제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\dfrac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}$ 의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{16}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ 1 ④ 4 ⑤ 16

$(2^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1} = 2^{3-1} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x)=2x^2+5$에 대하여 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$의 값은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$f'(x)=4x$ $f'(2)$

$f'(2)=8$

3. $\underline{\sin(\pi-\theta)}_{\sin\theta}=\dfrac{5}{13}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\dfrac{12}{13}$ ② $-\dfrac{5}{12}$ ③ 0 ④ $\dfrac{5}{12}$ ⑤ $\dfrac{12}{13}$

$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$ $\cos\theta=\dfrac{-12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{\frac{5}{\cancel{13}}}{-\frac{12}{\cancel{13}}} = -\dfrac{5}{12}$

4. 함수

$$f(x)=\begin{cases} -2x+a & (x\le a) \\ ax-6 & (x>a) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$-2a+a=a^2-6$

$a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ $a=2$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

5. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 2a_5, \quad a_8 + a_{12} = -6$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

$a_1 = 2a_5 \Rightarrow a = 2(a+4d)$

$a = 2a + 8d$

$a = -8d$

$a_8 + a_{12} = -6 \Rightarrow a + 7d + a + 11d = -6$

$2a + 18d = -6$

$a + 9d = -3$

$d = -3$

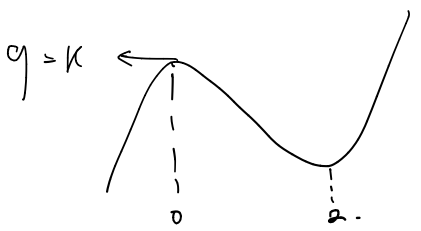
$a = 24$

$\therefore a_2 = a + d = 24 - 3 = 21$

6. 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$의 극댓값이 9일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$



$f(2) = 8 - 12 + 9 = 5$

7. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right) - \underbrace{\sum_{k=1}^{10} a_k}_{S_{10}}$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{10\times 11}$

$1 - \frac{1}{11} - \frac{1}{110} = \frac{110-10-1}{110} = \frac{99}{110} = \frac{9}{10}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

8. 곡선 $y=x^3-4x+5$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 곡선 $y=x^4+3x+a$에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$3x^2-4$ $f'(1)=-1$

$y=-(x-1)+2=-x+3$

$y=x^4+3x+a$ $y=-x+3$ 접함.

접점의 x좌표를 t

함숫값: $t^4+3t+a=-t+3$

접선기울기: $4t^3+3=-1 \Rightarrow 4t^3=-4 \Rightarrow t^3=-1 \Rightarrow t=-1$

$1-3+a=1+3$

$a-2=4$

$\therefore a=6$

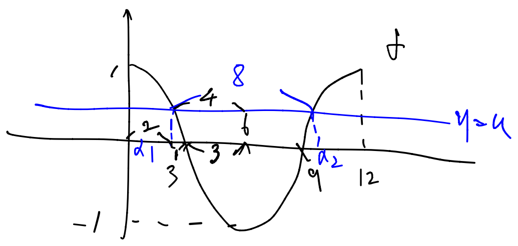
9. 닫힌구간 $[0, 12]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{6},\quad g(x)=-3\cos\frac{\pi x}{6}-1$$

$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}$

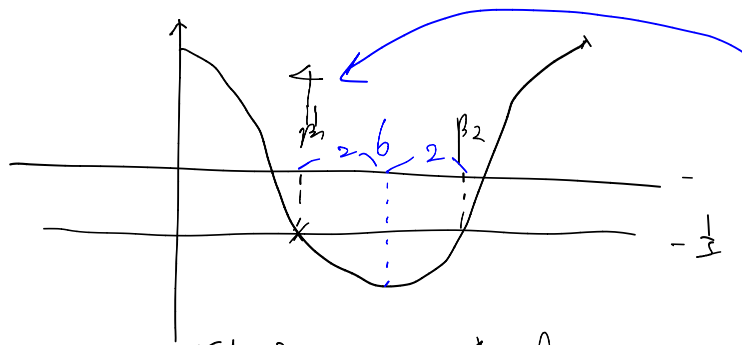
이 있다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 α_1, α_2라 할 때, $|\alpha_1-\alpha_2|=8$이다. 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$가 만나는 두 점의 x좌표를 β_1, β_2라 할 때, $|\beta_1-\beta_2|$의 값은? (단, k는 $-1<k<1$인 상수이다.) [4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5



$\alpha_1<\alpha_2$ 라 하자 $\Rightarrow$ $\alpha_1=2$. $\Rightarrow f(2)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \Rightarrow k=\frac{1}{2}$

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2}=3\cos\frac{\pi x}{6} \Rightarrow \cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$



$\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi \Rightarrow x=4=\beta_1$

$\therefore |\beta_1-\beta_2|=4.$

10. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=3t^2+at \quad (a>0)$$

$s(t)=t^3+\frac{at^2}{2}+C=t^3+\frac{at^2}{2}$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A 사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$s(2)=8+2a$

$|8+2a-6|=10$

$|2a+2|=10$

$|a+1|=5$

$a+1=5 \Rightarrow a=4$

$a+1=-5 \Rightarrow a=\cancel{-6}$

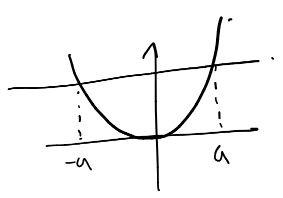
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

11. 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

$x^4 = \sqrt{3}^{f(n)}$ → 실수인 것을 모두 곱한것이 -9



$-a^2=-9 \Rightarrow a=3$

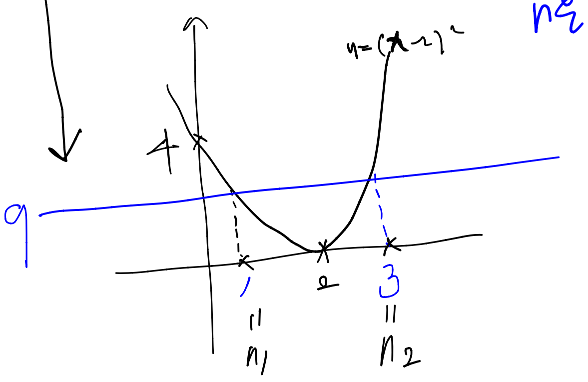
$81=\sqrt{3}^{f(n)} \Rightarrow 81 = 3^{\frac{f(n)}{2}} \Rightarrow 3^4 = 3^{\frac{f(n)}{2}}$

$\Rightarrow f(n)=8$

$\Rightarrow -(n-2)^2+k=8$

$-(n-2)^2 = 8-k$

$(n-2)^2 = k-8$



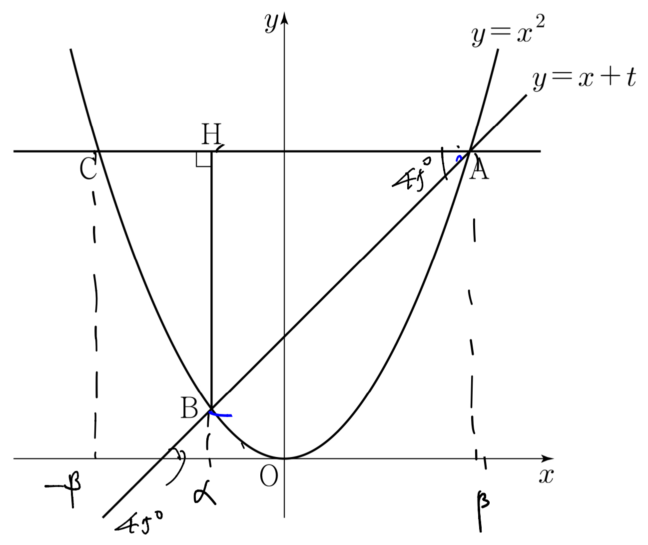
n은 자연수 ☆

$\therefore k=9$

12. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=x+t$와 곡선 $y=x^2$이 만나는 두 점을 A, B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$ 의 값은? (단, 점 A의 x좌표는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



$x^2=x+t \Rightarrow x^2-x-t=0$ 의 두 실근 α, β

$\alpha+\beta=1$

$\alpha\beta=-t$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta = 1+4t$

$(\alpha<\beta)$ $|\alpha-\beta|=\sqrt{4t+1}$

$\beta-\alpha=\sqrt{4t+1}$

$\overline{AH}=\beta-\alpha=\sqrt{4t+1}$

$\overline{CH}=\alpha-(-\beta)=\alpha+\beta=1$

$\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{4t+1}-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{4\cancel{t}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{t}(\sqrt{4t+1}+1)}=\frac{4}{2}$

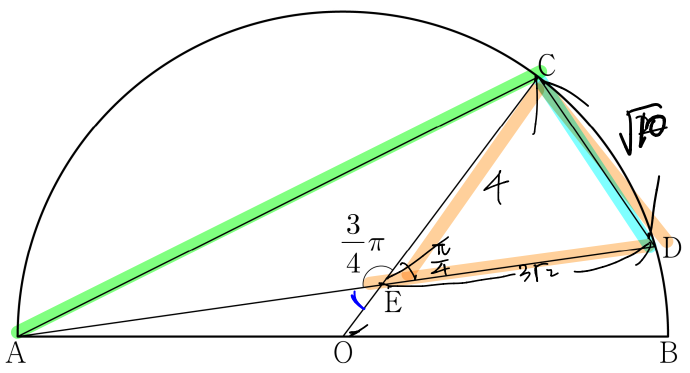
$=2$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\mathrm{CE}}=4,\quad \overline{\mathrm{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\mathrm{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}$ 의 값은? [4점]



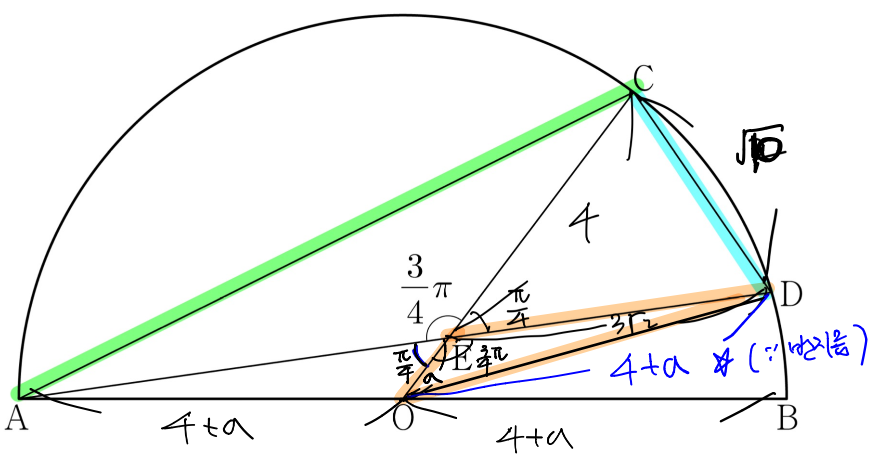
① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

△CED에서 cos 법칙

$\overline{CD}=x$.

$\frac{\sqrt2}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{16+18-x^2}{24\sqrt2} \Rightarrow 24=34-x^2 \Rightarrow x^2=10$

$x=\sqrt{10}$



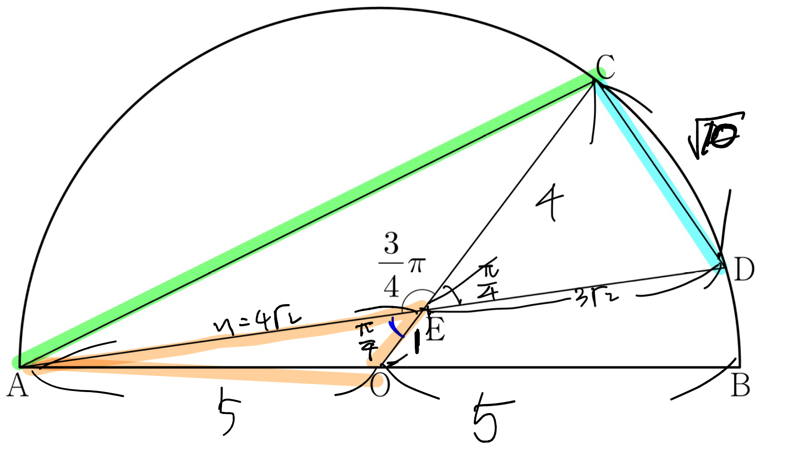
$\overline{OE}=a$라 하자. △OED에서 cos 법칙

$-\frac{\sqrt2}{2}=\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{a^2+18-(4+a)^2}{6\sqrt2 a}$

$\Rightarrow -6a=a^2+18-(16+8a+a^2) \Rightarrow -6a=\cancel{a^2}+18-16-8a-\cancel{a^2}$

$-\frac{\sqrt2}{2}\times 6\sqrt2 a$

$\Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=1$



$\overline{AE}=y$라 하자. △AEO에서 cos 법칙

$\frac{\sqrt2}{2}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{y^2+1-25}{2y} \Rightarrow \sqrt2 y=y^2-24 \Rightarrow y^2-\sqrt2 y-24=0$

$(y-4\sqrt2)(y+3\sqrt2)=0$

$\therefore y=4\sqrt2$

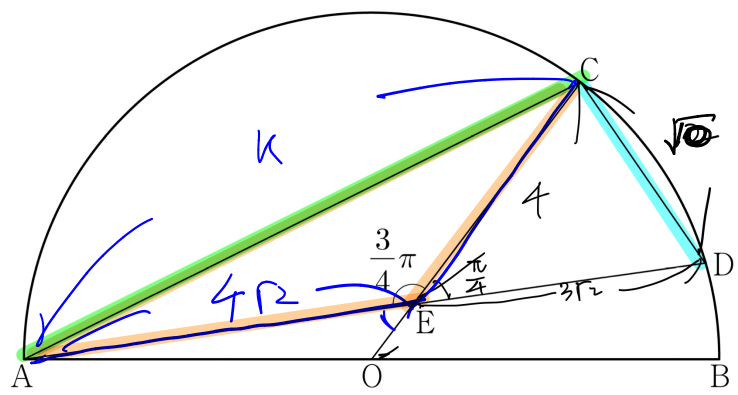
14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)\,dx-\int_0^1 |f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.
ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$\overline{AC}=k$라 하자, cos 법칙

$-\frac{\sqrt2}{2}=\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{32+16-k^2}{32\sqrt2}$

$\Rightarrow -32=48-k^2 \Rightarrow k^2=80$

$\Rightarrow k=4\sqrt5$

$\overline{AC}=4\sqrt5$, $\overline{CD}=\sqrt{10}$

$\therefore \overline{AC}\times\overline{CD}=4\sqrt5\times\sqrt5\times\sqrt2$

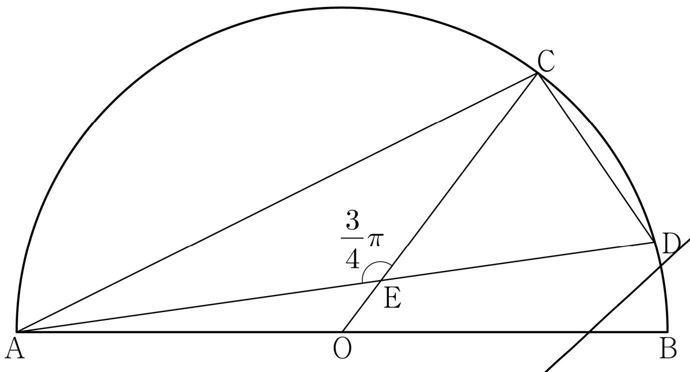
$=20\sqrt2$.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{CE}=4,\quad \overline{ED}=3\sqrt{2},\quad \angle CEA=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{AC}\times\overline{CD}$의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$ ② $10\sqrt{5}$ ③ $16\sqrt{2}$ ④ $12\sqrt{5}$ ⑤ $20\sqrt{2}$

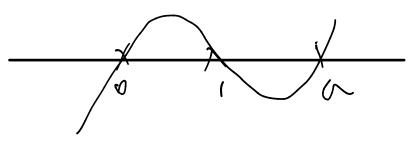
ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx=0$.

$\Rightarrow f(x)=|f(x)| \Rightarrow f(x)\ge 0,\ (0\le x\le 1)$

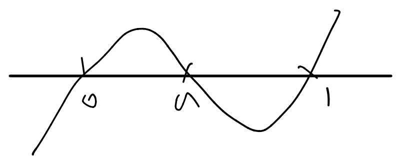
$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

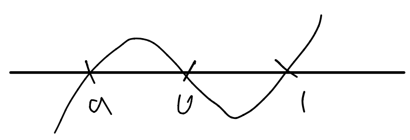
①



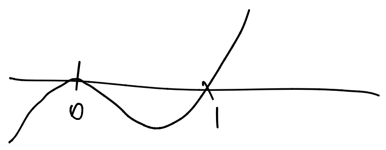
$a>1$ (o)



$0<a<1$ (x) $f(x)\ge 0\ (0\le x\le 1)$ 모순 X

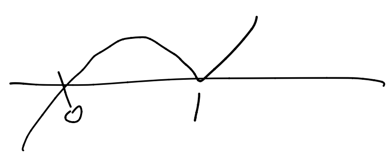


$a<0$. (x) 〃



$a=0$. (x) 〃

②



$a=1$ (o)

①, ② 모두 $\int_{-1}^0 f(x)dx<0$ 이고

$\int_0^1 f(x)dx>0$ 이므로

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx<0$ 이다.

∴ ㄱ은 참이다.

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$f(x)=x(x-1)(x-a)$

$$g(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx-\int_0^1|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

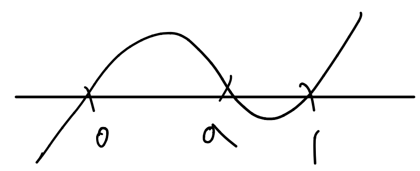
ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄴ.

①



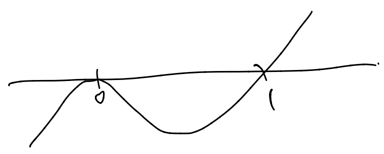
$0<a<1$

$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx<0$ (x)

<0 $+$.

②

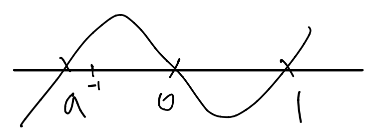
$a=0$



$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx<0$ (x)

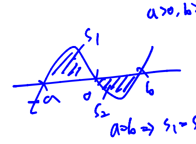
<0 >0

③.



$a<0$. (o)

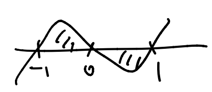
$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx.-\int_0^1|f(x)|dx$



$a>0, b>0$
$a=b \Rightarrow S_1=S_2$
$b>a \Rightarrow S_2>S_1$
$a>b \Rightarrow S_1>S_2$

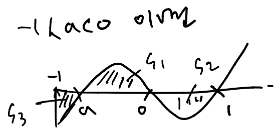
삼차함수 성질

만약 $a=-1$이면



$\Rightarrow g(-1)=0$.

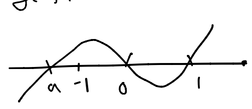
$-1<a<0$ 이면



$\int_{-1}^0 f(x)dx=-S_3+S_1-S_2=-S_3+\underbrace{(S_1-S_2)}_{<0}<0$

$\Rightarrow g(-1)<0$.

∴ $g(-1)>0$ 이려면 $a<-1$ 이어야한다. ㄴ은 참이다.



물론 직접계산 할 수 있음. (ㄷ의의 관계성을 보기위해 풀어보자)

식정에의해 $g(-1)=\frac{-10a-7}{12}-\left(\frac{2a+1}{12}\right)$ 이므로

$g(-1)>0 \Rightarrow -10a-7+2a-1>0 \Rightarrow -8a>8 \Rightarrow a<-1$

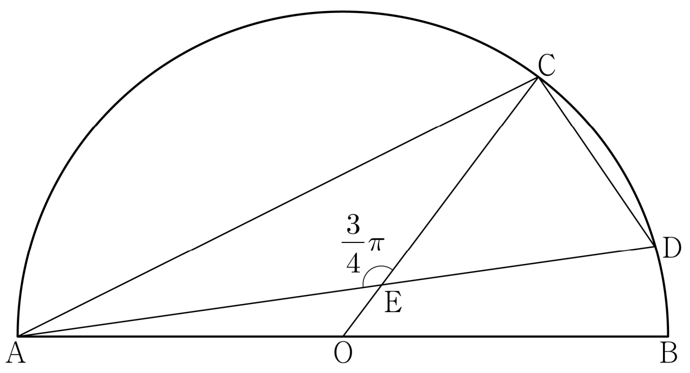
∴ ㄴ은 참

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

13. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 두 점 C, D가 있다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 두 선분 AD, CO가 점 E에서 만나고,

$$\overline{\text{CE}}=4,\quad \overline{\text{ED}}=3\sqrt{2},\quad \angle\text{CEA}=\frac{3}{4}\pi$$

이다. $\overline{\text{AC}}\times\overline{\text{CD}}$ 의 값은? [4점]



① $6\sqrt{10}$　② $10\sqrt{5}$　③ $16\sqrt{2}$　④ $12\sqrt{5}$　⑤ $20\sqrt{2}$

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_{t}^{t+1} f(x)\,dx-\int_{0}^{1}|f(x)|\,dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$

$=-2\int_0^1|f(x)|dx$

$=-2\times\frac{-2a+1}{12}$

$=\frac{2a-1}{6}$

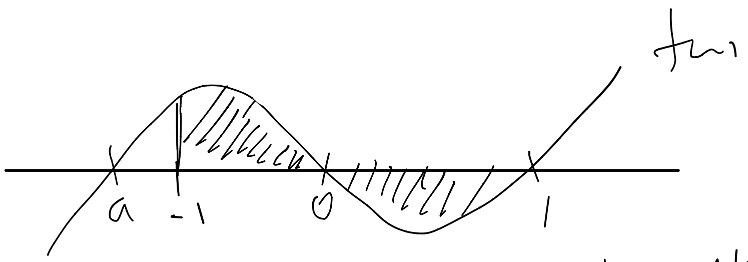
$a<-\frac{5}{2}$

$2a<-5$

$g(0)=\frac{2a-1}{6}<\frac{-6}{6}=-1$

∴ ㄷ은 참이다.

$g(-1)=\int_{-1}^{0} f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$



$f(x)=x(x-a)(x-1)$
$=(x^2-ax)(x-1)$
$=x^3-ax^2-x^2+ax$
$=x^3-(a+1)x^2+ax$

$\int_{-1}^{0} f(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{(a+1)x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}\right]_{-1}^{0}$

$=-\left(\frac14+\frac{a+1}{3}+\frac{a}{2}\right)$

$=-\frac{10a+7}{12}$

$\int_0^1|f(x)|dx=\int_0^1 -f(x)dx=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{(a+1)x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_0^1$

$=-\frac14+\frac{a+1}{3}-\frac{a}{2}$

$=\frac{-3+4a+4-6a}{12}=\frac{-2a+1}{12}$

-8

$\frac{-10a-7}{12}-\left(\frac{-2a+1}{12}\right)>1 \Rightarrow -10a-7+2a-1>12$

$\Rightarrow -8a>20$

$\Rightarrow a<-\cancel{\frac{20}{8}}\ \frac52$

$a<-\frac52$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

15. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다.
(단, r는 $0<|r|<1$인 상수이다.)

(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+3 & (|a_n|<5) \\ -\frac{1}{2}a_n & (|a_n|\ge 5) \end{cases}$$

이다.

$|a_m|\ge 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$a_4=r$ $a_8=r^2$ ......

$|a_3|<5$

$a_4=a_3+3$

$-1<r<1$

x $a_4=r$

x $a_3=r-3$

$a_2=r-6$ $-7<a_2<-5$ x.

$a_2=-2r+6$ (o)

$-2<-2r<2$
$1<a_1<5$

o $a_2=-2r+6$

$a_1=-2r+3$ (x)

o $a_1=4r-12$

$a_1=4r-12$ (o)

x $a_5=r+3$

$2<r<4$
$5<\ <7$

o $a_6=r+6$

-2.5

x $a_7=-\frac{1}{2}r-3=\frac{1}{4}-3$

$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}r<\frac{1}{2}-3$
-3
$-3.5<a_n<-2.5$

x $a_8=-\frac{1}{2}r=r^2 \Rightarrow r=-\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}<-\frac{1}{2}r<\frac{1}{2}$

x $a_9=-\frac{1}{2}r+3 = \frac{1}{4}+3$

o $a_{10}=\frac{1}{4}+6$

x $a_{11}=-\frac{1}{8}-3$

x $a_{12}=-\frac{1}{8}$

x $a_{13}=-\frac{1}{8}+3$

o $a_{14}=-\frac{1}{8}+6$

o $a_{18}=\frac{1}{4}+6$

x $a_{15}=\frac{1}{16}-3$

x $a_{16}=\frac{1}{16}$

x $a_{17}=\frac{1}{16}+3$

$a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ \cdots\ a_{10}\ \cdots\ a_{14}\ \cdots\ a_{18}\cdots$

b_1 b_2 b_3

$b_n=4n-2$

25 98

$b_1\sim b_{25}$ a_1

$25+1=26$ p

$a_1=4r-12=-2-12=-14$

$\therefore 26-14=12$

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

진수조건 $x>4 \cap x>-2$
$\Rightarrow x>4$

$\log_3(x-4)=\frac{1}{2}\log_3(x+2)$

$2\log_3(x-4)=\log_3(x+2)$

$(x-4)^2=(x+2)$

$x^2-8x+16=x+2$

$x^2-9x+14=0$

$(x-7)(x-2)=0$

$x=7$

$x=2$

7

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2-4x+3$이고 $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+C$

$f(1)=2-2+3+C=5$

$C=2$

$f(x)=2x^3-2x^2+3x+2$

$f(2)=16-8+6+2$
$=8+8=16$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k = 10$일 때,

$$\sum_{k=1}^{5} c a_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

를 만족시키는 상수 c의 값을 구하시오. [3점]

$c \underbrace{\sum_{n=1}^{5} a_n}_{10} = 65 + 5c$

$10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

$\therefore c = 13$

19. 방정식 $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0$이 서로 다른 4개의 실근을 갖도록 하는 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

$k = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$

$-12x^3 + 12x^2 + 24x$

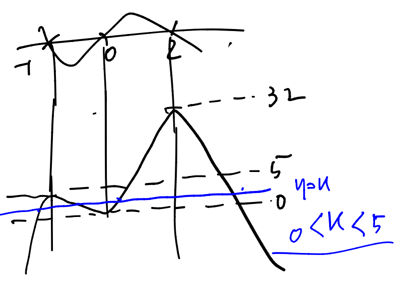
$-12x(x^2 - x - 2)$

$(x-2)(x+1)$

$-3-4+12$

-3×16

$-48 + 32 + 48$



4

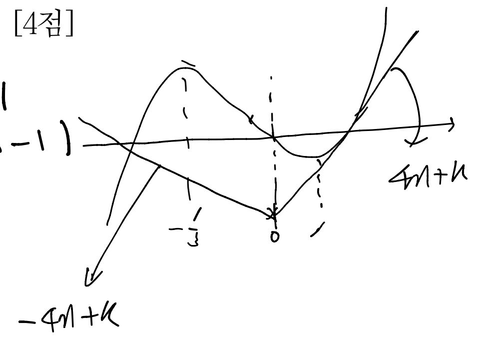
20. 상수 $k(k<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30 \times S$의 값을 구하시오. [4점]

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$= (3x+1)(x-1)$



$f(x) = x^3 + x^2 - x \quad y = 4x + k$

접점의 x좌표 t라 하면

함숫값: $t^3 + t^2 - t = 4t + k$ → $1+1-1 = 4+k$, $k = -3$

접선기울기: $3t^2 + 2t - 1 = 4$

$3t^2 + 2t - 5 = 0$

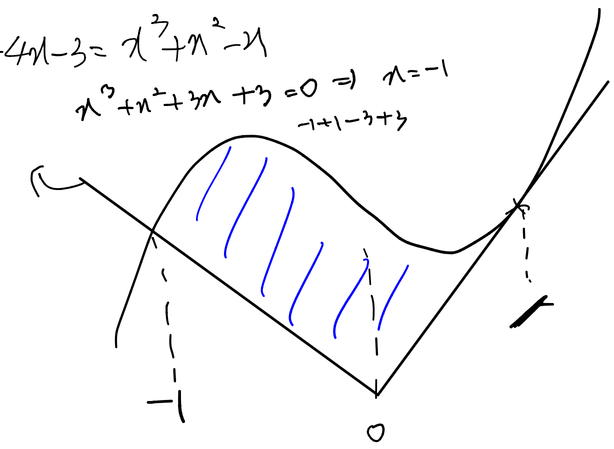
$3t \quad +5$
$t \quad -1$

$t = 1 \ (\because t > 0)$

$-4x - 3 = x^3 + x^2 - x$

$x^3 + x^2 + 3x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1$

$-1+1-3+3$



$S = \int_{-1}^{1} \{f(x) - g(x)\} dx,$

$= \int_{-1}^{0} x^3 + x^2 - x - (-4x - 3) dx$

$+ \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - x - (4x - 3) dx$

$= \int_{-1}^{0} x^3 + x^2 + 3x + 3 \, dx$

$+ \int_{0}^{1} x^3 + x^2 - 5x + 3 \, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x\right]_{0}^{1}$

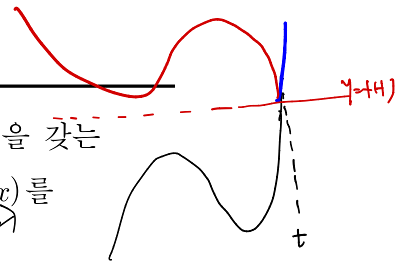
$-\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 3\right) \qquad \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3$

$-\cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3$

$= \frac{2}{3} - \frac{8}{2} + 6 = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$

$\therefore 30S = 80$

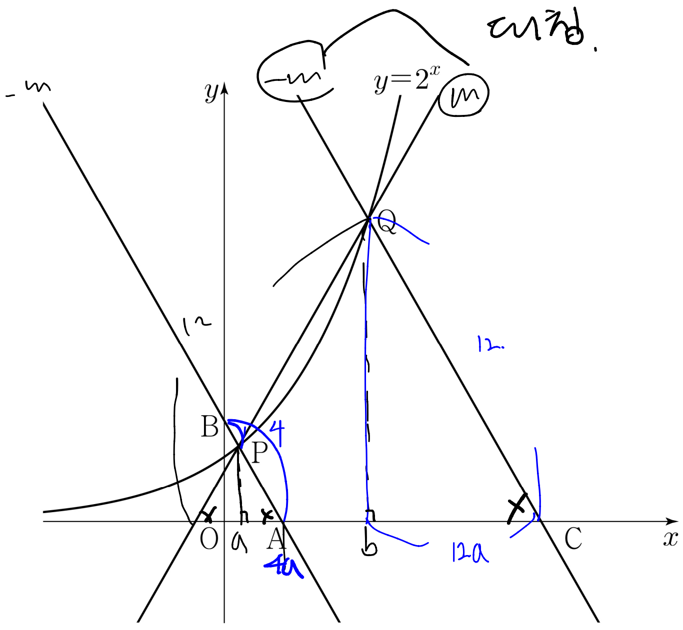
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.



21. 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

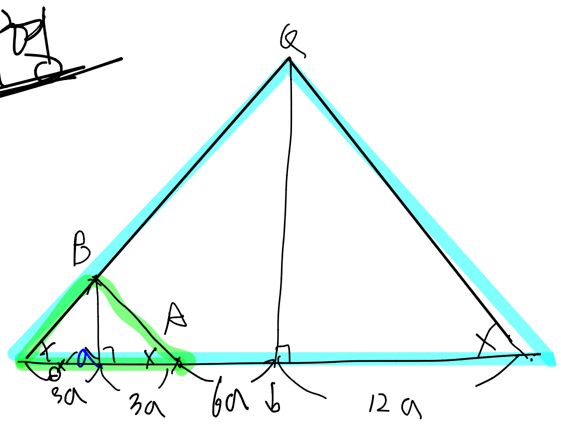
$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점]



$2^a \times 4 = 2^b$

★ 이등변삼각형



$b=10a$

$2^a \times 4 = 2^{10a}$

$2^{a+2}=2^{10a}$

$10a=a+2 \Rightarrow 9a=2$

$a=\frac{2}{9}$

$b=\frac{20}{9}$

$90\times(a+b)=90\times\frac{22}{9}$

$=220$

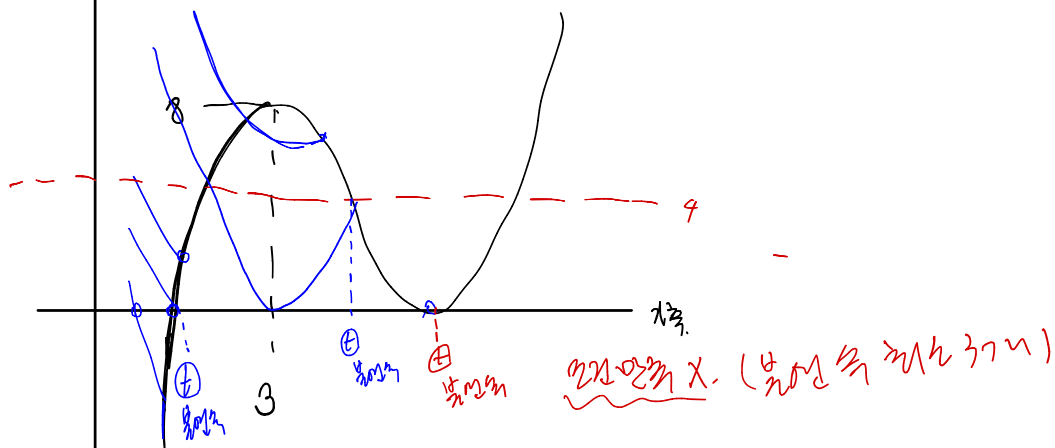
22. 최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x<t) \end{cases}$$

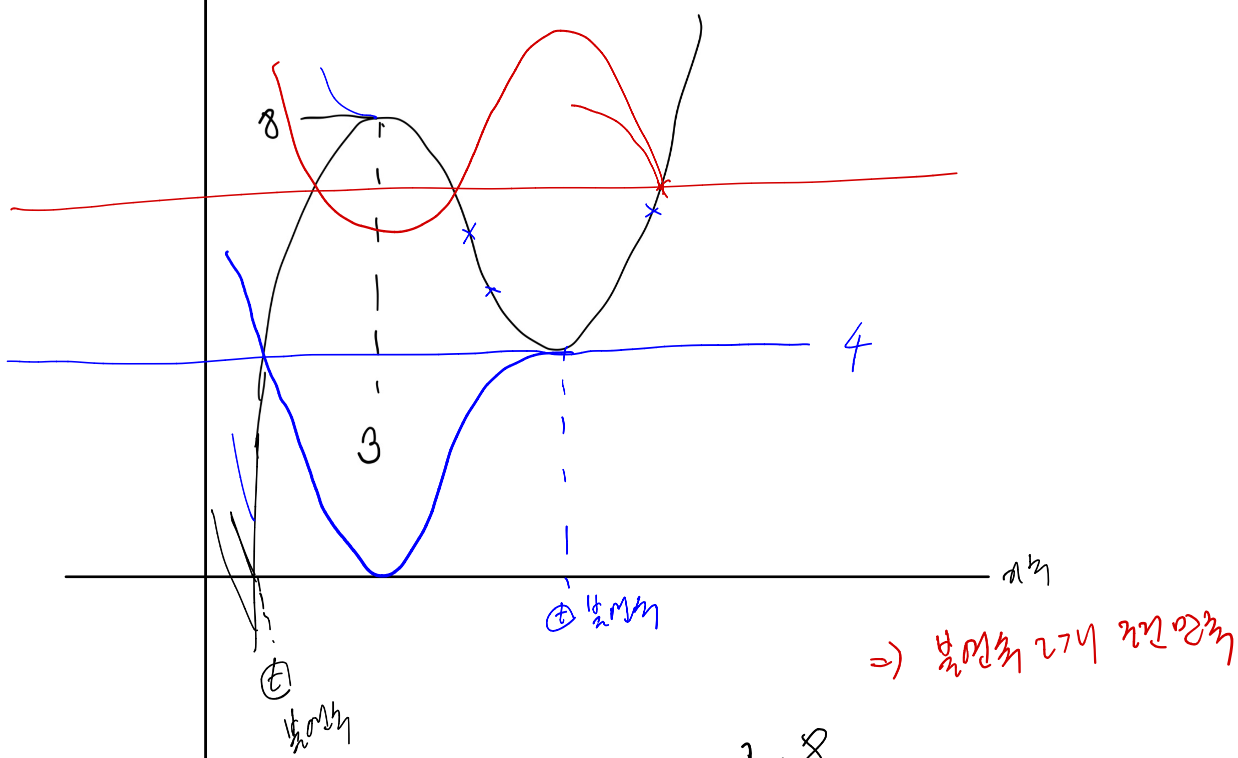
$2f(t)-f(x)$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

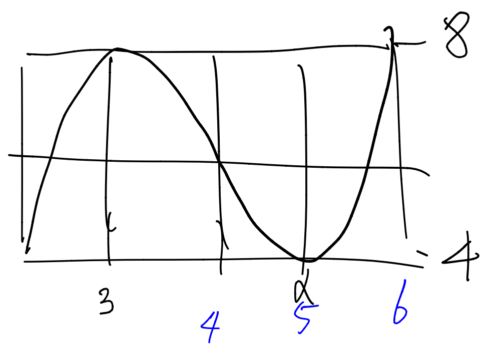
$2p-f(x) \Rightarrow y=p$에 대해서 대칭.
$2f(t)-f(x) \Rightarrow y=f(t)$에 대해서 대칭



조건 만족 X. (불연속 최소 3개)



⇒ 불연속 2개 조건 만족



극값차 $=4$

$\frac{1}{2}(\alpha-3)^3=4$

$(\alpha-3)^3=8$

$\alpha=5$

$f(x)-8=(x-3)^2(x-6)$

$f(8)=25\times2+8=58$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(x^2+2)^6$의 전개식에서 x^4의 계수는? [2점]

① 240 ② 270 ③ 300 ④ 330 ⑤ 360

$_6C_2 \cdot (x^2)^2 (2)^4$

365

15×16

15
×16
90
15
240

24. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=1,\quad \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{4},\quad \mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$$

일 때, $\mathrm{P}(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{9}{16}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{11}{16}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$

$P(A)=P(B)$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$1 = 2P(A)-\frac{1}{4}$

$\frac{5}{4}=2P(A) \Rightarrow P(A)=\frac{5}{8}$

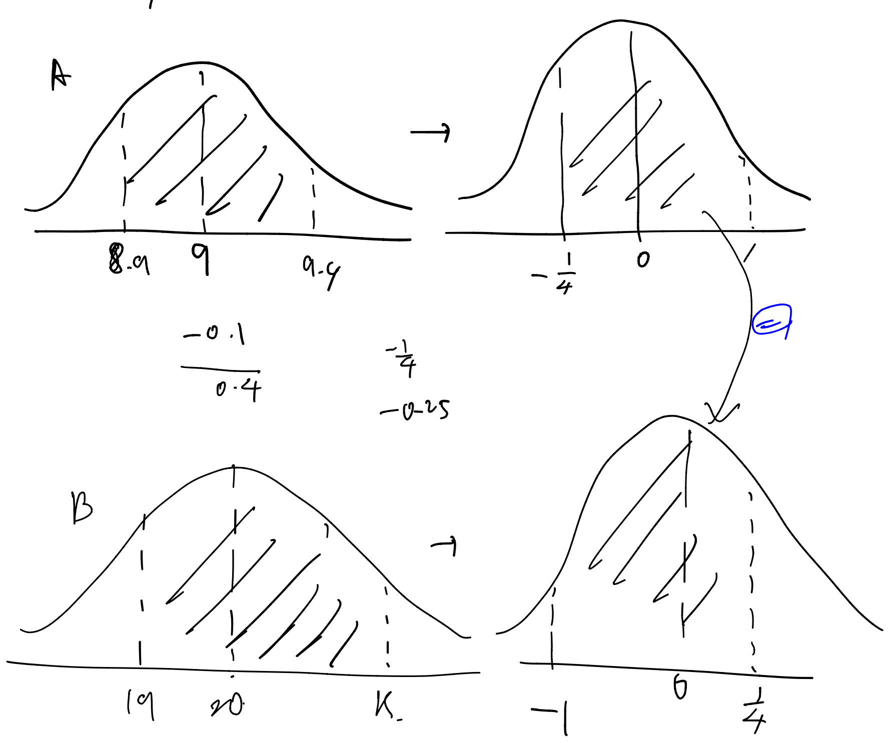
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 어느 인스턴트 커피 제조 회사에서 생산하는 A 제품 1개의 중량은 평균이 9, 표준편차가 0.4인 정규분포를 따르고, B 제품 1개의 중량은 평균이 20, 표준편차가 1인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산한 A 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 8.9 이상 9.4 이하일 확률과 B 제품 중에서 임의로 선택한 1개의 중량이 19 이상 k 이하일 확률이 서로 같다. 상수 k의 값은? (단, 중량의 단위는 g이다.) [3점]

① 19.5 ② 19.75 ③ 20 ④ 20.25 ⑤ 20.5

$A \sim N(9,\ (0.4)^2)$

$B \sim N(20,\ 1^2)$



$\frac{-0.1}{0.4}$ $-\frac{1}{4}$ -0.25

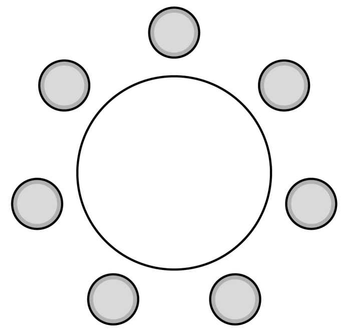
$\frac{19-20}{1}$

$\frac{k-20}{1} = \frac{1}{4}$

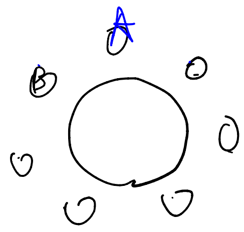
$k = 20.25$

26. 세 학생 A, B, C를 포함한 7명의 학생이 원 모양의 탁자에 일정한 간격을 두고 임의로 모두 둘러앉을 때, A가 B 또는 C와 이웃하게 될 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{7}{10}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{9}{10}$



$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ 120



① A가 B와 이웃.

$1 \times 2 \times 5! = 240$
(A고정) (B위치)

② A가 C와 이웃

〃 = 240

③ A가 B와 C 모두 이웃

$1 \times 2! \times 4! = 48$ (24×2)
(A고정) (B, C자리바꾸기) (나머지 배열)

$480 - 48 = 432$

$\frac{432}{6!} = \frac{432}{654321} = \frac{18 \cdot 3}{5 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{3}{5}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	a	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	1

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X)$일 때, $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)$의 값은? (단, $a>1$) [3점]

① 29 ② 33 ③ 37 ④ 41 ⑤ 45

$E(X)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a$.

$E(X^2)=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a\right)^2$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a^2-\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{5}a+\frac{4}{25}a^2\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}a+\frac{6}{25}a^2$

$=\frac{1}{4}-\frac{2}{5}a+\frac{6}{25}a^2$

$\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{2}{5}a+\frac{6}{25}a^2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}a$

$\cancel{\frac{1}{4}}-\frac{2}{5}a+\frac{6}{25}a^2=\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{2}{5}a+\frac{4}{25}a^2$

$\frac{2}{25}a^2-\frac{4}{5}a=0$

$2a^2-20a=0$

$2a(a-10)=0$.

$a=10 \ (\because a>1)$

$E(X^2)+E(X)=1+\frac{2}{5}a+\frac{2}{5}a^2$

$=1+4+40$

$=45$

28. 1부터 10까지의 자연수 중에서 임의로 서로 다른 3개의 수를 선택한다. 선택된 세 개의 수의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{3}{20}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{11}{60}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{13}{60}$

1. 2. 3 4 5 6 7 8 .9 10 → 나머지 1 : 1. 4. 7. 10 / 〃 2 : 2. 5. 8. / 〃 0 : 3. 6. 9

곱이 5의 배수.

① 5가 0개

10 □ △

나머지 1 — 나머지 1 1 1 / 나머지 1 / 2 0

1. 4. 7 중 2개 선택 → $_3C_2=3$개

2. 8 중 1개 선택, 3 6 9 중 1개 선택 → $_2C_1\times{}_3C_1=6$개

② 5가 1개

5 □ △

나머지 2 — 나머지 2 2 2 → 2 5 8 → 1가지

2 1 0 → 1. 4. 7. 10 중 1개 선택, 3. 6. 9 중 1개 선택 → $_4C_1\times{}_3C_1=12$개

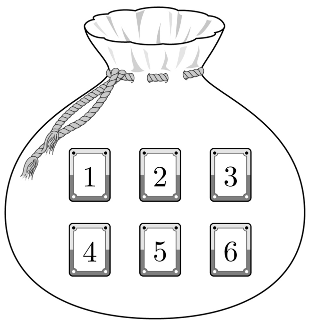
$9+13=22$

$\frac{22}{_{10}C_3}=\frac{22}{120}=\frac{11}{60}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적힌 6장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 장의 카드를 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 4번 반복하여 확인한 네 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $\mathrm{P}\left(\overline{X}=\frac{11}{4}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$a+b+c+d=11$

6 3 1 1 ⇒ $\frac{4!}{2!}=12$
6 2 2 1 ⇒ 12
5 4 1 1 ⇒ 12
5 3 2 1 ⇒ $4!=24$
5 2 2 2 ⇒ 4
4 4 2 1 ⇒ 12
4 3 3 1 ⇒ 12
4 3 2 2 ⇒ 12
3 3 3 2 ⇒ 4

$72+8+24 = 80$
104

$\frac{\cancel{104}\ \cancel{52}\ \cancel{26}\ 13}{6\times6\times6\times6} = \frac{13}{9\times18} = \frac{13}{162}$

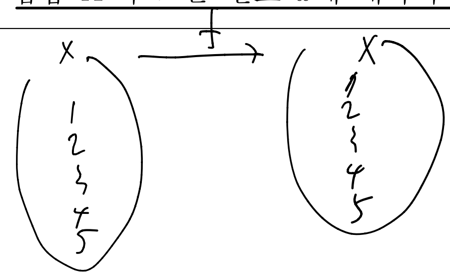
3 3 3

$18 \times 9 = 162$

175

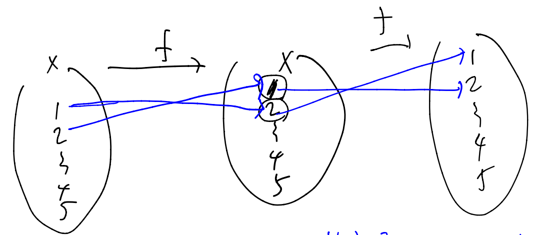
30. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: X \to X$에 대하여 함수 f의 치역을 A, 합성함수 $f \circ f$의 치역을 B라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

> (가) $n(A) \leq 3$
> (나) $n(A)=n(B)$
> (다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \neq x$이다.



① $n(A)=1$ (X) (다)조건에 의해

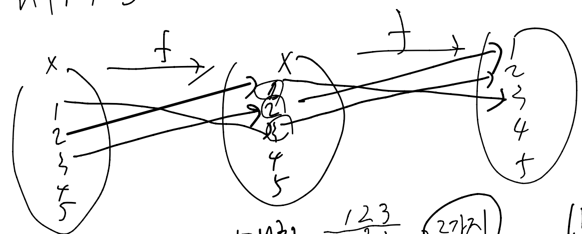
② $n(A)=2$ 치역. 1, 2라고 가정 $_5C_2$



$n(B)=2$ 이려면 $f(1)=1$ $f(2)=2$ or $f(1)=2$ $f(2)=1$ ⇒ 2가지
But (다)조건에 의해 $f(1)=2$, $f(2)=1$로 확정 ∴ 1가지

3, 4, 5가 1, 2로 (어디로 가던 상관X)
∴ $2^3=8$
∴ $_5C_2 \times 1 \times 8 = 80$

③ $n(A)=3$ 치역 1, 2, 3이라고 가정 $_5C_3$



1대칭 123 / 231 / 312 2가지 (by (다)조건)

4, 5가 1, 2, 3로 (어디로 가던 상관X)
∴ $3^2=9$
∴ $_5C_3 \times 2 \times 9 = 180$

∴ 260

∗ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x \to 0} \frac{4^x - 2^x}{x}$ 의 값은? [2점]

① $\ln 2$ ② 1 ③ $2\ln 2$ ④ 2 ⑤ $3\ln 2$

$\ln 4 \cdot 4^x - \ln 2 \cdot 2^x.$

$\ln 4 - \ln 2 = \ln 2$

24. $\int_0^\pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$ 의 값은? [3점]

$\sin x$

① $\frac{\pi}{2}$ ② π ③ $\frac{3\pi}{2}$ ④ 2π ⑤ $\frac{5\pi}{2}$

$\int_0^\pi x \sin x \, dx$

$[x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos x \, dx.$

$= \pi + \int_0^\pi \cos x \, dx$

$= \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

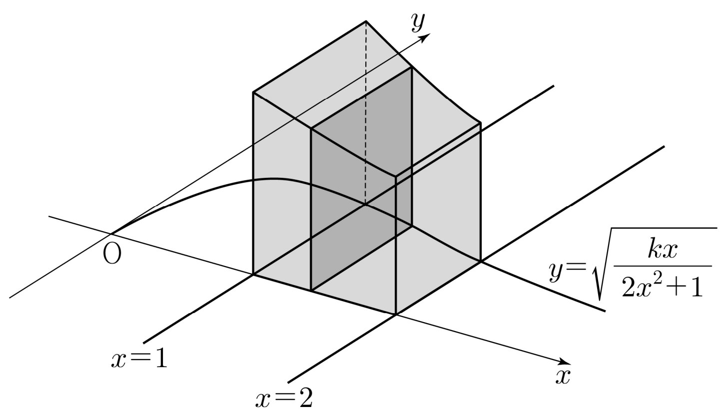
$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_n=10$

$\lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{10+2n}=5$

26. 그림과 같이 양수 k에 대하여 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피가 $2\ln 3$일 때, k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx = 2\ln 3$

$\frac{k}{4}\int_1^2 \frac{4x}{2x^2+1}dx = 2\ln 3$

$\frac{k}{4}\left[\ln(2x^2+1)\right]_1^2 = 2\ln 3$

$\frac{k}{4}(\ln(9)-\ln 3)$

$\frac{k}{4}(\cancel{\ln 3}) = 2\cancel{\ln 3}$

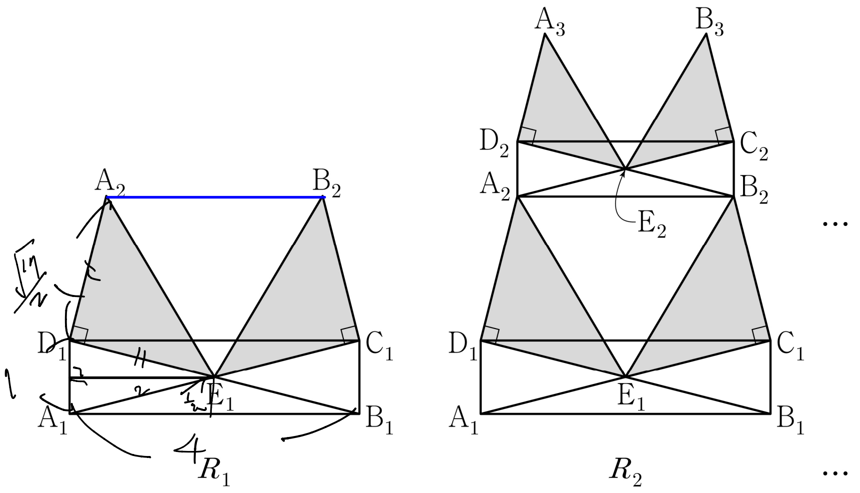
$k=8$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ◸◹ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ◸◹ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

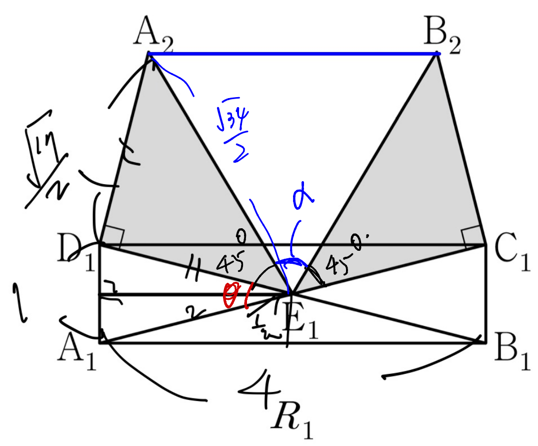


$\frac{1}{4}+4$ $\frac{17}{4}$

① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

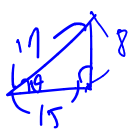
$\frac{\pi}{2}+\alpha+\theta=\pi \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}-\theta$

$\cos\alpha=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=\sin\theta$.



△$A_1E_1D_1$에서 cos법칙

$\cos\theta=\frac{\frac{17}{4}+\frac{17}{4}-1}{\frac{17}{2}}=\frac{\frac{17}{2}-1}{\frac{17}{2}}=\frac{17-2}{17}=\frac{15}{17} \Rightarrow \sin\theta=\frac{8}{17}$



△$A_2E_1B_2$에서 cos법칙

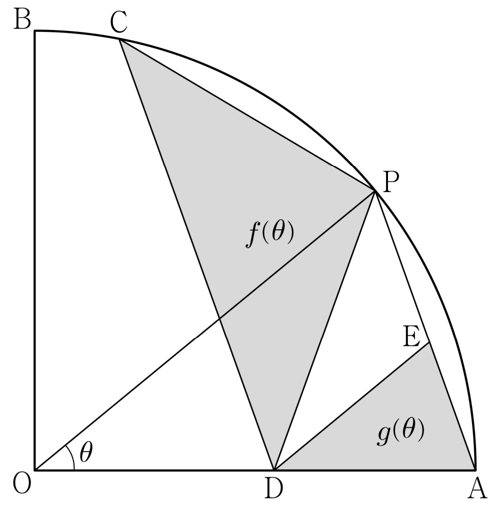
$\overline{A_2B_2}=x$

$\cos\alpha=\frac{8}{17}=\frac{17-x^2}{17}$

$17-x^2=8 \Rightarrow 9=x^2 \Rightarrow x=3 \Rightarrow$ 닮음비 $16:9$

넓비 $\frac{9}{16}$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

초항. $\frac{17}{4}$

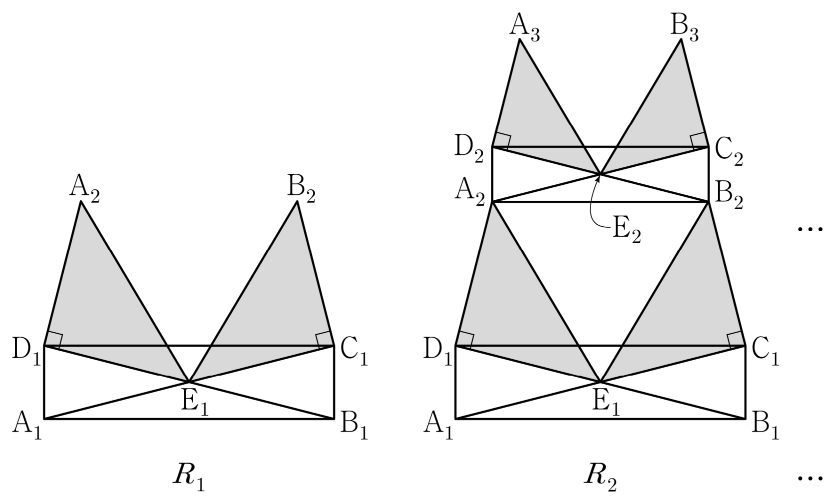
$\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{68}{16-9}=\frac{68}{7}$.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=1$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$에서 두 대각선의 교점을 E_1이라 하자. $\overline{A_2D_1}=\overline{D_1E_1}$, $\angle A_2D_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 A_2E_1이 만나도록 점 A_2를 잡고, $\overline{B_2C_1}=\overline{C_1E_1}$, $\angle B_2C_1E_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 D_1C_1과 선분 B_2E_1이 만나도록 점 B_2를 잡는다. 두 삼각형 $A_2D_1E_1$, $B_2C_1E_1$을 그린 후 ⩍ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:1$이고 선분 D_2C_2가 두 선분 A_2E_1, B_2E_1과 만나지 않도록 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 E_2, A_3, B_3을 잡고 두 삼각형 $A_3D_2E_2$, $B_3C_2E_2$를 그린 후 ⩍ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$ ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

$l\ \frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta)^2\cancel{\sin\theta}}{2\times\theta^2\times 2\sin^2\frac{\theta}{2}\cancel{\sin 2\theta}}$ 2

$l\ \frac{(\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta)^2}{\theta^4}\times\frac{1}{8}\times 4$

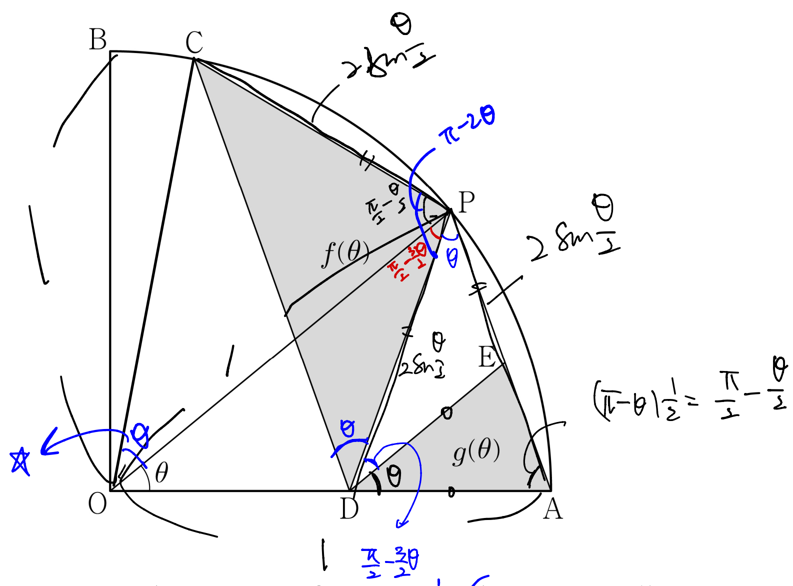
$l\ \left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta}{\theta^2}\right)^2\times\frac{1}{2}$

$\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{3}{2}\sin\frac{3}{2}\theta}{2\theta} \Rightarrow \frac{-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}{2}=1$

$\therefore 1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}=\overline{PC}=\overline{PD}$가 되도록 호 PB 위에 점 C와 선분 OA 위에 점 D를 잡는다. 점 D를 지나고 선분 OP와 평행한 직선이 선분 PA와 만나는 점을 E라 하자. $\angle POA=\theta$일 때, 삼각형 CDP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 EDA의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

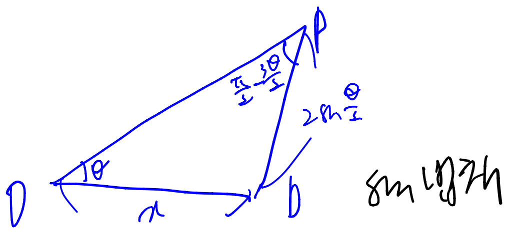
$\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

$f(\theta)=\frac{1}{2}\times(2\sin\frac{\theta}{2})^2\times\sin(\pi-2\theta)=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin 2\theta$

$4\sin^2\frac{\theta}{2}$ $\sin 2\theta$



sin 법칙

$\frac{x}{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{3}{2}\theta)}=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta} \Rightarrow x=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}}{\sin\theta}\times\cos(\frac{3}{2}\theta)$

$=\frac{\cancel{2\sin\frac{\theta}{2}}}{\cancel{2\sin\frac{\theta}{2}}\cos\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{3}{2}\theta$

$=\frac{\cos\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$

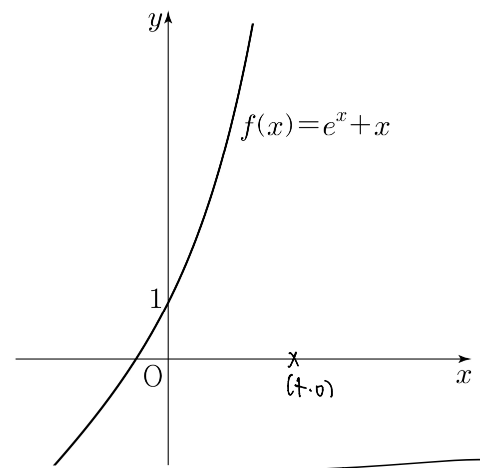
$\overline{DA}=1-x=1-\frac{\cos\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}$

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3}{2}\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\sin\theta$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 함수 $f(x)=e^x+x$가 있다. 양수 t에 대하여 점 $(t, 0)$과 점 $(x, f(x))$ 사이의 거리가 $x=s$에서 최소일 때, 실수 $f(s)$의 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$의 역함수를 $h(t)$라 할 때, $h'(1)$의 값을 구하시오. [4점]



$\sqrt{(t-x)^2+(f(x))^2} = \sqrt{t^2-2tx+x^2+e^{2x}+2xe^x+x^2}$

$-2t+2x+2e^{2x}+2e^x+2xe^x+2x=0$

$2e^{2x}+(2x+2)e^x+4x=2t$

$e^{2x}+(x+1)e^x+2x=t$

$e^{2s}+(s+1)e^s+2s=t \quad \cdots ①$

$f(s)=e^s+s=g(t)$

$g(h(t))=t \Rightarrow h'(t)=\frac{1}{g'(h(t))} \Rightarrow h'(1)=\frac{1}{g'(h(1))}$

$g(h(1))=1$

$e^s+s=1$ 증가함수. $s=0$.

① 에 대입

$1+1=t \Rightarrow t=2$

$g(2)=1$ 이므로 $h(1)=2$

$\therefore h'(1)=\frac{1}{g'(2)}$

$g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}$

$2e^{2s}\frac{ds}{dt}+(s+1)e^s\frac{ds}{dt}+2\frac{ds}{dt}=1$

$t=2$이때 $s=0$일때

$(2+2+2)\frac{ds}{dt}=1 \Rightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{1}{6}$

$\therefore g'(2)=(2)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore h'(1)=3$

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 구간 $(0, \infty)$에서 $g(x)\ge 0$인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x \le -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $f(x) \ge f(-3)$이다. 극솟값 ①
>
> (나) $x > -3$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2 = f'(x)$이다.

$g(x+3)=\frac{f'(x)}{(f(x)-f(0))^2} \ge 0.$

$\Rightarrow f'(x)\ge 0$

③ $(x>-3)$

증가

$\int_4^5 g(x)dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$0=g(3)\times 0=f'(0) \Rightarrow f'(0)=0$ ②

①, ②, ③ 조건에 의해

0

-3

$-3 \quad 0$

$f'(x)=4x^2(x+3)=4x^3+12x^2$

$f(x)=x^4+4x^3+c$

$f(x)-f(0)=x^4+4x^3+c-c$

$=x^4+4x^3$

$1<x<2$ 에서

$g(x+3)=\frac{f'(x)}{(f(x)-f(0))^2}=\left(\frac{-1}{f(x)-f(0)}\right)'$

$\frac{-1}{f(x)-f(0)} \Rightarrow$ 미분 $\Rightarrow \frac{f'(x)}{(f(x)-f(0))^2}$

$\therefore \int_4^5 g(x)dx=\int_1^2 g(x+3)dx=\int_1^2\left(\frac{-1}{f(x)-f(0)}\right)'dx=\left[\frac{-1}{f(x)-f(0)}\right]_1^2$

$=\left[\frac{-1}{x^4+4x^3}\right]_1^2$

$=\frac{-1}{48}-\left(\frac{-1}{5}\right)$

$=\frac{-1}{48}+\frac{1}{5}=\frac{-5+48}{240}$

$=\frac{43}{240}$

283

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ -1)$, $\mathrm{B}(-5,\ b,\ 3)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(8,\ 3,\ 1)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 20　② 22　③ 24　④ 26　⑤ 28

$a-5=16 \Rightarrow a=21$

$b+1=6 \Rightarrow b=5$

26

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ 위의 점 $(2a,\ \sqrt{3})$에서의 접선이 직선 $y=-\sqrt{3}x+1$과 수직일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\dfrac{2ax}{a^2}-\sqrt{3}y=1$

$\sqrt{3}y=\dfrac{2ax}{a^2}-1$

$y=\dfrac{2x}{a\sqrt{3}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

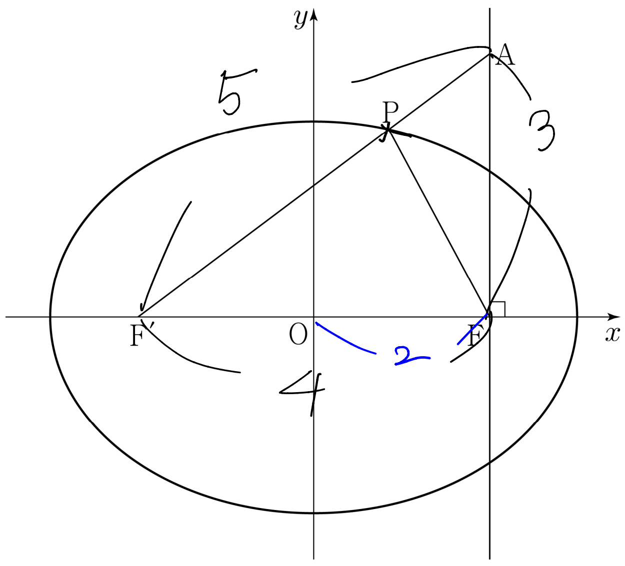
$\dfrac{2}{a\cancel{\sqrt{3}}}x \cdot -\cancel{\sqrt{3}}=-1$

$a=2$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{5}=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 지나고 x축에 수직인 직선 위의 점 A가 $\overline{\mathrm{AF'}}=5$, $\overline{\mathrm{AF}}=3$을 만족시킨다. 선분 AF′과 타원이 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF′F의 둘레의 길이는? (단, a는 $a>\sqrt{5}$인 상수이다.) [3점]

① 8 ② $\frac{17}{2}$ ③ 9 ④ $\frac{19}{2}$ ⑤ 10



$a^2-5=4.$

$a=3$

$\overline{PF'}+\overline{PF}=6.$

$\therefore 6+4=10$

26. 좌표평면 위의 점 A(3, 0)에 대하여

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=5$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형과 직선 $y=\frac{1}{2}x+k$가 오직 한 점에서 만날 때, 양수 k의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① $\frac{3}{5}$ ② $\frac{4}{5}$ ③ 1 ④ $\frac{6}{5}$ ⑤ $\frac{7}{5}$

P(x, y)

$(x-3, y)\ (x-3, y)$

$(x-3)^2+y^2=5$

$(3, 0)$ $2y=x+2k$

$x-2y+2k=0$

$\frac{|3+2k|}{\sqrt{1+4}}=\frac{|3+2k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

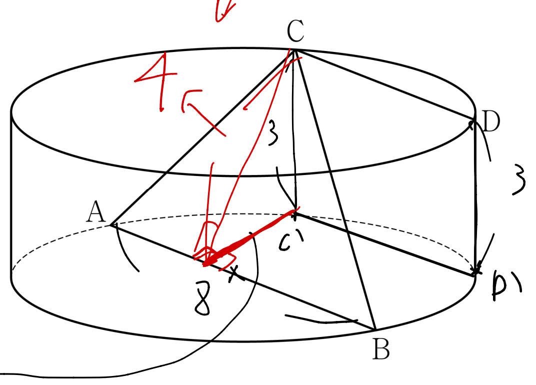
$|3+2k|=5$

$\therefore k=1 \quad (\because k>0)$

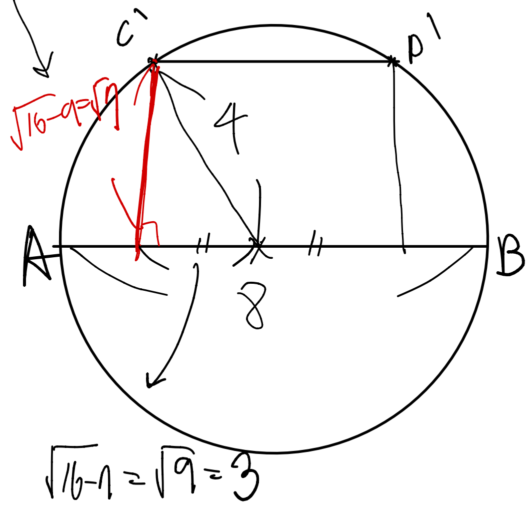
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 3인 원기둥이 있다. 선분 AB는 이 원기둥의 한 밑면의 지름이고 C, D는 다른 밑면의 둘레 위의 서로 다른 두 점이다. 네 점 A, B, C, D가 다음 조건을 만족시킬 때, 선분 CD의 길이는? [3점]

> (가) 삼각형 ABC의 넓이는 16이다.
>
> (나) 두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.



① 5 ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7



$\sqrt{16-7}=\sqrt{9}=3$

$\therefore\ \overline{CD}=3\times2=6$

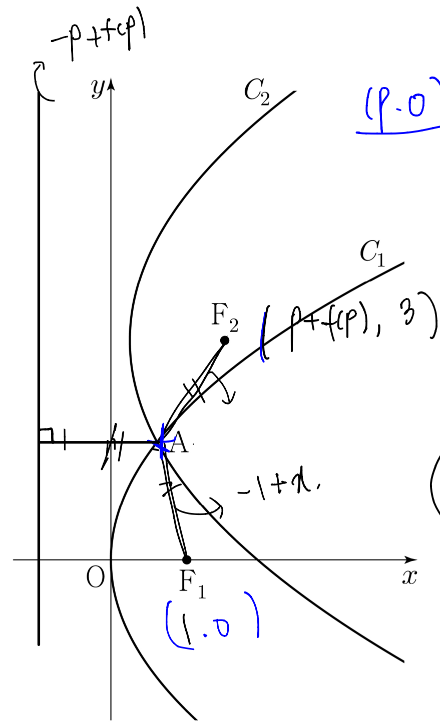
28. 실수 $p\,(p\ge1)$과 함수 $f(x)=(x+a)^2$에 대하여 두 포물선 $y^2=4px$

$$C_1: y^2=4x,\quad C_2:(y-3)^2=4p\{x-f(p)\}$$

$f(p),\ 3.$

가 제1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 두 포물선 C_1, C_2의 초점을 각각 F_1, F_2라 할 때, $\overline{AF_1}=\overline{AF_2}$를 만족시키는 p가 오직 하나가 되도록 하는 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{4}$ ② $-\frac{5}{8}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $-\frac{3}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$



$(p,0)$

기억

준선일치

$-p+f(p)=-1$

$f(p)=p-1$

$(p+a)^2=p-1$

$p^2+2ap+a^2=p-1$

$p^2+(2a-1)p+a^2+1=0$

$(2a-1)^2-4(a^2+1)=0$

$\cancel{4a^2}-4a+1-\cancel{4a^2}-4=0$

$4a=-3$

$a=-\frac{3}{4}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

$|\overrightarrow{AX}|=2$ or $|\overrightarrow{BX}|=2$

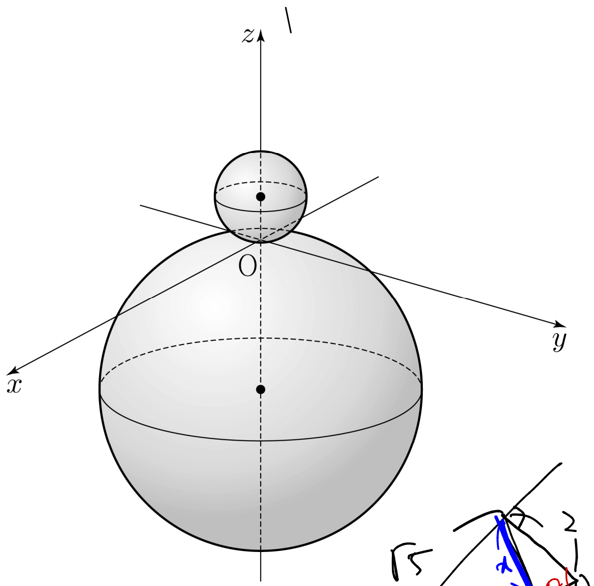
단답형

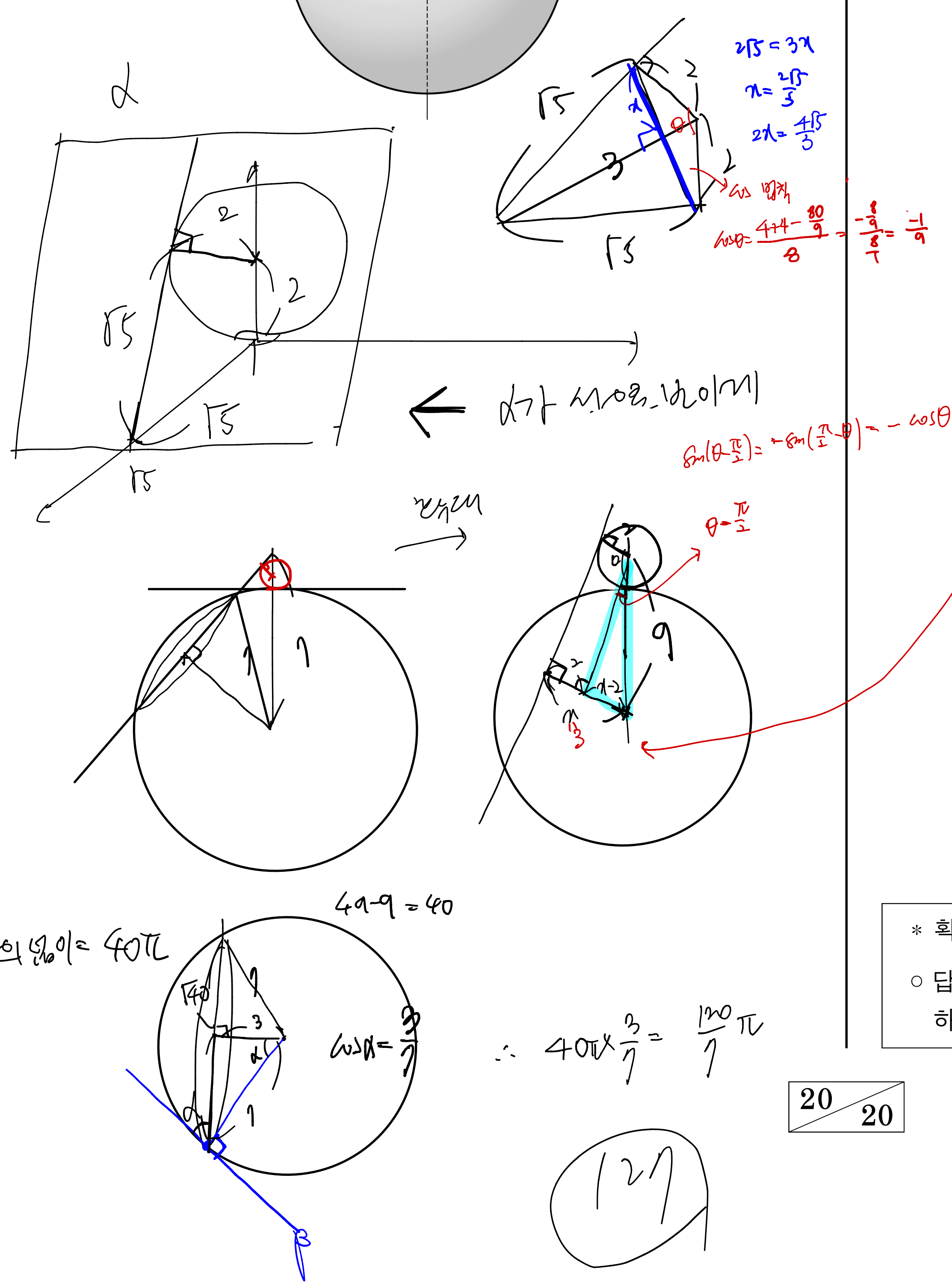
29. 좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-2)^2=4,\quad S_2 : x^2+y^2+(z+7)^2=49$$

가 있다. 점 $\mathrm{A}(\sqrt{5},0,0)$을 지나고 zx평면에 수직이며, 구 S_1과 z좌표가 양수인 한 점에서 접하는 평면을 α라 하자. 구 S_2가 평면 α와 만나서 생기는 원을 C라 할 때, 원 C 위의 점 중 z좌표가 최소인 점을 B라 하고 구 S_2와 점 B에서 접하는 평면을 β라 하자.

원 C의 평면 β 위로의 정사영의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]





α가 사이즈 넣어야게

$\sin(\theta-\frac{\pi}{2}) = -\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = -\cos\theta = \frac{1}{9} = \frac{x-2}{9}$

$x=3$.

C의 넓이 = 40π

$\therefore 40\pi \times \frac{3}{7} = \frac{120}{7}\pi$

127

30. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-2,2)$, $\mathrm{B}(2,2)$가 있다.

$$(|\overrightarrow{\mathrm{AX}}|-2)(|\overrightarrow{\mathrm{BX}}|-2)=0,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\ge 2$$

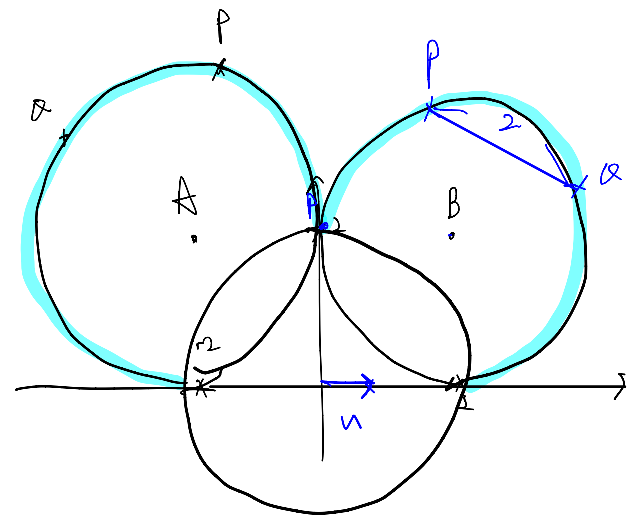
를 만족시키는 점 X가 나타내는 도형 위를 움직이는 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vec{u}=(1,0)$에 대하여 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{u})(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{u})\ge 0$이다.
(나) $\lvert\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\rvert=2$

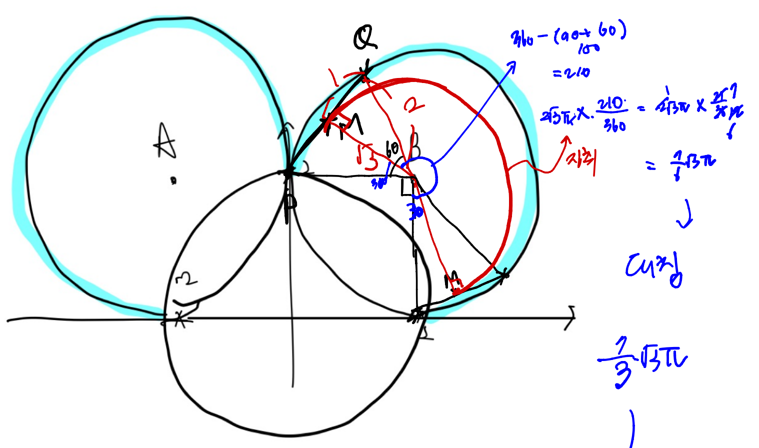
P 와 Q가 독립적이 아니다!

$\overrightarrow{\mathrm{OY}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 점 Y의 집합이 나타내는 도형의 길이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



$\overrightarrow{OY} = 2\left(\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}}{2}\right) = 2\overrightarrow{OM}$



$\overrightarrow{OY}=2\overrightarrow{OM}$ 이므로 2배

24√3π

17

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.