[준킬러][수학1] 1지수로그

03 수1 01 지수

01 거듭제곱근

04 거듭제곱근4 (성질과 계산)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 13

1. 실수 $r=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1}$에 대하여

$$r+r^2+r^3=a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$$

일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b, c는 유리수이다.)

① 7 ② 9 ③ 11

④ 13 ⑤ 15

03 수1 01 지수

02 지수의 확장과 지수법칙

01 지수법칙1 (정수지수)

[출처] 2013 모의_공공 경찰대 고3 07월 8

2. 이차방정식 $x^2-x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^{11}+\beta^{11}$의 값은?

① 123 ② 144 ③ 150

④ 175 ⑤ 199

03 수1 01 지수

02 지수의 확장과 지수법칙

02 지수법칙2 (유리수지수)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 17

3. 두 집합 $A=\{3, 4\}$, $B=\{-9, -3, 3, 9\}$에 대하여 집합 X를

$$X=\{x \mid x^a=b,\ a\in A,\ b\in B,\ x\text{는 실수}\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다.

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 모든 원소의 곱은 $\sqrt[4]{3^7}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 11

4. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은?

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

03 수1 01 지수

02 지수의 확장과 지수법칙

05 식의 계산1 (대입)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 09월 4

5. $3^a=2$, $3^b=5$, $3^c=50$일 때, $3^{3a+2b-c}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 09월 28

6. 함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\,(x\geq 0)$의 그래프가 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2^b)$, $\mathrm{B}(c,\ 4^d)$을 지나고 $b+2d=12$일 때, ac의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 16

7. 두 실수 a, b에 대하여 $2^a=3$, $6^b=5$일 때, 2^{ab+a+b}의 값은?

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

03 수1 01 지수

02 지수의 확장과 지수법칙

06 식의 계산2 (밑의 통일)

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고2 09월 18

8. $abcd \neq 0$인 네 실수 a, b, c, d에 대하여

$$2^a = 3^b = 6^c = 12^d,\ \frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$$

일 때, 좌표평면 위의 점 $(a,\ 0)$과 직선 $y = x + 8\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{c}\right)$ 사이의 거리는?

① $3\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $5\sqrt{2}$
④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $7\sqrt{2}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 15

9. 두 양수 a, b에 대하여

$$2^a = 3^b,\ (a-2)(b-2) = 4$$

일 때, $4^a \times 3^{-b}$의 값은?

① 12 ② 18 ③ 36
④ 54 ⑤ 72

03 수1 01 지수

02 지수의 확장과 지수법칙

10 식의 계산6 (연립의 기술)

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 21

10. $60^a=5$, $60^b=6$일 때, $12^{\frac{2a+b}{1-a}}$의 값을 구하시오.

03 수1 01 지수

02 지수의 확장과 지수법칙

11 해석과 추론

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 21

11. 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\left\{(a,\ b)\ \middle|\ 2^a=\frac{m}{b},\ a,\ b\text{는 자연수}\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $A_4=\{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$

ㄴ. 자연수 k에 대하여 $m=2^k$이면 $n(A_m)=k$이다.

ㄷ. $n(A_m)=1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

03 수1 01 지수

03 지수법칙의 활용

01 활용1 (대소 비교)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 8

12. 세 함수

$$f(x)=(1+r_1)^x,\ g(x)=\left(1+\frac{r_2}{2}\right)^{2x},\ h(x)=\left(1+\frac{r_3}{4}\right)^{4x}$$

에 대하여 $f(10)=g(10)=h(10)$ 일 때, r_1, r_2, r_3 의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은?
(단, r_1, r_2, r_3 는 양의 실수이다.)

① $r_1<r_2<r_3$ ② $r_1<r_3<r_2$ ③ $r_2<r_1<r_3$

④ $r_2<r_3<r_1$ ⑤ $r_3<r_2<r_1$

[출처] 2006 모의_공공 교육청 고3 10월 28

13. $0<a<b<c<1$ 을 만족하는 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$A=a^ab^bc^c,\ B=a^ab^cc^b,\ C=a^bb^cc^a$$

이라고 하자. 이때, A, B, C 의 대소 관계로 옳은 것은?

① $C<B<A$ ② $B<C<A$ ③ $C<A<B$
④ $A<C<B$ ⑤ $B<A<C$

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 18

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 18

14. 다음은 $11^{15}<55^{9}<11^{17}<33^{13}<11^{19}$임을 이용하여 세 수 $A=3^{273}$, $B=5^{189}$, $C=11^{126}$의 크기를 비교하는 과정이다.

> 먼저 A와 B의 크기를 비교해 보자.
> 189와 273의 최대공약수는 $\boxed{(가)}$ 이므로
> $\frac{A}{B}=\frac{3^{273}}{5^{189}}=\left(\frac{3^{13}}{5^{9}}\right)^{21}$ 이다.
> $11^{15}<55^{9}<11^{17}<33^{13}<11^{19}$을 이용하면
> 3^{13} $\boxed{(나)}$ 5^{9}이므로
> $\frac{A}{B}$ $\boxed{(나)}$ 1이다.
> $\therefore$ A $\boxed{(나)}$ B
> 같은 방법으로 A와 C, B와 C의 크기를 비교할 수 있다.
> 따라서 A, B, C 의 대소관계는 $\boxed{(다)}$ 이다

이 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	21	$>$	$B<A<C$
②	21	$<$	$A<C<B$
③	21	$<$	$C<A<B$
④	57	$>$	$B<C<A$
⑤	57	$<$	$C<A<B$

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 27

15. 부등식 $1<m^{n-5}<n^{m-8}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여

$$A=m^{\frac{1}{m-8}}\times n^{\frac{1}{n-5}},$$
$$B=m^{-\frac{1}{m-8}}\times n^{\frac{1}{n-5}},$$
$$C=m^{\frac{1}{m-8}}\times n^{-\frac{1}{n-5}}$$

이라고 할 때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은?

① $A>B>C$ ② $A>C>B$

③ $B>A>C$ ④ $B>C>A$

⑤ $C>A>B$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 8

16. $2^{A}=3$, $3^{B}=5$, $7^{C}=27$일 때, 세 수 A, B, C의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$

③ $B<A<C$ ④ $B<C<A$

⑤ $C<B<A$

03 수1

01 지수

03 지수법칙의 활용

02 활용2 (정수론)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 27

17. $-2 \le m \le 2$, $1 \le n \le 16$인 두 정수 m, n에 대하여 $\sqrt[4]{n^m}$이 유리수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수를 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

18. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 자연수 k의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(6)=3$이다. $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 04월 17

19. 두 자연수 a, b에 대하여

$$\sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}} \text{ 이 자연수, } \sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} \text{ 이 유리수}$$

일 때, $a+b$의 최솟값은?

① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 21

20. 자연수 n에 대하여 $f(n)$이 다음과 같다.

$$f(n)=\begin{cases} \sqrt[4]{9 \times 2^{n+1}} & (n\text{이 홀수}) \\ \sqrt[4]{4 \times 3^n} & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$$

10이하의 두 자연수 p, q에 대하여 $f(p)\times f(q)$가 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는?

① 36 ② 38 ③ 40

④ 42 ⑤ 44

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 21

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
>
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

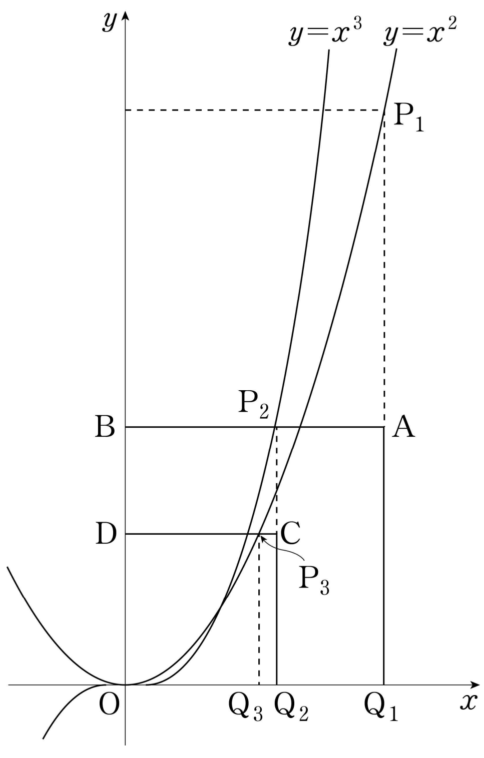
03 수1　　01 지수

03 지수법칙의 활용

03 활용3 (도형조건과 함수조건)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 15

22. 그림과 같이 좌표평면에 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P_1(a, f(a))\,(a>1)$에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_1이라 하자. 선분 OQ_1을 한 변으로 하는 정사각형 OQ_1AB의 한 변 AB가 곡선 $y=g(x)$와 만나는 점을 P_2, 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_2라 하자. 선분 OQ_2를 한 변으로 하는 정사각형 OQ_2CD의 한 변 CD가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 P_3, 점 P_3에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_3이라 하자. 두 점 Q_2, Q_3의 x좌표를 각각 b, c라 할 때, $bc=2$가 되도록 하는 점 P_1의 y좌표의 값은?
(단, O는 원점이고, 두 점 A, C는 제 1사분면에 있다.)



① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

03 수1 01 지수

03 지수법칙의 활용

04 활용4 (실생활)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 16

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 16

23. 한 은행은 고객으로부터 100만원을 연이율 5%의 5년 만기 정기예금으로 받으면, 그 중에서 90만원을 연이율 r%로 5년 동안 대출하고 나머지 10만원은 예비비로 보관한다. 5년 후 은행은 대출금을 이자와 함께 회수하고 고객에게 정기예금을 이자와 함께 지불하여 20만원의 수익을 얻으려고 한다. 이때, 대출 이율 r를 구하는 식은? (단, 모든 이자는 1년마다의 복리로 계산한다.)

① $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=10^5$

② $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=2\times10^5$

③ $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5-9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5=3\times10^5$

④ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=10^5$

⑤ $9\times10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5-10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5=2\times10^5$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 20

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 20

24. 과거 n년 동안 매출액이 a원에서 b원으로 변했을 때 연평균 성장률은

$$(\text{연평균 성장률})=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1$$

로 나타내어진다. 다음은 두 회사 A, B의 매출액을 나타낸 표이다.

(단위 : 억 원)

회사명	1998년 말	2008년 말
A	100	200
B	121	484

이때, 1998년 말부터 2008년 말까지 10년 동안 B 회사의 연평균 성장률은 A 회사의 k배이다. $100k$의 값을 구하시오.

(단, $2^{\frac{11}{10}}=2.14$로 계산한다.)

03 수1

02 로그

01 로그의 정의

01 로그의 정의1 (정의)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 23

25. $\log_a b = \dfrac{3}{2}$, $\log_c d = \dfrac{3}{4}$을 만족시키는 자연수 a, b, c, d에 대하여 $a-c=19$일 때, $b-d$의 값을 구하시오.

03 수1

02 로그

02 로그의 성질

06 로그의 성질6 (식의 값 구하기)

[출처] 2005 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

26. 1보다 큰 세 실수 a, b, c에 대하여 두 등식

$$\begin{cases} a^2b^3 = 64 \\ 3(\log_a c)^2 - 2(\log_b c)^2 = -(\log_a c)(\log_b c) \end{cases}$$

이 성립하도록 하는 두 수 a와 b에 대하여 $\log_2 ab$의 값은?

① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2

④ $\dfrac{5}{2}$　⑤ 3

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 19

27. 2 이상의 세 실수 a, b, c가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이다.

(나) $\log_a bc+\log_b ac=4$

$a=\left(\frac{b}{c}\right)^k$이 되도록 하는 실수 k의 값은?

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 28

28. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오.

(가) $3^a=5^b=k^c$

(나) $\log c=\log(2ab)-\log(2a+b)$

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

29. 두 양수 a, $b(a>b)$에 대하여 $9^a=2^{\frac{1}{b}}$, $(a+b)^2=\log_3 64$일 때, $\frac{a-b}{a+b}$의 값은?

① $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{30}}{6}$

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

30. 두 실수 x, y가 $\log_2(x+\sqrt{2}y)+\log_2(x-\sqrt{2}y)=2$를 만족할 때, $|x|-|y|$의 최솟값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ 1 ⑤ $\sqrt{2}$

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

09 로그의 성질 활용2 (해석)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 13

31. 두 상수 a, b $(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은?

① 760 ② 800 ③ 840
④ 880 ⑤ 920

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

11 로그의 성질 활용4 (Mm)

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

32. 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P(x, y)에 대하여 $\log_{\frac{1}{2}}(y+1)-\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$의 최솟값을 m이라 할 때, 2^m의 값은? (단, $y\neq -1$이다.)

① 3 ② $\frac{3}{2}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

03 수1 02 로그

02 로그의 성질

13 로그의 성질 활용6 (정수론)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 10월 25

33. 다음 두 조건을 동시에 만족시키는 자연수 x 의 개수를 구하시오. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(가) $200 \le x \le 300$

(나) $[\log_2 x] = [\log_3 x] + [\log_4 x]$

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 06월 30

[출처] 2011 모의_공공 평가원 고3 06월 30

34. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S 라 할 때, $n \in S$ 에 대하여 집합

$$\{k \mid k \in S \text{ 이고 } \log_2 n - \log_2 k \text{ 는 정수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$ 이고 $f(99)=1$ 이다. 이때, $f(n)=1$ 인 n 의 개수를 구하시오.

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 09월 18

35. 2 이상의 자연수 k에 대하여

집합 $A_k=\{x|\log_k x$가 유리수, $2\le x\le 100$인 자연수$\}$라 할 때, <보기>에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.)

<보 기>

ㄱ. $n(A_2)=6$

ㄴ. $n(A_3)+n(A_9)+n(A_{27})+n(A_{81})=16$

ㄷ. $A_m\cap A_n\ne\phi$이면 $A_m=A_n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 03월 20

36. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

(가) $[\log_3 n]=3$

(나) $[\log n^2]=[\log 2n]+2$

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월

37. 2 이상 100 이하의 자연수 n에 대하여 집합

$$\{\log_n k\,|\,k\text{는 자연수, } 1\le k\le n\}$$

의 원소 중 유리수의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어 $f(3)=2$, $f(4)=3$이다. $f(n)\ge 5$가 되는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 29

38. $\log_2(-x^2+ax+4)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6일 때, 모든 자연수 a의 값의 곱을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 평가원 고3 06월 30

39. 다음 조건을 만족시키는 20 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오.

> $\log_2(na-a^2)$과 $\log_2(nb-b^2)$은 같은 자연수이고
>
> $0<b-a\le\dfrac{n}{2}$인 두 실수 a, b가 존재한다.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 03월 29

40. 2 이상의 자연수 x에 대하여

$\log_x n$ (n은 $1\le n\le 300$인 자연수)

가 자연수인 n의 개수를 $A(x)$라 하자. 예를 들어, $A(2)=8$, $A(3)=5$이다. 집합 $P=\{2,3,4,5,6,7,8\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X에서 집합 X로의 대응 f를

$f(x)=A(x)\,(x\in X)$

로 정의하면 어떤 대응 f는 함수가 된다. 함수 f가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X의 개수를 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 30

41. 자연수 m에 대하여 집합 A_m

$A_m=\{ab\mid \log_2 a+\log_4 b$는 100 이하의 자연수,
$a(1\le a\le m)$은 자연수, $b=2^k$ (k는 자연수)$\}$

라 하자. $n(A_m)=205$가 되도록 하는 m의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 29

42. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{\frac{b}{a}\,\middle|\,\log_a b=\frac{k}{2},\ a\text{와 } b\text{는 } 2\text{ 이상 } 100\text{ 이하의 자연수}\right\}$$

라 할 때, $n(A_3)+n(A_4)$의 값을 구하시오.

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 06월 19

43. 자연수 n에 대하여 $2^{\frac{1}{n}}=a$, $2^{\frac{1}{n+1}}=b$라 하자.

$\left\{\dfrac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5$이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16

④ 17 ⑤ 18

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고2 11월 21

44. $4<a<b<200$인 두 자연수 a, b에 대하여 집합

$$A=\{k\mid k=\log_a b,\ k\text{는 유리수}\}$$

라 하자. $n(A)$의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 27

[출처] 2022 일반_시중교재 시대인재 FLOW

45. $\log_4 2n^2-\dfrac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$의 값이 40이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 06월 28

46. 자연수 k에 대하여 두 집합

$$A=\{\sqrt{a}\mid a\text{는 자연수, } 1\le a\le k\},$$
$$B=\{\log_{\sqrt{3}}b\mid b\text{는 자연수, } 1\le b\le k\}$$

가 있다. 집합 C를

$$C=\{x\mid x\in A\cap B,\ x\text{는 자연수}\}$$

라 할 때, $n(C)=3$이 되도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 21

47. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\dfrac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 06월 29

48. 자연수 $m(m\ge 2)$에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{\log_m x\,|\,x\text{는 100 이하의 자연수 }\}$$

라 하고, 집합 B를

$$B=\{2^k\,|\,k\text{는 10 이하의 자연수 }\}$$

라 하자. 집합 B의 원소 b에 대하여 $n(A_4\cap A_b)=4$가 되도록 하는 모든 b의 값의 합을 구하시오.

[준킬러][수학1] 1지수로그(빠른 정답)

프로젝트 2023.01.06

1. [정답] ⑤
2. [정답] ⑤
3. [정답] ⑤
4. [정답] ②
5. [정답] ④

6. [정답] 128
7. [정답] ①
8. [정답] ①
9. [정답] ③
10. [정답] **150**

11. [정답] ⑤
12. [정답] ⑤
13. [정답] ①
14. [정답] ②
15. [정답] ①

16. [정답] ③
17. [정답] **28**
18. [정답] 64
19. [정답] ①
20. [정답] ⑤

21. [정답] **24**
22. [정답] ⑤
23. [정답] ④
24. [정답] **207**
25. [정답] **973**

26. [정답] ④
27. [정답] ①
28. [정답] **75**
29. [정답] ④
30. [정답] ⑤

31. [정답] ②
32. [정답] ④
33. [정답] **43**
34. [정답] 25
35. [정답] ⑤

36. [정답] ④
37. [정답] **193**
38. [정답] **30**
39. [정답] **78**
40. [정답] **7**

41. [정답] **127**
42. [정답] 12
43. [정답] ①
44. [정답] ①
45. [정답] 13

46. [정답] **45**
47. [정답] 426
48. [정답] 72

[준킬러][수학1] 1지수로그(해설)

프로젝트 2023.01.06

1) [정답] ⑤

[해설]
$\sqrt[3]{2}=t$로 치환하면

$$r=\frac{3}{t^2-t+1}$$
$$=\frac{3(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)}$$
$$=\frac{3(t+1)}{t^3+1}=\frac{3(t+1)}{2+1}$$
$$=t+1$$
$$=\sqrt[3]{2}+1\ (\because \sqrt[3]{2}=t)$$

즉, $r-1=\sqrt[3]{2}$ 이므로 $r-1=x$라 하면

$$x^2=\sqrt[3]{4},\ x^3=2$$

$r=x+1$이므로 구하고자 하는 식에 대입하면

$$r+r^2+r^3=(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3$$
$$=x^3+4x^2+6x+3$$
$$=2+4\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}+3$$
$$=4\sqrt[3]{4}+6\sqrt[4]{3}+5$$

따라서 $a=4,\ b=6,\ c=5$이므로

$$a+b+c=4+6+5=15$$

2) [정답] ⑤

[해설]
α가 방정식의 근이므로

$\alpha^2=\alpha+1$

$\alpha^3=\alpha^2+\alpha=2\alpha+1$

$\alpha^4=2\alpha^2+\alpha=3\alpha+2$

$\alpha^5=3\alpha^2+2\alpha=5\alpha+3$

$\alpha^6=5\alpha^2+3\alpha=8\alpha+5$

$\vdots$

$\therefore\ \alpha^{11}=\alpha^5\cdot\alpha^6=40\alpha^2+49\alpha+15=89\alpha+55$

마찬가지 방법으로

$\beta^{11}=89\alpha+55$

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=1$이므로

$\alpha^{11}+\beta^{11}=89(\alpha+\beta)+110=199$

[다른 풀이]
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-1$

$a_n=\alpha^n+\beta^n$이라 하면

$a_{n+2}=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n+\beta^n)=a_{n+1}+a_n$

이 성립한다.

$a_1=\alpha+\beta=1,\ a_2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha=3$이므로

$a_3=1+3=4$ $\quad a_4=3+4=7$

$a_5=4+7=11$ $\quad a_6=7+11=18$

$a_7=11+18=29$ $\quad a_8=18+29=47$

$a_9=29+47=76$ $\quad a_{10}=47+76=123$

$a_{11}=76+123=199$ $\quad \cdots$

$\therefore\ \alpha^{11}+\beta^{11}=199$

3) [정답] ⑤

[해설]

집합 X의 원소는 b의 a제곱근 중에서 실수인 것들이다.

$a=3$일 때, $\sqrt[3]{-9},\ \sqrt[3]{-3},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9}$ 이고

$a=4$일 때, $\pm\sqrt[4]{3},\ \pm\sqrt[4]{9}$ 이므로

집합 X를 구하면

$X=\{\sqrt[3]{-9},\ \sqrt[3]{-3},\ \sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ -\sqrt{3},\ -\sqrt[4]{3},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt{3}\}$

이다.

ㄱ. $\sqrt[3]{-9}\in X$ (참)

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수는 8이다. (참)

ㄷ. 집합 X의 원소 중 양수인 것은

$\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{9},\ \sqrt[4]{3},\ \sqrt{3}$ 이므로 모든 원소의 곱의 값은

$3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}=3^{\frac{7}{4}}=\sqrt[4]{3^7}$ 이다. (참)

4) [정답] ②

[해설]
$\sqrt{3}^{f(n)}>0$이므로 $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}=3^{\frac{f(n)}{8}},\ -\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}=3^{\frac{f(n)}{8}}$ 이다.

조건에 의하면 실수인 것의 곱이 -9이므로

$3^{\frac{f(n)}{8}}\times\left(-3^{\frac{f(n)}{8}}\right)=-9$, 즉 $-3^{\frac{f(n)}{4}}=-9$이다.

따라서 $f(n)=8$이다.

함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 $f(n)=8$을 만족하는 자연수 n의 개수가 2개라 하였는데 함수 $f(x)$의 대칭축이 $x=2$이므로 만족하는 자연수 n은 1, 3이다.

즉, $f(1)=8$, $f(3)=8$이므로 $-1+k=8$이다.

$\therefore\ k=9$

5) [정답] ④

[해설]

$3^{3a+2b-c}=\dfrac{3^{3a}3^{2b}}{3^c}=\dfrac{(3^a)^3(3^b)^2}{3^c}=\dfrac{8\times 25}{50}=4$

6) [정답] 128

[해설]

$\dfrac{1}{2}a^2=2^b$, $\dfrac{1}{2}c^2=4^d$이므로

$\dfrac{1}{4}(ac)^2=2^{b+2d}=2^{12}$

$\therefore\ ac=2^7=128$

7) [정답] ①

[해설]

$$\begin{aligned}2^{ab+a+b}&=(2^a)^b\times 2^a\times 2^b\\&=3^b\times 3\times 2^b\\&=(3\times 2)^b\times 3\\&=5\times 3=15\end{aligned}$$

[다른 풀이]

$$6^b=(2\times 3)^b=(2\times 2^a)^b=2^{ab+b}$$

$$\begin{aligned}2^{ab+a+b}&=2^{ab+b}\times 2^a\\&=6^b\times 2^a\\&=5\times 3=15\end{aligned}$$

8) [정답] ①

[해설]

$2^a=3^b=6^c=12^d=k$로 놓으면

$k^{\frac{1}{a}}=2$ ······ ㉠

$k^{\frac{1}{b}}=3$ ······ ㉡

$k^{\frac{1}{c}}=6$ ······ ㉢

$k^{\frac{1}{d}}=12$ ······㉣

㉡, ㉢에서 $k^{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}=2$이므로 $k^{\frac{1}{4}}=2$ $\therefore\ k=16$

㉠에 $k=16$을 대입하면 $a=4$

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{d}-\frac{1}{c}}=2$이므로 $\dfrac{1}{d}-\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$

점 $(4,\ 0)$과 직선 $y=x+2$사이의 거리는

$\dfrac{|4+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$

9) [정답] ③

[해설]

$2^a=3^b=k\ (k>1)$이라 놓으면

$2=k^{\frac{1}{a}}$, $3=k^{\frac{1}{b}}$

$(a-2)(b-2)=4$에서

$\dfrac{a+b}{ab}=\dfrac{1}{2}$

$k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}=k^{\frac{a+b}{ab}}=k^{\frac{1}{2}}=6$

따라서

$4^a\times 3^{-b}=\dfrac{(2^a)^2}{3^b}=\dfrac{k^2}{k}=k=36$

[다른 풀이]

$2^a=3^b=k\ (k>1)$이라 놓으면

$a=\log_2 k$, $b=\log_3 k$

$(a-2)(b-2)=(\log_2 k-2)(\log_3 k-2)$

$=\log_2 k\times\log_3 k-2\log_2 k-2\log_3 k+4=4$

$\log_2 k\times\log_3 k-2(\log_2 k+\log_3 k)=0$

$\dfrac{\log_2 k+\log_3 k}{\log_2 k\times\log_3 k}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{\log_2 k}+\dfrac{1}{\log_3 k}=\dfrac{1}{2}$

$\log_k 2+\log_k 3=\log_k 6=\dfrac{1}{2}$,

즉

$k^{\frac{1}{2}}=6$

따라서

$4^a \times 3^{-b} = \dfrac{(2^a)^2}{3^b} = \dfrac{k^2}{k} = k = 36$

10) [정답] 150

[해설]

$$12^{\frac{2a+b}{1-a}} = \left(\frac{60}{5}\right)^{\frac{2a+b}{1-a}} = 60^{\frac{2a+b}{1-a}} 5^{\frac{2a+b}{a-1}} = (150)^{\frac{1}{1-a}} 60^{\frac{a(2a+b)}{a-1}}$$

$$= (150)^{\frac{1}{1-a}} (150)^{\frac{a}{a-1}} = (150)^{\frac{a-1}{a-1}} = 150$$

11) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. A_4는 $2^a = \dfrac{4}{b}$에서 $4 = 2^a \times b$인

자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$4 = 2^1 \times 2,\ 4 = 2^2 \times 1$

$A_4 = \{(1,\ 2),\ (2,\ 1)\}$ (참)

ㄴ. $m = 2^k$일 때, $A_m = A_{2^k}$

A_m은 $2^a = \dfrac{2^k}{b}$에서

$2^k = 2^a \times b$인

자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이므로

$A_m = \{(1,\ 2^{k-1}),\ (2,\ 2^{k-2}),\ (3,\ 2^{k-3}),\ \cdots,(k,\ 2^0)\}$

이다.

따라서 $n(A_m) = k$ (참)

ㄷ. A_m은 $2^a = \dfrac{m}{b}$에서

$m = 2^a \times b$인 자연수의 순서쌍을 원소로 갖는 집합이다.

$n(A_m) = 1$이 되기 위해서는

$b = \dfrac{m}{2^k}$이 자연수가 되도록 하는 자연수 k가

오직 하나만 존재하므로

$k = 1$이어야 한다.

따라서 $m = 2^1 \times (\text{홀수})$이어야 한다.

두 자리 자연수 중에서 $2^1 \times (\text{홀수})$인 자연수는

$2 \times 5,\ 2 \times 7,\ 2 \times 9,\ \cdots,\ 2 \times 49$

이다.

따라서 $n(A_m) = 1$이 되도록 하는 두 자리 자연수 m의

개수는 $5,\ 7,\ 9,\ \cdots,\ 49$의 개수와 같다.

$5,\ 7,\ 9,\ \cdots,\ 49$는 첫째항이 5이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제23항을 나타낸 것이므로 조건을 만족시키는 두 자리 자연수 m의 개수는 23이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12) [정답] ⑤

[해설]

$f(10) = g(10)$에서

$(1 + r_1)^{10} = \left(1 + \dfrac{r_2}{2}\right)^{20}$

$1 + r_1 = \left(1 + \dfrac{r_2}{2}\right)^2 = 1 + r_2 + \left(\dfrac{r_2}{2}\right)^2$

$r_1 = r_2 + \left(\dfrac{r_2}{2}\right)^2$

$\therefore\ r_1 > r_2$ …… ㉠

$g(10) = h(10)$에서

$\left(1 + \dfrac{r_2}{2}\right)^{20} = \left(1 + \dfrac{r_3}{4}\right)^{40}$

$1 + \dfrac{r_2}{2} = \left(1 + \dfrac{r_3}{4}\right)^2 = 1 + \dfrac{r_3}{2} + \left(\dfrac{r_3}{4}\right)^2$

$r_2 = r_3 + 2\left(\dfrac{r_3}{4}\right)^2$

$\therefore\ r_2 > r_3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$r_3 < r_2 < r_1$

13) [정답] ①

[해설]

(1) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{a^a b^b c^c}{a^a b^c c^b} = \dfrac{b^{b-c}}{c^{b-c}} = \left(\dfrac{b}{c}\right)^{b-c}$에서

$0 < \dfrac{b}{c} < 1,\ b - c < 0$이므로 $\dfrac{A}{B} > 1\ \therefore\ B < A$

(2) $\dfrac{B}{C} = \dfrac{a^a b^c c^b}{a^b b^c c^a} = \dfrac{a^{a-b}}{c^{a-b}} = \left(\dfrac{a}{c}\right)^{a-b}$에서

$0 < \dfrac{a}{c} < 1,\ a - b < 0$이므로 $\dfrac{B}{C} > 1\ \therefore\ C < B$

(1), (2)에서 $C < B < A$

14) [정답] ②

[해설]
(가) $\boxed{21}$
(나) $\boxed{<}$
(다) $\boxed{A<C<B}$

15) [정답] ①

[해설]
m, n이 자연수이므로

$1<m^{n-5}$에서 $n-5>0$, …… ㉠

$1<n^{m-8}$에서 $m-8>0$ …… ㉡

또, $m^{n-5}<n^{m-8}$에서 $\dfrac{n^{m-8}}{m^{n-5}}>1$ …… ㉢

$$\frac{A}{B}=\frac{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{-\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}=m^{\frac{2}{m-8}}>1\ (\because\ ㉡)$$

$\therefore A>B$

$$\frac{A}{C}=\frac{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{-\frac{1}{n-5}}}=n^{\frac{2}{n-5}}>1\ (\because\ ㉠)$$

$\therefore A>C$

$$\frac{B}{C}=\frac{m^{-\frac{1}{m-8}}\cdot n^{\frac{1}{n-5}}}{m^{\frac{1}{m-8}}\cdot n^{-\frac{1}{n-5}}}=m^{-\frac{2}{m-8}}\cdot n^{\frac{2}{n-5}}$$

$$=\left(m^{-(n-5)}\cdot n^{m-8}\right)^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}}$$

$$=\left(\frac{n^{m-8}}{m^{n-5}}\right)^{\frac{2}{(m-8)(n-5)}}>1$$

$(\because\ ㉢)$ $\therefore B>C$

따라서 $A>B>C$

16) [정답] ③

[해설]
$8^A=27$, $9^B=25$, $7^C=27$

ⅰ) $8^A>9^B>8^B \therefore A>B$

ⅱ) $7^C>9^B>7^B \therefore C>B$

ⅲ) $7^C=8^A>7^A \therefore C>A$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $B<A<C$이다.

17) [정답] **28**

[해설]

$\sqrt[4]{n^m}=n^{\frac{m}{4}}$에서

(ⅰ) $m=0$일 때
n의 값에 관계없이 유리수가 되므로
$n=1, 2, 3, \cdots, 16$

(ⅱ) $m=-1$ 또는 $m=1$일 때
n이 어떤 자연수의 네제곱인 수가 되어야 하므로
$n=1, 16$

(ⅲ) $m=-2$ 또는 $m=2$일 때
n이 어떤 자연수의 제곱인 수가 되어야 하므로
$n=1, 4, 9, 16$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는
$16+(2\times2)+(2\times4)=28$

18) [정답] 64

[해설]
$n^{\frac{4}{k}}$의 값이 자연수인 경우의 예로 $n=6$이라고 하면
$6^{\frac{4}{k}}$에서 $k=1, 2, 4$인 3가지이므로 $f(6)$이다.
이것으로부터 생각하기를 n이 거듭제곱 수인 경우를 관찰해보자.

n이 소수 m의 완전제곱수이면 $(m^2)^{\frac{4}{k}}=m^{\frac{8}{k}}$에서
k는 8의 양의 약수인 1, 2, 4, 8일 때이고 $f(n)=4$이다.
이것을 차례로 적용해 보면
n이 3제곱수이면 $4\times3=12=2^2\times3$의 양의 약수의 개수 6
n이 4제곱수이면 $4\times4=16=2^4$의 양의 약수의 개수 5
n이 5제곱수이면 $4\times5=20=2^2\times5$의 양의 약수의 개수 6
n이 6제곱수이면 $4\times6=24=2^3\times3$의 양의 약수의 개수 8
따라서 $f(n)=8$을 만족시키는 n의 최솟값은 $2^6=64$이다.

19) [정답] ①

[해설]

(ⅰ) $\sqrt{\frac{2^a\times 5^b}{2}}=2^{\frac{a-1}{2}}\times 5^{\frac{b}{2}}$ 이 자연수이므로

$a-1=2m$, $a=2m+1$(m은 음이 아닌 정수)

$a=1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

$b=2n$(n은 자연수)

$b=2,\ 4,\ 6,\ \cdots$

(ⅱ) $\sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}}=\frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이므로

$a+1=3k$, $a=3k-1$(k는 자연수)

$a=2,\ 5,\ 8,\ \cdots$

$b=3l$(l은 자연수)

$b=3,\ 6,\ 9,\ \cdots$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

a의 최솟값은 5, b의 최솟값은 6

따라서 $a+b$의 최솟값은 11

20) [정답] ⑤

[해설]

(ⅰ) p, q가 모두 홀수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}$$
$$=3\times\sqrt[4]{2^{p+q+2}}$$

에서 $p+q+2$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

① $p+q+2=4$일 때, $(1,\ 1)$
② $p+q+2=8$일 때, $(1,\ 5)$, $(3,\ 3)$, $(5,\ 1)$
③ $p+q+2=12$일 때, $(1,\ 9)$, $(3,\ 7)$, $(5,\ 5)$, $(7,\ 3)$, $(9,\ 1)$
④ $p+q+2=16$일 때, $(5,\ 9)$, $(7,\ 7)$, $(9,\ 5)$
⑤ $p+q+2=20$일 때, $(9,\ 9)$

이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 13이다.

(ⅱ) p는 홀수, q는 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{9\times 2^{p+1}}\times\sqrt[4]{4\times 3^{q}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{p+3}\times 3^{q+2}}$$

에서 $p+3$과 $q+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10이하이므로

$p+3=4,\ 8,\ 12$, $q+2=4,\ 8,\ 12$

이고, 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(1,\ 2)$, $(1,\ 6)$, $(1,\ 10)$, $(5,\ 2)$, $(5,\ 6)$, $(5,\ 10)$, $(9,\ 2)$, $(9,\ 6)$, $(9,\ 10)$

이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 9이다.

(ⅲ) p는 짝수, q는 홀수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^{p}}\times\sqrt[4]{9\times 2^{q+1}}$$
$$=\sqrt[4]{2^{q+3}\times 3^{p+2}}$$

에서 $q+3$과 $p+2$가 각각 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10이하이므로

$p+2=4,\ 8,\ 12$, $q+3=4,\ 8,\ 12$

이고, 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

$(2,\ 1)$, $(2,\ 5)$, $(2,\ 9)$, $(6,\ 1)$, $(6,\ 5)$, $(6,\ 9)$, $(10,\ 1)$, $(10,\ 5)$, $(10,\ 9)$

이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 9이다.

(ⅳ) p, q가 모두 짝수일 때,

$$f(p)\times f(q)=\sqrt[4]{4\times 3^{p}}\times\sqrt[4]{4\times 3^{q}}$$
$$=2\times\sqrt[4]{3^{p+q}}$$

에서 $p+q$가 4의 배수일 때, $f(p)\times f(q)$는 자연수이다.
두 자연수 p, q가 각각 10 이하이므로 조건에 맞는 순서쌍 $(p,\ q)$는

① $p+q=4$일 때, $(2,\ 2)$
② $p+q=8$일 때, $(2,\ 6)$, $(4,\ 4)$, $(6,\ 2)$
③ $p+q=12$일 때, $(2,\ 10)$, $(4,\ 8)$, $(6,\ 6)$, $(8,\ 4)$, $(10,\ 2)$
④ $p+q=16$일 때, $(6,\ 10)$, $(8,\ 8)$, $(10,\ 6)$
⑤ $p+q=20$일 때, $(10,\ 10)$

이므로 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 13이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의해 구하는 모든 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는 44이다.

21) [정답] **24**

[해설]

(가)조건에서 $(x^n-64)f(x)=0$의 서로 다른 실근은 모두 중근이므로 n은 짝수이어야 한다.

(가)조건을 만족시키는 $f(x)$를 $f(x)=(x-\alpha)(x+\alpha)$라 하면 (나)조건에서 $f(x)$의 최솟값이 음의 정수라 했으므로 $f(x)$의 최솟값 $f(0)=-\alpha^2$에서 α^2은 정수이다. …… ㉠

또한, (가)에서 $x^n-64=0$이 $x=\alpha$, $-\alpha$를 가져야 하므로

$\alpha^n = 64 = 2^6$, 즉 $\alpha = 2^{\frac{6}{n}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha^2 = 2^{\frac{12}{n}}$ 을 만족하는 정수이어야 하므로 n은 12의 약수 중 짝수가 되어야 한다.

즉, 12의 약수인 짝수는 2, 4, 6, 12이므로 만족하는 n의 값은 2, 4, 6, 12이다.

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은 24

22) [정답] ⑤

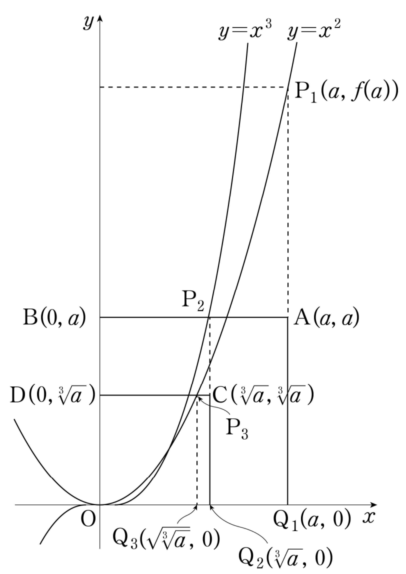
[해설]

점 P_2의 y좌표는 정사각형 OQ_1AB의 한 변의 길이가 a이므로

$b = \sqrt[3]{a}$

점 P_3의 y좌표는 정사각형 OQ_2CD의 한 변의 길이가 b이므로

$c = \sqrt{b} = \sqrt[6]{a}$



$$\begin{aligned} bc &= \sqrt[3]{a}\sqrt[6]{a} \\ &= a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

$a = 4$

따라서 점 P_1의 y좌표의 값은 16이다.

23) [정답] ④

[해설]

연이율 5%의 5년 만기 정기예금 100만원에 대한 5년 후의 원리합계는 $10^6 \cdot \left(1+\frac{5}{100}\right)^5$

대출 이율이 r%인 대출금 90만 원에 대한 5년 후의 원리합계는 $9 \times 10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5$

이 은행은 100만 원의 정기예금에서 90만 원을 대출해 주고 10만 원의 예비비를 보관하고 있으므로 5년 후 20만 원의 수익을 얻으려면 정기예금의 원리합계와 대출금의 원리합계의 차가 10만 원이면 된다.

$\therefore 9 \times 10^5\left(1+\frac{r}{100}\right)^5 - 10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^5 = 10^5$

24) [정답] **207**

[해설]

$k = \dfrac{4^{\frac{1}{10}} - 1}{2^{\frac{1}{10}} - 1} = 2^{\frac{1}{10}} + 1$

그런데 $2^{\frac{11}{10}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{10}} = 2.14$이므로 $2^{\frac{1}{10}} = 1.07$이다.

$k = 2^{\frac{1}{10}} + 1 = 2.07$

$\therefore 100k = 207$

25) [정답] **973**

[해설]

$b = a^{\frac{3}{2}}$, $d = c^{\frac{3}{4}}$ 즉 $a = b^{\frac{2}{3}}$, $c = d^{\frac{4}{3}}$이고 자연수이므로 $a = x^2$꼴, $c = y^4$꼴이다.

따라서 $b = x^3$, $d = y^3$꼴이다.

$a - c = 19$에서 $x^2 - y^4 = 19$이므로 $(x+y^2)(x-y^2) = 19$

즉 만족하는 경우는 다음 4가지의 경우이다.

(i) $x + y^2 = 1$, $x - y^2 = 19$
이 경우 만족하는 자연수 x, y가 없다.

(ii) $x + y^2 = -1$, $x - y^2 = -19$
이 경우 만족하는 자연수 x, y가 없다.

(iii) $x + y^2 = -19$, $x - y^2 = -1$
이 경우 만족하는 자연수 x, y가 없다.

(ⅳ) $x+y^2=19,\ x-y^2=1$

따라서 $x=10,\ y=3$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $a=100,\ b=1000,\ c=81,\ d=27$

$\therefore\ b-d=973$

26) [정답] ④

[해설]

$a^2b^3=64$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$2\log_2 a+3\log_2 b=6$ …… (1)

또한, 주어진 식을 정리하면

$(3\log_a c-2\log_b c)(\log_a c+\log_b c)=0$

여기서 a,b,c 는 모두 1보다 큰 실수이므로

$\log_a c+\log_b c>0$

따라서,

$3\log_a c=2\log_b c$

$3\dfrac{\log_2 c}{\log_2 a}=2\dfrac{\log_2 c}{\log_2 b}$

$2\log_2 a=3\log_2 b$ …… (2)

식 (1)과 (2)로부터 $\log_2 b=1,\ \log_2 a=\dfrac{3}{2}$ 이다. 따라서,

$\log_2 ab=\log_2 a+\log_2 b=\dfrac{5}{2}$

27) [정답] ①

[해설]

(가)에서 $\sqrt[3]{a}$는 ab의 네제곱근이므로

$a^{\frac{4}{3}}=ab,\ b=a^{\frac{1}{3}}$

(나)에서

$$\log_a bc+\log_b ac=\log_a a^{\frac{1}{3}}c+\log_{a^{\frac{1}{3}}}ac$$
$$=\frac{1}{3}\log_a a+\log_a c+3(\log_a a+\log_a c)$$
$$=\frac{10}{3}+4\log_a c=4$$

$\log_a c=\dfrac{1}{6},\ c=a^{\frac{1}{6}}$

따라서 $a=\left(\dfrac{b}{c}\right)^k=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}}\right)^k=\left(a^{\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}\right)^k=a^{\frac{k}{6}}$이므로

$k=6$

28) [정답] **75**

[해설]

$3^a=5^b=k^c=X$라고 하면 $3=X^{\frac{1}{a}},5=X^{\frac{1}{b}},k=X^{\frac{1}{c}}$이다.

한편 주어진 조건에서 $\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{b}$이므로

$X^{\frac{1}{c}}=X^{\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}}=X^{\frac{1}{2a}}X^{\frac{1}{b}}$이다. 즉, $k=\sqrt{3}\times 5$이다. 따라서 $k^2=75$이다.

29) [정답] ④

[해설]

$9^a=2^{\frac{1}{b}}$에서 $3^{2ab}=2$,

$(a+b)^2=\log_3 64$에서 $3^{(a+b)^2}=64=2^6$, 즉 $3^{\frac{(a+b)^2}{6}}=2$

$2ab=\dfrac{(a+b)^2}{6},\ a^2-10ab+b^2=0,$

$t=\dfrac{a}{b}$라 하면 $a>b>0$에서 $t>1$이고

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-10\left(\dfrac{a}{b}\right)+1=0,\ t^2-10t+1=0,\ t=5+2\sqrt{6}$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{t-1}{t+1}=\frac{4+2\sqrt{6}}{6+2\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}}$$
$$=\frac{(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

30) [정답] ⑤

[해설]

주어진 로그 등식에서

$x+\sqrt{2}y>0,\ x-\sqrt{2}y>0,\ x^2-2y^2=4$

이므로 $|x|>|y|$이다. $|x|=X,\ |y|=Y$라 하면

$X^2-2Y^2=4,\ X-Y=k$

에서 $X^2-2(X-k)^2=4,\ X^2-4kX+2k^2+4=0$

$D/4=4k^2-2k^2-4=2k^2-4\geq 0,\ k\geq\sqrt{2}$

$k=\sqrt{2}$일 때 $X=2\sqrt{2},\ Y=\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{2}$이다.

31) [정답] ②

[해설]

두 점 $(a,\ \log_2 a)$, $(b,\ \log_2 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\dfrac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$ …… ㉠

두 점 $(a,\ \log_4 a)$, $(b,\ \log_4 b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)+\log_4 a$

그러므로 이 직선의 y절편은

$-\dfrac{a(\log_4 b-\log_4 a)}{b-a}+\log_4 a$

$=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\dfrac{1}{2}\log_2 a$ …… ㉡

㉠과 ㉡이 같으므로

$-\dfrac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\log_2 a$

$=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}+\dfrac{1}{2}\log_2 a$

이 식을 정리하면

$\dfrac{1}{2}\times\log_2 a=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$

$\log_2 a=\dfrac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}$

$(b-a)\log_2 a=a\log_2\dfrac{b}{a}$

$\log_2 a^{b-a}=\log_2\left(\dfrac{b}{a}\right)^a$

$a^{b-a}=\dfrac{b^a}{a^a}$

$a^b=b^a$ …… ㉢

한편, $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$이고 $f(1)=40$이므로

$a^b+b^a=40$

㉢을 대입하면

$a^b+a^b=40$

$a^b=20$

따라서 $b^a=20$이므로

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}$

$=(a^b)^2+(b^a)^2$

$=20^2+20^2$

$=800$

32) [정답] ④

[해설]

주어진 식은 결국 $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{y+1}{x+3}\right)$의 최솟값을 구하라는 것과 같다. 그런데, 밑$0<\dfrac{1}{2}<1$이므로 $\dfrac{y+1}{x+3}$이 최대일 때 주어진 식은 최솟값을 갖는다.

여기서, $\dfrac{y+1}{x+3}$의 의미를 살펴보면 $\dfrac{y-(-1)}{x-(-3)}$, 즉 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,y)$와 $(-3,\ -1)$을 이은 직선의 기울기의 최댓값을 구하라는 것으로 해석할 수 있다.

이 때, 기울기의 최솟값은 $(-3,\ -1)$을 지나면서 기울기가 k인 직선이 원과 접할 때의 k값이다.

$\therefore y+1=k(x+3),\ kx-y+3k-1=0$

결국 원의 중심으로부터 직선까지의 거리가 1이 되는 그러한 m값을 찾아주면 된다.

$\therefore\dfrac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Rightarrow 4k^2-3k=0,\ \therefore k=\dfrac{3}{4}(\because y\neq -1)$

$\therefore\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{y+1}{x+3}\right)\geq\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{3}{4}=m\ \therefore 2^m=\dfrac{4}{3}$

33) [정답] **43**

[해설]

$200\leq x\leq 300$ 이므로 $7<\log_2 x<9$

(i) $7<\log_2 x<8$ 즉, $200\leq x<256$일 때

$[\log_2 x]=7,\ [\log_4 x]=[\dfrac{1}{2}\log_2 x]=3$ 이므로 $[\log_3 x]=4$

$\therefore 4\leq\log_3 x<5,\ 200\leq x<243$

(ii) $8 \le \log_2 x < 9$ 즉, $256 \le x \le 300$ 일 때

$[\log_2 x]=8$, $[\log_4 x]=4$, $[\log_3 x]=5$ 이므로 조건 (나)를 만족하는 자연수는 없다.

(i), (ii)에서 자연수 x는 43개이다.

34) [정답] 25

[해설]

$1 \le k \le 100$, $n \in S$ 인 자연수에서

$S=\{k \mid k \in S$이고 $\log_2 n - \log_2 k$ 는 정수$\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이므로 $f(n)=1$ 은 $\log_2 n - \log_2 k = m$ (m은 정수)인 집합 S의 원소(k)가 1개인 n의 값을 구하는 문제이다.

$\log_2 n - \log_2 k = \log_2 \frac{n}{k} = m$에서 $\frac{n}{k} = 2^m$ ($1 \le k, n \le 100$인 자연수) 이때, $\log_2 \frac{n}{k}$이 정수여야 한다.

$k=n$이면 $\log_2 \frac{n}{n} = 1$(정수)이므로 항상 $f(n) \ge 1$을 만족하게 된다. 그런데, $f(n) \ge 2$인 경우는 주어진 식의 값이 정수가 되는 k가 2개 이상 존재한다.

(1) $k=2n$인 경우 $\log_2 \frac{n}{2n} = -1$으로 정수가 된다.

$\therefore$ $n \in S$ 이고, $2n \in S$을 만족

따라서 $0 < 2n \le 100$, $0 < n \le 50$

(2) $k=\frac{n}{2}$인 경우 $\log_2 \frac{n}{\frac{n}{2}} = 1$으로 정수가 된다.

$\therefore$ $n \in S$ 이고, $\frac{n}{2} \in S$을 만족

$\frac{n}{2}$이 정수가 되므로 n은 짝수

따라서 n이 짝수 또는 50이하의 정수이면, $f(n) \ge 2$가 된다.

그러므로, $f(n)=1$을 만족하도록 하는 자연수 n은 50 이상의 홀수여야 한다. $\therefore$ 25개

35) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $A_2 = \{x \mid \log_2 x$가 유리수, $2 \le x \le 100$인 자연수$\}$

$=\{2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6\}$

이므로 $n(A_2)=6$ (참)

ㄴ. $n(A_3)=n(A_9)=n(A_{27})=n(A_{81})=4$이므로

$n(A_3)+n(A_9)+n(A_{27})+n(A_{81})=16$(참)

ㄷ. $x \in A_m \cap A_n$에 대하여

$x=m^p=n^q$ (p, q는 양의 유리수)

$y \in A_m$이면 $y=m^r=x^{\frac{r}{p}}=n^{\frac{qr}{p}}$는 ($r$는 양의 유리수) 이므로 $y \in A_n$이다. 즉, $A_m \subset A_n$

같은 방법으로 $A_n \subset A_m$이므로 $A_m = A_n$ (참)

$\therefore$ ㄱ, ㄴ, ㄷ

36) [정답] ④

[해설]

$[\log_3 n]=3$ 에서 $3^3 \le n < 3^4$ 이므로

$[\log 2n]=1$ 또는 $[\log 2n]=2$ 이다.

(i) $[\log 2n]=1$ 일 때 즉, $27 \le n < 50$ 일 때

(나)에서 $[2\log n]=3$이므로

$3 \le 2\log n < 4$, $\frac{3}{2} \le \log n < 2$

$\therefore$ $\log 10\sqrt{10} \le \log n < \log 100$, $10\sqrt{10} \le n < 100$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 n은

$32 \le n < 50$ 이므로 자연수 n의 개수는 18이다.

(ii) $[\log 2n]=2$ 일 때 즉, $50 \le n < 81$ 일 때

(나)에서 $[2\log n]=4$ 이므로

$4 \le 2\log n < 5$, $2 \le \log n < \frac{5}{2}$

$\therefore \log 100 \le \log n < \log 100\sqrt{10}$, $100 \le n < 100\sqrt{10}$

따라서 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n의 개수는 18이다.

37) [정답] **193**

[해설]

$\log_n k$가 유리수라 하면 $\log_n k = \frac{q}{p}$ (p, q는 정수, $p \ne 0$)이고

$\log_n k = \frac{q}{p} \times 1 = \frac{q}{p}\log_m m = \log_{m^p} m^q$ (m은 2이상의 자연수)

이므로 $n=m^p$ 일 때 $k=m^q$이다.

즉, $n=2^p$ 일 때 $\log_n k$가 유리수가 되기 위해서는

$k=1,\ 2,\ 2^2, \cdots, 2^{p-1}, 2^p$ 이므로 $f(2^p)=p+1$ 이다. 그러므로

$f(n) \geq 5$를 만족하는 자연수 n은 $2^4,\ 2^5,\ 2^6$ 이다.

$n=3^p$ 일 때 $\log_n k$가 유리수가 되기 위해서는

$k=1,\ 3,\ 3^2, \cdots, 3^{p-1}, 3^p$ 이므로 $f(3^p)=p+1$ 이다. 그러므로

$f(n) \geq 5$를 만족하는 자연수 n은 3^4 이다.

$m \geq 4$ 일 때 $f(n) \geq 5$ 가 되는 100 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다. 따라서 $f(n) \geq 5$ 가 되는 모든 자연수 n의 값의 합은 $2^4+3^4+2^5+2^6=193$ 이다.

38) [정답] 30

[해설]

$f(x)=-x^2+ax+4$ 라 하면

로그의 진수 조건에 의해 $f(x)>0$

$f(x)=-x^2+ax+4$

$=-\left(x^2-ax+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{4}\right)+4$

$=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}+4$

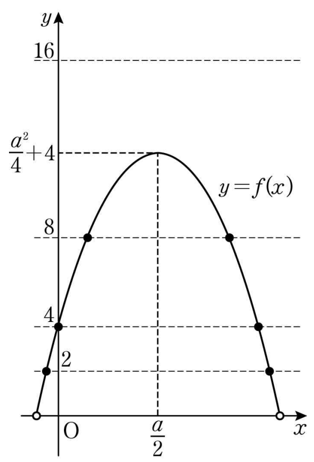
$\log_2(-x^2+ax+4)$ 의 값이 자연수가 되는 실수 x의 개수가 6 이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는 아래 그림과 같이 $y=2^1$, $y=2^2$, $y=2^3$ 과 각각 2개의 점에서 만나고 $y=2^n$ $(n \geq 4)$와는 만나지 않는다.

즉,

$2^3 < \dfrac{a^2}{4}+4 < 2^4$

$16 < a^2 < 48$ 이고, a가 자연수이므로 $a=5,\ 6$

따라서 $5 \times 6 = 30$



39) [정답] 78

[해설]

진수의 조건에서

$na-a^2>0,\ nb-b^2>0$ 이므로

$0<a<n,\ 0<b<n$

또 $\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)$ 에서

$na-a^2=nb-b^2$

$(b-a)(b+a-n)=0$

$b-a>0$ 이므로 $b+a=n$

$na-a^2=(b+a)a-a^2=ab$ 이므로

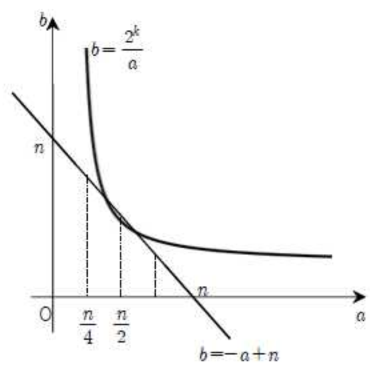
$ab=2^k$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 꼴이어야 한다.

한편, $0<b-a \leq \dfrac{n}{2}$ 에서

$0<(n-a)-a \leq \dfrac{n}{2},\ 0<b-(n-b) \leq \dfrac{n}{2}$

$\dfrac{n}{4} \leq a < \dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2} < b \leq \dfrac{3n}{4}$

즉 그림과 같이 좌표평면에서 직선 $b+a=n$ 과 곡선 $ab=2^k$ 가 $\dfrac{n}{4} \leq a < \dfrac{n}{2}$ 인 범위에서 만나는 점이 존재해야 한다.



$\dfrac{2^k}{\frac{n}{4}} \geq \dfrac{3n}{4},\ \dfrac{2^k}{\frac{n}{2}} < \dfrac{n}{2}$ 이 성립해야 하므로

$\dfrac{3n^2}{16} \leq 2^k < \dfrac{n^2}{4}$

$3n^2 \leq 2^{k+4} < 4n^2$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$k=1$ 일 때, $3n^2 \leq 32 < 4n^2$ 을 만족시키는 n의 값은 3

$k=3$ 일 때, $3n^2 \leq 128 < 4n^2$ 을 만족시키는 n의 값은 6

$k=4$ 일 때, $3n^2 \leq 256 < 4n^2$ 을 만족시키는 n의 값은 9

$k=5$ 일 때, $3n^2 \leq 512 < 4n^2$ 을 만족시키는 n의 값은

12, 13

$k=6$일 때, $3n^2 \le 1024 < 4n^2$ 을 만족시키는 n의 값은

17, 18

따라서 조건을 만족시키는 20이하의 자연수 n의 값은

3, 6, 9, 12, 13, 17, 18이고, 그 합은

$3+6+9+12+13+17+18=78$이다.

40) [정답] **7**

[해설]

$\log_x n$이 자연수가 되려면 n은 x의 거듭제곱이어야 하므로

$A(x)$의 값은 1부터 300 사이의 자연수 중

x의 거듭제곱으로 나타내어지는 수의 개수이다.

$2^8 < 300 < 2^9$이므로

$A(2)=8$

이와 같은 방법으로 2 이상의 자연수 x에 대하여

$A(x)$의 값을 구하면

$A(2)=8$, $A(3)=5$, $A(4)=4$, $A(5)=3$, $A(6)=3$,

$A(7)=2$, $A(8)=2$, $\cdots$

이므로 전체집합 P의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여

집합 X에서 집합 X로의 대응 f가 일대일 대응이 되려면 집합 X는 집합 $\{2, 3, 4, 5, 8\}$의 부분집합이어야 한다.

함수 f가 일대일 대응이므로

임의의 $a \in X$에 대하여

$f(a) \in X$, $f(f(a))=a$를 만족시키는 집합 X는

$\{4\}$, $\{2, 8\}$, $\{3, 5\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{3, 4, 5\}$,

$\{2, 3, 5, 8\}$, $\{2, 3, 4, 5, 8\}$

이다. 따라서 함수 $f: X \to X$가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X의 개수는 7이다.

41) [정답] **127**

[해설]

집합 A_m에서 $\log_2 a + \log_4 b = \log_4 a^2 b$가 100이하의 자연수이므로

$\log_4 a^2 b = \alpha (1 \le \alpha \le 100$, α는 자연수)라 하면 $a^2 b = 4^\alpha$이다.

따라서 $a^2 b = 4^1$, 4^2, 4^3, $\cdots$, 4^{100}이어야 한다.

(i) $a=1$일 때, $b=4^1$, 4^2, 4^3, $\cdots$, 4^{100}이므로

$b=2^k$ (k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=4^1$, 4^2, $\cdots$, 4^{100}

따라서 $m=1$일 때 $a=1$이므로

$ab=4^1$, 4^2, 4^3, $\cdots$, 4^{100}

$\therefore A_1 = \{4^1,\ 4^2,\ 4^3,\ \cdots,\ 4^{100}\}$

$\therefore n(A_1)=100$

(ii) $a=2$일 때, $b=4^0$, 4^1, 4^2, $\cdots$, 4^{99}이므로

$b=2^k$ (k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=2\times4^0$, 2×4^1, $\cdots$, 2×4^{99}

따라서 $m=2$일 때 $a=1$, $a=2$이므로

$ab=4^1$, 4^2, $\cdots$, 4^{100},

2×4^0, 2×4^1, $\cdots$, 2×4^{99}

$\therefore A_2 = \{4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^0,\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_2)=200$

(iii) $a=3$일 때, $b=\frac{4^1}{9}$, $\frac{4^2}{9}$, $\frac{4^3}{9}$, $\cdots$, $\frac{4^{100}}{9}$이므로

$b=2^k$ (k는 정수)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a=3$일 때 조건을 만족하는 ab는 존재하지 않는다.

따라서 $m=3$일 때 $a=1$, $a=2$, $a=3$이므로 집합 A_3의 원소의 개수는 집합 A_2의 원소의 개수와 같다.

$\therefore n(A_3)=200$

(iv) $a=4$일 때, $b=4^{-1}$, 4^0, 4^1, $\cdots$, 4^{98}이므로

$b=2^k$ (k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=4^0$, 4^1, 4^2, $\cdots$, 4^{99}

따라서 $m=4$일 때, $a=1$, $a=2$, $a=3$, $a=4$이므로

$ab=4^0$, 4^1, 4^2, $\cdots$, 4^{100}, 2×4^0, 2×4^1,

$\cdots$, 2×4^{99},

$\therefore A_4 = \{4^0,\ 4^1,\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^0,\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_4)=201$

(v) $a=5$, $a=6$, $a=7$일 때, $b=2^k$ (k는 정수)를 만족시키지 못한다.

이와 같이 $a \ne 2^\beta$ (β는 자연수)일 때, $b=2^k$ (k는 정수)를 만족시키지 못한다.

따라서 $a=5$, $a=6$, $a=7$일 때 조건을 만족하는 ab는 존재하지 않으므로 $m=5$, $m=6$, $m=7$일 때의 집합 A_m의

원소의 개수는 집합 A_4의 원소의 개수와 같다.

$\therefore n(A_m)=201(m=5,\ 6,\ 7)$

(vi) $a=8$일 때, $b=4^{-2},\ 4^{-1},\ 4^0,\ \cdots,\ 4^{97}$이므로 $b=2^k$ (k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=2\times4^{-1},\ 2\times4^0,\ \cdots,\ 2\times4^{98}$

따라서 $m=8$일 때 $a=1,\ a=2,\ \cdots,\ a=8$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^0,\ 2\times4^1,$
$\cdots,\ 2\times4^{99},\ 4^0,\ 2\times4^{-1}$

$\therefore A_8=\{4^0,\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^{-1},\ 2\times4^0,\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_8)=202$

⋮

(vii) $a=64$일 때, $b=4^{-5},\ 4^{-4},\ 4^{-3},\ \cdots,\ 4^{94}$이므로 $b=2^k$ (k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=4^{-2},\ 4^{-1},\ \cdots,\ 4^{97}$

따라서 $m=64$일 때 $a=1,\ a=2,\ \cdots,\ a=64$이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99},$
$4^0,\ 2\times4^{-1},\ 4^{-1},\ 2\times4^{-2},\ 4^{-2}$

$\therefore A_{64}=\{4^{-2},\ 4^{-1},\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^{-2},$
$2\times4^{-1},\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_{64})=205$

⋮

(viii) $a=128$일 때

$b=4^{-6},\ 4^{-5},\ 4^{-4},\ \cdots,\ 4^{93}$이므로 $b=2^k$ (k는 정수)를 만족시킨다.

$ab=2\times4^{-3},\ 2\times4^{-2},\ \cdots,\ 2\times4^{96}$

따라서 $m=128$일 때 $a=1,\ a=2,\ \cdots,\ a=128$ 이므로

$ab=4^1,\ 4^2,\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^0,\ 2\times4^1,\ \cdots,\ 2\times4^{99},$
$4^0,\ 2\times4^{-1},\ 4^{-1},\ 2\times4^{-2},\ 4^{-2},\ 2\times4^{-3}$

$\therefore A_{128}=\{4^{-2},\ \cdots,\ 4^{100},\ 2\times4^{-3},$
$2\times4^{-2},\ \cdots,\ 2\times4^{99}\}$

$\therefore n(A_{128})=206$

⋮

이와 같이 임의의 두 자연수 $p,\ q\ (p<q)$에 대하여 $n(A_p)\le n(A_q)$가 성립한다.

따라서 $n(A_m)=205$가 되도록 하는

자연수 m의 최댓값은 127

42) [정답] 12

[해설]

$\log_a b=\frac{k}{2}\Leftrightarrow b=a^{\frac{k}{2}}\Leftrightarrow b^2=a^k$이므로

$A_k=\left\{\frac{b}{a}\,\middle|\,b^2=a^k,\ a\text{와 } b\text{는 2이상 100이하의 자연수}\right\}$이다.

(i) $k=3$일 때

$b^2=a^3$을 만족하는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍은

$(2^2,2^3),\ (3^2,3^3),\ (4^2,4^3)$이므로 $A_3=\{2,3,4\}$이다. 따라서 $n(A_3)=3$이다.

(ii) $k=4$일 때

$b^2=a^4$을 만족하는 자연수 $a,\ b$의 순서쌍은

$(2,2^2),\ (3,3^2),\ (4,4^2),\ \cdots,\ (9,9^2),\ (10,10^2)$

이므로 $A_4=\{2,3,4,\cdots,10\}$이다.

따라서 $n(A_4)=9$이다.

(i), (ii)에 의하여 $n(A_3)+n(A_4)=3+9=12$이다.

43) [정답] ①

[해설]

$$\begin{aligned}\log_2 ab&=\log_2\left(2^{\frac{1}{n}}\times2^{\frac{1}{n+1}}\right)\\&=\log_2 2^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}}\\&=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\log_2 a)(\log_2 b)&=\left(\log_2 2^{\frac{1}{n}}\right)\left(\log_2 2^{\frac{1}{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

지수법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\left\{\frac{3^{\log_2 ab}}{3^{(\log_2 a)(\log_2 b)}}\right\}^5&=\left\{\frac{3^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)}}{3^{\left(\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+1}\right)}}\right\}^5\\&=\left\{3^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}}\right\}^5\\&=3^{\frac{10}{n+1}}\end{aligned}$$

$3^{\frac{10}{n+1}}$이 자연수가 되도록 하려면 $n+1$은 10의 약수가

되어야 한다. 그러므로 자연수 n의 값은 1, 4, 9이고 모든 자연수 n의 값의 합은 14이다.

44) [정답] ①

[해설]

$\log_a b=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)라 하면 서로 다른 유리수 $\frac{q}{p}$의 개수는 서로 다른 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수와 같다.

$\log_a b=\frac{q}{p}$이므로 $b=a^{\frac{q}{p}}$, $a^q=b^p$

a, b, p, q가 모두 자연수이므로, 어떤 자연수 c에 대하여 $a=c^p$, $b=c^q$이다.

$4<a<b<200$이므로 $4<c^p<c^q<200$이다.

(i) $c=2$일 때

$4<2^p<2^q<200$이고 이를 만족시키는 p, q의 순서쌍을 구하면 $(p,\ q)$는

(3, 4), (3, 5), (3, 7), (4, 5), (4, 7), (5, 6), (5, 7), (6, 7)

이므로 8개

(ii) $c=3$일 때

$4<3^p<3^q<200$이고 이를 만족시키는 p, q의 순서쌍을 구하면 $(p,\ q)$는 (2, 3), (3, 4)이므로 2개

(iii) $c=4$일 때

$4<4^p<4^q<200$이고 이를 만족시키는 p, q의 순서쌍을 구하면 $(p,\ q)$는 (2, 3)이므로 1개

(iv) $c=5$일 때

$4<5^p<5^q<200$이고 이를 만족시키는 p, q의 순서쌍을 구하면 $(p,\ q)$는 (1, 2), (1, 3), (2, 3)이므로 3개

(v) $6\le c\le 14$일 때

$4<c^p<c^q<200$이고 이를 만족시키는 p, q의 순서쌍을 구하면 $(p,\ q)$는 (1, 2)뿐이므로 모두 (iv)의 경우에 포함된다.

(i), (ii), (iii), (iv)에서 (2, 3)이 세 번, (3, 4)가 두 번 중복되었으므로 서로 다른 순서쌍 $(p,\ q)$의 개수는

$(8+2+1+3)-2-1=11$

따라서 $n(A)=11$

[다른 풀이]

$\log_a b=\frac{q}{p}$ (p, q는 서로소인 자연수)라 하면 $b=a^{\frac{q}{p}}$이고 $n(A)$는 서로 다른 $\frac{q}{p}$의 개수와 같다.

(i) $p=1$일 때

a는 $4<a<200$을 만족하는 자연수이고, 4보다 큰 자연수 중 가장 작은 수는 5이므로 $4<a<a^q<200$을 만족하는 모든 자연수 q는 $4<5<5^q<200$을 만족한다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 2, 3이다.

(ii) $p\ge 2$일 때

$a^{\frac{q}{p}}$이 자연수이므로 $a^{\frac{1}{p}}$은 자연수이다.

따라서 a가 될 수 있는 가장 작은 자연수는 2^p

(단, $p=2$일 때 $4<a$에서 $a=3^2$)

따라서 $4<a<200$이고 $a^{\frac{1}{p}}$이 자연수인 모든 자연수 a에 대하여 $4<a<a^{\frac{q}{p}}<200$을 만족하는 모든 자연수 q는 $4<2^p<(2^p)^{\frac{q}{p}}<200$을 만족한다.

따라서 서로 다른 유리수 $\frac{q}{p}$의 개수는

$4<2^p<2^q<200$을 만족시키는 $\frac{q}{p}$의 개수와 같다.

① $p=2$일 때

$4<3^2<3^q<200$을 만족하는 p와 서로소인 자연수 q는 3이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{3}{2}$이다.

② $p=3$일 때

$4<2^3<2^q<200$을 만족하는 p와 서로소인 자연수 q는 4, 5, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{7}{3}$이다.

③ $p=4$일 때

$4<2^4<2^q<200$을 만족하는 p와 서로소인 자연수 q는 5, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$이다.

④ $p=5$일 때

$4<2^5<2^q<200$을 만족하는 p와 서로소인 자연수 q는 6, 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$이다.

⑤ $p=6$일 때

$4<2^6<2^q<200$을 만족하는 p와 서로소인 자연수 q는 7이다.

따라서 $\frac{q}{p}$는 $\frac{7}{6}$이다.

$4<2^7<200<2^8$이므로 $p\ge 7$일 때 조건을 만족하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{q}{p}$의 개수는 11이다.

따라서 $n(A)=11$

45) [정답] 13

[해설]

풀이 $\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}=\log_4 2n^2-\log_4\sqrt{n}$

$=\log_4\frac{2n^2}{\sqrt{n}}$

$=\log_4\left(2n^{\frac{3}{2}}\right)$

이 값이 40 이하의 자연수가 되려면

$$2n^{\frac{3}{2}}=4^k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 40)$$

이어야 한다.

이때 $n=4^{\frac{2k-1}{3}}$이므로 $\frac{2k-1}{3}$이 자연수가 되어야 한다.

따라서

$k=2,\ 5,\ 8,\ \cdots,\ 38$이므로 자연수 n의 개수는 13이다.

46) [정답] 45

[해설]

집합 A의 자연수인 원소는 다음과 같다.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	$\cdots$
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$

그리고 집합 B의 자연수인 원소는 다음과 같다.

b	3	9	27	81	$\cdots$
$\log_{\sqrt{3}}b$	2	4	6	8	$\cdots$

따라서 $n(C)=3$이므로 $C=\{2,\ 4,\ 6\}$이다.

$8\not\in C$이므로 자연수 k의 범위는 $36\le k<81$

따라서 k의 개수는 $81-36=45$

47) [정답] 426

[해설]

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\log_8\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2$

이므로 이 값이 정수가 되려면

$\left(\frac{3}{4n+16}\right)^2=8^m$ (m은 정수) ……㉠

의 꼴이 되어야 한다.

그러려면 우선 $4n+16$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n=3k-1$ (k는 $1\le k\le 333$인 자연수)

이어야 한다. 이때 ㉠에서

$\left(\frac{1}{4k+4}\right)^2=2^{3m}$

$16(k+1)^2=2^{-3m}$

$(k+1)^2=2^{-3m-4}$

이어야 하므로

$(k+1)^2=2^2,\ 2^8,\ 2^{14}$

$k+1=2,\ 2^4,\ 2^7$

$k=1$ 또는 $k=15$ 또는 $k=127$

즉, $n=2$ 또는 $n=44$ 또는 $n=380$이므로 조건을 만족시키는 모든 n의 값의 합은

$2+44+380=426$

48) [정답] 72

[해설]

$A_4=\{\log_4 x|x$는 100 이하의 자연수 $\}$이고

10 이하의 자연수 k에 대하여 $b=2^k$이므로

$A_b=\{\log_{2^k}y|y$는 100 이하의 자연수 $\}$이다.

집합 $A_4\cap A_b$의 원소의 개수는 $\log_4 x=\log_{2^k}y$가 성립하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수와 같다.

$\log_4 x=\log_{2^k}y$이면 $\frac{1}{2}\log_2 x=\frac{1}{k}\log_2 y$,

$\log_2 x^k=\log_2 y^2$이므로 $x^k=y^2$이 성립한다.

따라서 $1\le x\le 100$, $1\le y\le 100$에서 $x^k=y^2$이 성립하는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 구하면 된다.

① $k=1$이면 $x=y^2$이므로

$(x,\ y)=(1^2,\ 1),\ (2^2,\ 2),\ (3^2,\ 3),\ \cdots,\ (10^2,\ 10)$

이고 $n(A_4\cap A_{2^1})=10$

② $k=2$이면 $x^2=y^2$이므로

$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ \cdots,\ (100,\ 100)$

이고 $n(A_4 \cap A_{2^2}) = 100$

③ $k=3$이면 $x^3 = y^2$이므로

$(x,\ y) = (1^2,\ 1^3),\ (2^2,\ 2^3),\ (3^2,\ 3^3),\ (4^2,\ 4^3)$이고

$n(A_4 \cap A_{2^3}) = 4$

④ $k=4$이면 $x^4 = y^2$, 즉 $x^2 = y$이므로

$(x,\ y) = (1,\ 1^2),\ (2,\ 2^2),\ (3,\ 3^2),\ \cdots,\ (10,\ 10^2)$

이고 $n(A_4 \cap A_{2^4}) = 10$

⑤ $k=5$이면 $x^5 = y^2$이므로

$(x,\ y) = (1^2,\ 1^5),\ (2^2,\ 2^5)$이고 $n(A_4 \cap A_{2^5}) = 2$

⑥ $k=6$이면 $x^6 = y^2$, 즉 $x^3 = y$이므로

$(x,\ y) = (1,\ 1^3),\ (2,\ 2^3),\ (3,\ 3^3),\ (4,\ 4^3)$이고

$n(A_4 \cap A_{2^6}) = 4$

⑦ $k=7$이면 $x^7 = y^2$이므로 $(x,\ y) = (1^2,\ 1^7)$이고

$n(A_4 \cap A_{2^7}) = 1$

⑧ $k=8$이면 $x^8 = y^2$, 즉 $x^4 = y$이므로

$(x,\ y) = (1,\ 1^4),\ (2,\ 2^4),\ (3,\ 3^4)$이고 $n(A_4 \cap A_{2^8}) = 3$

⑨ $k=9$이면 $x^9 = y^2$이므로 $(x,\ y) = (1^2,\ 1^9)$이고

$n(A_4 \cap A_{2^9}) = 1$

⑩ $k=10$이면 $x^{10} = y^2$, 즉 $x^5 = y$이므로

$(x,\ y) = (1,\ 1^5),\ (2,\ 2^5)$이고 $n(A_4 \cap A_{2^{10}}) = 2$

그러므로 만족하는 집합 B의 원소는 $2^3,\ 2^6$이므로

모든 b의 값의 합은 $8+64=72$