overline{AC}=6$인 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB, AC위에 삼각형 ADE의 외접원이 선분 BC에 접하도록 점 D, E를 각각 잡을 때, 선분 DE의 길이의 최솟값은?

① $\frac{64}{15}$ ② $\frac{81}{20}$ ③ 4

④ $\frac{121}{30}$ ⑤ $\frac{144}{35}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 14

100. 길이가 14인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 C를 $\overline{BC}=6$이 되도록 잡는다. 점 D가 호 AC 위의 점일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, 점 D는 점 A와 점 C가 아닌 점이다.)

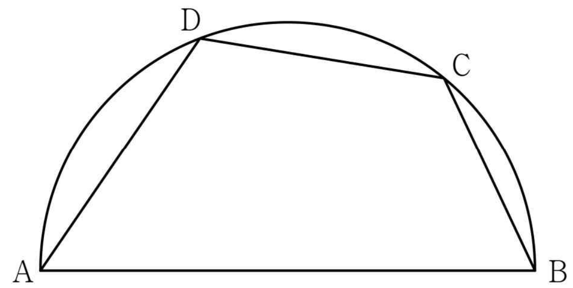
<보 기>

ㄱ. $\sin(\angle CBA)=\frac{2\sqrt{10}}{7}$

ㄴ. $\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 $20\sqrt{10}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



[준킬러][수학1] 4삼각함수(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.06

1. [정답] ②
2. [정답] ①
3. [정답] ①
4. [정답] ⑤
5. [정답] ④

6. [정답] 40
7. [정답] ④
8. [정답] ④
9. [정답] 5
10. [정답] ⑤

11. [정답] ③
12. [정답] ③
13. [정답] ①
14. [정답] ③
15. [정답] ④

16. [정답] ①
17. [정답] ③
18. [정답] 10
19. [정답] ③
20. [정답] ②

21. [정답] ④
22. [정답] 30
23. [정답] ③
24. [정답] 480
25. [정답] 14

26. [정답] ②
27. [정답] ②
28. [정답] ④
29. [정답] ③
30. [정답] ①

31. [정답] ②
32. [정답] 7
33. [정답] 14
34. [정답] ③
35. [정답] ②

36. [정답] ②
37. [정답] ②
38. [정답] ②
39. [정답] ②
40. [정답] ③

41. [정답] -2.18
42. [정답] ④
43. [정답] ④
44. [정답] ⑤
45. [정답] 18.93

46. [정답] ⑤
47. [정답] ②
48. [정답] 192
49. [정답] ③
50. [정답] ①

51. [정답] 50
52. [정답] 27
53. [정답] ②
54. [정답] ②
55. [정답] ④

56. [정답] 20

57. [정답] 84
58. [정답] ②
59. [정답] ③
60. [정답] ②

61. [정답] ⑤
62. [정답] 50
63. [정답] ④
64. [정답] ①
65. [정답] 36

66. [정답] ④
67. [정답] 27
68. [정답] 15
69. [정답] ②
70. [정답] 26

71. [정답] ⑤

72. [정답] ④
73. [정답] ①
74. [정답] ①
75. [정답] ②

76. [정답] ①
77. [정답] ④
78. [정답] ①
79. [정답] ②
80. [정답] 19.39

81. [정답] 19.39
82. [정답] 19.39
83. [정답] ③
84. [정답] ①
85. [정답] ②

86. [정답] ②
87. [정답] ⑤
88. [정답] **63**
89. [정답] ③
90. [정답] ②

91. [정답] ⑤
92. [정답] **13**
93. [정답] 19
94. [정답] **103**
95. [정답] 71

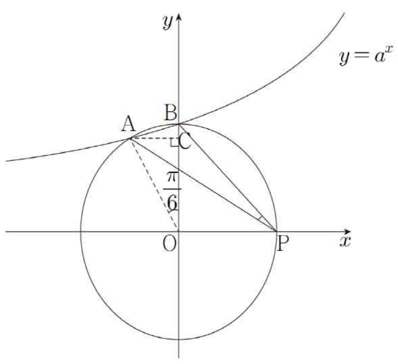
96. [정답] ⑤
97. [정답] ④
98. [정답] ③
99. [정답] ⑤
100. [정답] ⑤

[준킬러][수학1] 4삼각함수(해설)

프로젝트 2023.01.06

1) [정답] ②

[해설]

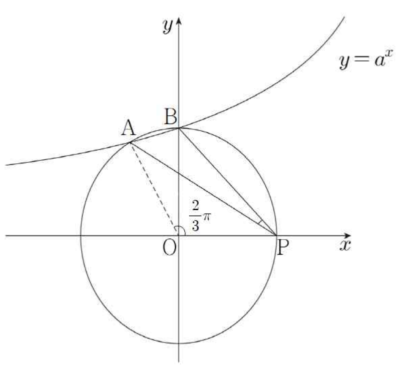


그림의 직각삼각형 AOC에서 $\overline{\mathrm{OA}}=1$이고

$\angle \mathrm{AOC}=\frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{OC}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. 따라서 점 A의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 $y=a^x$에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}=a^{-\frac{1}{2}}$이고 $a=\frac{4}{3}$이다.

[다른 풀이]



$\angle \mathrm{APB}=\frac{\pi}{12}$에서 원주각과 중심각의 관계에 의해

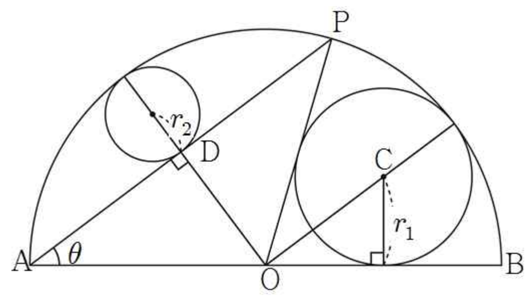
$\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{6}$이므로 점 A의 x좌표는 $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$,

y좌표는 $\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $y=a^x$에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}=a^{-\frac{1}{2}}$이고

$a=\frac{4}{3}$이다.

2) [정답] ①

[해설]



반지름의 길이가 r_1인 원의 중심을 C, 선분 AP의 중점을 D라 하자. $\angle \mathrm{BAP}=\theta$라 할 때, $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{3}{5}\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

(i) $\angle \mathrm{BOP}=2\theta$이므로 $\angle \mathrm{BOC}=\theta$

$r_1+\overline{\mathrm{OC}}=r_1+\frac{r_1}{\sin\theta}=1$

$r_1=\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{3}{8}$

(ii) $2r_2+\overline{\mathrm{OD}}=2r_2+\sin\theta=1$

$r_2=\frac{1-\sin\theta}{2}=\frac{1}{5}$

따라서 $r_1r_2=\frac{3}{40}$

3) [정답] ①

[해설]

함수 $y=\cos\frac{\pi x}{4}$의 주기가 8이고 함수 $y=\tan\frac{(2x+1)\pi}{4}$의 주기가 2이므로 다음과 같이 8가지 경우로 나눌 수 있다.

(i) $n=8k$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos 2k\pi=1$이고,

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{1}{4}\right)\pi=1$이다.

$(a^2+b^2+2ab-4)+(b^2+ab+2)=0$이므로

$a^2+2b^2+3ab-2=0$이다.

따라서 $(a+b)(a+2b)=2$이고 $a+b\le a+2b$이므로

$a+b=1$, $a+2b=2$이다.

그러므로 $a=0$, $b=1$인데 이것은 $a\ge b$라는 조건에 맞지 않다.

(ii) $n=8k+1$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{3}{4}\right)\pi=-1$이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$이다.

$b^2+ab+2=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $n=8k+2$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=0$이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{5}{4}\right)\pi=1$이므로

$b^2+ab+2=0$이다.

$b^2+ab+2=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅳ) $n=8k+3$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{3}{4}\right)\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{7}{4}\right)\pi=-1$이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$이다.

$b^2+ab+2=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅴ) $n=8k+4$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos(2k+1)\pi=-1$이고,

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{9}{4}\right)\pi=1$이다.

$-(a^2+b^2+2ab-4)+(b^2+ab+2)=0$이므로

$a^2+ab-6=0$이다.

따라서 $a(a+b)=6$이고 $a\le a+b$이므로

$a=1$, $a+b=6$ 또는 $a=2$, $a+b=3$

그러므로 $a=1$, $b=5$ 또는 $a=2$, $b=1$이다.

$a\ge b$이므로 $a=2$, $b=1$이다.

(ⅵ) $n=8k+5$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{5}{4}\right)\pi=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고,

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{11}{4}\right)\pi=-1$이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$이다.

$b^2+ab+2=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅶ) $n=8k+6$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{3}{2}\right)\pi=0$이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{13}{4}\right)\pi=1$이므로

$b^2+ab+2=0$이다. $b^2+ab+2=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

(ⅷ) $n=8k+7$ (k는 음이 아닌 정수)일 때

$\cos\frac{n}{4}\pi=\cos\left(2k+\frac{7}{4}\right)\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고

$\tan\frac{2n+1}{4}\pi=\tan\left(4k+\frac{15}{4}\right)\pi=-1$이므로

$a^2+b^2+2ab-4=0$, $b^2+ab+2=0$이다.

$b^2+ab+2=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b는 존재하지 않는다.

따라서 $n=8k+4$ (k는 음이 아닌 정수)이고, $a=2$, $b=1$이다. 그러므로

$a+b+\sin^2\frac{n}{8}\pi=2+1+\sin^2\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi=4$이다.

4) [정답] ⑤

[해설]

$\angle ADB=\angle DBC=\angle BAE=\angle DEG$이므로 이 각을 θ라 하고

$\overline{BD}=x$라 하면

$\overline{AB}=x\sin\theta$, $\overline{BE}=\overline{AB}\sin\theta=x\sin^2\theta$, $\overline{EF}=\overline{BE}\sin\theta=x\sin^3\theta$

$\overline{AD}=x\cos\theta$, $\overline{DE}=\overline{AD}\cos\theta=x\cos^2\theta$,

$\overline{EG}=\overline{DE}\cos\theta=x\cos^3\theta$

$\therefore\ a=x\sin^3\theta$, $b=x\cos^3\theta$

$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}=x^{\frac{2}{3}}\sin^2\theta+x^{\frac{2}{3}}\cos^2\theta=x^{\frac{2}{3}}$ ($\because\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1$)

이므로 $x=\left(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

5) [정답] ④

[해설]

삼각형 OBC에서 $\overline{BC}=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

삼각형 OAD에서 $\angle OAD=90°$ 이므로

$\cos(\pi-\theta)=\frac{1}{\overline{OD}}$

$\therefore\ \overline{OD}=\frac{1}{\cos(\pi-\theta)}=-\frac{1}{\cos\theta}$

(삼각형 OCD의 넓이)-(부채꼴OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}(-\tan\theta)\times\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{2}\times1^2\times(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

[다른풀이]

$\overline{BC}=\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

원 위의 점 $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$에서 그은 접선의 방정식은 $x\cos\theta+y\sin\theta=1$이므로

점 D의 좌표는 $\left(\frac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$이다.

$\therefore\ \overline{OD}=-\frac{1}{\cos\theta}$

(삼각형 OCD의 넓이)-(부채꼴OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}(-\tan\theta)\times\left(-\frac{1}{\cos\theta}\right)-\frac{1}{2}\times1^2\times(\pi-\theta)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

6) [정답] 40

[해설]

닫힌구간 $\left[-\frac{\pi}{a},\ \frac{2\pi}{a}\right]$에서 $0<a<\frac{4}{7}$이므로 $-\frac{\pi}{a}<-\frac{7}{4}\pi$, $\frac{7\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$이다.

함수 $f(x)=2\sin(ax)+b$의 그래프가 두 점 $A\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$, $B\left(\frac{7}{2}\pi,\ 0\right)$을 지나므로

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(-\frac{a}{2}\pi\right)+b=-2\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)+b=0$$

$$f\left(\frac{7\pi}{2}\right)=2\sin\left(\frac{7a}{2}\pi\right)+b=0$$

따라서 $\sin\left(\frac{7a\pi}{2}\right)=-\sin\left(\frac{a}{2}\pi\right)$

$0<a<\frac{4}{7}$에서 $0<\frac{a}{2}\pi<\frac{2}{7}\pi$, $0<\frac{7a}{2}\pi<2\pi$이므로

$$\frac{7a\pi}{2}=2\pi-\frac{a}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{7a\pi}{2}=\pi+\frac{a}{2}\pi$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

(i) $a=\frac{1}{2}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+b$에서

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)&=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+b\\&=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+b\\&=-\sqrt{2}+b=0\end{aligned}$$

이므로 $b=\sqrt{2}$

이는 b는 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=\frac{1}{3}$일 때

$f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x\right)+b$에서

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{\pi}{2}\right)&=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+b\\&=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+b\\&=-1+b=0\end{aligned}$$

이므로 $b=1$

이때 $f\left(\frac{7}{2}\pi\right)=0$이다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$이고

$$30(a+b)=30\times\left(\frac{1}{3}+1\right)=40$$

7) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $y=\sqrt{4x-x^2}-1$을 변형하면

$(y+1)^2=4x-x^2$

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

$y=-\sqrt{1-x^2}+4$을 변형하면

$(y-4)^2=1-x^2$

$x^2+(y-4)^2=1$

즉, 두 함수는 각각 반지름이 2와 1인 원의 부분을 나타낸다. 따라서 평행이동과 대칭이동으로 겹쳐지지 않는다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=2^{x-3}-1$는 기본형이 $y=2^x$형태인 지수함수이다.

반면에 함수 $y=3+2\log_{\frac{1}{4}}(x-1)$을 변형하면

$x-1=\left(\frac{1}{4}\right)^{y-3}=2^{3-y}$ 로서 기본형 $x=2^{-y}$을

평행이동한 함수이다.

$y=2^x$을 $y=x$에 대하여 대칭이동하고 x축에 대하여 대칭이동하면 $x=2^{-y}$이 되므로 대칭과 평행이동으로 두 함수는 겹쳐질 수 있다. (참)

ㄷ. $y=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x-1)+3=\frac{1}{\pi}\sin\pi\left(x-\frac{1}{\pi}\right)+3$이므로 기본형

$y=\frac{1}{\pi}\sin\pi x$를 x축으로 $\frac{1}{\pi}$만큼, y축으로 3만큼 평행이동한 함수이다.

또한, 함수 $y=-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x+3)-1=-\frac{1}{\pi}\cos\pi\left(x-\frac{3}{\pi}\right)-1$

이므로 기본형 $y=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$를 x축으로 $\frac{3}{\pi}$만큼, y축으로 -1만큼 평행이동시킨 함수이다.

$y=\frac{1}{\pi}\sin\pi x=\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)=\frac{1}{\pi}\cos\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)$ 이므로

$y=\frac{1}{\pi}\sin\pi x$를 원점에 대하여 대칭하고 x축 방향으로

$\frac{1}{2}$만큼 평행이동하면 두 기본형은 겹쳐진다. (참)

8) [정답] ④

[해설]

$f(x)=a\cos b\pi(x-c)+4.5$라고 하자.

만조 때의 해수면의 높이는 함수 $f(x)$의 최댓값 $a+4.5$이고, 간조 때의 해수면의 높이는 함수 $f(x)$의 최솟값 $-a+4.5$이다.

조차는 만조 때와 간조 때의 해수면의 높이의 차이므로

$$(a+4.5)-(-a+4.5)=8 \ \therefore \ a=4$$

만조와 만조, 또는 간조와 간조 사이의 시간이 함수 $f(x)$의 주기이다.

만조시각인 4시 30분은 4.5시이고, 17시00분은 17시이므로 만조와 만조 사이의 시간은 $17-4.5=12.5$

$f(x)=a\cos b\pi(x-c)+4.5$에서 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}$이므로

$12.5=\frac{2\pi}{b\pi}$에서 $b=\frac{4}{25}$

함수 $f(x)=4\cos\left(\frac{4}{25}\pi(x-c)\right)+4.5$는

$x=4.5$일 때 최댓값 $a+4.5=8.5$를 가지므로

$$4\cos\left(\frac{4}{25}\pi(4.5-c)\right)+4.5=8.5$$

방정식을 풀면 $c=4.5\,(\because 0<c<6)$

따라서 $a+100b+10c=65$

9) [정답] **5**

[해설]

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 그래프에서

(ⅰ) $k=0$일 때,

$y=-6$이므로 함수의 그래프는 제 1사분면을 지나지 않는다.

(ⅱ) $k>0$일 때,

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $k+(k^2-6)$이고,

함수의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$k+(k^2-6)\le 0,\ k^2+k-6\le 0$

$(k-2)(k+3)\le 0$

$\therefore -3\le k\le 2$

따라서 $0<k\le 2$이다.

(ⅲ) $k<0$일 때,

$y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-6$의 최댓값은 $-k+(k^2-6)$이고,

함수의 그래프가 제 1사분면을 지나지 않으려면 최댓값이 0보다 작거나 같아야 한다.

$-k+(k^2-6)\le 0,\ k^2-k-6\le 0$

$(k+2)(k-3)\le 0$

$\therefore -2\le k\le 3$

따라서 $-2\le k<0$이다.

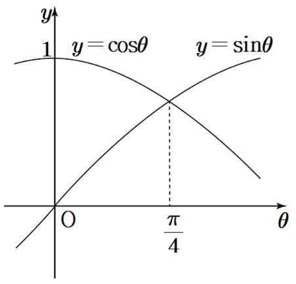
그러므로 $-2\le k\le 2$이고 모든 정수 k의 개수는 5이다.

10) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $0<\theta<\frac{\pi}{4}$에서 $y=\sin\theta$, $y=\cos\theta$의 그래프는 그림과

같다.



따라서 $0<\sin\theta<\cos\theta<1$이다. (참)

ㄴ. $0<\sin\theta<1$이므로 함수 $f(x)=\log_{\sin\theta}x$는 감소한다.

$\sin\theta<\cos\theta<1$이므로

$\log_{\sin\theta}1<\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\sin\theta$이다.

따라서 $0<\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$이다. (참)

ㄷ. $0<\sin\theta<\cos\theta$이므로 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$이다.

$0<\cos\theta<1$이므로 함수 $f(x)=(\cos\theta)^x$은 감소한다.

$\sin\theta<\cos\theta$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$이다.

따라서 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른 풀이]

ㄷ. $\sin\theta<\cos\theta$ 이고 $\log_{\sin\theta}\cos\theta>0$이므로

$\sin\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta<\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta$

$\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\sin\theta}<\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\cos\theta}$

$0<\sin\theta<1$이므로 $(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$

$\log_{\sin\theta}\cos\theta<1$ 이므로

$\log_{\sin\theta}\cos\theta<\log_{\sin\theta}\sin\theta$,

$\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\cos\theta<\cos\theta\times\log_{\sin\theta}\sin\theta$,

$\log_{\sin\theta}(\cos\theta)^{\cos\theta}<\log_{\sin\theta}(\sin\theta)^{\cos\theta}$

$0<\sin\theta<1$이므로 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}$ 이다.

따라서 $(\sin\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\cos\theta}<(\cos\theta)^{\sin\theta}$이다. (참)

11) [정답] ③

[해설]

함수 $f(x)=a\sin bx$ 의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로

두 점 A, B의 좌표는 $A\left(\frac{\pi}{2b},\ a\right)$, $B\left(\frac{\pi}{b},\ 0\right)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

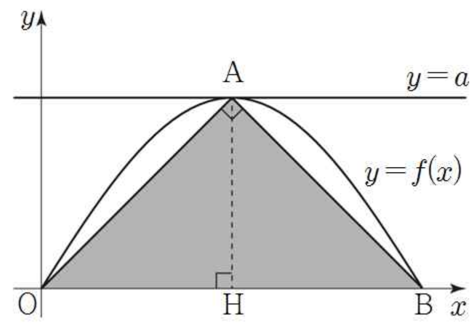
$\overline{OH}=\overline{BH}=\overline{AH}=a$이므로 $\frac{\pi}{b}=2a$

삼각형 OAB의 넓이는 4이므로

$\frac{1}{2}\times2a\times a=4$ 즉, $a=2$

$b=\frac{\pi}{2a}=\frac{\pi}{4}$

따라서 $a+b=2+\frac{\pi}{4}$



12) [정답] ③

[해설]

함수 $y=a\sin b\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{b\pi}=\frac{2}{b}$이므로 두 점 A, B의

좌표는 $A\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$, $B\left(\frac{5}{2b},\ a\right)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

$\frac{1}{2}\times a\times\left(\frac{5}{2b}-\frac{1}{2b}\right)=5$, $\frac{a}{b}=5$

$a=5b$ ...... ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{a}{\frac{5}{2b}}=2ab\times\frac{2ab}{5}$$

$$=\frac{4a^2b^2}{5}=\frac{5}{4}$$

$a^2b^2=\frac{25}{16}$, $ab=\frac{5}{4}$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$이므로

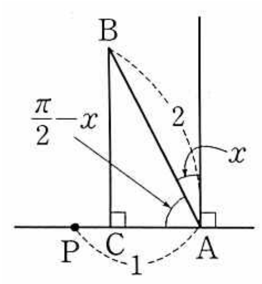
$a+b=3$

13) [정답] ①

[해설]

(ⅰ) 막대의 그림자가 수평면에만 생기는 경우 $\left(0\le x<\frac{\pi}{6}\right)$

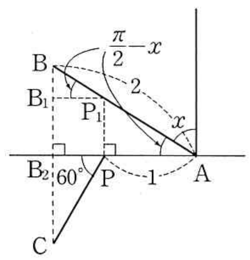
그림과 같이 막대의 한끝을 B, 그림자의 끝을 C라 하자.



$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\overline{AC}}{2}$에서 그림자의 길이는 $\overline{AC}$이다.

$\therefore\ f(x)=\overline{AC}=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin x$

(ii) 막대의 그림자가 수평면과 경사면에 생기는 경우 $\left(\frac{\pi}{6}\leq x<\frac{\pi}{2}\right)$



그림과 같이 점 B_1, B_2, P_1 을 놓으면 $\triangle P_1AP$ 에서

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\overline{P_1A}}$

즉, $\overline{P_1A}=\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{1}{\sin x}$

$\therefore\ \overline{P_1B}=2-\frac{1}{\sin x}$

$\triangle BB_1P_1$ 에서

$\overline{P_1B_1}=\left(2-\frac{1}{\sin x}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$=\left(2-\frac{1}{\sin x}\right)\sin x=2\sin x-1$

$\therefore\ f(x)=\overline{AP}+\overline{PC}=1+2\overline{PB_2}$

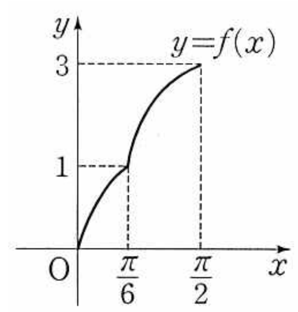
$=1+2\overline{P_1B_1}$($\because\ \overline{PB_2}=\overline{P_1B_1}$)

$=1+2(2\sin x-1)=4\sin x-1$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}2\sin x & \left(0\leq x<\frac{\pi}{6}\right)\\ 4\sin x-1 & \left(\frac{\pi}{6}\leq x<\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이므로 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



14) [정답] ③

[해설]

$\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}}=a$이므로

함수 $f(x)$의 주기는 a이다.

직선 AB는 원점을 지나고 기울기가 $\sqrt{3}$인 직선이므로

양수 t에 대하여 $B(t,\ \sqrt{3}t)$로 놓으면 $A(-t,\ -\sqrt{3}t)$이고,

$\overline{AB}=4t$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 주기가 a이므로 $\overline{AC}=4t=a$이고,

$C(-t+a,\ -\sqrt{3}t)$, 즉 $C(3t,\ -\sqrt{3}t)$이다.

점 C가 곡선 $y=\tan\frac{\pi x}{a}=\tan\frac{\pi x}{4t}$ 위의 점이므로

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{\pi\times 3t}{4t}$

$-\sqrt{3}t=\tan\frac{3\pi}{4}$에서

$t=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

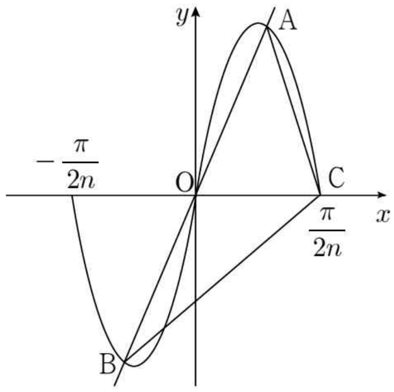
$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4t)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$

$=\frac{4}{\sqrt{3}}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

15) [정답] ④

[해설]



함수 $y=3\sin 2nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이다.

원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이 $-\frac{\pi}{2n}<x<\frac{\pi}{2n}$에서

함수 $y=3\sin 2nx$의 그래프와 만나는 원점이 아닌 두 점 A와 B는 원점에 대하여 대칭이다. 따라서 실수

$t\left(-\frac{\pi}{2n}<t<\frac{\pi}{2n},\ t\neq 0\right)$에 대하여 점 A의 좌표를

$(t,\ 3\sin 2nt)$라 하면 점 B의 좌표는 $(-t,\ -3\sin 2nt)$이다.

삼각형 AOC의 넓이와 삼각형 BOC의 넓이가 같으므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2n}\times 3|\sin 2nt|=\frac{\pi}{12}$$

이고 $|\sin 2nt|=\frac{n}{18}$이다.

$0<|\sin 2nt|\leq 1$이므로 $0<\frac{n}{18}\leq 1$이다.

따라서 n의 최댓값은 18이다.

16) [정답] ①

[해설]

$\sin x=t$라 하면 $-1\leq t\leq 1$이고

$$\begin{aligned}y&=a\cos^2 x+a\sin x+b\\&=a(1-\sin^2 x)+a\sin x+b\\&=a(1-t^2)+at+b\\&=-a\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a+b\end{aligned}$$

(i) $a>0$인 경우 주어진 함수는 $t=\frac{1}{2}$일 때, 최댓값

$\frac{5}{4}a+b$를 갖고 $t=-1$일 때, 최솟값 $-a+b$를 갖는다.

$\therefore\ \frac{5}{4}a+b=10,\ -a+b=1$

$\therefore\ a=4,\ b=5$

(ii) $a<0$인 경우

$t=\frac{1}{2}$일 때, 최솟값 $\frac{5}{4}a+b$를 갖고

$t=-1$일 때, 최댓값 $-a+b$를 갖는다.

$\therefore\ \frac{5}{4}a+b=1,\ -a+b=10$

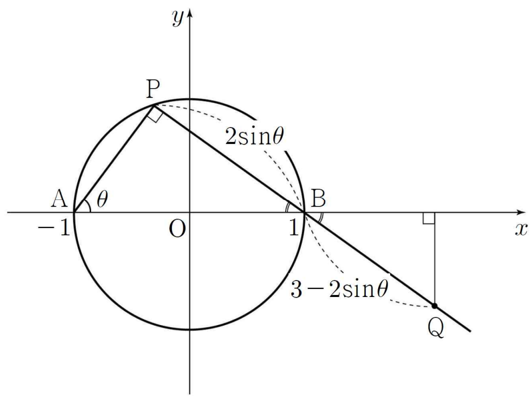
$\therefore\ a=-4,\ b=6$

(i), (ii)에서 ab의 값은 20 또는 -24이다.

$\therefore\ p+q=-4$

17) [정답] ③

[해설]



$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$이고, $\overline{BP}=2\sin\theta$이므로

$\overline{BQ}=3-2\sin\theta$

따라서 점 Q의 x좌표는

$$\begin{aligned}&1+\overline{BQ}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=1+(3-2\sin\theta)\sin\theta\\&=1+3\sin\theta-2\sin^2\theta\\&=-2\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}\end{aligned}$$

이므로 $\sin\theta=\frac{3}{4}$일 때 최대이다.

그러므로 $\sin^2\theta=\frac{9}{16}$

18) [정답] 10

[해설]

$\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{7}{8}=0$에서

$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{7\sqrt{3}}{16}$

$t=x+\frac{\pi}{3}$라 하면 $\frac{\pi}{3}\leq t\leq\frac{7}{3}\pi$

$\frac{7\sqrt{3}}{16} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

방정식 $\sin t = \frac{7\sqrt{3}}{16}\left(\frac{\pi}{3} \le t \le \frac{7}{3}\pi\right)$는 두 실근

t_1, t_2 $(t_1 < t_2)$를 갖는다.

$t_1 = x_1 + \frac{\pi}{3}$, $t_2 = x_2 + \frac{\pi}{3}$ (x_1, x_2는 실수)라

하면

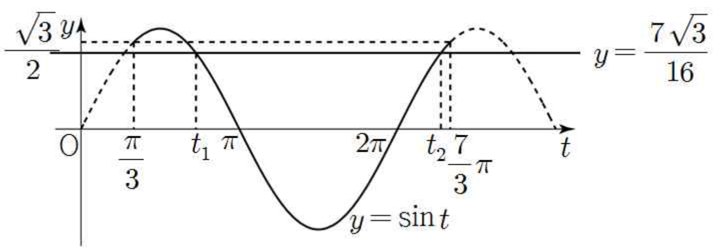
$t_2 = 2\pi + (\pi - t_1)$ 이므로

$t_1 + t_2 = \left(x_1 + \frac{\pi}{3}\right) + \left(x_2 + \frac{\pi}{3}\right) = 3\pi$

방정식 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7\sqrt{3}}{16}$ 의 모든 실근의 합은

$x_1 + x_2 = 3\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{7}{3}\pi$

따라서 $p+q=10$



19) [정답] ③

[해설]

$f(x) = \cos\frac{\pi x}{6}$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$

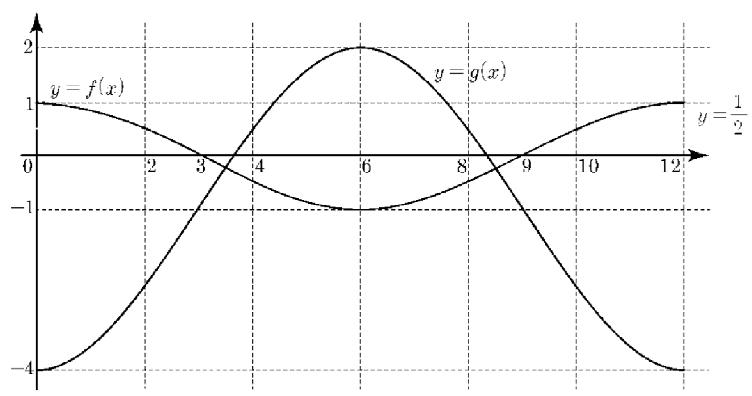
함수 $f(x)$는 $x=6$에 대하여 대칭이므로 $\alpha_1 < \alpha_2$라 하면

$\alpha_2 = 12 - \alpha_1$

$|\alpha_1 - \alpha_2| = 8$에서 $|2\alpha_1 - 12| = 8$

$\alpha_1 = 2$ 또는 $\alpha_1 = 10$

$\alpha_1 < \alpha_2$이므로 $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$이다.



$f(2) = f(10) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$이므로 $k = \frac{1}{2}$이다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}$가 만나는 두 점의 x좌표는

$-3\cos\frac{\pi x}{6} - 1 = \frac{1}{2}$

$\cos\frac{\pi x}{6} = -\frac{1}{2}$

$x=4$ 또는 $x=8$

$\therefore\ |\beta_1 - \beta_2| = 4$

20) [정답] ②

[해설]

$0 \le x < k$에서 $-\frac{1}{2} \le f(x) \le \frac{1}{2}$이고,

함수 $y = \frac{1}{2}\sin\pi x$의 주기는 2이다.

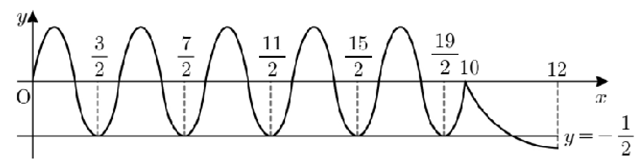
$f(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-k} - 1 = 0$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(k, 0)$을 지난다.

방정식 $f(x)+a=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$의 교점의 x좌표와 같다.

$0 \le x \le 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$의 실근의 최댓값이 12이므로 모든 실근의 합이 46이기 위하여 실근의 개수는 4 이상이어야 한다.

(i) $a = \frac{1}{2}$인 경우



$k=10$일 때 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합이 최대이다. $0 \le x < 10$에서 모든 실근의 합은

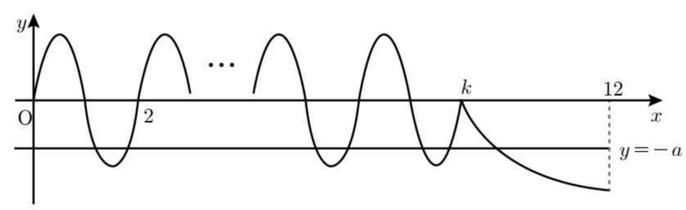
$\frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{15}{2} + \frac{19}{2} = \frac{55}{2} = 27.5$이고

$f(12) = \left(\frac{2}{3}\right)^{12-10} - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} < -\frac{1}{2}$이므로

$10 \le x \le 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$은 오직 하나의 실근을 갖고 그 값은 12보다 작다.

따라서 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합은 39.5보다 작으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < \frac{1}{2}$인 경우



$k \le x \le 12$에서 방정식 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-k}-1+a=0$의 실근의 개수는 최대 1이고 그 값은 12 이하이다.
$0 \le x \le 12$에서 방정식 $f(x)+a=0$의 모든 실근의 합이 46이기 위하여

$0 \le x < k$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의 모든 실근의 합이 34 이상이어야 한다.

$0 \le x < 2$에서 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\pi x$의 그래프와 직선 $y=-a$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α_1, α_2라 할 때, $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=\frac{3}{2}$,

즉 $\alpha_1+\alpha_2=3$이다.

또한, 함수 $y=\frac{1}{2}\sin\pi x$의 주기가 2이므로 $2 \le x < 4$에서

방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 7,

$4 \le x < 6$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 11,

$6 \le x < 8$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 15,

$8 \le x < 10$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 19,

$10 \le x < 11$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$은 실근을 갖지 않는다.

따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① $k \le 7$일 때

$0 \le x < k$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합이 34 미만이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=8$ 또는 $k=9$일 때

$0 \le x < k$에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin\pi x+a=0$의

모든 실근의 합은 $3+7+11+15=36$이므로

$k \le x \le 12$에서 실근이 10이면 조건을 만족시킨다.

$k=8$이면 $f(10)+a=\left(\frac{2}{3}\right)^{10-8}-1+a=0$에서

$a=\frac{5}{9}$이므로 $0<a<\frac{1}{2}$에 모순이다.

$k=9$이면 $f(10)+a=\left(\frac{2}{3}\right)^{10-9}-1+a=0$에서

$a=\frac{1}{3}$이므로 $0<a<\frac{1}{2}$을 만족시킨다.

③ $k=10$ 또는 $k=11$일 때

$0 \le x < k$에서 모든 실근의 합은

$3+7+11+15+19=55>46$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii) 에 의하여 $a=\frac{1}{3}$, $k=9$이다.

따라서 $\frac{k}{a}=27$

21) [정답] ④

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와 만나는 점의 x좌표는

$0 \le x < \frac{4\pi}{a}$일 때 방정식 $\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$ …… ㉠

의 실근과 같다.

$ax-\frac{\pi}{3}=t$라 하면 $-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{11\pi}{3}$이고

$|4\sin t+2|=2$ …… ㉡

에서 $\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$

$-\frac{\pi}{3} \le t < \frac{11\pi}{3}$일 때, 방정식 ㉡의 실근은

0, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, 3π, $\frac{7\pi}{2}$

의 6개이고 이 6개의 실근의 합은 11π이다.

따라서 $n=6$이고 방정식 ㉠의 6개의 실근의 합이 39이므로

$39a-\frac{\pi}{3}\times6=11\pi$, $a=\frac{\pi}{3}$

따라서 $n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

22) [정답] **30**

[해설]

$y=\cos x+\frac{1}{4}$의 그래프는 $y=\cos x$의 그래프를

y축의 방향으로 $\frac{1}{4}$만큼 평행이동한 그래프이므로

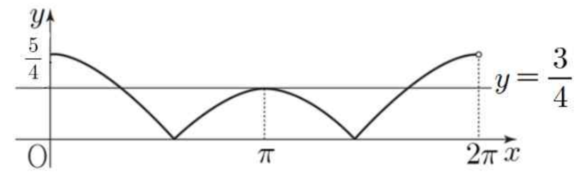
주기는 2π, 치역은 $\left\{y \,\middle|\, -\frac{3}{4} \le y \le \frac{5}{4}\right\}$이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 $y=\cos x+\frac{1}{4}$의

그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여

대칭이동시켜 얻은 그래프이다.

$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프는 그림과 같다.



$y=\left|\cos x+\frac{1}{4}\right|$의 그래프와 직선 $y=k$가

서로 다른 세 점에서 만나는 k의 값은 $\frac{3}{4}$

따라서 $\alpha=\frac{3}{4}$이고 $40\alpha=30$

23) [정답] ③

[해설]

함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 치역은 $\{y\mid -1\le y\le 1\}$이고, 주기가 4이다.

따라서 $0\le x\le 4$에서 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프가 직선 $y=k$와 두 점에서 만나려면 $-1<k<1$이어야 한다.

$0\le x\le 4$에서 함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 두 점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면
$\beta-\alpha>1$일 때, $f(t)=2$를 만족시키는 t의 값은 존재하지 않고, $\beta-\alpha<1$일 때, $f(t)=2$를 만족시키는 t의 값이 유일하지 않다.

$\beta-\alpha=1$일 때, $f(0)=1$이므로 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{2}$

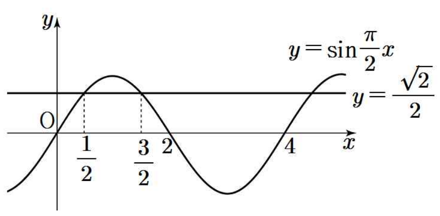
$0\le t<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<t\le\frac{3}{2}$일 때, $f(t)=1$

$t=\frac{1}{2}$일 때, $f(t)=2$

$\frac{3}{2}<t\le 3$일 때, $f(t)=0$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$, $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

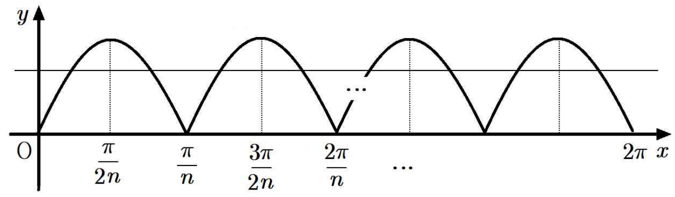
$$a^2+b^2+k^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3$$



24) [정답] **480**

[해설]

$y=|\sin nx|$의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프에서 주기는 $\frac{\pi}{n}$이고, $0\le x\le 2\pi$까지 $2n$개의 그래프가 반복된다.

또, 한 주기 구간마다 2개의 실근을 갖고 각각의 근은 대칭성을 가지므로

제일 작은 근을 α라 하면

α. $\frac{\pi}{n}-\alpha$, $\frac{\pi}{n}+\alpha$, $\frac{2\pi}{n}-\alpha$ $\cdots$, $2\pi-\alpha$

$\therefore a_n=4n$, $b_n=4n\pi$

$\therefore$ $a_5b_6=20\times 24\pi=480\pi$

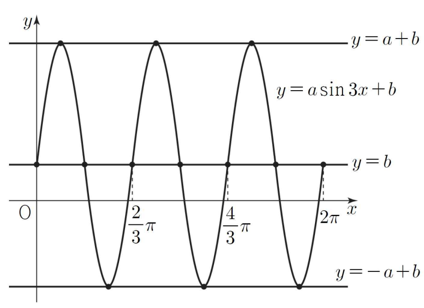
$\therefore k=480$

25) [정답] **14**

[해설]

함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 주기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=a\sin 3x+b$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 개수는 $k=-a+b$ 또는 $k=a+b$일 때, 3

$k=b$일 때, 7이므로 $b=2$이고, $-a+2=9$ 또는 $a+2=9$

a가 양수이므로 $a=7$

따라서 $a\times b=7\times 2=14$

26) [정답] ②

[해설]

방정식 $\sin^2(4x)-1=0$에서 $\sin4x=1$ 또는 $\sin4x=-1$이다.

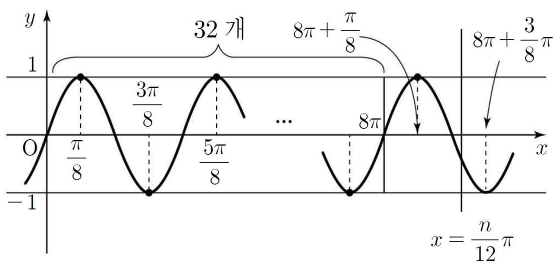
따라서 $0<x<\frac{n}{12}\pi$에서 함수 $y=\sin4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 33이어야 한다.

함수 $y=\sin4x$의 주기는 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$이다.

$0<x\le\frac{\pi}{4}$에서 함수 $y=\sin4x$의 그래프와 직선 $y=1$이 만나는 점의 개수가 1이고, $\frac{\pi}{4}<x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin4x$의 그래프과 직선 $y=-1$이 만나는 점의 개수가 1이므로 $0<x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\sin4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수가 2이다.

따라서 $0<x\le\frac{\pi}{2}\times16$에서 함수 $y=\sin4x$의 그래프가 직선 $y=1$ 또는 직선 $y=-1$과 만나는 점의 개수는 $2\times6=32$이다.

그러므로 $0<x<\frac{n}{12}\pi$에서 방정식 $\sin^2(4x)-1=0$의 실근의 개수가 33이기 위해 $8\pi<x<\frac{n}{12}\pi$에서 함수 $y=\sin4x$의 그래프가 두 직선 $y=1$, $y=-1$과 만나는 점의 개수가 각각 1, 0이어야 한다.



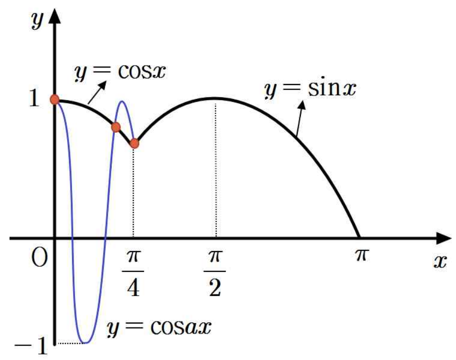
따라서 $8\pi+\frac{\pi}{8}<\frac{n}{12}\pi\le8\pi+\frac{3}{8}\pi$이고 $97.5<n\le100.5$이다.

그러므로 구하는 자연수 n의 값은 98, 99, 100이고 합은 297이다.

27) [정답] ②

[해설]

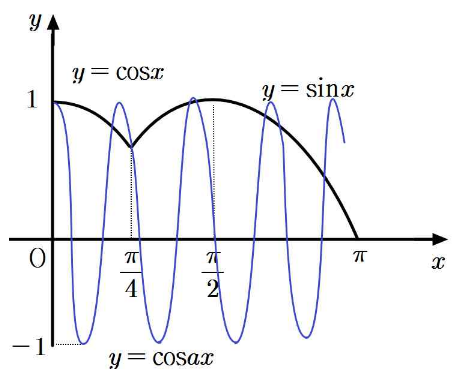
$g(x)=\cos ax$ 의 주기 $\frac{2\pi}{a}$, 한 개가 $x<\frac{\pi}{4}$의 범위에 있으면서 그래프는 $x=\frac{\pi}{4}$와 만나면 교점의 개수가 3이 된다.



따라서 $\frac{2\pi}{a}<\frac{\pi}{4}$을 만족하므로 $a>8$

즉, $\cos\frac{a}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 만족하는 a의 최솟값은 9

$\therefore\ p=9$



위의 그래프처럼 주기는 $\frac{2}{9}\pi$이며 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{11}{12}\pi\right]$에는 네 개의 주기 $\frac{2}{9}\pi$, $\frac{4}{9}\pi$, $\frac{6}{9}\pi$, $\frac{8}{9}\pi$가 있다.

$x=0$에서 한 번 만나며, 세 주기 $\frac{2}{9}\pi$, $\frac{4}{9}\pi$, $\frac{6}{9}\pi$의 양쪽에서 각각 한 번씩 만나고 $\frac{8}{9}\pi$에서는 왼쪽에서 한번 만난다.

즉, 교점의 개수 q는 $q=8$

$\therefore\ p+q=17$

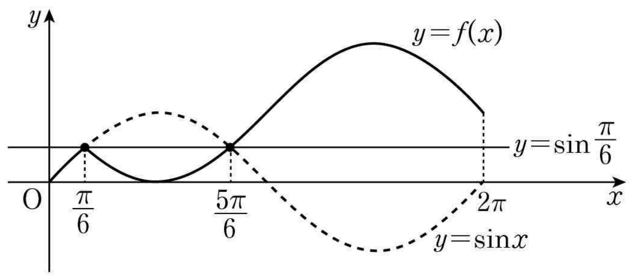
28) [정답] ④

[해설]

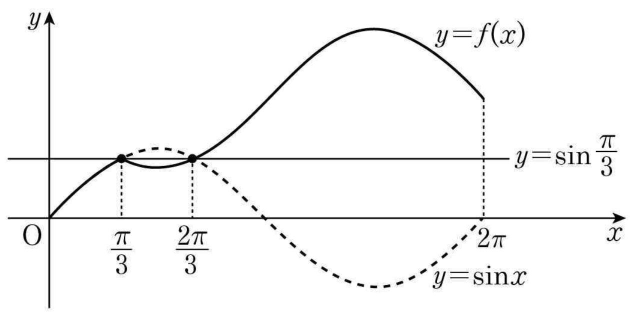
그림은 k값에 따른 두 곡선 $y=f(x), y=\sin x$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$를 좌표평면에 나타낸 것이다.

각 그림에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수 a_k를 구하면 다음과 같다.

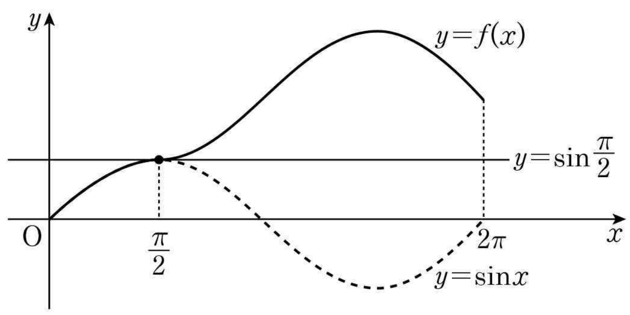
(i) $k=1$ 일 때, $a_1=2$



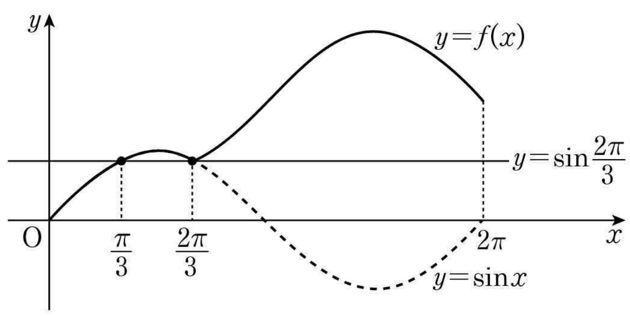
(ii) $k=2$ 일 때, $a_2=2$



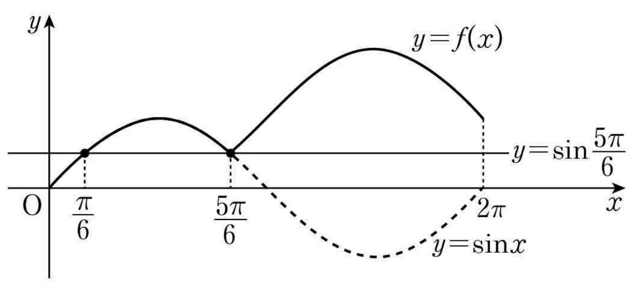
(iii) $k=3$ 일 때, $a_3=1$



(iv) $k=4$ 일 때, $a_4=2$



(v) $k=5$ 일 때, $a_5=2$



따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

[다른 풀이]

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 교점의 개수는 방정식

$f(x)=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같다. 즉,

(i) $0\le x\le\frac{k}{6}\pi$ 일 때, $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

(ii) $\frac{k}{6}\pi<x\le 2\pi$일 때,

$2\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)-\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$에서 $\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$

그러므로 교점의 개수는 구간 $[0, 2\pi]$에서 방정식

$\sin x=\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$k=1, k=5$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의

서로 다른 실근의 개수는 각각 2이다.

$k=3$ 일 때, $\sin\left(\frac{k}{6}\pi\right)=1$이므로 $\sin x=1$의 서로 다른

실근의 개수는 1이다.

따라서 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2+2+1+2+2=9$

29) [정답] ③

[해설]

$\cos\frac{(a-b)\pi}{2}=0$에서 $\frac{(a-b)\pi}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore a-b=2n+1$ …… ㉠

㉠에서 정수 l, m에 대하여

$a=2l$일 때, $b=2m+1$

$a=2l+1$일 때, $b=2m$

꼴이어야 한다.

따라서 $a^2+b^2\le 13$을 만족하는 정수 a, b는 다음과 같다.

(i) $a=0$일 때,

$b^2\le 13$에서 $b=\pm1$, ±3이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 4쌍이다.

(ii) $a=\pm1$일 때,

$b^2\le 12$에서 $b=0$, ±2이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times3=6$쌍이다.

(iii) $a=\pm2$일 때,

$b^2\le 9$에서 $b=\pm1$, ±3이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times4=8$쌍이다.

(iv) $a=\pm3$일 때,

$b^2\le 4$에서 $b=0$, ±2이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times3=6$쌍이다.

이상에서 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4+6+8+6=24$쌍이다.

30) [정답] ①

[해설]

$\log_2 f(x)=n$ (단, n은 정수)라 하면 $f(x)=2^n$

즉, $\sin(a\pi x)+2b=2^n$에서 $\sin(a\pi x)=2^n-2b$이다.

$\sin(a\pi x)=2^n-2b$를 만족하는 x의 값이 8개가 되도록 하는

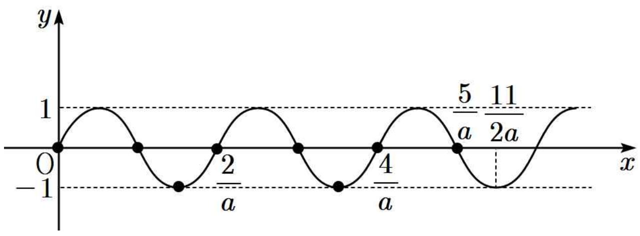
경우는 다음과 같다.

(i) $b=1$일 때,

$\sin(a\pi x)=2^n-2$에서

$n=0$일 때, $\sin a\pi x=-1$

$n=1$일 때, $\sin a\pi x=0$



$0 \le x \le 1$에서 $\sin a\pi x=-1$ 또는 $\sin a\pi x=0$의 해가 8개이기 위해서는 위의 그림과 같이

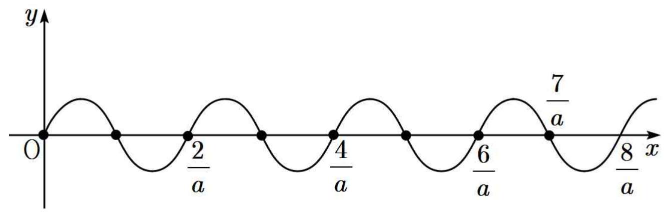
$\frac{5}{a} \le 1,\ \frac{11}{2a}>1$

을 만족해야한다.

따라서 $5 \le a < \frac{11}{2}$이므로 자연수 a의 값은 5이다.

(ii) $b \ge 2$일 때,

(1) $b=2^{n-1}\ (n \ge 2)$인 경우 $\sin a\pi x=0$



$0 \le x \le 1$에서 $\sin a\pi x=0$의 해가 8개이기 위해서는 위의 그림과 같이

$\frac{7}{a} \le 1,\ \frac{8}{a}>1$

을 만족해야 한다.

따라서 $7 \le a < 8$이므로 자연수 a의 값은 7이다.

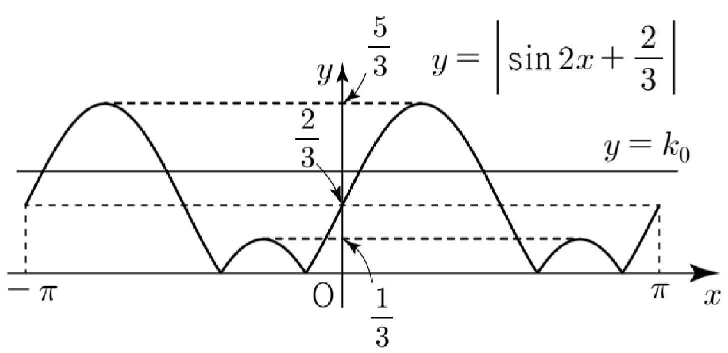
(2) $b \ne 2^{n-1}\ (n \ge 2)$인 경우 $\sin(a\pi x)=2^n-2b$의 해는 존재하지 않는다.

이상에서 만족하는 a의 값은 5 또는 7이므로 모든 a의 값의 합은 12이다.

31) [정답] ②

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=k_0(k_0>0)$과 만나는 서로 다른 점의 개수는

$0<k_0<\frac{1}{3}$일 때 8, $k_0=\frac{1}{3}$일 때 6

$\frac{1}{3}<k_0<\frac{2}{3}$일 때 4, $k_0=\frac{2}{3}$일 때 5

$\frac{2}{3}<k_0<\frac{5}{3}$일 때 4, $k_0=\frac{5}{3}$일 때 2

$k_0>\frac{5}{3}$일 때 0

$3k>k$이므로 $|m-n|=3$을 만족시키는

m과 n은 $m=2,\ n=5 \cdots\cdots$ ㉠

또는 $m=5,\ n=8$

$m=2$이면 $3k=\frac{5}{3},\ k=\frac{5}{9}$

$\frac{1}{3}<\frac{5}{9}<\frac{2}{3}$에서 $n=4$이므로

㉠을 만족시키지 않는다.

$m=5$이면 $3k=\frac{2}{3},\ k=\frac{2}{9}$

$0<\frac{2}{9}<\frac{1}{3}$에서 $n=8$이다.

$-\pi \le x \le \pi$일 때, 방정식 $\left|\sin 2x+\frac{2}{3}\right|=\frac{2}{9}$의 모든 실근을 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \cdots,\ \alpha_8$이라 하자.

$\alpha_1+\alpha_4=\alpha_2+\alpha_3=2\times\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}$

$\alpha_5+\alpha_8=\alpha_6+\alpha_7=2\times\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

따라서

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_8=2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)+2\times\frac{3}{2}\pi=2\pi$

32) [정답] 7

[해설]

$(2a+6)\cos x-a\sin^2 x+a+12<0$

$(2a+6)\cos x-a(1-\cos^2 x)+a+12<0$

$a\cos^2 x+(2a+6)\cos x+12<0$

$(a\cos x+6)(\cos x+2)<0$에서

$\cos x+2>0$이므로 $a\cos x+6<0$

$a>0$이므로 $\cos x<-\frac{6}{a}$

$0 \le x < 2\pi$에서 부등식 $\cos x<-\frac{6}{a}$의 해가 존재하기 위해서는 $-\frac{6}{a}>-1$이어야 한다.

따라서 $a>6$이며 자연수 a의 최솟값은 7

33) [정답] 14

[해설]

$(a\sin^2 x-4)\cos x+4=\{a(1-\cos^2 x)-4\}\cos x+4$

$=-a\cos^3 x+(a-4)\cos x+4$

$\cos x=t$라 하면 $-1\le t\le 1$

(준 식)$=-at^3+(a-4)t+4$

$=-(t-1)(at^2+at+4)$

즉, $-1\le t\le 1$에서 $-(t-1)(at^2+at+4)\ge 0$을 만족하는 a의 범위를 구하면 다음과 같다.

(i) $t=1$일 때,

$0\ge 0$이므로 성립한다.

(ii) $-1\le t<1$일 때,

$t-1<0$이므로 $at^2+at+4\ge 0$을 만족해야 한다.

(1) $a=0$일 때,

$4\ge 0$이므로 성립한다.

(2) $a>0$일 때,

$a\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a+4\ge 0$이므로 $t=-\frac{1}{2}$일 때가 최소가 된다.

즉, $-\frac{1}{4}a+4\ge 0$이므로 $a\le 16$

$\therefore 0<a\le 16$

(3) $a<0$일 때,

$a\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a+4\ge 0$이므로 $t=1$일 때가 최소가 된다. 즉, $2a+4\ge 0$이므로 $a\ge -2$

$\therefore -2\le a<0$

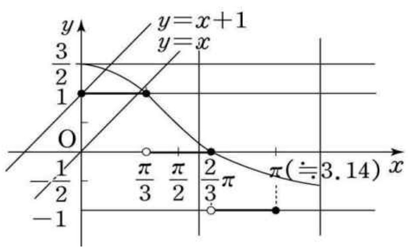
(1), (2), (3)에서 만족하는 a의 범위는 $-2\le a\le 16$

따라서 실수 a의 최댓값은 16, 최솟값은 -2이므로 최댓값과 최솟값의 합은 14이다.

34) [정답] ③

[해설]

다음의 $y=\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]$그래프에서



i) $x=0$인 경우

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=1=-k$ $\therefore$ $k=-1$

ii) $0<x\le\frac{\pi}{3}(\fallingdotseq 1.05)$인 경우

정수 $x=1$이므로

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=1=1-k$ $\therefore$ $k=0$

iii) $\frac{\pi}{3}(\fallingdotseq 1.05)<x\le\frac{2}{3}\pi(\fallingdotseq 2.11)$인 경우

정수 $x=2$이므로

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=0=2-k$ $\therefore$ $k=2$

iv) $\frac{2}{3}\pi(\fallingdotseq 2.11)<x\le\pi(\fallingdotseq 3.14)$인 경우

정수 $x=3$이므로

$\left[\cos x+\frac{1}{2}\right]=-1=3-k$ $\therefore$ $k=4$

따라서 주어진 방정식의 정수해가 존재하도록 하는 k의 값의 합은 $-1+0+2+4=5$이다.

35) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)=a\cos bx+c$의 최댓값이 3, 최솟값이 -1이고 a가 양수이므로 $a=2$, $c=1$

함수 $f(x)=2\cos bx+1$의 주기가 $\frac{2\pi}{b}$이므로 $\overline{AB}=\frac{2\pi}{b}$

$0\le x\le\frac{2\pi}{b}$에서 방정식 $2\cos bx+1=0$의 해는 $x=\frac{2\pi}{3b}$, $x=\frac{4\pi}{3b}$이므로 $\overline{CD}=\frac{2\pi}{3b}$

사각형 ACDB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{3b}+\frac{2\pi}{b}\right)\times 3=6\pi$이므로 $b=\frac{2}{3}$

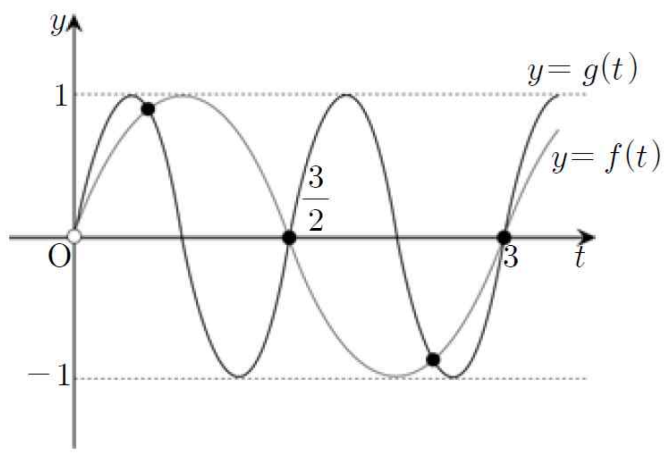
따라서 $f(x)=2\cos\frac{2}{3}x+1$

$0\le x\le 4\pi$에서 방정식 $f(x)=2$의 모든 해는 $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$이므로 합은 $\frac{13}{2}\pi$

36) [정답] ②

[해설]

두 점 P, Q의 $t(t>0)$초 후의 y좌표를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하면 $f(t)=\sin\frac{2}{3}\pi t$, $g(t)=\sin\frac{4}{3}\pi t$이고 그래프는 그림과 같다.



출발 후 3초가 될 때까지 $f(t)$, $g(t)$의 값이 4회 같아지므로 99chc가 될 때까지 132회 같아진다.

∴ 출발 후 100초가 될 때까지는 133회

37) [정답] ②

[해설]

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi$라 하면 함수 $f(m)$의 주기가 k이므로 집합 A_k는 $A_k=\{f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(k)\}$이다.

ㄱ. $k=3$일 때, $f(1)=0$, $f(2)=\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$f(3)=\sin\frac{2\times2}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$A_3=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ (참)

ㄴ. 1이 집합 A_k의 원소가 되려면 $f(m)=1$을 만족시키는 자연수 $m(m=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$가 존재해야 한다.

$\sin\frac{2(m-1)}{k}\pi=1$에서 $\frac{2(m-1)}{k}\pi=\frac{\pi}{2}$

$m=1+\frac{k}{4}$이고 m이 자연수이므로 k는 4의 배수이어야 한다.

따라서 $k=12,\ 16,\ \cdots,\ 96$이며 그 개수는 22이다. (참)

ㄷ. 4이상의 자연수 k에 대하여

(i) $k=4l$ (l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l}\pi=\sin\frac{m-1}{2l}\pi$이므로

$m=1$일 때, $f(1)=\sin\frac{1-1}{2l}\pi=\sin0=0$

$m=l+1$일 때,

$$f(l+1)=\sin\frac{l+1-1}{2l}\pi=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

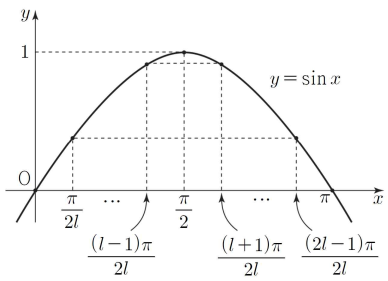
$m=2l+1$일 때,

$$f(2l+1)=\sin\frac{2l+1-1}{2l}\pi=\sin\pi=0$$

$m=\alpha(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l)$일 때,

$$\pi-\frac{\alpha-1}{2l}\pi=\frac{(2l+2-\alpha)-1}{2l}\pi$$

이므로 $\beta=2l+2-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는 $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(l+1)$이고 그 개수는 l이다.
같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.
따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$$l+l+1=2l+1$$

(ii) $k=4l+1$ (l은 자연수)인 경우

$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l+1}\pi$이므로

$m=1$일 때,

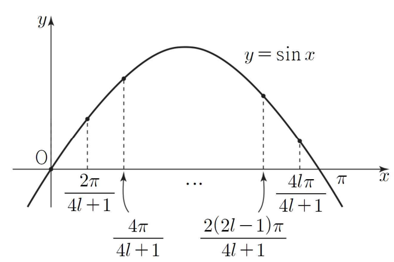
$$f(1)=\sin\frac{2\times(1-1)}{4l+1}\pi=\sin0=0$$

$4l+1$이하의 서로 다른 두 자연수 r, s에 대하여

$\frac{2(r-1)}{4l+1}\pi+\frac{2(s-1)}{4l+1}\pi=\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi$에서

$4l+1$은 홀수이고 $2(r+s-2)$는 짝수이므로

$\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq\pi$, $\frac{2(r+s-2)}{4l+1}\pi\neq3\pi$이다.



따라서 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+1$

(iii) $k=4l+2$ (l은 자연수)인 경우

$$f(m)=\sin\frac{2(m-1)}{4l+2}\pi=\sin\frac{m-1}{2l+1}\pi$$

$m=1$일 때,

$$f(1)=\sin\frac{1-1}{2l+1}\pi=\sin0=0$$

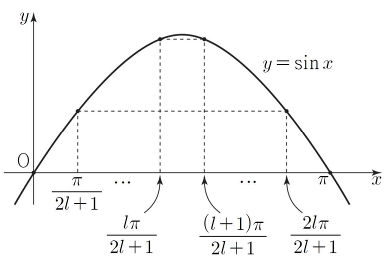
$m=2l+2$일 때,

$$f(2l+2)=\sin\frac{2l+2-1}{2l+1}\pi=\sin\pi=0$$

$m=\alpha(\alpha=2,\ 3,\ \cdots,\ l+1)$일 때,

$\pi-\dfrac{\alpha-1}{2l+1}\pi=\dfrac{(2l+3-\alpha)-1}{2l+1}\pi$이므로

$\beta=2l+3-\alpha$라 하면 $f(\alpha)=f(\beta)$



그러므로 집합 A_k의 원소 중 양수는 $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(l+1)$이고 그 개수는 l이다.

같은 방법으로 집합 A_k의 원소 중 음수의 개수도 l이다.

따라서 집합 A_k의 원소의 개수는

$$l+l+1=2l+1$$

(ⅳ) $k=4l+3$ (l은 자연수)인 경우

(ⅱ)와 같은 방법으로 구하면 집합 A_k의 원소의 개수는 $4l+3$이다.

$A_1=A_2=\{0\}$이고 (ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

집합 A_k의 원소의 개수는

$$n(A_k)=\begin{cases}4l-3 & (k=4l-3)\\ 2l-1 & (k=4l-2)\\ 4l-1 & (k=4l-1)\\ 2l+1 & (k=4l)\end{cases}\ (l\text{은 자연수})$$

$k=4l-3$인 경우 $4l-3=11$을 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

$k=4l-2$인 경우 $2l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 6이므로 $k=22$

$k=4l-1$인 경우 $4l-1=11$을 만족시키는 자연수 l은 3이므로 $k=11$

$k=4l$인 경우 $2l+1=11$을 만족시키는 자연수 l은 5이므로

$k=20$

따라서 $n(A_k)=11$을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$22+11+20=53$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

38) [정답] ②

[해설]

$y=f(x)$, $y=g(x)$는 $0<x<\dfrac{\pi}{24}$에서 적어도 하나의 교점을 가진다. 이 교점의 x좌표를 α라 하자.

$y=f(x)$는 주기가 $\dfrac{2\pi}{k}$, $y=g(x)$는 주기가 $\dfrac{\pi}{6}$인 함수이므로

$$\{x\,|\,f(x)=f(\alpha)\}$$
$$=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{k}-\alpha,\ \frac{2\pi}{k}+\alpha,\ \frac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}$$

즉, $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{\pi}{k}-\alpha,\ \dfrac{2\pi}{k}+\alpha,\ \dfrac{3\pi}{k}-\alpha,\ \cdots\right\}$라 하고,

$$\{x\,|\,g(x)=g(\alpha)\}$$
$$=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{\pi}{6}+\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \frac{12\pi}{6}-\alpha\right\}$$

에서 $B=\left\{\alpha,\ \dfrac{\pi}{6}-\alpha,\ \dfrac{\pi}{6}+\alpha,\ \dfrac{2\pi}{6}-\alpha,\ \cdots,\ \dfrac{12\pi}{6}-\alpha\right\}$라고 하자.

이때 $A\subset B$를 만족하기 위해서는 $\dfrac{\pi}{k}-\alpha\in B$여야 한다.

(ⅰ) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}-\alpha$인 경우

$\dfrac{1}{k}=\dfrac{n}{6}$에서 $k=\dfrac{6}{n}$이므로 $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$일 때 각각 $k=6$, $k=3$, $k=2$, $k=1$이다.

즉 4가지

㉠ $k=6$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{\pi}{6}-\alpha,\ \frac{2\pi}{6}+\alpha,\ \frac{3\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

㉡ $k=3$일 때

$$A=\left\{\alpha,\ \frac{2\pi}{6}-\alpha,\ \frac{4\pi}{6}+\alpha,\ \frac{6\pi}{6}-\alpha,\ \cdots\right\}\subset B$$

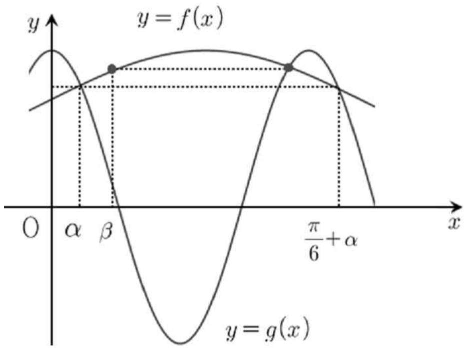
㉢ $k=2$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{3\pi}{6}-\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}+\alpha,\ \dfrac{9\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

㉣ $k=1$일 때 $A=\left\{\alpha,\ \dfrac{6\pi}{6}-\alpha\right\}\subset B$

삼각함수의 대칭성과 주기성에 의하여 $(\alpha,\ f(\alpha))$이외의 교점에 대해서도 같은 방법으로 확인할 수 있다.

(ⅱ) $\dfrac{\pi}{k}-\alpha=\dfrac{n\pi}{6}+\alpha$인 경우

그림과 같이 $\beta\in A$, $\beta\notin B$가 되는 β가 존재하므로 조건에 모순이다.

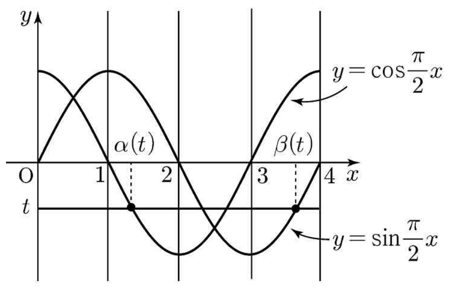


(i), (ii)에 의하여 조건을 만족하는 k는 4가지다.

39) [정답] ②

[해설]

ㄱ. $-1 \leq t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t)$와 $\beta(t)$의 위치는 아래 그림과 같다.

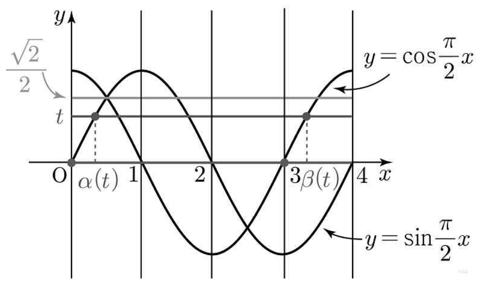


주어진 t의 범위에서 점 $(t,\ \alpha(t))$는 곡선 $y=\sin\frac{\pi x}{2}$ 위에 있고 점 $(t,\ \beta(t))$는 곡선 $y=\cos\frac{\pi x}{2}$에 있다.

이때, $\alpha(t)$와 $\beta(t)$는 직선 $x=\frac{5}{2}$에 대해 대칭이므로

$\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2}=\frac{5}{2}$이므로 $\alpha(t)+\beta(t)=5$이다. (참)

ㄴ. $t=0$일 때, $\alpha(0)=0$, $\beta(0)=3$이다.



이때, $t>\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때는 $\beta(t)-\alpha(t)>3$이므로

$\beta(t)-\alpha(t)=3$을 만족하는 t의 범위는 $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

(참)

ㄷ. $\alpha(t_1)=\alpha(t_2)=k$라 하면, t_1과 t_2는 $\sin\frac{k\pi}{2}$ 또는 $\cos\frac{k\pi}{2}$이다.

이때, $\sin\frac{k\pi}{2}=t_1$, $\cos\frac{k\pi}{2}=t_2$라 하면,

$t_2-t_1=\cos\frac{k\pi}{2}-\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{2}$이고, 양변을 제곱하면

$$\left\{\cos\frac{k\pi}{2}\right\}^2-2\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}+\left\{\sin\frac{k\pi}{2}\right\}^2=\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{3}{8}=t_2\times t_1$$

즉, $t_1\times t_2=\frac{3}{8}$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

40) [정답] ③

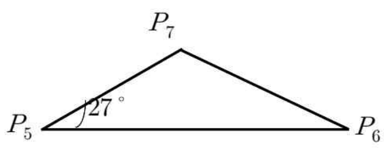
[해설]

원의 중심을 O라 두면 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이고, $\angle P_0P_1P_2=1^o$, $\angle P_1P_2P_3=2^o$, $\angle P_2P_3P_4=(2^2)^\circ$, $\cdots$, $\angle P_{k-1}P_kP_{k+1}=(2^{k-1})^\circ$

$\angle P_5P_6P_7=(2^{6-1})=32^\circ$, $\angle P_6P_7P_8=64^\circ$이므로

호 P_6P_7의 중심각의 크기를 x°라 두면 각 호의 중심각의 크기의 합은

$2^\circ+4^\circ+8^\circ+16^\circ+32^\circ+64^\circ+x^\circ=180^\circ$ $\therefore$ $x^\circ=54^\circ$이므로 호 P_6P_7의 원주각의 크기는 27°이다.



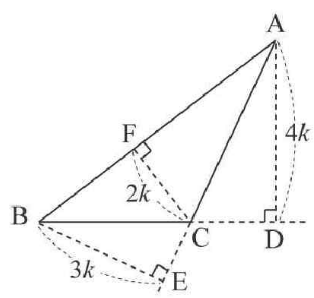
그러므로 사인 법칙에서

$\frac{\overline{P_6P_7}}{\sin 27^\circ}=2\times1$이므로 $\overline{P_6P_7}=2\sin27^\circ=2\cos63^\circ$

41) [정답] -2.18

[해설]

그림과 같이 $\triangle ABC$의 꼭짓점 A, B, C에서 대변 또는 그 연장선 위에 내린 수선의 발을 D, E, F라 하고,



$\overline{CF}:\overline{BE}:\overline{AD}=2:3:4$라 하자.

$\overline{CF}=2k$, $\overline{BE}=3k$, $\overline{AD}=4k$(단, $k>0$)$\triangle ABC$의 면적 S는

$S=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot2k=\frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot4k$

$=\frac{1}{2}\cdot\overline{CA}\cdot3k$

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{4}:\frac{1}{3}=6:3:4$

이때, 최대각은 $\overline{AB}$에 대응하는 각이므로 $\angle ACB=\theta$라면

$\cos\theta=\frac{\overline{BC}^2+\overline{CA}^2-\overline{AB}^2}{2\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}}=-\frac{11}{24}$

$\therefore\ \frac{1}{\cos\theta}=-\frac{24}{11}=-2.1818\cdots$

42) [정답] ④

[해설]

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times a\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times b\times\overline{BE}=\frac{1}{2}\times c\times\overline{CF}$

$a=\frac{2S}{\overline{AD}}$, $b=\frac{2S}{\overline{BE}}$, $c=\frac{2S}{\overline{CF}}$

$a:b:c=\frac{2S}{\overline{AD}}:\frac{2S}{\overline{BE}}:\frac{2S}{\overline{CF}}=\frac{1}{\overline{AD}}:\frac{1}{\overline{BE}}:\frac{1}{\overline{CF}}$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$

$=6:4:3$

$a=6k$, $b=4k$, $c=3k$(k는 양수)라 하면 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times 6k\times 4k}=\frac{43}{48}$

43) [정답] ④

[해설]

$\angle A=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{AB}=6$, $\overline{AC}+\overline{BC}=24$이므로 $\overline{AC}=x$라 하면

$\overline{BC}=24-x$

코사인법칙에 의해서

$(24-x)^2=6^2+x^2-2\cdot 6\cdot x\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$

즉, $x^2-48x+576=x^2+6x+36$이므로 $54x=540$

$\therefore\ x=10$

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=14$이므로 코사인법칙에 의해

$\cos B=\frac{6^2+14^2-10^2}{2\cdot 6\cdot 14}=\frac{11}{14}$

44) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $a=5$ 이면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이므로 변 BC 는 원의 지름이다. $\therefore\ R=\frac{5}{2}$ (참)

ㄴ. 사인법칙에 의해 $a=2R\sin A$

$\therefore\ a=2\cdot 4\cdot\sin A=8\sin A$ (참)

ㄷ. $1<a^2\leq 13$이고 제이코사인법칙에 의하여

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 이므로

$\cos A=\frac{3^2+4^2-a^2}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{25-a^2}{24}$

$\therefore\ \frac{1}{2}\leq\cos A<1$

$\therefore\ 0^\circ<A\leq 60^\circ$

따라서 $\angle A$의 최댓값은 60°이다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

45) [정답] 18.93

[해설]

사인법칙에서 $\frac{\overline{OA}}{\sin B}=2r$ $\therefore\ r=\frac{\overline{OA}}{2\sin B}=\frac{8}{2\cdot\frac{1}{2}}=8$또,

$\overline{OA}=8$이므로 $b=4$

한편, 주어진 원은 원점을 지나므로 $a^2+b^2=r^2$에서 $a=4\sqrt{3}$

$\therefore\ a+b+r=4\sqrt{3}+4+8=12+4\sqrt{3}$

$=18.928\fallingdotseq 18.93$

[다른풀이]

원과 x축이 만나는 점을 C라 하면

$\angle ACO=\angle ABO=30^\circ$

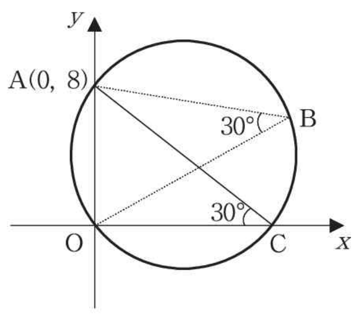
직각삼각형 ACO에서

$\overline{OC}=8\sqrt{3}$, $\overline{AC}=16$

$\therefore\ a=\frac{1}{2}\overline{OC}=4\sqrt{3}$,

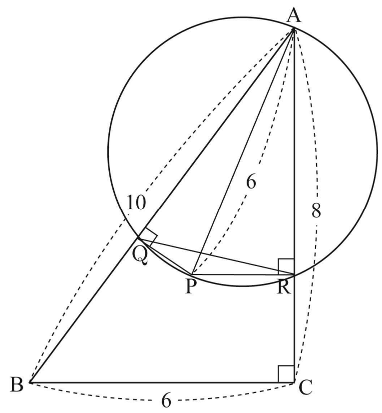
$b=\frac{1}{2}\overline{OA}=4$, $r=\frac{1}{2}\overline{AC}=8$

$\therefore\ a+b+r=12+4\sqrt{3}$



46) [정답] ⑤

[해설]



$\overline{AQ}\perp\overline{PQ}$, $\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 네 점 A, Q, P, R는 한 원 위의 점이다. 즉, 선분 AP는 삼각형 AQR의 외접원의 지름이다.

$\triangle$AQR에서 사인법칙을 이용하면 $\dfrac{\overline{QR}}{\sin A}=\overline{AP}=6$

$\triangle$ABC는 직각삼각형이므로 $\sin A=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

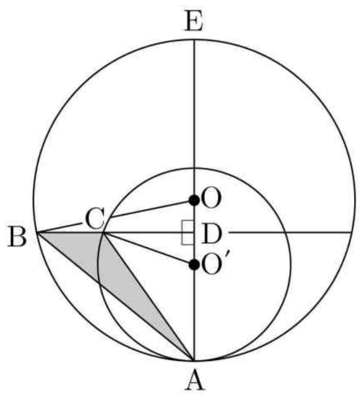
따라서 구하는 길이는

$\overline{QR}=\overline{AP}\sin A=6\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{18}{5}$

47) [정답] ②

[해설]

반지름이 5와 3인 원의 중심을 각각 O, O′이라 하자.



직각삼각형 OAD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OD}^2}=\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$

직각삼각형 ABD에서

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{BD}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2+4^2}=2\sqrt{10}$

$\therefore\ \sin(\angle ABC)=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

직각삼각형 O′CD에서

$\overline{CD}=\sqrt{\overline{O'C}^2-\overline{O'D}^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$

직각삼각형 ACD에서

$\overline{AC}=\sqrt{\overline{CD}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+4^2}=2\sqrt{6}$

구하는 외접원의 반지름을 R이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\dfrac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=\dfrac{2\sqrt{6}}{\dfrac{2}{\sqrt{10}}}=2\sqrt{15}$

$\therefore\ R=\sqrt{15}$

48) [정답] 192

[해설]

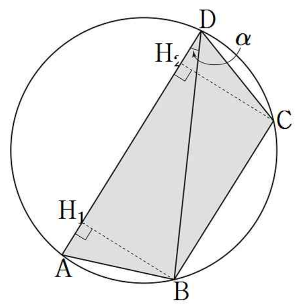
삼각형 ABD에서 $\angle ADB=\alpha$라 할 때, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 $\dfrac{\overline{AB}}{\sin\alpha}=12$

$\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{4}$

$\overline{AB}=\overline{CD}$이므로 $\angle ADB=\angle CBD$

선분 AD와 선분 BC는 평행하므로 사각형 ABCD는 등변사다리꼴이다.



두 점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때,

$\overline{DH_1}=\overline{BD}\cos\alpha=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{13}}{4}=2\sqrt{26}$

$\overline{BH_1}=\overline{BD}\sin\alpha=8\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{6}$

$\overline{AH_1}=\overline{DH_2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이

$S=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{BH_1}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left\{\left(\overline{DH_1}+\overline{AH_1}\right)+\left(\overline{DH_1}-\overline{DH_2}\right)\right\}\times\overline{BH_1}$

$=\overline{DH_1}\times\overline{BH_1}$

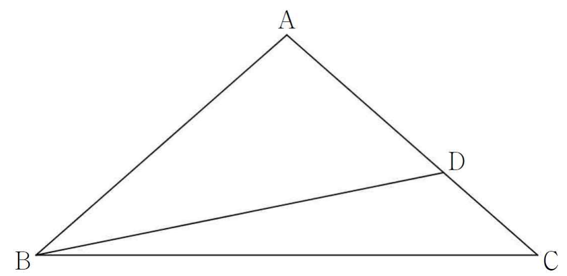
$=2\sqrt{26}\times2\sqrt{6}$

$=8\sqrt{39}$

따라서 $\dfrac{S^2}{13}=192$

49) [정답] ③

[해설]



삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin C = \frac{\overline{BD} \times \sin(\angle DBC)}{\overline{DC}}$$

마찬가지로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{\overline{BD} \times \sin(\angle ABD)}{\overline{AD}}$$

조건에서 $\overline{AD} : \overline{DC} = 5 : 3$이고

$$2\sin(\angle ABD) = 5\sin(\angle DBC)$$

즉, $\sin(\angle ABD) : \sin(\angle DBC) = 5 : 2$이므로

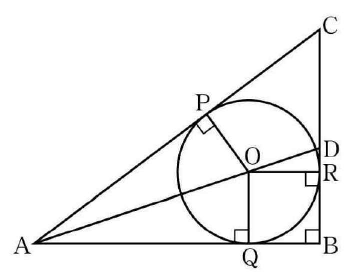
$$\therefore \frac{\sin C}{\sin A} = \frac{\overline{BD} \times \sin(\angle DBC)}{\overline{DC}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{BD} \times \sin(\angle ABD)}$$

$$= \frac{\overline{AD} \times \sin(\angle DBC)}{\overline{DC} \times \sin(\angle ABD)}$$

$$= \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3}$$

50) [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분 CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$\overline{OQ} = \overline{OR} = 3$이므로 $\overline{DR} = \overline{DB} - \overline{RB} = 1$

$\overline{DO} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ 이므로

$$\sin(\angle DOR) = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

삼각형 DOR와 삼각형 OAQ는 닮음비가 1 : 3이므로

$$\overline{AQ} = 3 \times \overline{OR} = 9$$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\overline{PA} = \overline{AQ} = 9,\ \angle CAD = \angle DAB$$

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC},\ 12 : (9 + \overline{CP}) = 4 : (\overline{CR} - 1)$$

$$9 + \overline{CP} = 3(\overline{CR} - 1)$$

이때 $\overline{CP} = \overline{CR}$이므로 $\overline{CR} = 6$, 즉 $\overline{CD} = 5$

직선 OR와 직선 AB가 평행하므로

$$\angle DAB = \angle DOR$$

즉 $\angle CAD = \angle DOR$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

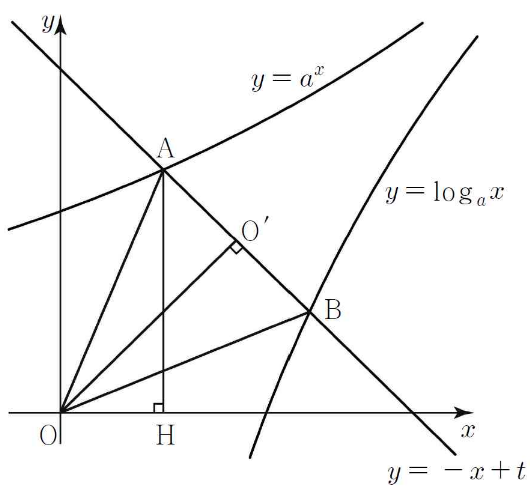
$$2R = \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = 5\sqrt{10}$$

$R = \frac{5\sqrt{10}}{2}$이므로 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$\frac{125}{2}\pi$이다.

51) [정답] 50

[해설]



점 A의 좌표를 $(p,\ q)(q > p)$라 하면

$$q = a^p,\ p + q = t \qquad \cdots\cdots ㉠$$

함수 $y = \log_a x$는 함수 $y = a^x$의 역함수이므로

점 B의 좌표는 $(q,\ p)$

$$\overline{AB} = \sqrt{2(q-p)^2} = \sqrt{2}(q-p)$$

조건 (가)에 의하여

$2\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{AB}}$, $2p=\sqrt{2}(q-p)$,

$q=(1+\sqrt{2})p$ …… ㉡

원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 O′이라 하면 조건 (가)에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{BO'}}$이고

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$, $\angle\mathrm{OHA}=\angle\mathrm{BO'O}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\triangle\mathrm{AOH}\equiv\triangle\mathrm{OBO'}$ …… ㉢

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{O'OH}+\angle\mathrm{AOO'}$

$=\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$

$\angle\mathrm{OBO'}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{BOO'}$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

㉢에 의하여 $\angle\mathrm{AOH}=\angle\mathrm{OBO'}$이므로

$\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sin\frac{\pi}{4}=1=2p$

$p=\frac{1}{2}$

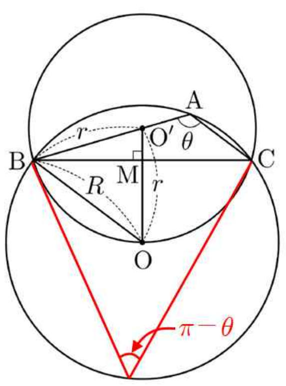
㉡에 의하여 $q=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

㉠에 의하여 $t=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $a=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $200(t-a)=50$

52) [정답] **27**

[해설]



□BACQ는 원 위에 내접하는 사각형이므로

$\angle\mathrm{BQC}=\pi-\theta$

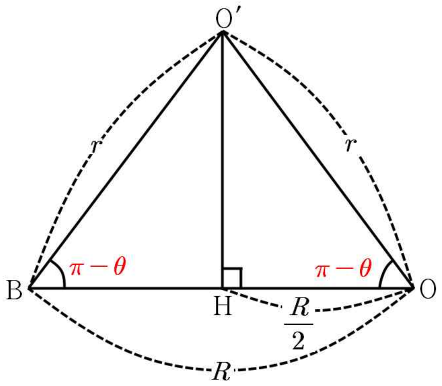
$\angle\mathrm{BQC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$의 원주각이고 $\angle\mathrm{BOC}$는 $\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$의 중심각이므로

$\angle\mathrm{BOC}=2\pi-2\theta$

$\triangle\mathrm{BOM}\equiv\triangle\mathrm{COM}$이므로 $\angle\mathrm{O'OB}=\pi-\theta$이고

$\angle\mathrm{BO'O}=2\theta-\pi$이다.

(ⅰ)



$\triangle\mathrm{O'BO}$는 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{O'BO}=\angle\mathrm{O'OB}=\pi-\theta$

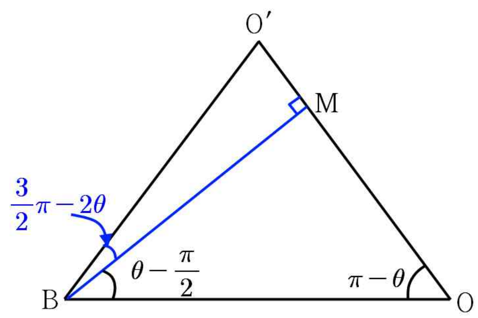
점 O′에서 $\overline{\mathrm{BO}}$에 수선을 긋고, 수선의 발을 H라고 하면 $\triangle\mathrm{O'OH}$에서

$\cos(\pi-\theta)=\frac{\frac{R}{2}}{r}$, $-\cos\theta=\frac{\frac{R}{2}}{r}$, $\frac{R}{2}=-r\cos\theta$

$\therefore R=-2\cos\theta r$

따라서 (가)는 $-2\cos\theta$ …… ㉠

(ⅱ)



$\triangle\mathrm{BO'M}$에서

$\angle\mathrm{O'BM}+\angle\mathrm{BMO'}+\angle\mathrm{MO'B}=\pi$

$\angle\mathrm{O'BM}+\frac{\pi}{2}+2\theta-\pi=\pi$

$\angle\mathrm{O'BM}=\frac{3}{2}\pi-2\theta$

$\triangle\mathrm{O'BM}$에서

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi-2\theta\right)=-\cos 2\theta$

따라서 (나)는 $-\cos 2\theta$ …… ㉡

(ⅲ) $\triangle\mathrm{ABC}$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\theta}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{O'BM})}$, $\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AC}}}=\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$

따라서 (다)는 $\frac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$ …… ㉢

즉, ㉠, ㉡, ㉢에서

$f(\theta)=-2\cos\theta,\ g(\theta)=-\cos2\theta,\ h(\theta)=\dfrac{\sin\theta}{1-2\cos^2\theta}$

그런데, $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5},\ \cos\beta=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$이므로

$f(\alpha)+g(\beta)+\left\{h\left(\dfrac{2}{3}\pi\right)\right\}^2$

$=\dfrac{6}{5}+1-2\times\dfrac{2}{5}+3$

$=\dfrac{22}{5}$

따라서 $\dfrac{q}{p}=\dfrac{22}{5}$에서 $p=5,\ q=22$이므로

$p+q=2+5=27$

53) [정답] ②

[해설]

$\triangle$ACD가 이등변삼각형이므로

$\angle\mathrm{ADC}=\angle\mathrm{ACD}$

$\overline{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{CD}}$이므로

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CAB}$

$\angle\mathrm{CAB}=\theta$라 하면 $\triangle$ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\dfrac{7}{9}$

$\angle\mathrm{CAD}=\pi-2\theta$이므로

$\angle\mathrm{BAD}=\pi-2\theta+\theta=\pi-\theta$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

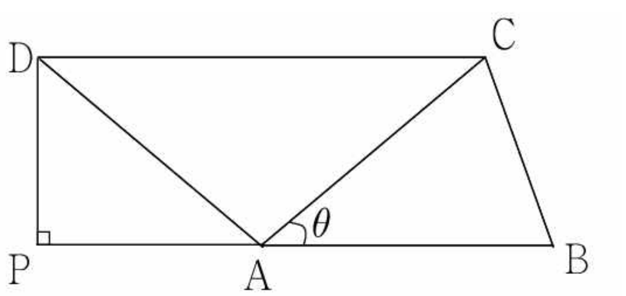
$=\dfrac{3^2+3^2-\overline{\mathrm{BD}}^2}{2\times3\times3}=-\dfrac{7}{9}$

$\overline{\mathrm{BD}}^2=32$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}\ (\because\ \overline{\mathrm{BD}}>0)$

54) [정답] ②

[해설]



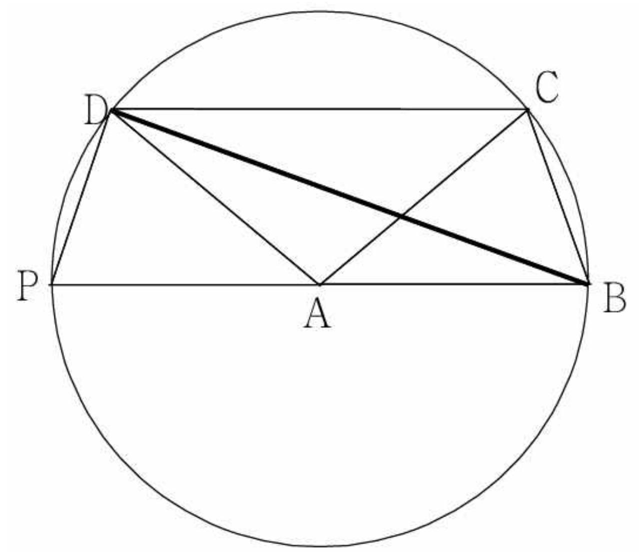
$\cos\theta=\dfrac{3^2+3^2-2^2}{2\times3\times3}=\dfrac{7}{9}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}}=\dfrac{7}{3},\ \overline{\mathrm{DP}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{BD}}^2=\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{7}{3}+3\right)^2$

$\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$

[다른풀이]



위 그림과 같이 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}$가 되도록 점 P를 잡으면 사각형 DPBC는 등변사다리꼴이고, 원에 내접한다.
$\overline{\mathrm{PB}}$가 지름이므로
삼각형 DPB는 직각삼각형이다.
따라서 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

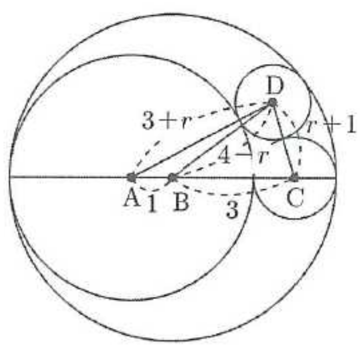
55) [정답] ④

[해설]

중심이 C인 반지름의 길이를 r_1, 중심이 D인 원의 반지름의 길이를 r_2라고 하자.

$\overline{\mathrm{AC}}=3+r_1$(외접), $\overline{\mathrm{BC}}=4-r_1$(내접)이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{BC}}=2r_1-1=1$에서 $r_1=1$



$\overline{\mathrm{AD}}=3+r_2$(외접), $\overline{\mathrm{CD}}=1+r_2$(외접), $\overline{\mathrm{BD}}=4-r_2$(내접)이고

$\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=3$

$\angle DBA=\theta$라 하면 $\angle DBC=\pi-\theta$

$\triangle DAB$에서 코사인법칙을 이용하면

$$\cos\theta=\frac{1^2+(4-r_2)^2-(3+r_2)^2}{2\cdot1\cdot(4-r_2)}=\frac{4-7r_2}{4-r_2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\triangle DBC$에서 코사인법칙을 이용하면

$$\begin{aligned}\cos(\pi-\theta)&=-\cos\theta\\&=\frac{3^2+(4-r_2)^2-(1+r_2)^2}{2\cdot3\cdot(4-r_2)}\\&=\frac{12-5r_2}{3(4-r_2)} \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

㉠+㉡ : $\dfrac{(12-21r_2)+12-5r_2}{3(4-r_2)}=0$

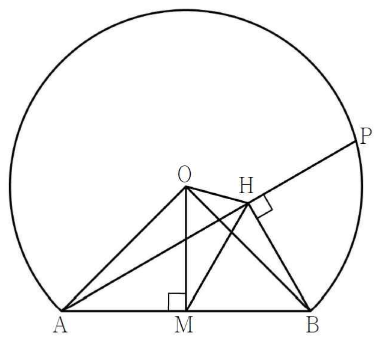
즉,

$24-26r_2=0$

$\therefore r_2=\dfrac{12}{13}$

56) [정답] 20

[해설]



점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{AM}=\overline{BM}$

삼각형 OAM에서 $\overline{OA}=2$, $\angle OAM=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\overline{AM}=\overline{OM}=\overline{BM}=\sqrt{2}$

삼각형 ABH에서 $\angle BAH=\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\overline{BH}=\sqrt{2}$

삼각형 BHM에서 $\overline{BM}=\overline{BH}=\sqrt{2}$, $\angle ABH=\dfrac{\pi}{3}$이므로

삼각형 BHM은 정삼각형

따라서 $\overline{HM}=\sqrt{2}$, $\angle BMH=\dfrac{\pi}{3}$

삼각형 OMH에서 $\angle OMH=\dfrac{\pi}{6}$, $\overline{OM}=\overline{HM}=\sqrt{2}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{OH}^2&=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\cos\frac{\pi}{6}\\&=4-2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$m=4$, $n=-2$

따라서 $m^2+n^2=20$

57) [정답] 84

[해설]
호 BD와 호 DC에 대한 원주각의 크기가 같으므로
$\angle CBD=\angle CAD=\angle DAB=\angle DBC$이다. 즉, $\overline{BD}=\overline{DC}$
$\overline{BD}=\overline{DC}=a$, $\overline{AD}=b$, $\angle CAD=\theta$라 하면 $\angle DAB=\theta$이고
$\overline{BD}^2=\overline{DC}^2$이므로 삼각형 DAB와 삼각형 CAD에 각각 코사인법칙을 적용하면
$6^2+b^2-2\times6\times b\times\cos\theta=b^2+8^2-2\times b\times8\times\cos\theta$,
$4b\cos\theta=28$이므로 직각삼각형 ADE에서 $k=b\cos\theta=7$
따라서 $12k=84$

58) [정답] ②

[해설]

$\angle ABC=\theta$라 하자.

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인법칙을 이용하면
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos\theta$
이므로 $\overline{AC}^2=5^2+4^2-2\times5\times4\times\dfrac{1}{8}=36$
그러므로 $\overline{AC}=6$ (참)

ㄴ. 호 EA에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로
$\angle ACE=\angle ABE$
호 CE에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로
$\angle EAC=\angle EBC$
한편, $\angle ABE=\angle EBC$이므로 $\angle ACE=\angle EAC$
그러므로 삼각형 EAC는 $\overline{EA}=\overline{EC}$인 이등변삼각형이다. (참)

ㄷ. 삼각형 ABD에서 $\angle ADE=\angle DAB+\angle ABD$
한편, $\angle DAB=\angle CAD$, $\angle ABD=\angle EBC$

그러므로 $\angle ADE=\angle CAD+\angle EBC$
$=\angle CAD+\angle EAC$

$= \angle \mathrm{EAD}$

즉, 삼각형 EAD는 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$ 인 이등변삼각형이다.
삼각형 EAC에서 코사인법칙을 이용하면
$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{EA}}^2+\overline{\mathrm{EC}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}\times\overline{\mathrm{EC}}\times\cos(\pi-\theta)$ 이고
ㄴ에서 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{EC}}$ 이므로
$36=2\times\overline{\mathrm{EA}}^2-2\times\overline{\mathrm{EA}}^2\times\left(-\frac{1}{8}\right)$, $\overline{\mathrm{EA}}=4$
그러므로 $\overline{\mathrm{EA}}=\overline{\mathrm{ED}}$ 에서 $\overline{\mathrm{ED}}=4$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

59) [정답] ③

[해설]

$\triangle$ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{BC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{CA}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\cos(\angle \mathrm{BAC})$$
$$=4^2+5^2-2\times4\times5\times\frac{1}{8}$$
$$=1$$

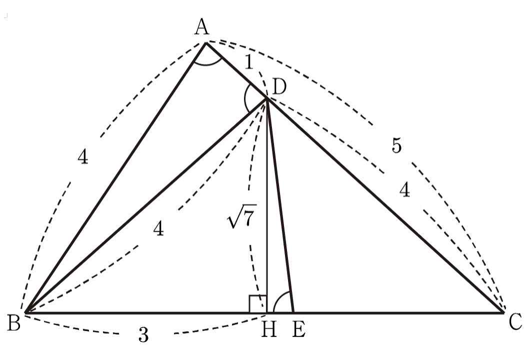
$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=6$

$\triangle$ABD는 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=4$

$\triangle$ABD에서 코사인법칙을 적용하면

$$\overline{\mathrm{DB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AD}}\times\cos(\angle \mathrm{BAC})$$
$$4^2=4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\frac{1}{8}$$

따라서 $\overline{\mathrm{AD}}=1$, $\overline{\mathrm{CD}}=4$



위의 그림에서 $\triangle$BCD는 이등변 삼각형이므로 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{BH}}=3$

따라서 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{7}$

$\cos(\angle \mathrm{BAC})=\cos(\angle \mathrm{DEH})=\frac{1}{8}$ 이므로

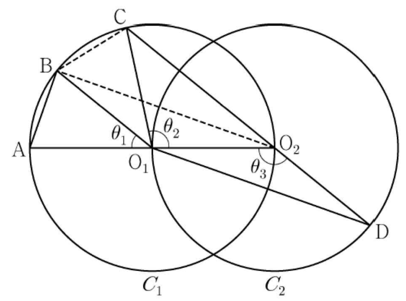
$$\sin(\angle \mathrm{DEH})=\sqrt{1-\cos^2(\angle \mathrm{DEH})}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{64}}$$
$$=\frac{3\sqrt{7}}{8}$$

그런데, $\sin(\angle \mathrm{DEH})=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{DE}}}=\frac{\sqrt{7}}{\overline{\mathrm{DE}}}$ 이므로 $\frac{\sqrt{7}}{\overline{\mathrm{DE}}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore \overline{\mathrm{DE}}=\frac{8}{3}$

60) [정답] ②

[해설]



$\angle \mathrm{CO_2O_1}+\angle \mathrm{O_1O_2D}=\pi$이므로 $\theta_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_2}{2}$이고
$\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle \mathrm{CO_1B}=\theta_1$이다.
이때, $\angle \mathrm{O_2O_1B}=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로
삼각형 $\mathrm{O_1O_2B}$와 삼각형 $\mathrm{O_2O_1D}$는 합동이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=k$라 할 때,
$\overline{\mathrm{BO_2}}=\overline{\mathrm{O_1D}}=2\sqrt{2}k$이므로
$\overline{\mathrm{AO_2}}=\sqrt{k^2+(2\sqrt{2}k)^2}=\boxed{3k}$이고,

$\angle \mathrm{BO_2A}=\frac{\theta_1}{2}$이므로

$\cos\frac{\theta_1}{2}=\frac{2\sqrt{2}k}{3k}=\boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$이다.

삼각형 $\mathrm{O_2BC}$에서

$\overline{\mathrm{BC}}=k$, $\overline{\mathrm{BO_2}}=2\sqrt{2}k$, $\angle \mathrm{CO_2B}=\frac{\theta_1}{2}$이므로 삼각형 $\mathrm{BO_2C}$에서

$\overline{\mathrm{O_2C}}=x$ $(0<x<3k)$라 하면
코사인법칙에 의하여

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times2\sqrt{2}k\times\cos\frac{\theta_1}{2}$$

$$k^2=x^2+(2\sqrt{2}k)^2-2\times x\times2\sqrt{2}k\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$3x^2-16kx+21k^2=0$
$(3x-7k)(x-3k)=0$
$0<x<3k$이므로
$x=\frac{7}{3}k$

즉, $\overline{O_2C}=\boxed{\dfrac{7}{3}k}$이다.

$\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로

$\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{3k}}{2}+\boxed{\dfrac{7}{3}k}\right)$이다.

이상에서

$f(k)=3k,\ g(k)=\dfrac{7}{3}k,\ p=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

이므로

$f(p)\times g(p)$

$=\left(3\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(\dfrac{7}{3}\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\dfrac{56}{9}$

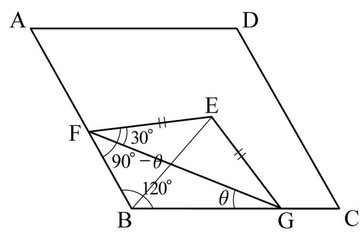
61) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\angle BGF=\theta$ 이므로 $\angle BFG=60°-\theta$

$\angle BFE=\angle BFG+\angle GFE$

$=(60°-\theta)+30°=90°-\theta$ (참)



ㄴ. 삼각형 EFG 에서

$\overline{FG}=2\overline{EF}\cos 30°=2\sqrt{3}$

삼각형 BGF에서 사인법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{FG}}{\sin 120°}=\dfrac{\overline{BF}}{\sin\theta}$

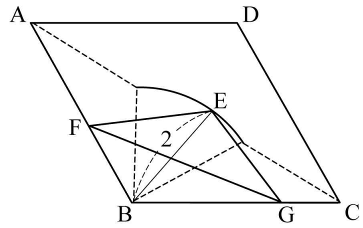
$\therefore\ \overline{BF}=4\sin\theta$ (참)

ㄷ. 삼각형 EFB에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{BE}^2=\overline{BF}^2+\overline{EF}^2-2\overline{BF}\cdot\overline{EF}\cdot\cos(90°-\theta)$

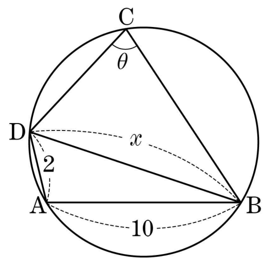
$=(4\sin\theta)^2+2^2-2\cdot 4\sin\theta\cdot 2\cdot\sin\theta=4$

따라서 $\overline{BE}=2$ 로 항상 일정하다. (참)



62) [정답] 50

[해설]



사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\angle BCD=\theta(0<\theta<\pi)$

라 하면 $\angle BAD=\pi-\theta$

선분 BD의 길이를 x라 하고, 삼각형 ABD에서

코사인법칙을 이용하면

$x^2=2^2+10^2-2\times2\times10\times\cos(\pi-\theta)$

$=104+40\cos\theta=104+40\times\dfrac{3}{5}=128$

$\therefore\ x=\sqrt{128}=8\sqrt{2}$

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\dfrac{4}{5}$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하고

사인법칙을 이용하면 $\dfrac{8\sqrt{2}}{\sin\theta}=2R$

$R=5\sqrt{2}$이므로 외접원의 넓이는

$\pi(5\sqrt{2})^2=50\pi\ \therefore\ a=50$

63) [정답] ④

[해설]

$\overline{AP}=a,\ \overline{BQ}=b$라 하면 $\overline{CR}=1-a-b$이고

$\overline{BP}=1-a,\ \overline{AR}=a+b$이다.

ㄱ. 삼각형 APR에서 코사인법칙에 의해

$\overline{PR}^2=a^2+(a+b)^2-2\times a\times(a+b)\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$=a^2+ab+b^2$

삼각형 PBQ에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{PQ}^2=b^2+(1-a)^2-2\times b\times(1-a)\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=a^2+ab-2a+b^2-b+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{PR}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$a^2+ab+b^2=a^2+ab-2a+b^2-b+1$에서

$$2a+b=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

그러므로 $2\overline{AP}+\overline{BQ}=1$에서 $4\overline{AP}+\overline{BQ}=2$

$\overline{AP}>0$이므로 $3\overline{AP}+2\overline{BQ}<2$ (거짓)

ㄴ. ㉡에서 $b=1-2a$이므로

$\overline{CQ}=1-b=1-(1-2a)=2a$

$\overline{CR}=1-a-(1-2a)=2$

삼각형 CRQ에서 $\overline{CQ}:\overline{CR}=2:1$이고

$\angle RCQ=\frac{\pi}{3}$이므로 삼각형 CRQ는 $\angle QRC=\frac{\pi}{2}$인

직각삼각형이다.

그러므로 $\overline{QR}=\sqrt{\overline{CQ}^2-\overline{CR}^2}=\sqrt{3}a$ (참)

ㄷ. 두 삼각형 PBQ, CRQ의 외접원의 반지름의 길이를 각각 R_1, R_2라 하면 삼각형 PBQ에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_1$$

삼각형 CRQ에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{QR}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R_2$

삼각형 PBQ의 외접원의 넓이가 삼각형 CRQ의 외접원의 넓이의 2배이므로 $R_1=\sqrt{2}\times R_2$

$\frac{\overline{PQ}}{2\sin\frac{\pi}{3}}=\sqrt{2}\times\frac{\overline{QR}}{2\sin\frac{\pi}{3}}$에서 $\overline{PQ}^2=2\times\overline{QR}^2$

㉠, ㉡에 의해 $\overline{PQ}^2=3a^2-3a+1$이고 $\overline{QR}^2=3a^2$이므로

$3a^2-3a+1=6a^2$, $3a^2+3a-1=0$

$$a=\frac{-3\pm\sqrt{9+12}}{6}$$

$a>0$이므로 $a=\frac{\sqrt{21}-2}{6}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

64) [정답] ①

[해설]

주어진 원이 삼각형 BCD의 외접원이고 반지름의 길이가 r이므로 사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}=2r\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}r,\ \overline{BC}=2r\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}r$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{3}r)^2$$

$$=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^2-2\times\sqrt{2}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)\times\cos\frac{\pi}{3}$$

이 식을 정리하면 $5r^2+2\sqrt{6}r-6=0$

그러므로 $r=\frac{-\sqrt{6}\pm6}{5}$

따라서 $r>0$이므로 $r=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$

65) [정답] **36**

[해설]

$\angle BAC=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\cos\theta=25-24\cos\theta$$

$$\overline{BC}=\sqrt{25-24\cos\theta}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R_1이라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R_1,\ R_1=\frac{\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$$

직각삼각형 ABD에서 $\overline{AD}=\overline{AB}\cos\theta=3\cos\theta$

직각삼각형 ACE에서 $\overline{AE}=\overline{AC}\cos\theta=4\cos\theta$

삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{DE}^2=(3\cos\theta)^2+(4\cos\theta)^2-2\times3\cos\theta\times4\cos\theta\times\cos\theta$$

$$=25\cos^2\theta-24\cos^3\theta$$

$$=\cos^2\theta(25-24\cos\theta)$$

$$\overline{DE}=\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}$$

삼각형 ADE의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=2R_2$, $R_2=\frac{\cos\theta\sqrt{25-24\cos\theta}}{2\sin\theta}$

삼각형 ABC의 외접원의 넓이와 삼각형 ADE의 외접원의 넓이의 차가 4π이므로

$$4\pi=\pi R_1^2-\pi R_2^2$$

$$=\pi\times\frac{(1-\cos^2\theta)(25-24\cos\theta)}{4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{\pi(25-24\cos\theta)}{4}$$

$\cos\theta=\frac{3}{8}$, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{55}}{8}$

사각형 AEPD에서 $\angle AEP=\angle ADP=\frac{\pi}{2}$

이므로 네 점 A, E, P, D는 선분 AP를 지름으로 하는 한 원 위에 있고 삼각형 PDE의 외접원은 삼각형 ADE의 외접원과 일치한다.

삼각형 PDE의 외접원의 넓이는 πR_2^2

$$R_2=\frac{\frac{3}{8}\times\sqrt{25-24\times\frac{3}{8}}}{2\times\frac{\sqrt{55}}{8}}=\frac{6}{\sqrt{55}}$$

$$\pi R_2^2=\pi\left(\frac{6}{\sqrt{55}}\right)^2=\frac{36}{55}\pi$$

따라서 $a=\frac{36}{55}$, $55a=36$

[참고]

두 삼각형 ABC, ADE는 서로 닮음이고, 닮음비가 $1:\cos\theta$이므로

$\overline{DE}=\overline{BC}\times\cos\theta$, $R_2=R_1\times\cos\theta$

66) [정답] ④

[해설]

선분 AP가 $\angle BAC$의 이등분선이고 $\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로 $\overline{BP}:\overline{PC}=3:1$이다.

$\overline{PC}=k$라 하면 $\overline{BP}=3k$이다.

삼각형 BAC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3^2+1^2-(4k)^2}{2\times3\times1}$에서 $k>0$이므로 $k=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{k}{\sin\frac{\pi}{6}}=2R$이므로 $R=\frac{\sqrt{7}}{4}$이다.

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는 $\frac{7}{16}\pi$

67) [정답] **27**

[해설]

선분 AB는 삼각형 ABC의 외접원의 지름이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$, $\angle CAB=\alpha$라 하면 $\cos\alpha=\frac{1}{3}$이고,

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$이므로 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{BC}=\overline{AB}\times\sin\alpha$이므로 $\overline{AB}=18$이고, $\overline{AC}=6$

점 D는 선분 AB를 5 : 4로 내분하는 점이므로

$\overline{AD}=10$

삼각형 CAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DC}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\cos\alpha=96$

$\therefore \overline{DC}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$

삼각형 CAD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{DC}}{\sin\alpha}=2R$에서 $R=3\sqrt{3}$

삼각형 CAD의 외접원의 넓이 S는 $S=27\pi$이므로 $\frac{S}{\pi}=27$

68) [정답] 15

[해설]

$\overline{AC}=k$라 하면 $\overline{BD}=2k$이고

$\overline{AH}:\overline{HB}=1:3$이므로 $\overline{AH}=\frac{1}{2}$

$\angle CAB=\theta$라 할 때, 두 삼각형 ABC, ABD에서 사인법칙을 이용하면

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2r,\quad \frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=2R$$

즉, $\overline{BC}=2r\sin\theta$, $\overline{AD}=2R\sin\theta$

$4(R^2-r^2)\times\sin^2\theta=(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2$이므로

두 식을 $(2R\sin\theta)^2-(2r\sin\theta)^2=51$에 대입하면

$\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=51$ ...... ㉠

삼각형 AHC에서 $\cos\theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{CA}}=\frac{1}{2k}$이므로

두 삼각형 ABC, ABD에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta$

$=4+k^2-2\times2\times k\times\cos\theta=k^2+2$ ...... ㉡

$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos(\pi-\theta)$

$=4+4k^2+2\times2\times2k\times\cos\theta=4k^2+8$ ...... ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{AD}^2-\overline{BC}^2=3k^2+6=51$

즉, $k^2=15$

따라서 $\overline{AC}^2=15$

69) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{7}$이므로

사인법칙에 의하여 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin(\angle BAC)}=4\sqrt{7}$

즉, $\overline{BC}=\sin\dfrac{\pi}{3}\times4\sqrt{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{7}=2\sqrt{21}$

또, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이도 $2\sqrt{7}$이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BCD)}=4\sqrt{7}$$

즉, $\overline{BD}=\sin(\angle BCD)\times4\sqrt{7}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}\times4\sqrt{7}=8$

한편, $\angle BDC=\pi-\angle BAC=\dfrac{2}{3}\pi$이므로 $\overline{CD}=x$라 하면

삼각형 BCD에서 코사인 법칙에 의하여

$$(2\sqrt{21})^2=x^2+8^2-2\times x\times8\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$x^2+8x-20=0,\ (x-2)(x+10)=0$$

$x>0$이므로 $x=2$

즉, $\overline{CD}=2$

따라서 $\overline{BD}+\overline{CD}=8+2=10$

70) [정답] **26**

[해설]

$\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\dfrac{3}{2}$이므로 사인법칙에 의하여 두 원의 반지름의 길이의 비는 $3:2$이다.

각각의 반지름의 길이를 $3r$, $2r$라 하면 삼각형 AOO'에서 코사인법칙에서

$1=9r^2+4r^2-12r^2\cos(\pi-(\alpha+\beta))=17r^2$

$r^2=\dfrac{1}{17}$,

$\therefore S=9r^2\pi=\dfrac{9}{17}\pi,\ p+q=26$

71) [정답] ⑤

[해설]

$\angle CED=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\triangle ECD$에서 코사인법칙에 의해

$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10$

에서 $\overline{CD}=\sqrt{10}\cdots\cdots$㉠

반지름을 R라 하면 $\overline{OD}=R$, $\overline{OE}=R-4$이므로 삼각형 ODE에서 코사인법칙에 의해

$R^2=(R-4)^2+(3\sqrt{2})^2-2\times3\sqrt{2}\times(r-4)\cos\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore\ R=5$

$\angle CAD=\theta$라 하면 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{CD}}{\sin\theta}=2R$에서 $\dfrac{\sqrt{10}}{\sin\theta}=10$ $\therefore\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

따라서 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\overline{AC}}{\sin\dfrac{3}{4}\pi}=\dfrac{\overline{CE}}{\sin\theta}$에서

$\overline{AC}=\dfrac{4}{\dfrac{\sqrt{10}}{10}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=4\sqrt{5}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{AC}\times\overline{CD}=20\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$\angle CED=\dfrac{\pi}{4}$이므로 $\triangle ECD$에서 코사인법칙에 의해

$\overline{CD}^2=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=10$

에서 $\overline{CD}=\sqrt{10}$

$\angle OCD=\alpha$라 하면 $\triangle ECD$에서 코사인법칙에 의해

$\cos\alpha=\dfrac{4^2+(\sqrt{10})^2-(3\sqrt{2})^2}{2\times4\times10}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\overline{OC}=R$이라 하면 $\triangle OCD$에서 코사인법칙에 의해

$R^2=R^2+(\sqrt{10})^2-2R\times\sqrt{10}\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}$에서 $R=5$

$\angle CAD=\beta$라 하면 $\triangle ACD$에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{\sqrt{10}}{\sin\beta}=2R$에서 $\sin\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\triangle AED$에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{4}{\sin\beta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\dfrac{3}{4}\pi}$에서 $\overline{AC}=4\sqrt{5}$

따라서 $\overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

72) [정답] ④

[해설]

삼각형 ABD와 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 이용하여 선분 CD의 길이를 구하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2 = 3^2 + 2^2 - 2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{BD} = \sqrt{7}$이다.

$\angle BAD + \angle BCD = \pi$이므로 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$2^2 + \overline{CD}^2 - 2\times2\times\overline{CD}\times\cos\frac{2\pi}{3} = 7$

이므로 $\overline{CD} = \boxed{1}$이다.

삼각형 EAB와 삼각형 ECD에서 $\angle AEB$는 공통이고 $\angle EAB = \angle ECD$이므로 삼각형 EAB와 삼각형 ECD는 닮음이다. 따라서 $\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$이다. 즉,

$\frac{3+\overline{ED}}{\overline{EC}} = \frac{2+\overline{EC}}{\overline{ED}} = \frac{2}{1}$

에서 $\overline{ED} = \boxed{\frac{7}{3}}$이다.

$\angle DCE = \pi - \angle BCD = \angle BAD = \frac{\pi}{3}$

이므로 삼각형 ECD에서 사인법칙을 이용하면

$\frac{\frac{7}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sin\theta}$

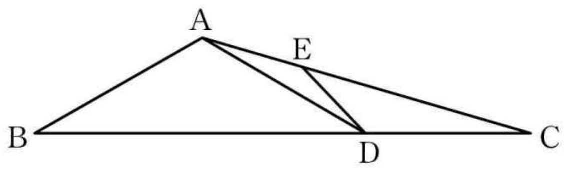
에서 $\sin\theta = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{14}}$이다.

$p=1,\ q=\frac{7}{3},\ r=\frac{3\sqrt{3}}{14}$이므로

$(p+q)\times r = \left(1+\frac{7}{3}\right)\times\frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{7}$

73) [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ABC) = \frac{2^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{13})^2}{2\times2\times3\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$이다.

삼각형 ABD에서 $\sin(\angle ABD) = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

이므로 사인법칙에 의하여 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)} = \boxed{2}$이다.

삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ACD)}$

이므로

$\sin(\angle CAD) = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\sin(\angle ACD)$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{13}}{13} = \frac{\sqrt{39}}{26}$

이다. 삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$\overline{DE} = 2\times2\times\sin(\angle CAD) = \boxed{\frac{2\sqrt{39}}{13}}$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{2},\ q=2,\ r=\frac{2\sqrt{39}}{13}$이므로

$p\times q\times r = \frac{\sqrt{3}}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{39}}{13} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$

74) [정답] ①

[해설]

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta \\ &= 25+45-2\times5\times3\sqrt{5}\times\cos\theta \\ &= 70-30\sqrt{5}\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2\times\overline{AD}\times\overline{AC}\times\cos\theta \\ &= 49+45-2\times7\times3\sqrt{5}\times\cos\theta \\ &= 94-42\sqrt{5}\cos\theta \quad \cdots\cdots ㉡\end{aligned}$$

이때 $\angle BAC = \angle CAD$이므로 $\overline{BC} = \overline{CD}$

즉, ㉠=㉡에서

$70-30\sqrt{5}\cos\theta = 94-42\sqrt{5}\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= 70-30\sqrt{5}\cos\theta \\ &= 70-30\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ &= 10\end{aligned}$$

$\therefore\ \overline{BC} = \sqrt{10}$

㉢에서

$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{1}{5}$

이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이를 R라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R,\quad \frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}}=2R$$

$$\therefore\ R=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

75) [정답] ②

[해설]

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로

사인법칙에 의해 $\frac{10}{\sin C}=2\times3\sqrt{5}$, $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$

삼각형 ABC는 예각삼각형이므로

$$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}$$

$\frac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\frac{4}{3}$에서 $\frac{a^2+b^2-\frac{2}{3}ab}{ab}=\frac{4}{3}$

$3a^2+3b^2-2ab=4ab$, $3(a-b)^2=0$이므로 $a=b$

코사인법칙에 의해

$$\begin{aligned}10^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=a^2+a^2-2a^2\times\frac{2}{3}\\&=\frac{2}{3}a^2\end{aligned}$$

$100=\frac{2}{3}a^2$, $a^2=150$

따라서 $ab=a^2=150$

76) [정답] ①

[해설]

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$$R^2\pi=\frac{49}{3}\pi,\ R=\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R,\ \overline{BC}=2\times\frac{7}{3}\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$$

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=a$라 하면 코사인법칙에 의해

$$7^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$a^2-3a-40=0,\ (a-8)(a+5)=0$$

$a>0$이므로 $a=8$

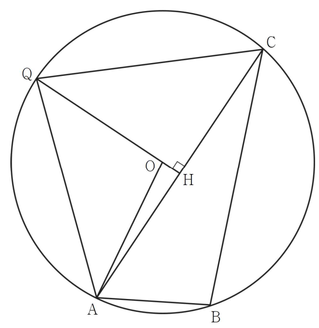
$\overline{AC}=8$이고 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\cos(\angle CBA)=\frac{3^2+7^2-8^2}{2\times3\times7}=-\frac{1}{7}$$

이므로 $\frac{\pi}{2}<\angle CBA<\pi$가 되어 삼각형 ABC는 둔각삼각형이다.

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점을 Q라 하면 점 Q는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이다.

그림과 같이 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C의 중심 O는 선분 QH 위에 있다.



직각삼각형 AHO에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{QH}=\frac{8}{3}\sqrt{3}$이므로 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times8\times\frac{8}{3}\sqrt{3}=\frac{32}{3}\sqrt{3}$$

77) [정답] ④

[해설]

삼각형 ADB에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin A}=\boxed{2r}$$

이므로 $\overline{BD}$가 최대이려면 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접해야 한다.

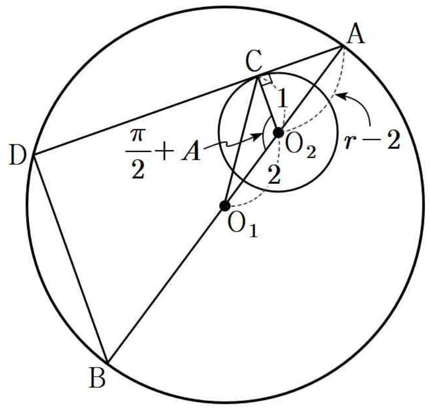
이때 직각삼각형 ACO_2에서 $\sin A=\frac{1}{\overline{AO_2}}$이므로

$\overline{BD}=\dfrac{1}{\overline{AO_2}}\times\boxed{2r}$

이다.

그러므로 직선 AD가 원 C_2와 점 C에서 접하고 $\overline{AO_2}$가 최소일 때 $\overline{BD}$는 최대이다. $\overline{AO_2}$가 최소일 때는 두 원의 중심 O_1, O_2와 점 A가 일직선 위에 있을 때이므로 $\overline{AO_2}$의 최솟값은

$\overline{AO_1}-\overline{O_1O_2}=\boxed{r-2}$



$\overline{AO_2}$가 최소일 때, $\sin A=\dfrac{1}{r-2}$이므로 삼각형 CO_1O_2에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{O_1C}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos\left(\frac{\pi}{2}+A\right)$$
$$=5+4\sin A$$
$$=\boxed{5+\frac{4}{r-2}}$$

이상에서 $f(r)=2r$, $g(r)=r-2$, $h(r)=5+\dfrac{4}{r-2}$이므로

$f(4)\times g(5)\times h(6)=8\times3\times6=144$

78) [정답] ①

[해설]

[코스 1]의 거리는 9km 이므로 걸리는 시간은

$\dfrac{9}{3}=3$(시간)이다.

$\overline{BC}=x$로 놓으면 $\overline{CD}=6-x$이고 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=3^2+x^2-2\cdot3\cdot x\cos120°=x^2+3x+9$

$\therefore \overline{AC}=\sqrt{x^2+3x+9}$

[코스 2]의 거리는 $\sqrt{x^2+3x+9}+6-x$ 이므로 걸리는 시간은

$\dfrac{\sqrt{x^2+3x+9}}{3}+\dfrac{6-x}{3}$(시간)

[코스 2]가 [코스 1]보다 10분 더 빠르므로

$$\frac{\sqrt{x^2+3x+9}}{3}+\frac{6-x}{3}=3-\frac{1}{6}$$

$$2\sqrt{x^2+3x+9}+12-2x=17$$

$$2\sqrt{x^2+3x+9}=2x+5$$

양변을 제곱하여 정리하면

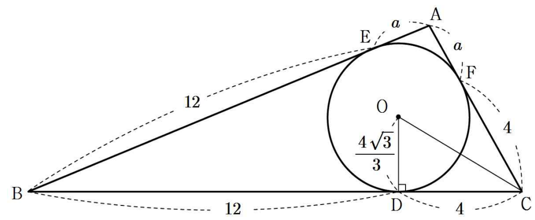
$$4x^2+12x+36=4x^2+20x+25$$

$$8x=11$$

$$\therefore x=\frac{11}{8}\text{(km)}$$

79) [정답] ②

[해설]



그림과 같이 원의 중심을 O라 하고, 원과 두 선분 AB, AC가 만나는 저을 각각 E, F라 하자.

$\tan(\angle OCD)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $\angle OCD=\dfrac{\pi}{6}$, $\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$이다.

$\overline{AE}=a$라 하면 $\overline{AF}=a$이고

(삼각형 ABC의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times16\times(a+4)\times\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=4\sqrt{3}(a+4)$$

(삼각형 OAB의 넓이)+(삼각형 OBC의 넓이)
+(삼각형 OCA의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\{(a+12)+16+(a+4)\}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}(a+16)$$

이다.

그러므로 $4\sqrt{3}(a+4)=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}(a+16)$에서 $a=2$이다.

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$2\times(12+4+2)=36$$

[다른 풀이]

삼각형 BCA에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{16^2+(a+4)^2-(a+12)^2}{2\times16\times(1+4)}$$

이므로 $a=2$이다.

80) [정답] 19.39

[해설]

(i) 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times4\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\sin60^\circ=\frac{1}{2}\times3\times4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

(ii) 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AC}\times\overline{CD}\times\cos60^\circ$$

$$\overline{AD}^2=3^2+4^2-2\times3\times4\times\frac{1}{2}$$

$\overline{AD}^2=13$이므로 $\overline{AD}=\sqrt{13}$

이때 삼각형 ADE에서 $\angle DEA=\theta$로 놓으면

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{DE}^2+\overline{AE}^2-2\times\overline{DE}\times\overline{AE}\times(\sqrt{13})^2$$

$$=5^2+6^2-2\times5\times6\times\cos\theta$$

에서 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

삼각형 ADE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{AE}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times5\times6\times\frac{3}{5}=9$$

(i), (ii)에서 도형 ABCDE의 넓이는 세 삼각형 ABC, ACD, ADE의 넓이의 합이므로

$$3\sqrt{3}+3\sqrt{3}+9=6\sqrt{3}+9=6\times1.732+9$$

$$=19.392$$

따라서 반올림하여 소수 둘째 자리까지 나타내면 19.39이다.

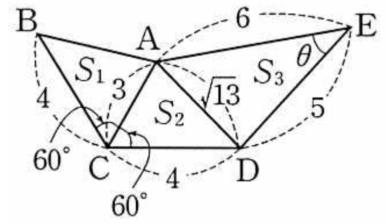
81) [정답] 19.39

[해설]

코사인법칙에 의해서

$\overline{AD}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos60^\circ=13$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{13}\ \ (\because\ \overline{AD}>0)$



위의 그림과 같이 $\angle AED=\theta$로 놓으면 코사인법칙에 의해서

$$\cos\theta=\frac{6^2+5^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot6\cdot5}=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\ \ (\because\theta\text{ 는 예각})=\frac{3}{5}$$

$\therefore$ (도형ABCDE의 넓이)$=S_1+S_2+S_3$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin\theta$$

$$=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+15\cdot\frac{3}{5}$$

$=6\sqrt{3}+9$

$=6\times1.732+9$

$=19.392$

따라서, 19.392를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 19.39이다.

82) [정답] 19.39

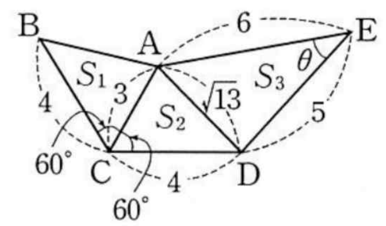
[해설]

코사인법칙에 의해서

$\overline{AD}^2=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos60^\circ$

$=13$

$\therefore\ \overline{AD}=\sqrt{13}\,(\because\overline{AD}>0)$



위의 그림과 같이 $\angle AED=\theta$로 놓으면 코사인법칙에 의해서

$$\cos\theta=\frac{6^2+5^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot6\cdot5}$$

$$=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}\,(\because\theta\text{는예각})=\frac{3}{5}$$

$\therefore$(도형 ABCDE의 넓이)$=S_1+S_2+S_3$

$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot3\cdot4\cdot\sin60^\circ$$

$$+\frac{1}{2}\cdot6\cdot5\cdot\sin\theta$$

$=6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+6\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}+15\cdot\dfrac{3}{5}$

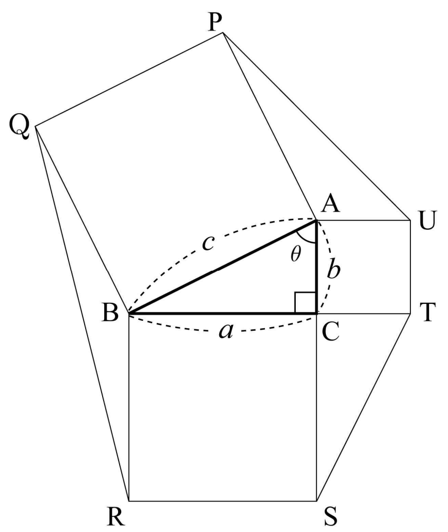
$=6\sqrt{3}+9=6\times1.732+9$

$=19.392$

따라서, 19.392를 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림하면 19.39이다.

83) [정답] ③

[해설]



세 사각형 APQB, BRSC, CTUA 의 넓이는 각각

c^2, a^2, b^2 이고, ABC 의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ab$ 이다.

$\angle BAC=\theta$ 라 하면 $\angle PAU=180^\circ-\theta$ 이므로

삼각형 PAU 의 넓이는

$\triangle PAU=\dfrac{1}{2}\overline{AU}\,\overline{AP}\sin(180^\circ-\theta)$

$=\dfrac{1}{2}bc\sin\theta$

$=\triangle ABC=\dfrac{1}{2}ab$

이다. 마찬가지 방법으로 두 삼각형 QRB, CST 의 넓이도 각각 $\dfrac{1}{2}ab$ 이다. 따라서 육각형 PQRSTU 의 넓이는

$c^2+a^2+b^2+\dfrac{1}{2}ab\times4=2(c^2+ab)\,(\because\ a^2+b^2=c^2)$

84) [정답] ①

[해설]

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD=2\triangle ABC$

$=2\times\dfrac{1}{2}ab\sin\theta=ab\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}ab$

이고

$\square ABCD=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BD}\times\sin\theta$

$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{7}\times\sqrt{13}\times\sin\theta=\dfrac{\sqrt{91}}{2}\sin\theta$

이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}ab=\dfrac{\sqrt{91}}{2}\sin\theta$

$\sqrt{3}ab=\sqrt{91}\sin\theta$ ……㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$(\sqrt{7})^2=a^2+b^2-2ab\cos60^\circ$

$7=a^2+b^2-ab$ ……㉡

또, 삼각형 BCD에서 코사인법칙을 적용하면

$(\sqrt{13})^2=a^2+b^2-2ab\cos120^\circ$

$13=a^2+b^2+ab$ ……㉢

㉢ −㉡을 하면

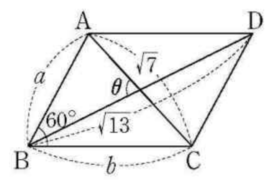
$2ab=6\ \therefore\ ab=3$

이를 ㉠에 대입하면

$3\sqrt{3}=\sqrt{91}\sin\theta$

$\therefore\ \sin\theta=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$

$\therefore\ \sin^2\theta=\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{91}}\right)^2=\dfrac{27}{91}$



85) [정답] ②

[해설]

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle BAD+\angle BCD=\pi$

$\angle BAD=\theta$라 하면

삼각형 BAD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\theta=37-12\cos\theta$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=\overline{BC}^2+\overline{CD}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cos(\pi-\theta)=25+24\cos\theta$

$37-12\cos\theta=25+24\cos\theta$에서

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ (□ABCD의 넓이)

=(△BAD의 넓이)+(△BCD의 넓이)

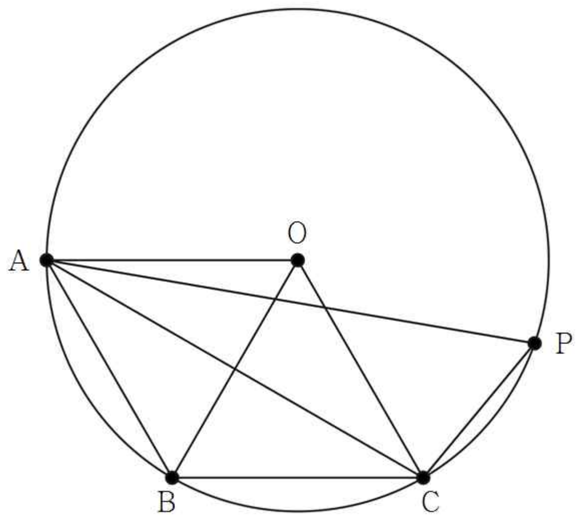
$= \dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\theta + \dfrac{1}{2}\overline{BC}\cdot\overline{CD}\sin(\pi-\theta)$

$= \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 6\cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\cdot \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$= 6\sqrt{2}$

86) [정답] ②

[해설]



원의 중심을 O라 하자.

두 삼각형 OAB와 OBC는 정삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=3$

삼각형 ABC에서 $\angle ABC = \dfrac{2\pi}{3}$이므로 삼각형 ABC에서

코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2 = 3^2+3^2-2\times3\times3\times\cos\dfrac{2\pi}{3} = 27$

$\overline{AC} = 3\sqrt{3}$

사각형 ABCP가 원에 내접하므로

$\angle ABC + \angle APC = \pi$ 즉, $\angle APC = \dfrac{\pi}{3}$

$\overline{AP}=x$, $\overline{CP}=y$라 하면

삼각형 ACP에서 코사인법칙에 의하여

$(3\sqrt{3})^2 = x^2+y^2-2xy\cos\dfrac{\pi}{3}$

$27 = (x+y)^2 - 3xy$

$x+y=8$이므로 $\quad xy = \dfrac{37}{3}$

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times3\times3\times\sin\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{9\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ACP의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times x\times y\times\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{37\sqrt{3}}{12}$

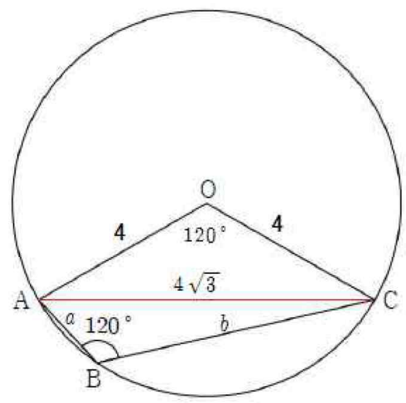
따라서 사각형 ABCP의 넓이는

$\dfrac{9\sqrt{3}}{4} + \dfrac{37\sqrt{3}}{12} = \dfrac{16\sqrt{3}}{3}$

87) [정답] ⑤

[해설]

$\angle ABC = 120°$, $\overline{AB}+\overline{BC} = 2\sqrt{15}$이므로 $\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 $a+b=2\sqrt{15}$ …… ㉠



위의 그림안의 삼각형 ABC에서 사인법칙을 이용하면

$\overline{AC} = 8\times\sin120° = 4\sqrt{3}$ …… ㉡

또 코사인법칙을 이용하면

$\overline{AC}^2 = a^2+b^2-2ab\cos120°$

$= a^2+b^2+ab$

$= (a+b)^2 - ab$

㉠, ㉡을 대입하면

$ab = (2\sqrt{15})^2 - (4\sqrt{3})^2 = 12$ …… ㉢

사각형 OABC의 넓이를 S라 하면

$S=$(△ABC의 넓이)+(△OAB의 넓이)

$= \dfrac{1}{2}\cdot a\cdot b\cdot\sin120° + \dfrac{1}{2}\cdot4\cdot4\cdot\sin120°$

$= \dfrac{1}{2}(4\times4+ab)\sin120°$

$=7\sqrt{3}$ ($\because$ ㉢)

88) [정답] **63**

[해설]

$\angle$BAD와 $\angle$BCD는 같은 호에 대한 원주각이므로 그 크기가 같다.

$\angle BAD=\angle BCD=\theta$, $\overline{AD}=a$, $\overline{CB}=b$라 하면

삼각형 ABD의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times 6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$$

삼각형 CBD의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times b\times 4\times\sin\theta=2b\sin\theta$$

$S_1 : S_2=9 : 5$이므로 $3a : 2b=9 : 5$

$a : b=6 : 5$이므로 $a=6k$, $b=5k(k>0)$라고 하자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{AC}^2=6^2+(5k)^2-2\times 6\times 5k\times\cos\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\angle$ABC와 $\angle$ADC는 같은 호에 대한 원주각이므로

$$\angle ABC=\angle ADC=\alpha$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2=(6k)^2+4^2-2\times 6k\times 4\times\cos\alpha \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하면

$$11k^2+9k-20=0,\ (11k+20)(k-1)=0$$

$k>0$이므로 $k=1$이고 $a=6k=6$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ADC의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\frac{\sqrt{7}}{4}=3\sqrt{7}$$

따라서 $S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

89) [정답] ③

[해설]

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$이므로 삼각형 OBC는 직각이등변삼각형이고 $\angle BOC=\frac{\pi}{2}$이다.

$\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$라 하면 두 삼각형 OAB, OCA의 넓이 S_1, S_2는 각각

$$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$$

주어진 조건에서 $3S_1=4S_2$이므로

$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$$

$\alpha+\beta+\frac{\pi}{2}=2\pi$이므로 $\beta=\frac{3\pi}{2}-\alpha$

$$\sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서 $\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$$\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$$

$\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서 $\cos\alpha<0$

따라서 $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$

코사인법칙에 의하여 구하는 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB}=\sqrt{(\overline{OA})^2+(\overline{OB})^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OB}\cos\alpha}$$
$$=\sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2(\sqrt{10})^2\times\left(-\frac{3}{5}\right)}$$
$$=4\sqrt{2}$$

90) [정답] ②

[해설]

$\angle ABC=\theta$, $\angle DAB=2\theta$이므로 $\angle BDA=\pi-3\theta$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AB}}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$$

이므로 $\overline{AD}=\frac{3\sin\theta}{\boxed{\sin(\pi-3\theta)}}$이다.

또한 $\angle EAD=\theta$이고 $\angle ADE=2\theta$이므로 $\angle DEA=\pi-3\theta$이다.

삼각형 ADE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{DE}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi-3\theta)}\times\overline{AD}=\boxed{\frac{1}{3}}\times\overline{AD}^2$$

이다. 따라서 삼각형 ADE의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DE}\times\sin(\angle ADE)$$

$$=\frac{1}{6}\times\left\{\frac{3\sin\theta}{\sin(\pi-3\theta)}\right\}^3\times\sin2\theta$$

$$=\frac{9}{2}\times\left(\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)^3\times\boxed{\sin2\theta}$$

이다.

$f(\theta)=\sin(\pi-3\theta)$, $g(\theta)=\sin2\theta$, $p=\frac{1}{3}$이므로

$$p\times f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times g\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{3}\times\sin\frac{\pi}{2}\times\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{6}$$

91) [정답] ⑤

[해설]

원의 중심을 O라 하면 $\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=3:4:5$이므로

$\angle A:\angle B:\angle C=4:5:3$

그런데, $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$이므로

$$\angle A=\frac{4}{12}\times180^\circ=60^\circ$$

$$\angle C=\frac{3}{12}\times180^\circ=45^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 둘레의 길이가 12이므로 외접원의 반지름 R은 $2\pi R=12$

$$\therefore R=\frac{6}{\pi}$$

즉, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$\frac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}=\frac{\overline{AB}}{\sin45^\circ}=\frac{12}{\pi}$이므로

$$\overline{BC}=\frac{6\sqrt{3}}{\pi},\ \overline{AB}=\frac{6\sqrt{2}}{\pi}$$

$\overline{AC}=x$라 하면 $\triangle ABC$에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\cos A$$

즉, $\frac{108}{\pi^2}=\frac{72}{\pi^2}+x^2-2\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot x\cdot\cos60^\circ$에서

$$x^2-\frac{6\sqrt{2}}{\pi}x-\frac{36}{\pi^2}=0$$

$$\therefore x=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\pi}$$

따라서 $\overline{AC}=\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\pi}$이므로

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\pi}\cdot\sin60^\circ$$

$$=\frac{27+9\sqrt{3}}{\pi^2}$$

따라서 $\frac{\pi^2 S}{9}=3+\sqrt{3}$

92) [정답] **13**

[해설]

$\overline{AB}=a$라 하면 $\overline{DA}=2a$이다.

삼각형 DAB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BD}^2=a^2+(2a)^2-2\times a\times2a\times\cos\frac{2}{3}\pi=7a^2$이므로

$\overline{BD}=\sqrt{7}a$이다.

$\overline{BE}:\overline{ED}=3:4$이므로

(삼각형 ABC의 넓이) : (삼각형 ADC의 넓이)

$=3:4$

$\angle ABC=\theta$라 할 때,

(삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{BA}\times\overline{BC}\times\sin\theta$

(삼각형 ADC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DC}\times\sin(\pi-\theta)$

이고

(삼각형 ABC의 넓이) : (삼각형 ADC의 넓이)

$=\overline{BA}\times\overline{BC}:\overline{DA}\times\overline{DC}=3:4$

이므로 $\overline{BC}=\frac{3}{2}\overline{DC}$이다.

$\overline{DC}=k$라 하면 $\overline{BC}=\frac{3k}{2}$이고 $\overline{BD}=\sqrt{7}a$, $\angle BCD=\frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\left(\frac{3k}{2}\right)^2+k^2-(\sqrt{7}a)^2}{2\times\frac{3k}{2}\times k}$이므로 $k=2a$이고 $\overline{BC}=3a$,

$\overline{DC}=2a$이다.

삼각형 DAB의 외접원의 반지름의 길이가 1이고 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{7}a}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2$이므로 $a=\frac{\sqrt{21}}{7}$이다.

(삼각형 ABD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{2}{3}\pi$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}$

(삼각형 BCD의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{21}}{7}\times\frac{2\sqrt{21}}{7}\times\sin\frac{\pi}{3}$

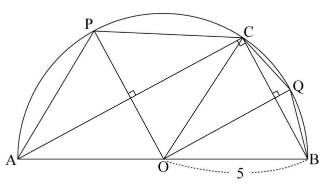
$=\frac{9\sqrt{3}}{14}$

이므로 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{3\sqrt{3}}{14}+\frac{9\sqrt{3}}{14}=\frac{6\sqrt{3}}{7}$이다.

따라서 $p+q=13$

93) [정답] 19

[해설]



원의 중심을 O라 하자. △ABC의 넓이가 11이므로,

$\frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{BC}=11$, $\overline{AC}\cdot\overline{BC}=22\cdots$ ①

△ABC직각삼각형, $\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2\cdots$ ②

①, ②에서 $\overline{AC}+\overline{BC}=12$ $\cdots$ ③

한편 $\overline{AC}\perp\overline{OP}$, $\overline{BC}\perp\overline{OQ}$일 때, △ACP와 △BCQ의 넓이가 각각 최대이다.

△ACP와 △BCQ의 넓이의 합의 최댓값은

□AOCP+□BQCO−△ABC

$=\frac{1}{2}\times5\times\overline{AC}+\frac{1}{2}\times5\times\overline{BC}-11$

$=\frac{1}{2}\times5\times(\overline{AC}+\overline{BC})-11$

$=\frac{1}{2}\times5\times12-11=19$ ($\because$ ③)

94) [정답] 103

[해설]

$\cos A=\frac{6^2+5^2-4^2}{2\times6\times5}=\frac{3}{4}$ 이므로 $\sin A=\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이다.

△ABC 의 넓이$=\frac{1}{2}\times6\times5\times\frac{\sqrt{7}}{4}=\frac{15\sqrt{7}}{4}$

$\overline{PF}=x$라 하면

$\frac{15\sqrt{7}}{4}=\frac{1}{2}\left(6x+4\sqrt{7}+\frac{5\sqrt{7}}{2}\right)\therefore x=\frac{\sqrt{7}}{6}$

$\triangle EFP=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{6}\times\frac{\sqrt{7}}{2}\sin(\pi-A)=\frac{7\sqrt{7}}{96}$

$\therefore p+q=103$

95) [정답] 71

[해설]

삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하자.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의해

$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C$

조건 (가)에 의해

$\sin A=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$ 이므로

$a=\frac{\sqrt{15}}{2}R$ …… ㉠

조건 (나)에 의해

$b+c=2R(\sin B+\sin C)=2R\times\frac{9}{8}=\frac{9}{4}R$ …… ㉡

삼각형 ABC의 넓이가 $\sqrt{15}$ 이므로

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$ 에서 $bc=8$ …… ㉢

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=b^2+c^2+\frac{1}{2}bc$

$=(b+c)^2-\frac{3}{2}bc$

㉠, ㉡, ㉢에 의해

$\left(\frac{\sqrt{15}}{2}R\right)^2=\left(\frac{9}{4}R\right)^2-\frac{3}{2}\times8$에서 $R^2=\frac{64}{7}$ 이므로

삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\frac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$이며 $p+q=71$

96) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{AB}=\overline{AD}=k$라 할 때

두 삼각형 ABC, ACD에서 각각 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ACB)=\frac{10^2+\overline{BC}^2-k^2}{2\times10\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{BC}}\right)$$

$$\cos(\angle DCA)=\frac{10^2+\overline{CD}^2-k^2}{2\times10\times\overline{CD}}$$

$$=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{\boxed{100-k^2}}{\overline{CD}}\right)$$

이다.

이때 두 호 AB, AD에 대한 원주각의 크기가 같으므로 $\cos(\angle ACB)=\cos(\angle DCA)$이다.

$$\frac{1}{20}\left(\overline{BC}+\frac{100-k^2}{\overline{BC}}\right)=\frac{1}{20}\left(\overline{CD}+\frac{100-k^2}{\overline{CD}}\right)$$

$$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\left(\frac{1}{\overline{CD}}-\frac{1}{\overline{BC}}\right)$$

$$\overline{BC}-\overline{CD}=(100-k^2)\times\frac{\overline{BC}-\overline{CD}}{\overline{BC}\times\overline{CD}}$$

$\overline{AC}=10<2R$이므로 $\overline{BC}\neq\overline{CD}$

그러므로 $\overline{BC}\times\overline{CD}=100-k^2$

사각형 ABCD의 넓이는

두 삼각형 ABD, BCD의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{1}{2}k^2\sin(\angle BAD)+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\angle BAD)$$

$$=\frac{1}{2}\{k^2+(100-k^2)\}\sin(\angle BAD)$$

$$=50\sin(\angle BAD)=40$$

에서 $\sin(\angle BAD)=\boxed{\frac{4}{5}}$이다.

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BD}}{\sin(\angle BAD)}=2R$에서 $\overline{BD}=\frac{8}{5}R$이므로

$\overline{BD}:R=\boxed{\frac{8}{5}}:1$

따라서 $f(k)=100-k^2$, $p=\frac{4}{5}$, $q=\frac{8}{5}$이므로

$$\frac{f(10p)}{q}=(100-8^2)\times\frac{5}{8}=\frac{45}{2}$$

97) [정답] ④

[해설]

$\overline{AD}=\overline{CE}=a\,(a>0)$이라 하면 삼각형 ADE에서

코사인법칙에 의하여 $(\sqrt{13})^2=a^2+(a+1)^2-2a(a+1)\cos\frac{\pi}{3}$

$$a^2+a-12=0,\ (a+4)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3$$

$(\triangle ADE$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$

$(\triangle ABE$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times4\times1\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서

$(\triangle BDE$의 넓이$)$

$=(\triangle ADE$의 넓이$)-(\triangle ABE$의 넓이$)=2\sqrt{3}$

98) [정답] ③

[해설]

$\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 $\angle OAP=\angle OPA=\theta$

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle CPD=\frac{\pi}{2}-\theta$

$4\sin\theta=3\cos\theta$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$$\sin^2\theta+\frac{16}{9}\sin^2\theta=1,\ \sin^2\theta=\frac{9}{25}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$, $\cos\theta=\frac{4}{5}$

$\overline{AB}=10$, $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{PA}=10\cos\theta=8$, $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}=8$

(삼각형 ADC의 넓이)

=(삼각형 PAD의 넓이)+(삼각형 PDC의 넓이)

−(삼각형 PAC의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin\theta+\frac{1}{2}\times8\times8\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times8\times8$$

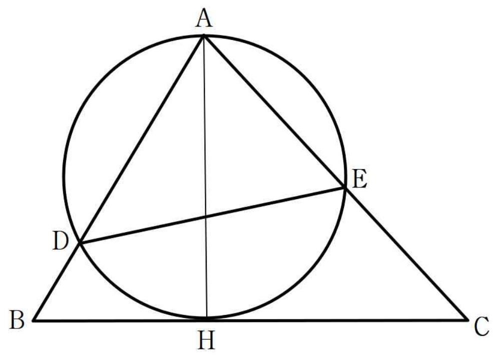
$$=32\sin\theta+32\cos\theta-32$$

$$=32\times\frac{3}{5}+32\times\frac{4}{5}-32$$

$$=\frac{64}{5}$$

99) [정답] ⑤

[해설]



선분 DE가 최소가 될 때는 그림과 같이 수선 AH가 원의 지름일 때이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 적용하면

$$\cos A=\frac{25+36-49}{2\times5\times6}=\frac{1}{5}$$

따라서 $\sin A=\frac{\sqrt{24}}{5}$ $(\because \sin A>0)$

또, 삼각형의 넓이를 비교하면

$$\frac{1}{2}\times5\times6\times\sin A=\frac{1}{2}\times7\times\overline{AH}$$

이므로 $\overline{AH}=\frac{6\sqrt{24}}{7}$

즉, 원은 지름이 $\overline{AH}$이고, 삼각형 ADE의 외접원이므로

사인법칙 $\frac{\overline{DE}}{\sin A}=2R$에서

$$\overline{DE}=\overline{AH}\times\sin A=\frac{6\sqrt{24}}{7}\times\frac{\sqrt{24}}{5}=\frac{144}{35}$$

100) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $\angle BCA=\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\angle CBA)=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{3}{7}$

$\sin(\angle CBA)=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ (참)

ㄴ. $\angle CBA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$\angle ADC=\pi-\theta$

$\overline{AC}=\overline{AB}\times\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{AD}=k(k>0)$이라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=k^2+7^2-2\times k\times7\times\cos(\pi-\theta)$

$\quad=k^2+49+14k\cos\theta$

$\quad=k^2+6k+49$

$k^2+6k-111=0$이므로

$\overline{AD}=-3+\sqrt{9+111}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 삼각형 ACD의 넓이가 최대일 때 사각형 ABCD의 넓이가 최대이므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이다. 그러므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$

$\overline{AD}=x(x>0)$이라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여 $(4\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos(\pi-\theta)$

$\quad=2x^2+2x^2\times\frac{3}{7}=\frac{20}{7}x^2$

$x^2=56$이므로 $\overline{AD}=2\sqrt{14}$

사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{14})^2\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ