Seoul Union of Math education

서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고3팀 주관

theme 1. 중복조합에서의 상한

•

•

•

1. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 14개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

> (가) 각 학생은 1개 이상의 사인펜을 받는다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 9 이하이다.
> (다) 적어도 한 학생은 짝수 개의 사인펜을 받는다.

사건의 경우가 많음 ⇒ 여사건 이용* (전체 − 모두 홀수개 받는 경우)

2022 9월 30

(가)+(나) 조건부전체

$a+b+c+d=14$

$\geq 1\quad \geq 1\quad \geq 1\quad \geq 1$

$\leq 9\quad \leq 9\quad \leq 9\quad \leq 9$

$\geq 10\quad \geq 10\quad \geq 10\quad \geq 10$ 동시에 일어날 일X, 서로 배반사건

⇒ 중복조합(서로 다른 4개 문자에서 중복허용 14개 뽑기)

${}_4H_{10} - {}_4H_1 \times 4 = {}_{13}C_3 - 16 = 270$

조건부여사건

$a=2a'+1$ (≤ 9), $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$

$0 \leq a', b', c', d' \leq 4 \quad (\because 2a'+1=a \leq 9)$

$2a'+1+2b'+1+2c'+1+2d'+1=14$

$a'+b'+c'+d'=5$

$\geq 0\quad \geq 0\quad \geq 0\quad \geq 0$

$\leq 4\quad \leq 4\quad \leq 4\quad \leq 4$

$\geq 5\quad \geq 5\quad \geq 5\quad \geq 5$

${}_4H_5 - 4 = 52$

$\therefore 270 - 52 = \boxed{218}$

2. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 사인펜 10개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

사건의 경우가 너무 많음 ⇒ 여사건 이용* (전체 − 모두 1개이상 받는 경우)

> (가) 적어도 한 학생은 사인펜을 받지 못한다.
> (나) 각 학생이 받는 사인펜의 개수는 6 이하이다.

2022-1 해장 제작 문항

(나) 조건부전체

$$a+b+c+d=10$$
≥ 0 ≥ 0 ≥ 0 ≥ 0
≤ 6 ≤ 6 ≤ 6 ≤ 6
≥ 7 ≥ 7 ≥ 7 ≥ 7

$${}_4H_{10} - {}_4H_3 \times 4 = 206$$

조건부여사건

$$a+b+c+d=10$$
≥ 1 ≥ 1 ≥ 1 ≥ 1
≤ 6 ≤ 6 ≤ 6 ≤ 6
≥ 7 ≥ 7 ≥ 7 ≥ 7

$${}_4H_6 - {}_4H_0 \times 4 = 80$$

$\therefore 206 - 80 = \boxed{126}$

3. 네 명의 학생 A, B, C, D에게 같은 종류의 공 12개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

> (가) 각 학생은 1개 이상의 공을 받는다.
> (나) 4명의 학생 중 짝수개의 공을 받는 학생은 2명이다.
> (다) 학생 A가 받는 공의 개수는 학생 B가 받는 공의 개수보다 많다.

나머지 2명은 홀수겠네~

* 단순히 A>B 구해도 되지만, 공의 개수가 적지 않기 때문에 꽤 복잡함.

⇓

2021-2 문참시 제작 문항

A, B가 공을 받게되는 케이스 (공의 개수 기준)

i) A>B ii) A=B iii) A<B

경우의 수가 같음

[결론] i) or iii) 경우의 수

$$= \frac{\text{전체} - (A=B)}{2}$$

(가)+(나) 조건부 전체

$$a+b+c+d=12$$
≥ 1 ≥ 1 ≥ 1 ≥ 1
짝 짝 홀 홀

$a=2a'+2,\ b=2b'+2,\ c=2c'+1,\ d=2d'+1$
$a', b', c', d' \geq 0$

$a'+b'+c'+d'=3$

짝? 홀?

${}_4C_2 \times {}_4H_3 = 6 \times {}_6C_3 = 120$

A=B 경우의수

i) $A=B=2a'+2$ $(a' \geq 0)$ (A, B가 짝수로 같을 때)
⇒ C, D 자동 홀수
$\therefore C=2c'+1,\ D=2d'+1$ $(c', d' \geq 0)$

$2a'+2+2a'+2+2c'+1+2d'+1=12$

$2a'+c'+d'=3$

0 → ${}_2H_3=4$
1 → ${}_2H_1=2$] 6

ii) $A=B=2a'+1$ $(a' \geq 0)$ (A, B가 홀수로 같을 때)
⇒ C, D 자동 짝수
$\therefore C=2c'+2,\ D=2d'+2$ $(c', d' \geq 0)$

$2a'+1+2a'+1+2c'+2+2d'+2=12$

$2a'+c'+d'=3$

0 → ${}_2H_3=4$
1 → ${}_2H_1=2$] 6

최종식 같음을 예상하고, 바로 i) 경우의수 ×2 해도 괜찮음!!

$\therefore$ i) + ii) $= 6+6=12$

$$\text{최종식} = \frac{\text{전체} - (A=B)}{2}$$

$$= \frac{120-12}{2} = \boxed{54}$$

theme 2. 함수의 개수 심화

•

•

4. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오.

f(1)이 기준이 되겠구나~

(가) $f(f(1))=4$
(나) $f(1) \le f(3) \le f(5)$

2023 6월 29

경우의 수 구할 때 잊지 않도록 써둘 것!

$f(1) \le f(3) \le f(5)$ $\quad \underbrace{f(2) \quad f(4)}$

$\cancel{1}$ (가)조건 불만족

$2 \quad \_\_\_\_ \le 5 \quad 4 \quad \to \overbrace{{}_4H_2}^{f(3),\, f(5)} \times \overbrace{5}^{f(4)} = 50$

$3 \le 4 \le \_\_ \le 5 \quad \to \overbrace{{}_2H_1}^{f(5)} \times \overbrace{5}^{f(2)} \times \overbrace{5}^{f(4)} = 50$

$4 \le \_\_\_\_ \le 5 \quad 4 \quad \to \overbrace{{}_2H_2}^{f(3),\, f(5)} \times \overbrace{5}^{f(2)} = 15$

$\cancel{5}$

$50+50+15 = 115$

$\therefore \boxed{115}$

5. 전체집합 $U=\{x \mid x$는 6이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,4,6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: U \rightarrow U$의 개수를 구하시오.

$1 \le f(5) \le f(3) \le f(1) \le 6$

(가) $x_1 \in A$, $x_2 \in A$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \ge f(x_2)$이다.
(나) $x_1 \in B$, $x_2 \in B$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다. → $1 \le f(2) < f(4) < f(6) \le 6$
(다) $x_1 \in A$, $x_2 \in B$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다. → $f(1) < f(2)$

2018 5월(전북) (나) 29

(가)+(나)+(다) 조건 　 기준

$1 \le f(5) \le f(3) \le \underbrace{f(1)}_{\le 3} < f(2) < f(4) < f(6) \le 6$

i) $f(1)=1$ → ${}_5C_3 = 10$ (B)

ii) $f(1)=2$ → ${}_2H_2 \times {}_4C_3 = 12$ (A, B)

iii) $f(1)=3$ → ${}_3H_2 \times {}_3C_3 = 6$ (A, B)

∴ i)+ii)+iii) $= 10+12+6 = \boxed{28}$

6. 집합 $X=\{1,2,3,4,5,6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X \rightarrow X$의 개수를 구하시오.

일대일 대응

(가) $x_1, x_2 \in X$에 대하여 $x_1 \ne x_2$이면 $f(x_1) \ne f(x_2)$이다.
(나) $f(3)+f(4)$는 4의 배수이다.
(다) $f(1) < f(3)$이고, $f(2) < f(3)$이다.

2021-2 문참시 제작문항

(나)조건 　 $f(3)+f(4) = 4,\ 8,\ \cancel{12}$ (가)조건 불만족

i) $f(3)+f(4)=4$

3 　 1
1 　 3 　 (다)조건에 의해 불가능

∴ 경우의 수 0

ii) $f(3)+f(4)=8$

~~2 　 6~~ 　 (다)조건에 의해 불가능

3 　 5 → $2 \times 2 = 4$
5 　 3 → ${}_3C_2 \times 2 \times 2 = 12$
6 　 2 → ${}_4C_2 \times 2 \times 2 = 24$

$4+12+24 = 40$

∴ $\boxed{40}$

theme 3. 정규분포 그래프의 특징

•

•

7. 확률변수 X는 평균이 m, 표준편차가 5인 정규분포를 따르고, 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(10) > f(20)$
(나) $f(4) < f(22)$

→ 범위설정? 안될 경우 대입 가능성 O

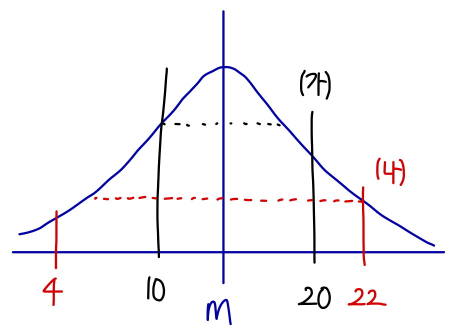
m이 자연수일 때, $\mathrm{P}(17 \le X \le 18)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.6	0.226
0.8	0.288
1.0	0.341
1.2	0.385
1.4	0.419

① 0.044 ② 0.053 ③ 0.062 ④ 0.078 ⑤ 0.097

2017 수능 (가) 18

$X \sim N(m, 5^2)$



(가) $m-10 < 20-m$
$\to m < 15$

(나) $22-m < m-4$
$\to m < 13$

$\therefore 13 < m < 15 \to m=14$

$X \sim N(14, 5^2)$

표준화

$\mathrm{P}(17 \le X \le 18) = \mathrm{P}\left(\frac{17-14}{5} \le Z \le \frac{18-14}{5}\right)$

$= \mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

$= 0.288 - 0.226$

$= \boxed{0.062}$

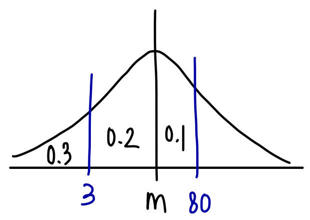
8. 확률변수 X가 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고

$$P(X\le 3)=P(3\le X\le 80)=0.3$$

일 때, $m+\sigma$의 값을 구하시오.
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
i) $P(0\le Z\le 0.25)=0.1$, ii) $P(0\le Z\le 0.52)=0.2$로 계산한다.)

2018 수능 (가) 26

$X\sim N(m,\sigma^2)$



i) $P(m\le X\le 80)=P(0\le Z\le 0.25)=0.1$
표준화

$\frac{80-m}{\sigma}=0.25 \rightarrow 80-m=0.25\sigma$

ii) $P(3\le X\le m)=P(0\le Z\le 0.52)=P(-0.52\le Z\le 0)=0.2$
표준화

$\frac{3-m}{\sigma}=-0.52 \rightarrow 3-m=-0.52\sigma$

i), ii) 연립 → $\sigma=100$, $m=55$

$\therefore 100+55=\boxed{155}$

9. 어느 모집단의 확률변수 X가 평균이 0, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르고, 이 모집단에서 크기가 $n(n>1)$인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

~~ㄱ~~. $P(-\sigma\le X\le 0)=P\left(0\le \overline{X}\le \frac{\sigma}{n}\right)$
ㄴ. 임의의 양수 a에 대하여 $P(X\le a)<P(\overline{X}\le a)$이다.
~~ㄷ~~. $P(X\le b)+P(b\le \overline{X})=1$을 만족시키는 실수 b $(b\ne 0)$가 존재한다.

2021-2 문참시 제작 문항

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

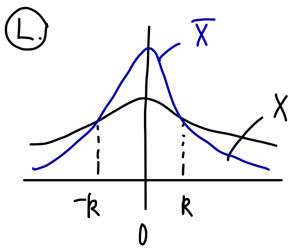
~~ㄱ~~. $X\sim N(0,\sigma^2)$
$\overline{X}\sim N(0,(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2)$

표준화
$P(-\sigma\le X\le 0)=P(\underbrace{\frac{-\sigma}{\sigma}}_{=-1}\le Z\le 0)=P(0\le Z\le 1)$

≠ (∵ $n>1$)

$P(0\le \overline{X}\le \frac{\sigma}{n})=P(0\le Z\le \frac{\frac{\cancel{\sigma}}{n}}{\frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{n}}})$

ㄴ



$P(0\le X\le a)$, $P(0\le \overline{X}\le a)$ 비교하면 됨
(∵ $P(X\le 0)=P(\overline{X}\le 0)=0.5$)

i) $0<a\le k$
$P(X\le a)<P(\overline{X}\le a)$ → 그림 통해 확인

ii) $a>k$
대소비교 위해 빼기
$P(0\le \overline{X}\le a)-P(0\le X\le a)$
$=\frac{1}{2}-P(\overline{X}\ge a)-(\frac{1}{2}-P(X\ge a))$
$=P(X\ge a)-P(\overline{X}\ge a)>0$
$\therefore P(X\le a)<P(\overline{X}\le a)$

~~ㄷ~~. $P(X\le b)+P(X\ge b)=1$
$P(\overline{X}\le b)+P(\overline{X}\ge b)=1$

ㄴ에 의해, $b\ne 0$일때 $P(X\le b)\ne P(\overline{X}\le b)$
$P(\overline{X}\le b)\ne P(\overline{X}\le b)$

$\therefore P(X\le b)+P(b\le \overline{X})=1$을 만족시키는 실수 $b(\ne 0)$ 존재 X.