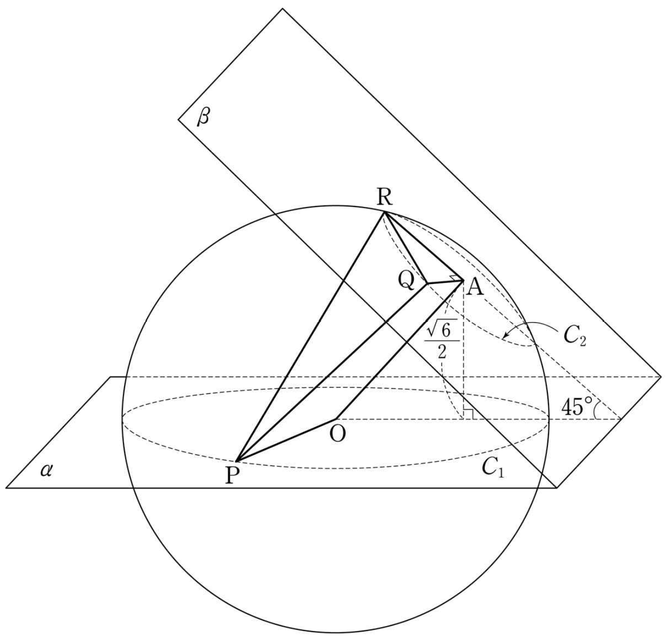
기하킬러 24제

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 예비 30

1. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

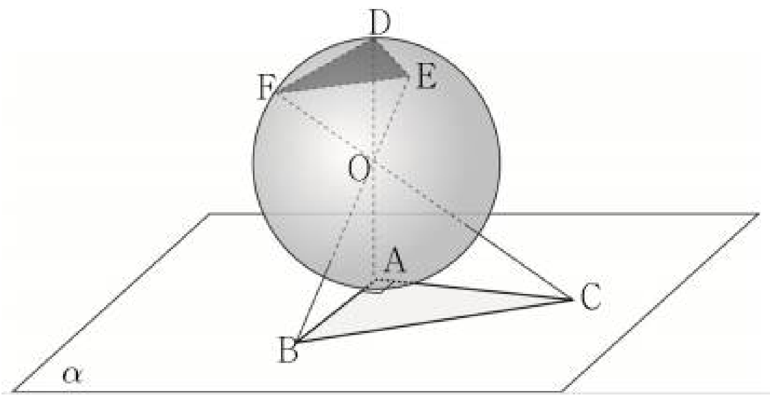
(가) $\angle QAR = 90$
(나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 07월 30

2. 그림과 같이 평면 α 위에 $\angle A = \frac{\pi}{2}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 2\sqrt{3}$인 삼각형 ABC가 있다. 중심이 점 O이고 반지름의 길이가 2인 구가 평면 α와 점 A에서 접한다. 세 직선 OA, OB, OC와 구의 교점 중 평면 α까지의 거리가 2보다 큰 점을 각각 D, E, F라 하자. 삼각형 DEF의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, $100S^2$의 값을 구하시오.



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 29

3. 평면 위에 반지름의 길이가 13인 원 C가 있다. 원 C 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}=24$이고, 이 평면 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=5$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $5\cos\theta$는 자연수이다.

원 C 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 06월 29

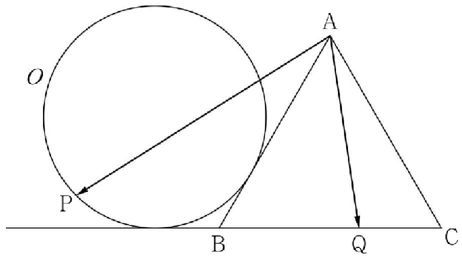
4. 좌표평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점을 B라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
>
> (나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 m이고 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=k$이다. $m+k^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC와 반지름의 길이가 1이고 선분 AB와 직선 BC에 동시에 접하는 원 O가 있다. 원 O 위의 점 P와 선분 BC 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이고, 원 O의 중심은 삼각형 ABC의 외부에 있다.)



[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 11월 29

6. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 06월 29

7. 좌표평면 위에 $\overline{AB}=5$인 두 점 A, B를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 O_1, O_2라 하자. 원 O_1 위의 점 C와 원 O_2 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle CAB)=\frac{3}{5}$
(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}=30$이고 $\lvert\overrightarrow{CD}\rvert<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

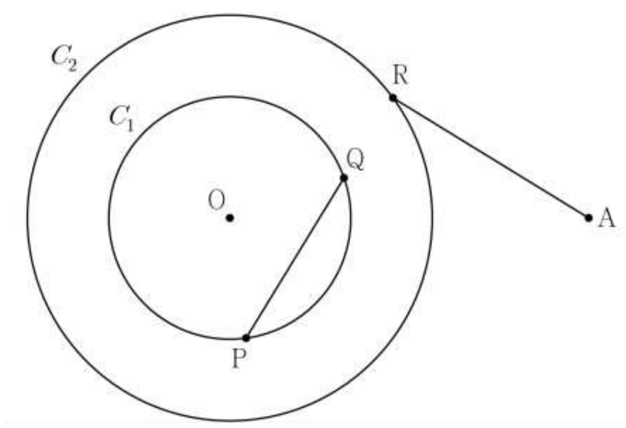
[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 29

8. 그림과 같이 평면 위에 $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{11}$ 을 만족하는 두 점 O, A 와 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 $\sqrt{5}$, $\sqrt{14}$ 인 두 원 C_1, C_2가 있다. 원 C_1 위의 서로 다른 두 점 P, Q와 원 C_2 위의 점 R가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 양수 k에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{QR}}$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=0$ 이고 $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{AR}}=2:\sqrt{6}$

원 C_1 위의 점 S에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값을 구하시오.

(단, $\frac{\pi}{2}<\angle\mathrm{ORA}<\pi$)



[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 06월 29

9. 좌표평면에서 곡선

$$C: y=\sqrt{8-x^2}\ \ (2\le x\le 2\sqrt{2})$$

위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}}=2$, $\angle\mathrm{POQ}=\frac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자. 점 P가 곡선 C위를 움직일 때, 선분 OP위를 움직이는 점 X와 선분 OQ위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자. 영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 30

10. 좌표평면 위의 두 점 A(6, 0), B(6, 5)와 음이 아닌 실수 k에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\leq 21$이다.
(나) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\rvert=\lvert\overrightarrow{\mathrm{AB}}\rvert$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}\leq 21$

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 30

11. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), (−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}})=0$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\geq 0$이다.
(다) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\geq -2$이고 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leq 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 30

12. 좌표평면에서 세 점 A$(-3,\ 1)$, B$(0,\ 2)$, C$(1,\ 0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=2,\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.

선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{BX}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}_0}\geq 1$일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{Q}_0\mathrm{X}}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

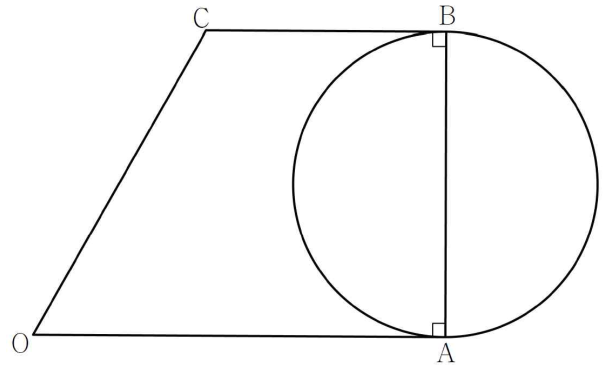
[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 30

13. 평면 위에

$$\overline{\mathrm{OA}}=2+2\sqrt{3},\ \overline{\mathrm{AB}}=4,$$

$$\angle\mathrm{COA}=\frac{\pi}{3},\ \angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$$

를 만족시키는 사다리꼴 OABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, 직선 OQ가 원과 만나는 점 중 Q가 아닌 점을 D라 하자. 원 위의 점 R에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.

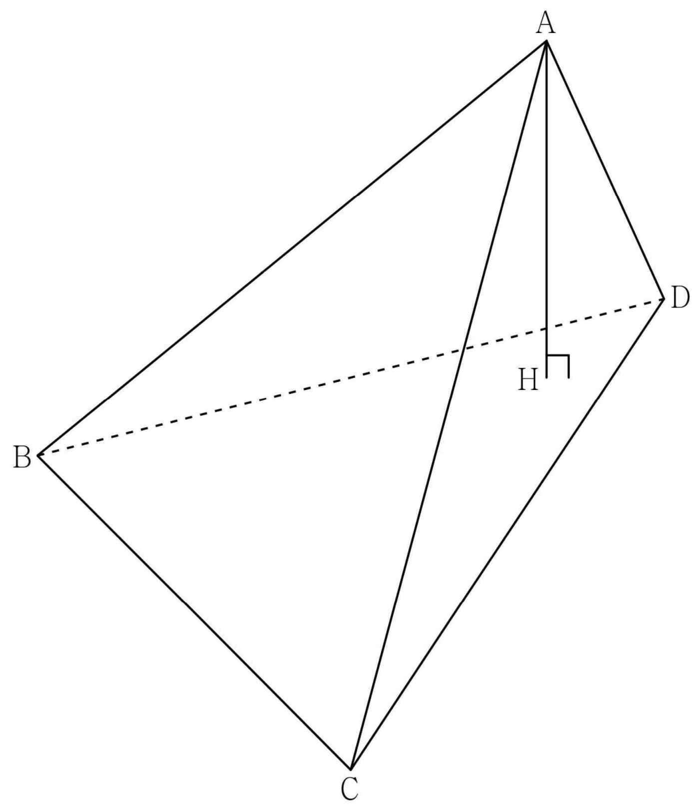


[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 30

14. 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC를 한 면으로 하는 사면체 ABCD의 꼭짓점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 점 H는 삼각형 BCD의 내부에 놓여 있다. 직선 DH가 선분 BC와 만나는 점을 E라 할 때, 점 E가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\angle \mathrm{AEH} = \angle \mathrm{DAH}$
> (나) 점 E는 선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점이고 $\overline{\mathrm{DE}} = 4$이다.

삼각형 AHD의 평면 ABD 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

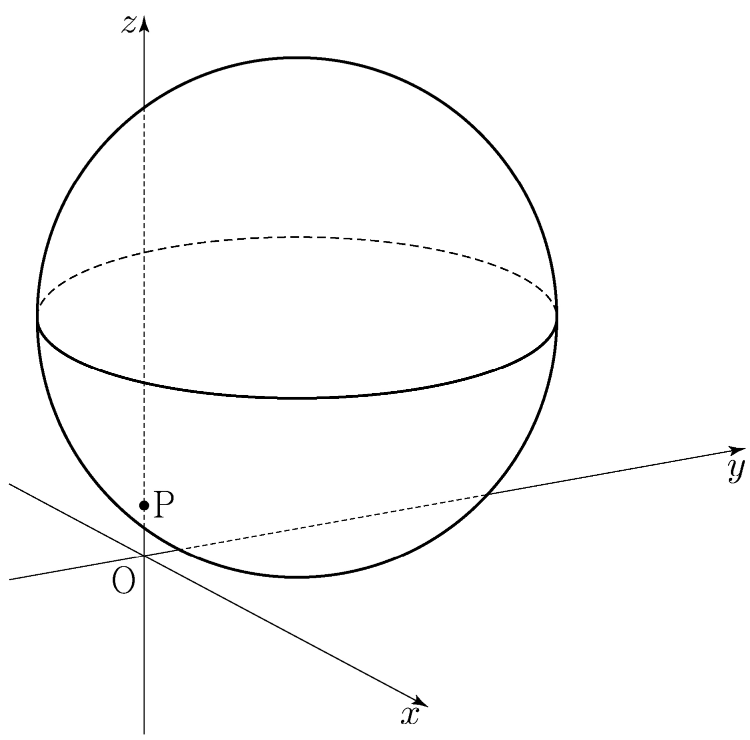


[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 30

15. 좌표공간에 중심이 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S : (x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 + (z-5)^2 = 25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



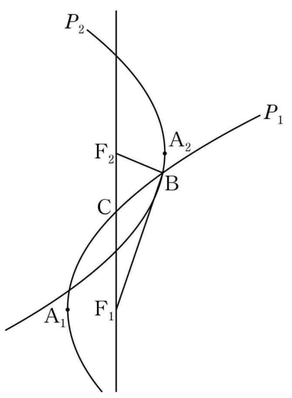
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 기하 30

16. 그림과 같이 꼭짓점이 $\mathrm{A_1}$이고 초점이 $\mathrm{F_1}$인 포물선 P_1과 꼭짓점이 $\mathrm{A_2}$이고 초점이 $\mathrm{F_2}$인 포물선 P_2가 있다. 두 포물선의 준선은 모두 직선 $\mathrm{F_1F_2}$와 평행하고, 두 선분 $\mathrm{A_1A_2}$, $\mathrm{F_1F_2}$의 중점은 서로 일치한다.
두 포물선 P_1, P_2가 서로 다른 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 $\mathrm{A_2}$에 가까운 점을 B라 하자. 포물선 P_1이 선분 $\mathrm{F_1F_2}$와 만나는 점을 C라 할 때, 두 점 B, C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{A_1C}}=5\sqrt{5}$

(나) $\overline{\mathrm{F_1B}}-\overline{\mathrm{F_2B}}=\dfrac{48}{5}$

삼각형 $\mathrm{BF_2F_1}$의 넓이가 S일 때, $10S$의 값을 구하시오.
(단, $\angle \mathrm{F_1F_2B}<90^\circ$)



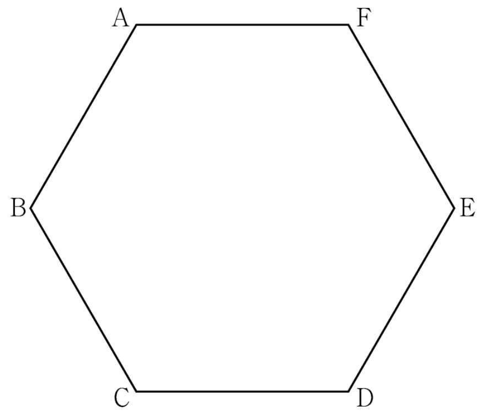
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 기하 30

17. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{CX}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$

(나) $\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}+2\overrightarrow{\mathrm{XD}}=k\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 30

18. 좌표평면 위에 두 점 A$(-2, 2)$, B$(2, 2)$가 있다.

$$(|\overrightarrow{AX}|-2)(|\overrightarrow{BX}|-2)=0, \quad |\overrightarrow{OX}| \geq 2$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\vec{u}=(1, 0)$에 대하여 $(\overrightarrow{OP} \cdot \vec{u})(\overrightarrow{OQ} \cdot \vec{u}) \geq 0$이다.
> (나) $|\overrightarrow{PQ}|=2$

$\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 30

19. 좌표평면 위의 세 점 A$(6, 0)$, B$(2, 6)$, C$(k, -2k)$ $(k>0)$과 삼각형 ABC의 내부 또는 변 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $5\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
> (나) 점 P가 나타내는 도형의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

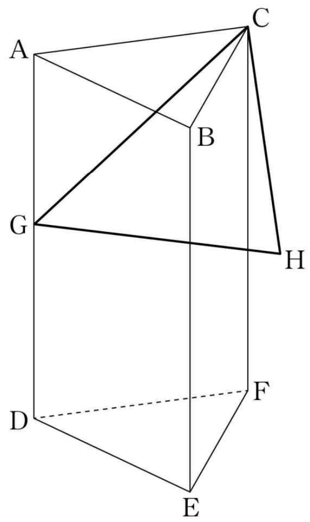
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{CP}$의 최댓값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 기하 30

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형을 밑면으로 하고 높이가 $4+2\sqrt{3}$인 정삼각기둥 ABC$-$DEF와 $\overline{\mathrm{DG}}=4$인 선분 AD 위의 점 G가 있다. 점 H가 다음 조건을 만족시킨다.

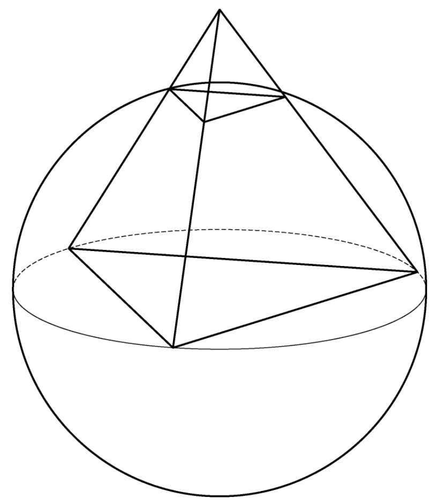
(가) 삼각형 CGH의 평면 ADEB위로의 정사영은 정삼각형이다. (나) 삼각형 CGH의 평면 DEF위로의 정사영의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이는 $2\sqrt{3}$이다.

삼각형 CGH의 평면 ADFC위로의 정사영의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 기하 30

21. 좌표공간에 정사면체 ABCD가 있다. 정삼각형 BCD의 외심을 중심으로 하고 점 B를 지나는 구를 S라 하자.
구 S와 선분 AB가 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P,
구 S와 선분 AC가 만나는 점 중 C가 아닌 점을 Q,
구 S와 선분 AD가 만나는 점 중 D가 아닌 점을 R라 하고,
점 P에서 구 S에 접하는 평면을 α라 하자.
구 S의 반지름의 길이가 6일 때, 삼각형 PQR의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 k이다. k^2의 값을 구하시오.

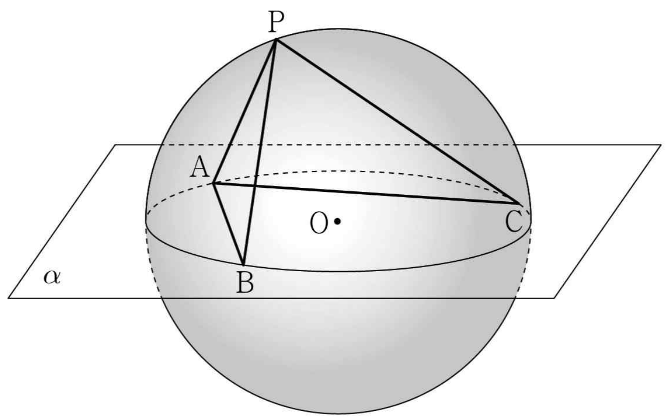


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 기하 30

22. 공간에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 구와 점 O를 지나는 평면 α가 있다. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 두 직선 OA, BC가 서로 수직일 때, 구 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle\text{PAO}=\dfrac{\pi}{3}$ (나) 점 P의 평면 α위로의 정사영은 선분 OA 위에 있다.

$\cos(\angle\text{PAB})=\dfrac{\sqrt{10}}{8}$일 때, 삼각형 PAB의 평면 PAC위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. $30\times S^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\angle\text{BAC}<\dfrac{\pi}{2}$)

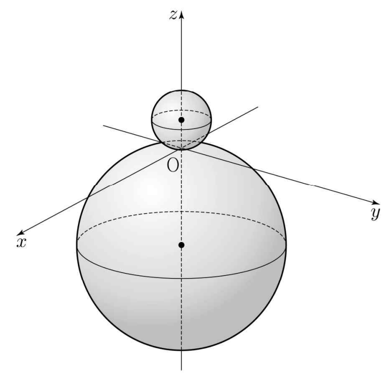


[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 기하 29

23. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 A$(\sqrt{5},\ 0,\ 0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자. 원 C의 평면 β위로의 정사영의 넓이가 $\dfrac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 기하 29

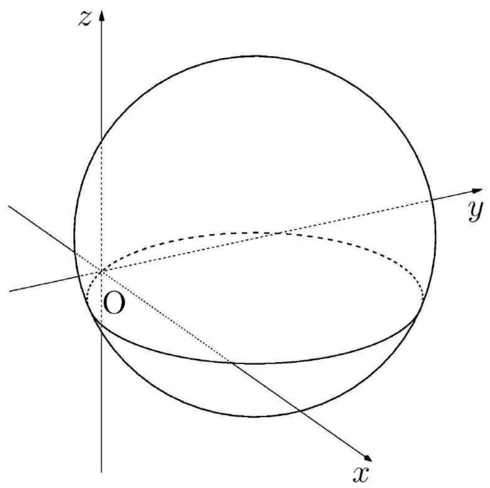
24. 좌표공간에 점 $(4, 3, 2)$를 중심으로 하고 원점을 지나는 구

$$S: (x-4)^2+(y-3)^2+(z-2)^2=29$$

가 있다. 구 S위의 점 $\mathrm{P}(a, b, 7)$에 대하여 직선 OP를 포함하는 평면 α가 구 S와 만나서 생기는 원을 C라 하자. 평면 α와 원 C가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 OP와 xy평면이 이루는 각의 크기와 평면 α와 xy평면이 이루는 각의 크기는 같다.
(나) 선분 OP는 원 C의 지름이다.

$a^2+b^2<25$일 때, 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는 $k\pi$이다. $8k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



기하킬러 24제 (빠른 정답)

프로젝트 2023.01.03

1. [정답] 10
2. [정답] 15
3. [정답] 128
4. [정답] 7
5. [정답] 40

6. [정답] 53
7. [정답] 31
8. [정답] 486
9. [정답] 24
10. [정답] 37

11. [정답] 48
12. [정답] 45
13. [정답] 108
14. [정답] 7
15. [정답] 23

16. [정답] 384
17. [정답] 8
18. [정답] 17
19. [정답] 7
20. [정답] 48

21. [정답] 24
22. [정답] 50
23. [정답] 127
24. [정답] 261

기하킬러 24제 (해설)

프로젝트 2023.01.03

1) [정답] 10

[해설]

그림에서 $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, $\angle CAB = 45^\circ$이므로

$\angle OAC = \angle AOC = 45^\circ$

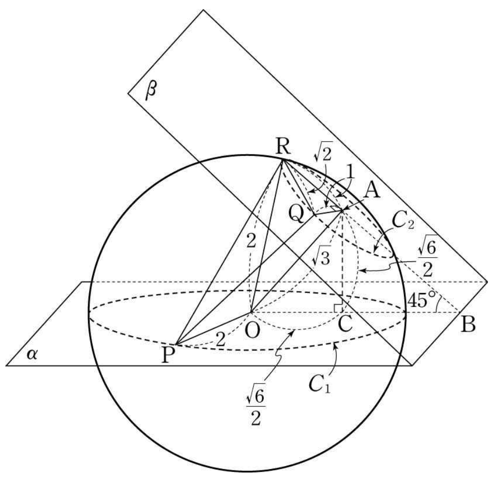
$\therefore\ \overline{OC} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ \overline{OA} = \sqrt{\overline{OC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\dfrac{6}{4} + \dfrac{6}{4}} = \sqrt{3}$

또한, $\overline{OR} = 2$, $\overline{OA} = \sqrt{3}$이므로 $\triangle OAR$에서

$\overline{AR} = 1$

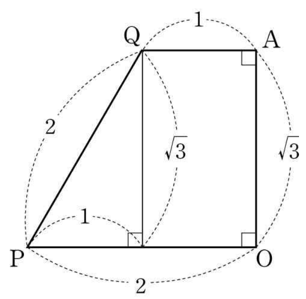
$\therefore\ \overline{AQ} = 1$, $\overline{RQ} = \sqrt{2}$



$\overline{OP}$와 $\overline{AQ}$는 평행하고 $\overline{OP} = 2$이므로 아래 그림에서

□AQPO는 사다리꼴이다.

$\therefore\ \overline{PQ} = 2$



이때, $\triangle AOP$에서

$\overline{PA} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$

또한, $\triangle APR$에서

$\overline{PR} = \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{AP}^2} = \sqrt{1+7} = \sqrt{8}$

평면 PQR를 평면 AQPO에 정사영 시키면 삼각형 APQ가 되므로

$\triangle APQ = \dfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\triangle PQR$에서 $\angle PQR = \alpha$라 하면

$\cos\alpha = \dfrac{4+2-8}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ \sin\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{2}{16}} = \dfrac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore\ \triangle PQR = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{14}}{4} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

이때, $\triangle PQR \cdot \cos\theta = \triangle APQ$이므로

$$\cos\theta = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{7}}{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

$\therefore\ \cos^2\theta = \dfrac{3}{7}$

$\therefore\ p + q = 10$

2) [정답] 15

[해설]

$\tan(\angle AOB) = \tan(\angle AOC) = \sqrt{3}$

$\angle AOB = \angle AOC = \dfrac{\pi}{3}$

맞꼭지각의 성질에 의하여

$\angle DOE = \angle DOF = \dfrac{\pi}{3}$

$\overline{OD} = \overline{OE} = \overline{OF} = 2$이므로 $\overline{DE} = \overline{DF} = 2$

$\overline{OB} = \overline{OC} = 4$이므로 삼각형 OBC와 삼각형 OEF의 닮음비가 $2:1$이고

$\overline{EF} = \sqrt{6}$

선분 EF의 중점을 H라 하자.

$\overline{DH} = \overline{OH} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

그러므로 삼각형 DEF의 넓이 S'은

$S' = \dfrac{1}{2} \times \overline{DH} \times \overline{EF}$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{10}}{2} \times \sqrt{6} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$

평면 OBC와 평면 OEF는 같은 평면이므로

두 평면 DEF와 OBC가 이루는 예각의 크기는

두 평면 DEF와 OEF가 이루는 예각의 크기와 같다.

두 평면 DEF와 OEF가 이루는 예각의 크기 θ는 두 직선 DH, OH가 이루는 예각의 크기와 같다.

$$\cos\theta = \dfrac{\overline{DH}^2 + \overline{OH}^2 - \overline{OD}^2}{2 \times \overline{DH} \times \overline{OH}} = \dfrac{1}{5}$$

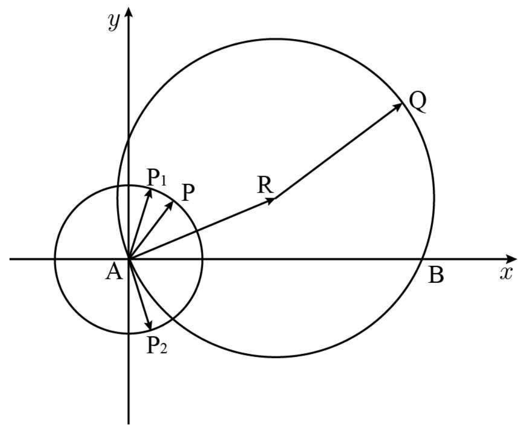
삼각형 DEF 의 평면 OBC 위로의 정사영의 넓이

$S=S'\times\cos\theta=\dfrac{\sqrt{15}}{10}$

따라서 $100S^2=15$

3) [정답] **128**

[해설]



그림과 같이 좌표평면 위의 점 A를 A$(0,\ 0)$,

점 B를 B$(24,\ 0)$, 원 C의 중심을 R$(12,\ 5)$라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{RQ}})$

$=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=5$, $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|=13$, $|\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|=13$이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$가 최대인 경우를 구하면

(i) $\cos\theta=1$일 때,

점 P가 선분 AB위에 있으므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|\times\cos(\angle\mathrm{PAR})$

$=5\times13\times\dfrac{12}{13}=60$

(ii) $0<\cos\theta<1$일 때,

$\angle\mathrm{P_1AB}=\angle\mathrm{P_2AB}=\theta$인 제1사분면 위의 점을 $\mathrm{P_1}$, 제4사분면 위의 점을 $\mathrm{P_2}$라 하자.

$\angle\mathrm{P_1AR}<\angle\mathrm{P_2AR}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AP_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}>\overrightarrow{\mathrm{AP_2}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$

그러므로 제1사분면 위의 점 P만 고려하면 된다.

$\angle\mathrm{RAP}=\alpha$, $\angle\mathrm{RAB}=\beta$라 하면 $\cos\beta=\dfrac{12}{13}$이고, $5\cos\theta$가 자연수이므로 $\cos\beta>\cos\theta$

따라서 $\beta<\theta$이고 $\cos\theta$의 값이 $\dfrac{4}{5}$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$가 최댓값을 갖는다. $\alpha=\theta-\beta$이므로

$\cos\alpha=\cos(\theta-\beta)$

$=\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta$

$=\dfrac{4}{5}\times\dfrac{12}{13}+\dfrac{3}{5}\times\dfrac{5}{13}$

$=\dfrac{63}{65}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|\times\cos\alpha$

$=5\times13\times\dfrac{63}{65}=63$

(i), (ii)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}$가 최대가 되는 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$가 같은 방향일 때, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 값이 최대이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$의 최댓값은 65이다. 그러므로

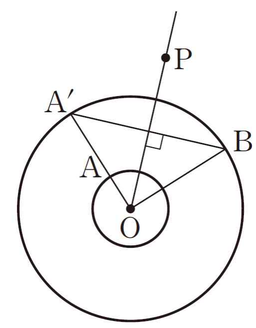
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AR}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$

$\le63+65=128$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$의 최댓값은 128

4) [정답] **7**

[해설]



$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에서

$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$이 되도록 점 A′을 잡으면

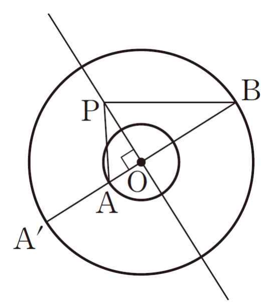
$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{A'B}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$

또한 $\overline{\mathrm{OA'}}=\overline{\mathrm{OB}}=3$이므로 점 P는 선분 A′B의 중점을 지나고 선분 A′B에 수직인 직선 위의 점이다.

$|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}-\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$에서

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2)=\dfrac{1}{2}(20-|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2)$



한편, 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 한 점 A와 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 한 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|$의 최댓값은 4이므로 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $m=2$이다.

이때 $\angle\mathrm{A'OP}=\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

직각삼각형 AOP에서

$\overline{\mathrm{AO}}^2+\overline{\mathrm{OP}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2$ …… ㉠

직각삼각형 BOP에서

$$\overline{BO}^2+\overline{OP}^2=\overline{PB}^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\overline{AO}^2+\overline{OP}^2+2\overline{OP}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$$

$$10+2\overline{OP}^2=20,\ \overline{OP}^2=5$$

따라서 $k^2=|\overrightarrow{OP}|^2=\overline{OP}^2=5$

$m+k^2=2+5=7$

5) [정답] 40

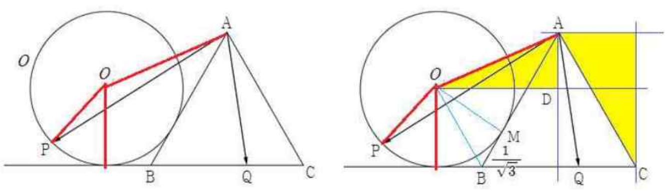
[해설]

원의 중심을 O라 하면

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}$이므로

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP})\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}$

여기서 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}\le\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}\le\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}$



그림에서 $\overline{BM}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{OD}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$,

$\overline{AD}=\sqrt{3}-1$이므로

$\overrightarrow{AO}=\left(-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}},\ 1-\sqrt{3}\right)$

$\overrightarrow{AB}=(-1,\ -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AC}=(1,\ -\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AC}=2-\frac{4}{3}\sqrt{3}$, $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=4-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

또, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}=|\overrightarrow{AQ}|\cos\theta$이므로 $-2\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AQ}\le 2$

따라서 최댓값은 $\left(4-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)+2=6-\frac{2}{3}\sqrt{3}$

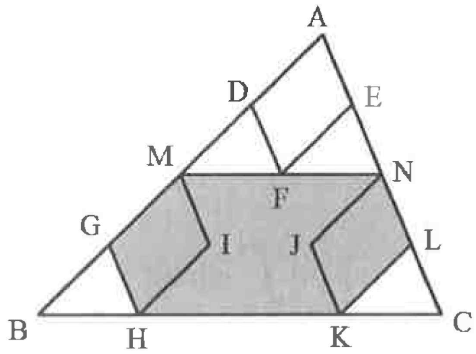
최솟값은 $\left(2-\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)-2=-\frac{4}{3}\sqrt{3}$

이므로 최댓값과 최솟값의 합은 $a+b\sqrt{3}=6-2\sqrt{3}$

$\therefore\ a^2+b^2=36+4=40$

6) [정답] 53

[해설]



두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 또, 두 선분 MB, NC의 중점을 각각 G, L이라 하자.

이때 $\overrightarrow{AS}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$라 하면 점 S는 위 그림의 평행사변형 ADFE의 내부(경계선 포함)에 있다.

또, 점 Q가 점 B에 있으면 $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AM}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 MGHI의 내부(경계선 포함)에 있다.

마찬가지로 점 Q가 점 C에 있으면 $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AN}$이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 NJKL의 내부(경계선 포함)에 있다.

한편, $\overrightarrow{AT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$라 하면 점 T는 선분 MN 위를 움직이므로 점 X가 나타내는 영역은 위 그림의 육각형 MGHKLN의 내부(경계선 포함)에 있다.

이때 삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{9}{4}$이고, 두 삼각형 GBH, LKC의 넓이는 각각 $\frac{9}{16}$이므로 구하는 넓이는

$$9-\frac{9}{4}-2\times\frac{9}{16}=\frac{45}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=45$이므로 $p+q=53$

[다른 풀이]

세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 M, K, N이라 하자.

또한,

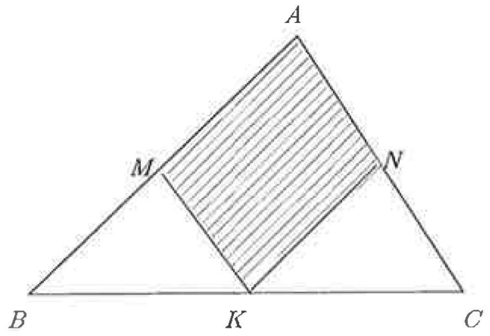
$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AR}\cdots\cdots ㉠$$

라 하면 $\overrightarrow{AD}$는 선분 AM, AN 위의 두 점을 P′, R′이라 할 때,

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AP'}+\overrightarrow{AR'}$

이므로 ㉠이 나타내는 점 D는 그림과 같이 빗금친

평행사변형의 내부(경계선 포함)에 있다.



$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

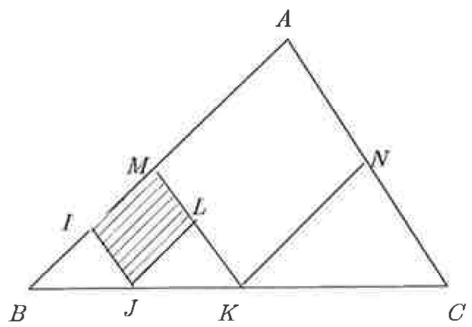
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})\right\}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

$$=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AQ}}{2}$$

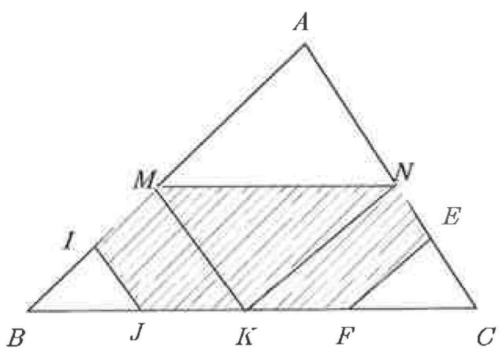
따라서 점 X는 선분 DQ의 중점이다.

이때 점 Q가 B에 있을 경우 세 선분 BM, BK, MK의 중점을 각각 I, J, L이라 하면 점 X가 존재하는 영역은 그림과 같다.



따라서 점 Q가 변 BC위를 움직이므로 두 변 CN, CL의 중점을

각각 E, F라 하면 위의 빗금친 영역 IJLM이 움직이는 영역이 점 X가 존재하는 영역으로 다음 그림과 같다.



이때, 삼각형 MKN의 넓이는

$$9\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

사각형 IJLM의 넓이는

$$\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{27}{16}$$

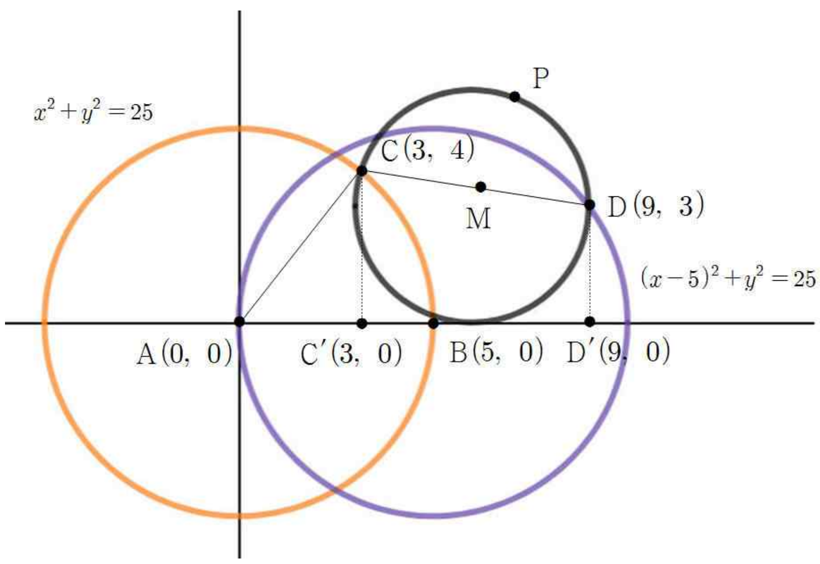
사각형 LFEN의 넓이도 $\frac{27}{16}$이므로 구하고자 하는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$$\frac{9}{4}+2\times\frac{27}{16}=\frac{45}{8}$$

즉, $p=8$, $q=45$이므로 $p+q=53$

7) [정답] **31**

[해설]



그림과 같이 점 A를 원점으로 하는 좌표평면을 생각하자.

조건 (가)에 의해 점 C의 좌표는 C(3, 4)가 된다.

두 점 C, D에서 x에 내린 수선을 발을 각각 C′, D′이라 하면

조건 (나)에 의해 선분 C′D′의 길이는 6이 된다.

또한, $|\overrightarrow{CD}|<9$이므로 점 D의 y좌표는 양수가 되어야 하므로 점 D의 좌표는 D(9, 3)이 된다.

선분 CD의 중점을 M이라 하면 점 P는 점 $M\left(6,\ \frac{7}{2}\right)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{37}}{2}$인 원 위의 점이므로

점 P좌표는 $P\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$와 같이 잡을 수 있다.

A(0, 0), B(5, 0)이므로

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$

$=\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta,\ \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)$

$=\left(6+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)\left(1+\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\theta\right)+\left(\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}\sin\theta\right)^2$

$=\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{37}}{2}(\cos\theta+\sin\theta)$

$=\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

$\le\frac{55}{2}+\frac{7\sqrt{74}}{2}$

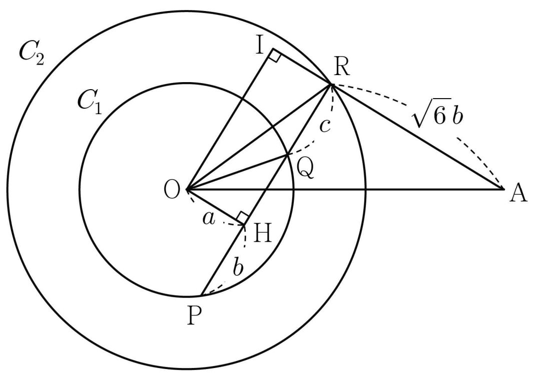
따라서 $a=\frac{55}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이고 구하는 값은

$a+b=\frac{55}{2}+\frac{7}{2}=31$이다.

8) [정답] 486

[해설]

조건 (가)에 의하여 세 점 P, Q, R는 한 직선 위에 있고, 조건 (나)에 의하여 직선 AR와 직선 PQ는 수직이므로 $\overline{\mathrm{AR}}\perp\overline{\mathrm{PR}}$이다. 점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{OH}}=a$, $\overline{\mathrm{HP}}=\overline{\mathrm{HQ}}=b$, $\overline{\mathrm{QR}}=c$라 하면

$\overline{\mathrm{AR}}=\sqrt{6}b$

삼각형 OHQ는 직각삼각형이므로

$a^2+b^2=5$ …… ㉠

삼각형 OHR는 직각삼각형이므로

$a^2+(b+c)^2=14$ …… ㉡

점 O에서 선분 AR의 연장선에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{\mathrm{OI}}=\overline{\mathrm{HR}}=b+c$, $\overline{\mathrm{IA}}=a+\sqrt{6}b$이므로

삼각형 AIO에서

$(a+\sqrt{6}b)^2+(b+c)^2=44$ …… ㉢

㉡과 ㉢에서

$2\sqrt{6}ab+6b^2=30$ …… ㉣

㉠과 ㉣에서

$6a^2-2\sqrt{6}ab=0$

$a=0$ 또는 $a=\frac{\sqrt{6}}{3}b$

세 점 O, P, Q가 한 직선 위에 있지 않으므로 $a\neq 0$이고

$a=\frac{\sqrt{6}}{3}b$

$a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{AR}}=3\sqrt{2}$이고 원 C_1 위의 점 S에 대하여

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{OS}})=\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AO}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{AI}}|=3\sqrt{2}\times4\sqrt{2}=24$

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}=|\overrightarrow{\mathrm{AR}}||\overrightarrow{\mathrm{OS}}|\cos\theta$

$=3\sqrt{2}\times\sqrt{5}\times\cos\theta$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}$는 $\cos\theta=1$일 때 최댓값을 갖고 $\cos\theta=-1$일 때 최솟값을 가지므로

$-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OS}}\le3\sqrt{10}$

$24-3\sqrt{10}\le\overrightarrow{\mathrm{AR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AS}}\le24+3\sqrt{10}$

$M=24+3\sqrt{10}$, $m=24-3\sqrt{10}$

$Mm=(24+3\sqrt{10})\times(24-3\sqrt{10})=486$

9) [정답] **24**

[해설]

$y=\sqrt{8-x^2}\ (2\le x\le2\sqrt{2})$의 그래프는 원점을 중심으로 하고 반지름이 $2\sqrt{2}$인 원의 일부이다.

$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\ (0\le s\le1,\ 0\le t\le1)$라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OX}}+\overrightarrow{\mathrm{OY}}=(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

이때, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$의 x성분이 음이 아닌 실수이므로 점 Z에서 y축까지의 거리가 최소가 되려면 $t=s=0$이 되어야 한다.

또한 $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$에서 $\mathrm{P}(2,\ 2)$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 x좌표가 최소가

되므로 $\therefore \mathrm{R}(2,\ 2)$

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 값을 구하면

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \left((1+\mathrm{t})\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \mathrm{s}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)$$

$= (1+t)\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \mathrm{s}\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

이고 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \geq 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OQ}} \geq 0$이므로 $s=t=1$일 때 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 값이 최대, $s=t=0$일 때, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 값이 최소가 된다.

따라서 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$가 x축 양의 방향과 이루는 각을 θ라 하면

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (2\sqrt{2}\cos\theta,\ 2\sqrt{2}\sin\theta)\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right),\ 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$= (\sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\sin\theta,\ \ \sqrt{2}\sin\theta - \sqrt{2}\cos\theta)$

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$이 최댓값을 갖는 경우

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot (2\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}})$$

$$= 12\sqrt{2}\sin\theta + 8\sqrt{2}\cos\theta$$

$$= 4\sqrt{2}(3\sin\theta + 2\cos\theta)$$

$$= 4\sqrt{26}\sin(\theta+\alpha)\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$$

$\left(\text{단, } \alpha\text{는 } \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$가 최대가 되려면 $\theta = \frac{\pi}{4}$일 때이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}} = 4\sqrt{2}\left(3\sin\frac{\pi}{4} + 2\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$= 4\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$= 20$

따라서 (최댓값)$=20$

(ⅱ) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$이 최솟값을 갖는 경우

마찬가지로 내적값이 최소가 될 때의 식은

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 4\sqrt{2}\cos\theta + 4\sqrt{2}\sin\theta$$

$= 8\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$이 최소가 되려면 $\theta = 0$일 때이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}} = 8\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$= 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= 4\sqrt{2}$

따라서 (최솟값)$=4\sqrt{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 최댓값과 최솟값의 합은 $20+4\sqrt{2}$

$\therefore a=20,\ b=4$

$\therefore\ a+b=20+4=24$

10) [정답] **37**

[해설]

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = k(12,\ 5)$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$는 $(12,\ 5)$와 평행한 벡터이다. $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \leq 21$에서 내적의 정의에서 시점을 일치시키고 다른 벡터에 정사영한 선분의 길이의 곱을 의미하는 것이므로 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$의 크기가 6이므로 점 P의 x좌표가 $\frac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

(나) $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 5$ 즉, 점 Q는 중심을 A로 하고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이다.
$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \leq 21$에서 Q의 x좌표가 $\frac{7}{2}$를 넘을 수 없다.

$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$에서 변수는 x좌표만 움직일 수 있으므로 넓이는 평행이동하여 잘라 붙이면 직사각형 모양으로 된다. 이때 Q의 y좌표의 폭이 높이가 될 수 있으며, P의 x좌표의 변화는 0에서 $\frac{7}{2}$이므로 가로의 길이는 $\frac{7}{2}$이다.

중심이 $(6,\ 0)$이고 반지름이 5인 원에서 y값의 변화가 가장 큰 값은 $x=\frac{7}{2}$일 때이므로

$$\left(\frac{7}{2}-6\right)^2 + y^2 = 25,\ \ y^2 = 25 - \frac{25}{4}$$

$$y^2 = \frac{75}{4},\ \ y = \pm\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

그러므로 세로의 길이는 $5\sqrt{3}$이다.

따라서 도형의 넓이는 $5\sqrt{3} \times \frac{7}{2} = \frac{35}{2}\sqrt{3}$

즉, $p=2,\ q=35$이므로 $p+q=35+2=37$

11) [정답] **48**

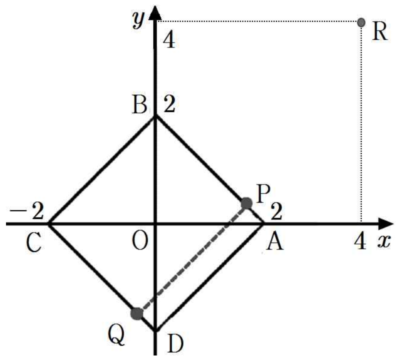
[해설]

(가)에서 $(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}})(\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = 0$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AD}} = 0$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \mathrm{AB}$ 또는 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \mathrm{AD}$

(ⅰ) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$일 때,



(나)조건에서 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$이므로 그림과 같이 점 P는 선분 $\overline{AB}$위에 있고 점 Q는 선분 $\overline{CD}$ 위에 있어야 한다.

또, $\overrightarrow{OA}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각이 예각이므로

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ (조건에 적합)

따라서 점 Q가 선분 $\overline{CD}$위에 있으므로 점 Q를 $\overrightarrow{OQ} = (t,\ -t-2)$ (단, $-2 \leq t \leq 0$)로 두면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = (2,\ 0) \cdot (t,\ -t-2)$$
$$= 2t \geq -2$$

즉. $t \geq -1$이므로 $-1 \leq t \leq 0$ …… ㉠

이 때, (다)조건에서 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OQ} \leq 0$이고, 점 P, Q는 $y = -x$에 대칭이므로 $\overrightarrow{OQ} = (t,\ -t-2)$에서

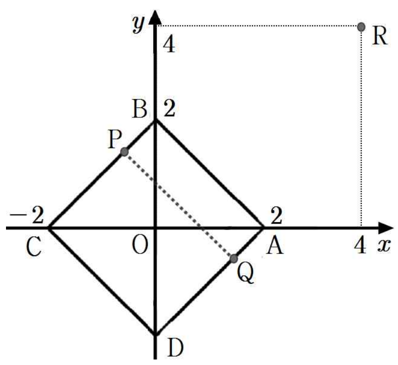
$\overrightarrow{OP} = (t+2,\ -t)$

따라서 $\overrightarrow{RP} = (t-2,\ -t-4)$, $\overrightarrow{RQ} = (t-4,\ -t-6)$이다.

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = (t-2,\ -t-4) \cdot (t-4,\ -t-6)$$
$$= 2t^2 + 4t + 32$$
$$= 2(t+1)^2 + 30$$

㉠에서 $-1 \leq t \leq 0$이므로 $t = 0$일 때, 즉 점 P$(2,\ 0)$, Q$(0,\ -2)$일 때, 최댓값 $M = 32$을 가지고, $t = -1$일 때, 즉 점 P$(1,\ 1)$, Q$(-1,\ -1)$일 때, 최솟값 $m = 30$을 가진다.

(ii) $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{AD}$일 때,



(i)과 동일한 방법으로 하면 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$이므로 점 P는 선분 $\overline{BC}$위에 있고 점 Q는 선분 $\overline{AD}$ 위에 있어야 한다.

또, $\overrightarrow{OB}$와 $\overrightarrow{OP}$가 이루는 각이 예각이므로

$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP} \geq 0$ (조건에 적합)

점 P가 선분 $\overline{BC}$ 위에 있으므로 점 P는 $\overrightarrow{OP} = (t,\ t+2)$ (단, $-2 \leq t \leq 0$)로 두면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} = (2,\ 0) \cdot (t,\ t+2)$$
$$= 2t \geq -2$$

즉, $t \geq -1$이므로 $-1 \leq t \leq 0$ …… ㉡

이 때, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OQ} \geq 0$이고, 점 P, Q는 $y = x$에 대칭이므로

$\overrightarrow{OP} = (t,\ t+2)$에서 $\overrightarrow{OQ} = (t,\ t+2)$

따라서 $\overrightarrow{RP} = (t-4,\ t-2)$, $\overrightarrow{RQ} = (t-2,\ t-4)$이다.

$$\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = (t-4,\ t-2) \cdot (t-2,\ t-4)$$
$$= 2(t-3)^2 - 2$$

그런데, ㉡에서 $-1 \leq t \leq 0$이므로 $t = 0$일 때, 즉 점 P$(0,\ 2)$, Q$(2,\ 0)$일 때, 최솟값 $m = 16$을 가지고, $t = -1$일 때, 즉 점 P$(-1,\ 1)$, Q$(1,\ -1)$일 때, 최댓값 $M = 32$을 가진다.

(i), (ii)에서 최댓값 $M = 32$, 최솟값 $m = 16$이므로

$\therefore\ M + m = 48$

12) [정답] **45**

[해설]

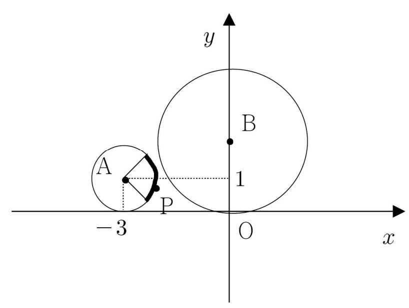
$|\overrightarrow{AP}| = 1$이므로 점 P는 중심이 A$(-3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점이다.

또, $|\overrightarrow{BQ}| = 2$이므로 점 Q는 중심이 B$(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점이다.

$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{OC} \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$에서 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $|\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

즉, $\cos\theta \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $-\dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$

그러므로 점 P를 나타내면 그림과 같다.

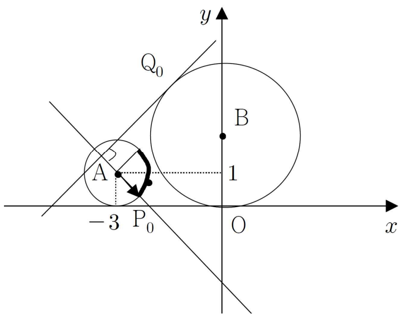


또, 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$가 이루는 각의 크기를 θ'이라 하면

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$$
$$= |\overrightarrow{AQ}|\cos\theta'$$

그러므로 이 값이 최소이기 위해서는 점 P는 A를 지나고 직선의 기울기가 -1인 직선 위의 점이어야 하고, 점 Q는 이

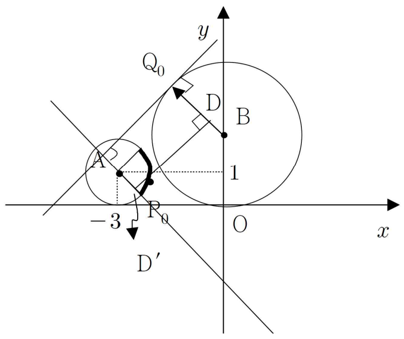
직선과 수직이면서 원 $x^2+(y-2)^2=4$에 접하는 점 중 제 2사분면의 점이어야 한다.



한편, $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\geq 1$에서 두 벡터 $\overrightarrow{BX}$, $\overrightarrow{BQ_0}$가 이루는 각의 크기를 θ''이라 하면 $|\overrightarrow{BX}||\overrightarrow{BQ_0}|\cos\theta''\geq 1$

즉, $2|\overrightarrow{BX}|\cos\theta''\geq 1$이므로 $|\overrightarrow{BX}|\cos\theta''\geq\dfrac{1}{2}$

그러므로 선분 BQ_0위의 점 D를 $\overline{BD}=\dfrac{1}{2}$이 되도록 잡은 후, 점 D에서 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선에 내린 수선의 발을 D'이라 하면 점 X는 선분 AD' 위의 점이다.



따라서 $|\overrightarrow{Q_0X}|$의 최댓값은 X가 D'일 때 가지므로 $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은

$$\overline{Q_0D'}^2=\overline{Q_0D}^2+\overline{DD'}^2$$
$$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+(2\sqrt{2})^2$$
$$=\frac{9}{4}+8=\frac{41}{4}$$

따라서 $p=4$, $q=41$이므로 $p+q=4+41=45$

13) [정답] 108

[해설]

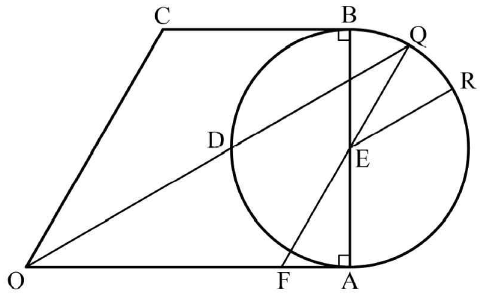
선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 E라 하자.

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EP})$$
$$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$$

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OE}$의 값은 일정하므로 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대일 때, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EP}$의 값이 최대이다.

두 벡터 $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EP}$의 방향이 같을 때의 점 P가 Q이다.



선분 QE가 선분 OA와 만나는 점을 F라 하자.

$\angle EFA=\dfrac{\pi}{3}$, $\overline{AE}=2$이므로

$$\overline{FE}=\frac{4\sqrt{3}}{3},\ \overline{FA}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\overline{OF}=\overline{OA}-\overline{FA}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$
$$\overline{FQ}=\overline{FE}+\overline{EQ}=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$\overline{OF}=\overline{FQ}$이므로 $\angle OQF=\dfrac{\pi}{6}$

그러므로 $\overline{DQ}=2\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ER})$$
$$=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\quad\cdots\cdots ㉠$$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{AE}$가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}=2\sqrt{3}\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$$

두 벡터 $\overrightarrow{DQ}$, $\overrightarrow{ER}$의 방향이 같을 때, $\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$의 값이 최대이므로

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}\leq 2\sqrt{3}\times2=4\sqrt{3}$$

㉠에 의하여

$$\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DQ}\cdot\overrightarrow{ER}$$
$$\leq 2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$$
$$=6\sqrt{3}$$

따라서 $M=6\sqrt{3}$이므로 $M^2=108$

14) [정답] 7

[해설]

조건 (나)에서 $\angle CED=90^\circ$이므로 두 직선 BC, DE는 서로 수직이다.

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AH}\perp$(평면 BCD), $\overline{HE}\perp\overline{BC}$이므로 $\overline{AE}\perp\overline{BC}$

즉 직선 BC와 평면 AED는 서로 수직이므로

두 직선 BC, AD도 서로 수직이다. $\cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서 두 삼각형 AEH, DAH는 닮음이므로

$\angle DAE=\angle EAH+\angle HAD=90^\circ$

그러므로 두 직선 AD, AE는 서로 수직이다. $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 직선 AD는 평면 ABC와 서로 수직이다.

정삼각형 ABC에서 $\overline{AE} \perp \overline{BC}$이므로 점 E는 선분 BC의 중점이다.

즉, $\overline{AE} = 2\sqrt{3}$

직각삼각형 AED에서

$\overline{AD} = \sqrt{\overline{DE}^2 - \overline{AE}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2$

직각삼각형 AED에서 $\overline{AE} \times \overline{AD} = \overline{AH} \times \overline{DE}$이므로

$2\sqrt{3} \times 2 = \overline{AH} \times 4$, $\overline{AH} = \sqrt{3}$

직각삼각형 AHD에서

$\overline{DH} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$

두 평면 ABD, AHD가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\theta = \angle BAE = 30^\circ$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$

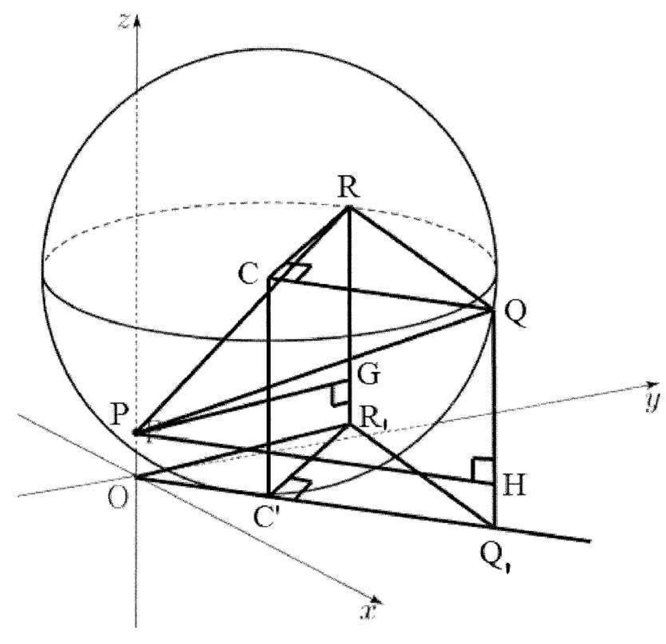
따라서 $p=4$, $q=3$이므로 $p+q=4+3=7$

15) [정답] 23

[해설]

점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C'이라 하면

$\overline{\mathrm{CC}'} = 5$이므로 구 S는 점 C'에서 xy평면에 접한다.



평면 OPC는 점 C'을 지나므로 점 $\mathrm{Q_1}$은 직선 OC' 위에 있다. 이때 선분 $\mathrm{OQ_1}$의 길이가 최대가 되려면 점 Q가 점 C를 지나고 직선 OC'와 평행한 직선이 구 S와 만나는 점 중 x좌표가 양수인 점이어야 한다.

이때

$\overline{\mathrm{OQ_1}} = \overline{\mathrm{OC}'} + 5 = 3 + 5 = 8$

한편, 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되려면 점 R가 점 C를 지나고 직선 CQ에 수직인 직선이 구 S와 만나는 점이어야 한다.

이때 $\overline{\mathrm{R_1C}'} \perp \overline{\mathrm{OC}'}$이고, $\overline{\mathrm{R_1C}'} = 5$이므로 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$

이제 삼각형 PQR의 넓이를 구해 보자.

점 P에서 직선 $\mathrm{QQ_1}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PH}} = \overline{\mathrm{OQ_1}} = 8$,

$\overline{\mathrm{QH}} = \overline{\mathrm{QQ_1}} - 1 = 4$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{64+16} = 4\sqrt{5}$ …… ㉠

직각삼각형 CQR에서

$\overline{\mathrm{QR}} = \sqrt{\overline{\mathrm{CQ}}^2 + \overline{\mathrm{CR}}^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}$ …… ㉡

직각삼각형 $\mathrm{OC'R_1}$에서

$\overline{\mathrm{OR_1}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OC}'}^2 + \overline{\mathrm{R_1C}'}^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

이므로 점 P에서 직선 $\mathrm{RR_1}$에 내린 수선의 발을 G라 하면

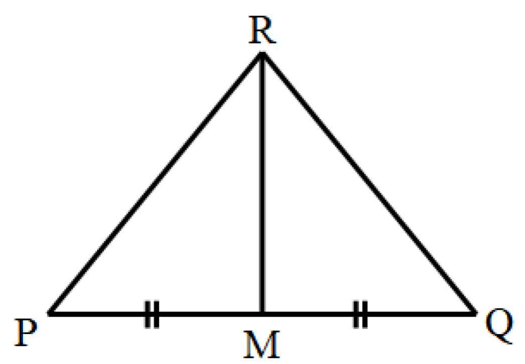
$\overline{\mathrm{PG}} = \overline{\mathrm{OR_1}} = \sqrt{34}$

$\overline{\mathrm{RG}} = \overline{\mathrm{RR_1}} - 1 = 4$

직각삼각형 RPG에서

$\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PG}}^2 + \overline{\mathrm{RG}}^2} = \sqrt{34+16} = 5\sqrt{2}$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에 의하여 삼각형 PQR는 $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{QR}}$인 이등변삼각형이다.



위 그림과 같이 선분 PQ의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{RM}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PR}}^2 - \overline{\mathrm{PM}}^2}$

$= \sqrt{50-20}$

$= \sqrt{30}$

이므로 삼각형 PQR의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} \times \sqrt{30} = 10\sqrt{6}$

이때 삼각형 PQR의 xy평면 위로의 정사영이 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$이므로 두 평면 PQR와 $\mathrm{OQ_1R_1}$이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta = \frac{20}{10\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는

$20 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{20}{3}\sqrt{6}$이므로

$p+q = 3+20 = 23$

16) [정답] 384

[해설]

좌표평면에서 점 F_1을 원점, 직선 A_1F_1을 x축, 직선 F_1F_2를 y축이라 하자.

포물선 P_1의 방정식을 $y^2=4p(x+p)(p>0)$이라 하면

$\overline{A_1F_1}=p$, $\overline{F_1C}=2p$에서 $\overline{A_1C}=\sqrt{p^2+(2p)^2}=p\sqrt{5}$

조건 (가)에서 $p\sqrt{5}=5\sqrt{5}$이므로 $p=5$

두 선분 A_1A_2, F_1F_2의 중점은 서로 일치하므로 사각형 $A_1F_1A_2F_2$는 평행사변형이다.

포물선 P_1의 준선 l_1의 방정식은 $x=-10$이고 포물선 P_2의 준선 l_2의 방정식은 $x=10$이다.

점 B에서 두 직선 l_1, l_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면

$\overline{BH_1}+\overline{BH_2}=20$ …… ㉠

점 B는 두 포물선이 만나는 점이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{F_1B}=\overline{BH_1}$, $\overline{F_2B}=\overline{BH_2}$

조건 (나)에서

$\overline{BH_1}-\overline{BH_2}=\frac{48}{5}$…… ㉡

㉠, ㉡에서 $\overline{BH_1}=\frac{74}{5}$, $\overline{BH_2}=\frac{26}{5}$

점 B에서 직선 F_1F_2에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{BH}=10-\overline{BH_2}=\frac{24}{5}$

직각삼각형 BF_2H에서

$\overline{F_2H}^2=\overline{F_2B}^2-\overline{BH}^2$

$=\left(\overline{F_2B}-\overline{BH}\right)\left(\overline{F_2B}+\overline{BH}\right)$

$=\left(\frac{26}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{26}{5}+\frac{24}{5}\right)$

$=4$

이므로 $\overline{F_2H}=2$

직각삼각형 F_1BH에서

$\overline{F_1H}^2=\overline{F_1B}^2-\overline{BH}^2$

$=\left(\overline{F_1B}-\overline{BH}\right)\left(\overline{F_1B}+\overline{BH}\right)$

$=\left(\frac{74}{5}-\frac{24}{5}\right)\times\left(\frac{74}{5}+\frac{24}{5}\right)$

$=196$

이므로 $\overline{F_1H}=14$

$\overline{F_1F_2}=\overline{F_1H}+\overline{F_2H}=14+2=16$

그러므로 삼각형 BF_2F_1의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{F_1F_2}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times16\times\frac{24}{5}=\frac{192}{5}$

따라서

$10S=10\times\frac{192}{5}=384$

17) [정답] 8

[해설]

조건 (가)에서

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$이므로

선분 CA, CB, CD, CE, CF의 중점을 각각 A′, B′, D′, E′, F′이라 하면

점 X는 정육각형 A′B′CD′E′F′ 위의 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직인다.

조건 (나)에서

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$이므로

$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX})-\overrightarrow{CX}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CX})=k\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$

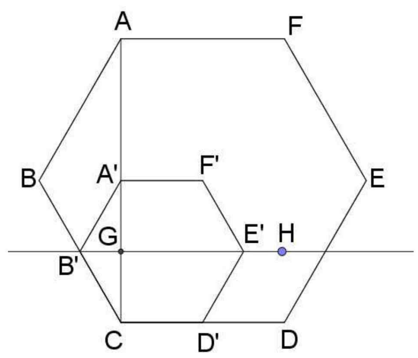
$\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CG}$라 하면

점 X는 점 G를 지나고 직선 CD에 평행한 직선 위를 움직인다.

직선 GE′ 위의 점 H가

$\overline{E'H}=1$, $\overline{GH}>\overline{GE'}$

를 만족시키도록 점 H를 잡는다.



X가 점 G일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최소이다.

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CG}+\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}$에서

$\frac{2-k}{4}=0$

$k=2$

즉 , $\alpha=2$

점 X가 점 H일 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값은 최대이다.

$|\overrightarrow{GH}|=4$에서

$\left|\frac{2-k}{4}\overrightarrow{CD}\right|=4$

즉 $\frac{2-k}{4}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=4$이므로

$\frac{2-k}{4}\times 4=4$

$k=-2$

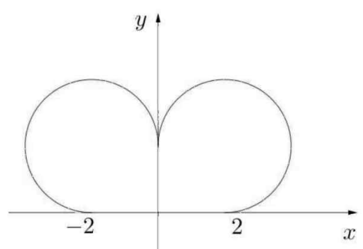
즉, $\beta=-2$

따라서 $\alpha^2+\beta^2=2^2+(-2)^2=8$

18) [정답] 17

[해설]

$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|=2$ 또는 $|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|=2$이므로 X는 중심이 A이고 반지름이 2인 원 또는 중심이 B이고 반지름이 2인 원 위의 점이다. 그런데, $|\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\geq 2$를 만족해야 하므로 만족하는 도형은 [그림1]과 같다.



[그림1]

또한 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u})\geq 0$를 만족하므로 점 P, Q의 x좌표가 모두 같은 방향이어야 한다.

즉, [그림1]에서 점 P, Q가 제 1사분면 도형에 있는 경우와 제 2사분면 도형에 있는 경우 2가지가 있다.

(i) 제 1사분면에 있는 경우

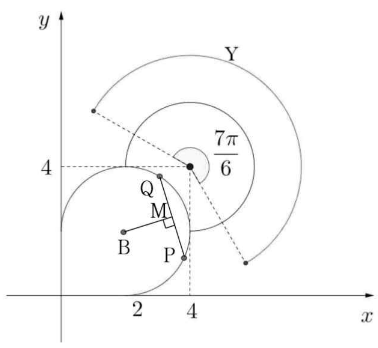
선분 PQ의 중점을 M이라고 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right)=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$

즉, $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BM}})$

그런데, 조건 (나)에서 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|=1$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2}$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|=\sqrt{3}$



따라서 P, Q가 조건을 만족하며 움직일 때의 M의 자취는 중심이 B이고 반지름이 $\sqrt{3}$이며 중심각이 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호가 된다.

이때 $\overrightarrow{\mathrm{OY}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이므로 점 Y의 자취는 중심이 (4, 4)이고 반지름이 $2\sqrt{3}$이며 중심각이 $\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴의 호이다.

따라서 구하는 자취의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

(ii) 제2사분면에 있는 경우

(i)과 마찬가지이므로 자취의 길이는

$2\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

(i), (ii)에서 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이는

$\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$이므로 $p=3,\ q=14$

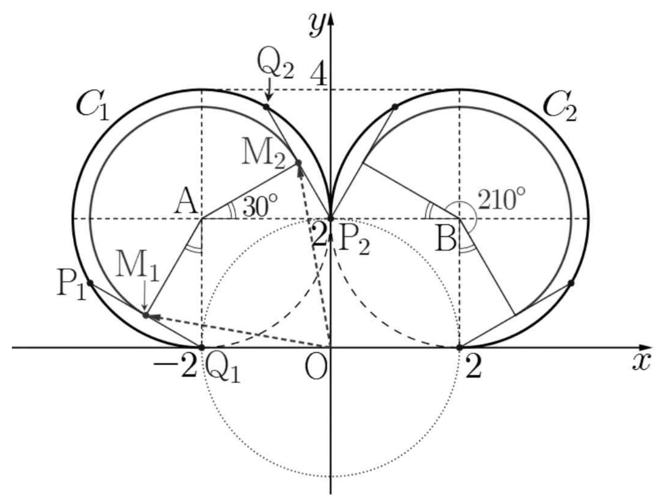
$\therefore\ p+q=3+14=17$

[다른 풀이]

주어진 등식과 부등식

$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0,\ |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\geq 2$

에서 점 X는 두 점 A 또는 B로부터의 거리가 2이고, 원점 O로부터의 거리가 2 이상이므로 A, B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 두 원 C_1 또는 C_2의 둘레 중 아래 그림과 같이 실선 부분이다.



또, 조건 (가)는 두 점 P, Q의 x좌표가 같은 부호임을 뜻하므로 원 C_1 또는 C_2 중 어느 한쪽에 존재해야 하고, $\overline{\mathrm{PQ}}=2$이다.

한편, $\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}$으로 놓자.

y축 대칭성으로 인해 원 C_1에서만 고려하면, 삼각형 $\mathrm{AP_1Q_1}$은 정삼각형이므로 $\angle\mathrm{M_1AQ_1}=\frac{\pi}{6}$이고, $\overline{\mathrm{AM_1}}=\sqrt{3}$

그러므로 점 M은 점 A를 중심, 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$인 호에 해당하고 그 길이는

$\sqrt{3}\times\frac{7}{6}\pi=\frac{7}{6}\sqrt{3}\pi$

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$이므로 점 Y의 자취의 길이는

$\frac{7}{6}\sqrt{3}\pi\times 2=\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi$

원 C_2에서도 마찬가지이므로 구하는 길이는

$\frac{7}{3}\sqrt{3}\pi\times 2=\frac{14}{3}\sqrt{3}\pi$

따라서, $p=3$, $q=14$이므로 $p+q=17$이다.

19) [정답] 7

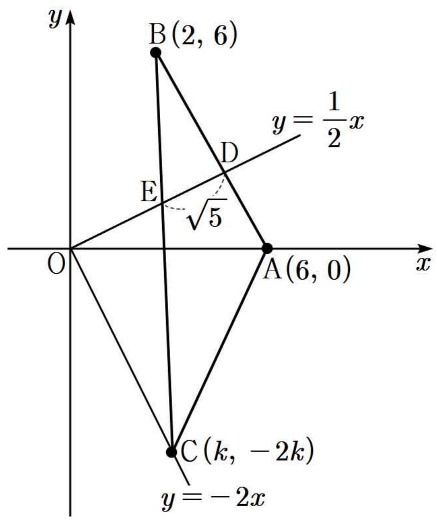
[해설]

점 $P(x, y)$라 하면 조건 (가)에서

$5(4, -6)\cdot(x, y)-(2, 6)\cdot(x-6, y)=(6, 0)\cdot(2, 6)$

$20x-30y-2x+12-6y=12$

$\therefore y=\frac{1}{2}x$



위의 그림과 같이 직선 AB와 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 D라 하자.

직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}(x-6)=-\frac{3}{2}x+9$

직선 $y=\frac{1}{2}x$와 연립하면 $x=\frac{9}{2}$, $y=\frac{9}{4}$이므로

$D\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right)$이다.

직선 BC와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점을 E라 하면 점 P의 자취는 선분 DE와 같다.

점 P의 자취의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 $\overline{DE}=\sqrt{5}$이고, 두 점 D, E를 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $E\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$이다.

세 점 B, E, C가 일직선 위에 있으므로

$\frac{-2k-6}{k-2}=\frac{-\frac{19}{4}}{\frac{1}{2}}$, $k=\frac{10}{3}$

$\therefore C\left(\frac{10}{3}, -\frac{20}{3}\right)$

점 $P\left(a, \frac{a}{2}\right)$라 하면 $\frac{5}{2}\le a\le\frac{9}{2}$이고

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}=(6, 0)\cdot\left(a-\frac{10}{3}, \frac{a}{2}+\frac{20}{3}\right)$

$=6a-20$

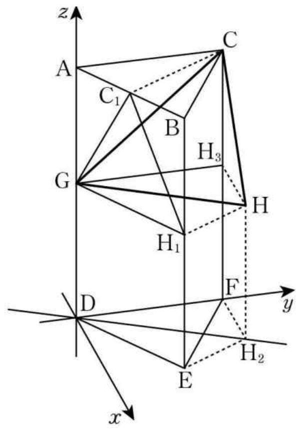
따라서 $a=\frac{9}{2}$일 때, $6a-20$의 최댓값은 7이므로

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 최댓값은 7이다.

20) [정답] 48

[해설]

그림은 정삼각기둥 ABC−DEF를 좌표공간에 나타낸 것이다.



두 점 C, H의 평면 ADEB위로의 정사영을 각각 C_1, H_1이라 하자.

$\overline{AC_1}=2$, $\overline{AG}=2\sqrt{3}$이므로

$\overline{GC_1}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$, $\angle AGC_1=30^\circ$

조건 (가)에서 삼각형 GH_1C_1은 정삼각형이므로

$\angle C_1GH_1=60^\circ$, $\overline{GH_1}=4$

조건 (나)를 만족시키려면 점 H_1은 점 G에서 선분 BE에 내린 수선의 발과 일치해야 한다.

점 H의 평면 DEF위로의 정사영을 H_2라 하자.

조건 (나)에서 삼각형 CGH의 평면 DEF위로의 정사영인 삼각형 FDH_2의 내부와 삼각형 DEF의 내부의 공통부분의 넓이가 삼각형 DEF의 넓이의 $\frac{1}{2}$인 $2\sqrt{3}$이므로 직선 DH_2는 선분 EF의 중점을 지난다.

그러므로 두 삼각형 DEH_2, DFH_2가 합동이고

$\angle DEH_2=90^\circ$이므로 $\angle DFH_2=90^\circ$이다.

점 H의 평면 ADFC위로의 정사영을 H_3이라 하면

점 H_3은 점 G에서 선분 CF에 내린 수선의 발과 일치한다.

그러므로 삼각형 CGH의 평면 ADFC위로의 정사영인 삼각형 CGH_3의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

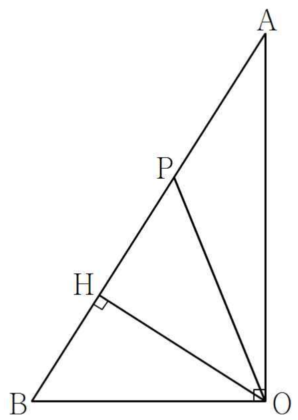
따라서 $S^2=48$

21) [정답] 24

[해설]
구 S의 중심, 즉 삼각형 BCD의 외심을 O라 하면 직각삼각형 ABO에서

$$\overline{AB}=6\sqrt{3},\ \overline{BO}=6,\ \overline{AO}=6\sqrt{2}$$

이다.



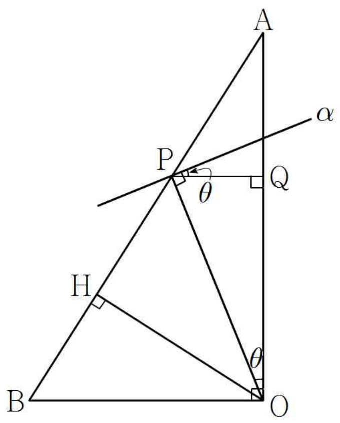
이때 점 P가 구 S 위에 있으므로 $\overline{OP}=6$
즉, 삼각형 OBP가 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 선분 BP의 중점이다.
한편, $\triangle ABO \backsim \triangle OBH$이므로

$$6:6\sqrt{3}=\overline{BH}:6$$

에서 $\overline{BH}=2\sqrt{3}$

$$\therefore\ \overline{AP}=\overline{AB}-\overline{BP}$$
$$=6\sqrt{3}-4\sqrt{3}$$
$$=2\sqrt{3}$$

한편, 다음 그림과 같이 평면 α와 평면 PQR가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\angle AOP=\theta$이다.



점 P에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$$\triangle APQ \backsim \triangle ABO$$

이므로

$$\overline{AP}:\overline{AB}=\overline{AQ}:\overline{AO}$$
$$2\sqrt{3}:6\sqrt{3}=\overline{AQ}:6\sqrt{2}$$
$$\overline{AQ}=2\sqrt{2}$$

$\overline{OQ}=\overline{OA}-\overline{AQ}=4\sqrt{2}$ 이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{4\sqrt{2}}{6}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

삼각형 PQR는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이므로 삼각형 PQR의 넓이는

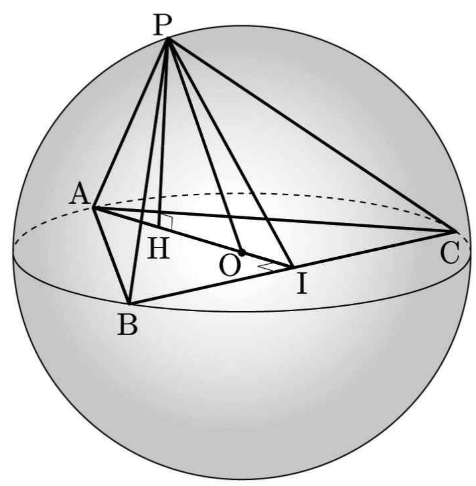
$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$k=3\sqrt{3}\times\cos\theta$$
$$=3\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$=2\sqrt{6}$$
$$\therefore\ k^2=(2\sqrt{6})^2=24$$

22) [정답] 50

[해설]



점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I라 하자.

$\angle PAO=\frac{\pi}{3}$이고 $\overline{OA}=\overline{OP}$이므로 삼각형 PAO는 정삼각형이다.

$\overline{PA}=4,\ \overline{PH}=2\sqrt{3},\ \overline{AH}=\overline{OH}=2\overline{OI}=a(a>0)$이라 하면

직각삼각형 OIB에서 $\overline{IB}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OI}^2}=\sqrt{16-a^2}$ 직각삼각형 AIB에서 $\overline{AB}=\sqrt{\overline{AI}^2+\overline{IB}^2}$

$$=\sqrt{(a+4)^2+16-a^2}$$
$$=\sqrt{8a+32}$$

직각삼각형 PHI에서

$$\overline{PI}=\sqrt{\overline{PH}^2+\overline{HI}^2}$$
$$=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(a+2)^2}$$
$$=\sqrt{a^2+4a+16}$$

$\overline{PH}\perp\alpha,\ \overline{HI}\perp\overline{BC}$이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{PI}\perp\overline{BC}$이다.
직각삼각형 PIB에서

$$\overline{PB}=\sqrt{\overline{PI}^2+\overline{IB}^2}$$

$= \sqrt{(a^2+4a+16)+(16-a^2)}$

$= \sqrt{4a+32}$

삼각형 PAB에서

$\cos(\angle PAB) = \dfrac{\overline{AP}^2+\overline{AB}^2-\overline{PB}^2}{2\times\overline{AP}\times\overline{AB}}$

$= \dfrac{16+(8a+32)-(4a+32)}{2\times 4\times\sqrt{8a+32}}$

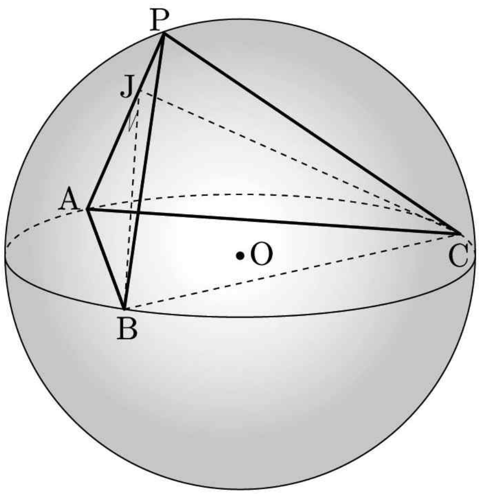
$= \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

그러므로 $\dfrac{\sqrt{10}}{8} = \dfrac{a+4}{4\sqrt{2a+8}}$

$(a+4)^2 = 5(a+4)$

$a^2+3a-4 = (a+4)(a-1) = 0$

$a>0$이므로 $a=1$



점 B에서 선분 PA에 내린 수선의 발을 J라 하자.

$\sin(\angle PAB) = \dfrac{\overline{BJ}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{BJ}}{2\sqrt{10}}$

$\sin(\angle PAB) = \sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$이므로 $\overline{BJ} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$

삼각형 PAB의 넓이를 S'이라 하자.

$S' = \dfrac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{BJ} = \dfrac{1}{2}\times 4\times\dfrac{3\sqrt{15}}{2} = 3\sqrt{15}$

$\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 두 삼각형 PAB, PAC는 서로 합동이다.

$\overline{BJ}\perp\overline{AP}$이므로 $\overline{CJ}\perp\overline{AP}$이고 $\overline{BJ}=\overline{CJ}$

두 평면 PAB와 PAC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\overline{BJ}\perp\overline{AP}$, $\overline{CJ}\perp\overline{AP}$이므로 $\theta = \angle BJC$

$\overline{JB}=\overline{JC}=\dfrac{3\sqrt{15}}{2}$, $\overline{BC}=2\sqrt{15}$

$\cos\theta = \dfrac{\overline{JB}^2+\overline{JC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{JB}\times\overline{JC}}$

$= \dfrac{2\times\left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2-60}{2\times\left(\dfrac{3\sqrt{15}}{2}\right)^2}$

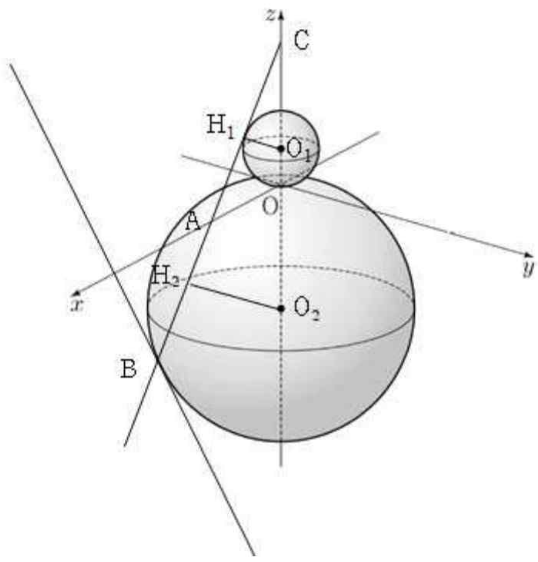
$= \dfrac{1}{9}$

$S = S'\times\cos\theta = 3\sqrt{15}\times\dfrac{1}{9} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

따라서 $30\times S^2 = 30\times\dfrac{15}{9} = 50$

23) [정답] 127

[해설]



두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하면

$O_1(0,\ 0,\ 2)$, $O_2(0,\ 0,\ -7)$

이고, 두 구 S_1, S_2의 반지름의 길이는 각각 2, 7이다.

두 점 O_1, O_2에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하고, 평면 α와 z축이 만나는 점을 C라 하자.

직각삼각형 O_1CH_1에서 $\overline{O_1C}=k(k>0)$이라 하면

$\overline{CH_1} = \sqrt{\overline{O_1C}^2-\overline{O_1H_1}^2} = \sqrt{k^2-2^2} = \sqrt{k^2-4}$

원점을 O라 하면 $\triangle O_1CH_1$와 $\triangle ACO$는 서로 닮음이고,

$\overline{OC} = 2+k$

이므로 $(k+2):\sqrt{k^2-4} = \sqrt{5}:2$ 에서

$k^2-16k-36=0$

$(k-18)(k+2)=0$

$k>0$ 이므로 $k=18$

$\triangle O_1CH_1$과 $\triangle O_2CH_2$도 서로 닮음이고,

$\overline{O_1C}=18$, $\overline{O_2C}=27$이므로 $18:2=27:\overline{O_2H_2}$에서

$\overline{O_2H_2}=3$

평면 α와 구 S_2가 만나서 생기는 원 C의 중심은 H_2이고 반지름의 길이는 $\overline{BH_2}$이다. 이때,

$\overline{BH_2} = \sqrt{\overline{O_2B}^2-\overline{O_2H_2}^2} = \sqrt{7^2-3^2} = 2\sqrt{10}$

이므로 원 C의 넓이는

$\pi\times(2\sqrt{10})^2 = 40\pi$

한편, 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\theta = \angle \mathrm{BO_2H_2}$이므로

$\cos\theta = \dfrac{3}{7}$

원 C의 평면 β위로의 정사영의 넓이는

$40\pi \times \dfrac{3}{7} = \dfrac{120}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=120$이므로 $p+q=7+120=127$

24) [정답] 261

[해설]

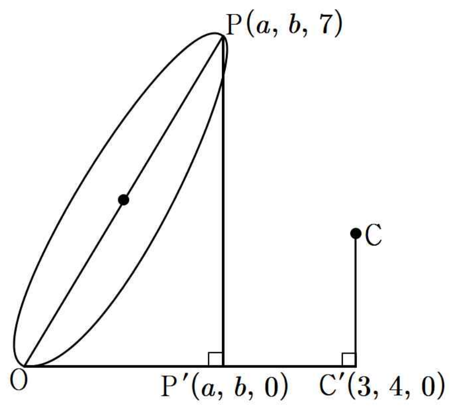
점 $\mathrm{P}(a, b, 7)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 P'이라 하면

$\mathrm{P}'(a, b, 0)$

구의 중심 $(4, 3, 2)$에서 xy평면에 내린 수선의 발을 C'이라 하면 $\mathrm{C}'(4, 3, 0)$

$a^2+b^2<25$이므로 P'인 C'보다 원점에서 더 가깝다.

원점과 두 점 P', C'을 지나는 직선을 가로축으로 하고, z축을 세로축으로 하여 그림을 그리면 다음과 같다.



점 P는 구 위의 점이므로

$(a-4)^2+(b-3)^2+25=29$, $(a-4)^2+(b-3)^2=4$

$\therefore \overline{\mathrm{P'C'}} = \sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=2$

$\overline{\mathrm{PP'}}=7$이고, $\overline{\mathrm{OC'}}=5$에서 $\overline{\mathrm{OP'}}=3$이므로

$\overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{7^2+3^2} = \sqrt{58}$

선분 OP는 원 C의 지름이므로 원 C의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{58}}{2}$이고,

원 C와 xy평면이 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{58}}$이다.

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이는

$\pi\left(\dfrac{\sqrt{58}}{2}\right)^2 \times \dfrac{3}{\sqrt{58}} = \dfrac{3}{4}\sqrt{58}\pi$

따라서 $k=\dfrac{3}{4}\sqrt{58}$이므로 $8k^2=261$이다.