



지금부터 보실 행동강령과 해설은 아드레날린을 통해 다른 기출 문제에서도 보실 수 있습니다!

자세한 내용은

<https://orbi.kr/00043463424>

에서 확인해주세요! 판매 페이지 링크는

<https://atom.ac/books/9395>

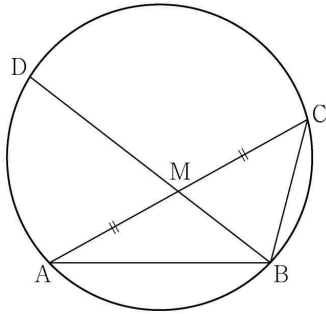
입니다. 감사합니다!

아드레날린 ex 공통

1. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$ 이고

$\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$ 인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M,

삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [2023학년도 6월 10]



- ① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$
 ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

1. 정답 ③ [2023학년도 6월 10]

1) 그림 있으면 그림 보면서, 내부 : 삼각형은 정해져 있다 - 두 변의 길이와 한 각

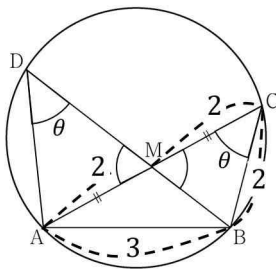
$\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 2$, $\overline{AC} > 3$ 이고 $\cos(\angle BAC) = \frac{7}{8}$ 인데 그림까지 있네요. 표시해줍시다. 이러면 \overline{AC} 를 코사인법칙으로 구할 수 있죠?

$\frac{7}{8} = \frac{3^2 + \overline{AC}^2 - 2^2}{2 \times \overline{AC} \times 3} = \frac{\overline{AC}^2 + 5}{6\overline{AC}}$ 입니다. 정리하면 $\overline{AC} = 4$ 가 나오네요. 그림에 선분 AC의 중점이 M이라

했으니까 $\overline{AM} = \overline{MC}$ 이죠? 따라서 $\overline{AM} = \overline{MC} = 2$ 입니다. 삼각형 MBC는 이등변삼각형이네요.

이때 또 눈에 띄는 게 $\angle BAC$ 랑 $\angle BDA$ 랑 같은 호를 공유하고 있죠? 선분 AD를 긋고 원주각 표시해주구요.

이러면 $\angle CMB$ 랑 $\angle AMD$ 는 마주보는 각이니까 같네요. 모두 표시하면



이렇게 됩니다. 이러면 삼각형 ADM이랑 BCM이랑 닮음 아닌가요? 세 각이

모두 같잖아요.

이제 \overline{MD} 를 구해야 해요. 닮음을 이용합시다. 그러면 \overline{BM} 만 알아내면 닮음을 이용해서 \overline{MD} 를 구할 수 있겠어요. 두 변의 길이와 한 각을 아니까 코사인법칙을 사용하면 되겠죠?

$\frac{7}{8} = \frac{3^2 + 2^2 - \overline{BM}^2}{2 \times 2 \times 3} = \frac{13 - \overline{BM}^2}{12}$ 이고 $\overline{BM} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 입니다. 닮음을 이용하면 $\frac{\sqrt{10}}{2} : 2 = 2 : \overline{MD}$ 이고

$\overline{MD} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$ 이네요. 답은 ③번입니다.

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때,
 a_{10} 의 값은? [2023학년도 6월 12]

$$(가) a_5 \times a_7 < 0$$

$$(나) \sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$$

- ① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

2. 정답 ③ [2023학년도 6월 12]

1) 등차수열은 $a_n = a + (n-1)d$ 로 놓기, 조건해석

공차가 3인 등차수열이 있습니다. 첫항을 a 라 하면 $a_n = a + 3(n-1)$ 이라고 할게요.

이때 (가)조건에서 $a_5 \times a_7 < 0$ 라고 합니다. a_n 은 공차가 3인 등차수열이죠? 그 말은 3만큼 계속 증가하는 수열이라는 거예요. 그러면 당연하게도 a_5 보다 a_7 이 더 크겠죠? 그런데 둘을 곱하면 음수가 나온다는 건 둘 중 하나는 음수, 하나는 양수여야 한다는 건데 a_5 보다 a_7 이 크니까 a_5 가 음수, a_7 가 양수여야겠네요. a_1 부터 a_5 까지는 음수이다가, a_6 은 잘 모르고 a_7 부터는 계속 양수인 구조입니다.

2) 시그마 펼치기

(나)조건에서 $\sum_{k=1}^6 |a_{k+6}| = 6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}|$ 라네요. 펼쳐봅시다.

먼저 왼쪽은 $|a_7| + |a_8| + \dots + |a_{12}|$ 입니다. 그런데 아까 a_7 부터는 계속 양수라고 했었죠? 따라서 그냥 $a_7 + \dots + a_{12} = 6a + 153$ 입니다.

오른쪽은 $6 + \sum_{k=1}^6 |a_{2k}| = 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$ 입니다. 이때 a_2 와 a_4 는 음수니까

절댓값을 풀면 (-)부호가 붙고, a_8, a_{10}, a_{12} 는 양수니까 그대로 나옵니다. 정리하면 $a + 75 + |a_6|$ 입니다.

여기서 문제는 a_6 인데 우리는 a_6 이 양수인지, 음수인지, 아니면 0인지를 몰라요. 그러면 케이스를 나눠야겠죠?

3) 케이스 분류

3-1) a_6 이 양수일 때

$a_6 > 0$ 이라면 $6a + 153 = a + 75 + a_6 = 2a + 90$ 이고 $a = -\frac{63}{4}$ 입니다. $a_n = -\frac{63}{4} + 3(n-1)$ 인데

$a_6 = -\frac{3}{4}$ 이므로 음수가 나오네요. 모순입니다.

3-2) a_6 이 0일 때

$a_6 = 0$ 이라면 $6a + 153 = a + 75$ 이고 $a = -\frac{78}{5}$ 입니다. $a_n = -\frac{78}{5} + 3(n-1)$ 인데 $a_6 = -\frac{3}{5}$ 인데요? 0이

나오지 않아요. 모순입니다.

3-3) a_6 이 음수일 때

$a_6 < 0$ 이라면 $6a + 153 = a + 75 - a_6 = 60$ 이고 $a = -\frac{31}{2}$ 입니다. $a_n = -\frac{31}{2} + 3(n-1)$ 이고 $a_6 = -\frac{1}{2}$ 로

음수도 맞네요. $a_{10} = \frac{23}{2}$ 이고 답은 ③번입니다.

3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$ 가

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x < 0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [2023학년도 6월 14]

<보 기>

- ㄱ. $f(0) = 0$
- ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 극댓값을 갖는다.
- ㄷ. $2 < f(1) < 4$ 일 때, 방정식 $f(x) = x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 정답 ④ [2023학년도 6월 14]

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인, 정적분의 위끝에 변수가 있는 경우

$f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수인데

$$g(x) = \begin{cases} -\int_0^x f(t)dt & (x < 0) \\ \int_0^x f(t)dt & (x \geq 0) \end{cases} \quad \text{라고 합니다.}$$

?? 다항함수가 굉장히 특이하게 정의되어 있네요. 일단 $g(x)$ 는 삼차함수입니다. 그런데 위의 식은 범위별로 나뉘어져 있죠. 그러니까 아주 깔끔하게 이어져야 한다는 말이에요. 마치 하나의 함수처럼 말이죠. $g(x)$ 는 미분가능을 당연하게 만족시켜야 합니다.

거기에 $g(x)$ 는 다항함수니까 다항식으로 구성되어 있을 거예요. 그 말은 $g(x)$ 의 식은 하나인데, $f(x)$ 가 $x=0$ 을 기준으로 함수가 달라진다는 말이겠죠. $g(x)$ 의 범위를 나눠놓은 건 페이크고, 사실상 $f(x)$ 의 범위가 나눠어진 상황입니다.

그 안에는 정적분의 위끝에 변수가 있는 함수가 있네요. 일단 위끝과 아래끝이 같아지는 $x=0$ 을 넣으면

$$g(0)=0 \text{으로 연속입니다. 이제 미분해볼게요. } g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases} \text{입니다. 이거도 미분가능해야 하니까}$$

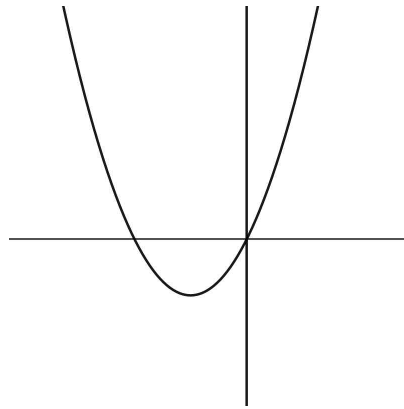
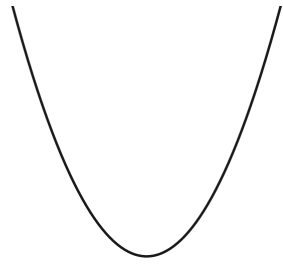
$-f(0)=f(0)$ 이어야 하고 $f(0)=g'(0)=0$ 입니다. 아까 $g(0)=0$ 까지 고려하면 $g(0)=g'(0)=0$ 이므로 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 x 축에 접하네요. 뭐 대충 $g(x)=x^2(x-k)$ 의 형태겠죠?

ㄱ에서 $f(0)=0$ 이냐고 물어봅니다. 맞죠? ㄱ은 맞습니다.

ㄴ에서 $f(x)$ 는 극댓값을 갖냐고 물어보네요. 알려준 건 $g(x)$ 인데 $f(x)$ 에 대한 걸 물어보네요. 왜일까요? $g(x)$ 는 페이크고 $f(x)$ 의 범위가 나눠어진 것이 메인이기 때문이겠죠?

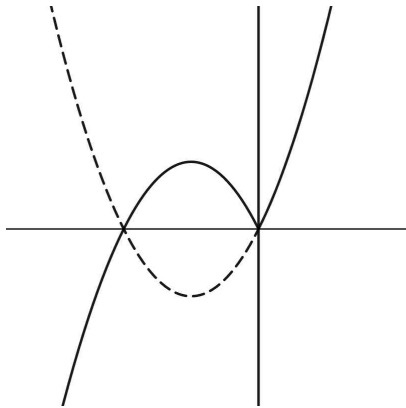
일단 지금 보면 $x \geq 0$ 일 때 $f(x)=g'(x)$ 입니다. $g(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수였으니까 도함수인 $f(x)=g'(x)$ 은 최고차항의 계수가 3인 그냥 평범한 이차함수예요. 그런데 $x < 0$ 가 되는 순간 $f(x)$ 는 $f(x)=-g'(x)$ 로 부호가 바뀌어버리죠.

그냥 단순하게 생각해보세요. U자 모양 이차함수 하나를 그리고 아무데나 $x=0$ 을 그으세요. $f(0)=0$ 이니까 원점을 지나도록 그래프를 그린 후에 $x < 0$ 부분은 원래 함수를 뒤집어버리세요. 그게 $f(x)$ 입니다.

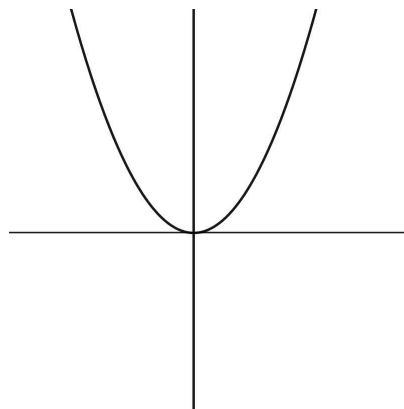
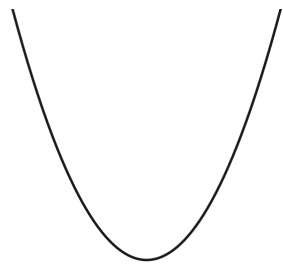


→

→

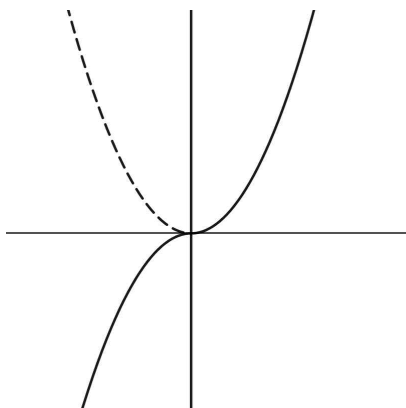


이렇게 말이죠. 극댓값을 갖나요? 갖네요. 다른 그래프도 그려봅시다.

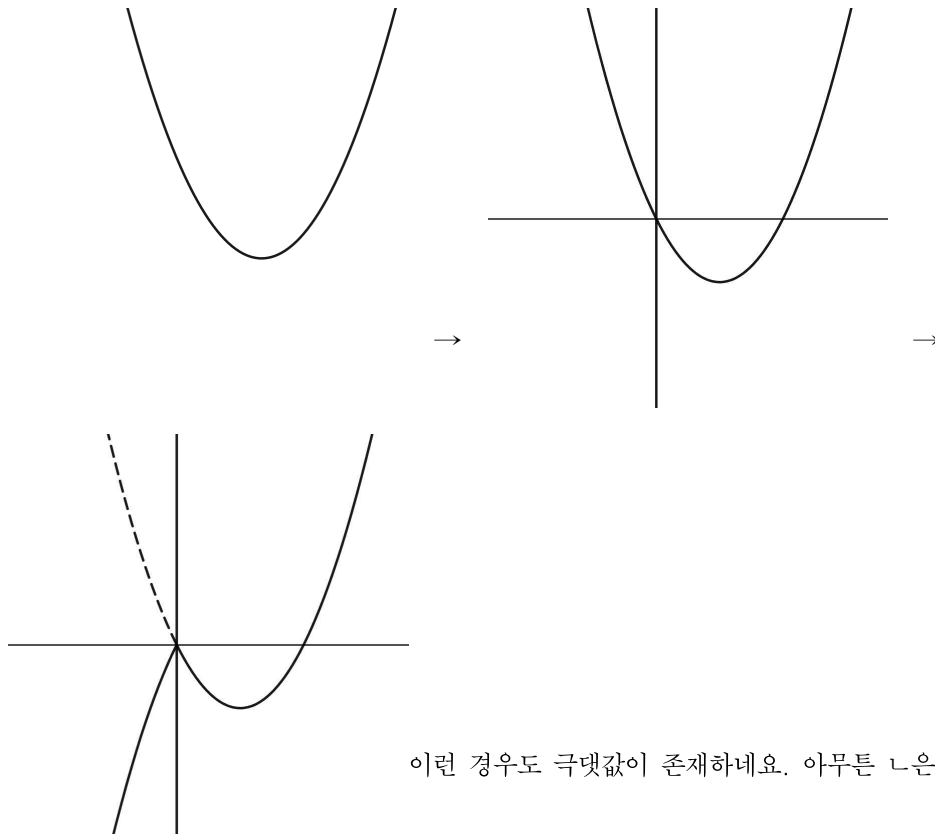


→

→



이런 거는요? 극댓값이 없는데요?



이런 경우도 극댓값이 존재하네요. 아무튼 나쁜 옳지 않습니다. 위의 반례가

존재하니까요.

ㄷ에서 $2 < f(1) < 4$ 일 때, $f(x)=x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이냐고 물어보네요. 일단 위에서 본 그림들을 보세요. $2 < f(1) < 4$ 가 가능한 건 첫 번째와 두 번째 케이스입니다. 두 번째 케이스는 무조건 가능하죠? 기울기가 양수인 이상 무조건 3개의 점에서 만나니까요. 그럼 살펴봐야 하는 건 첫 번째 케이스겠네요.

첫 번째 케이스에서 $x < 0$ 부분, $x = 0$ 부분에서 만나는 건 확실해요. 그런데 $x = 0$ 에서 접선의 기울기가 1보다 작냐 크거나 같냐에 따라 달라질 것 같네요. 1보다 작다면 $y = x$ 보다 느리게 올라올 테니까 $x > 0$ 부분에서 오다가 또 만나겠죠? 그럼 3개의 점에서 만나게 될 거예요.

일단 $g(x) = x^2(x - k)$ 입니다. $g'(x) = 3x^2 - 2kx$ 이네요. 따라서

$$g'(x) = 3x^2 - 2kx = \begin{cases} -f(x) & (x < 0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases} \text{입니다. 이걸 } f(x) \text{로 바꿔보면}$$

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2kx & (x < 0) \\ 3x^2 - 2kx & (x \geq 0) \end{cases} \text{입니다. } 2 < f(1) < 4 \text{이니까 } -\frac{1}{2} < k < \frac{1}{2} \text{입니다. } x = 0 \text{에서 접선의}$$

기울기는 $-2k$ 로 $-1 < -2k < 1$ 입니다. 3개의 점에서 만나겠네요. ㄷ은 맞습니다. 따라서 옳은 건 ㄱ, ㄷ이고

답은 ④번이네요.

4. 자연수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 이 있다.

$a_1 = 0$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$

이다.

$a_{22} = 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합은?

[2023학년도 6월 15]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

4. 정답 ② [2022년 6월 15]

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

$$k \text{가 자연수인데 } a_1 = 0 \text{이고 모든 자연수 } n \text{에 대하여 } a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases} \text{라고 합니다. 이때}$$

$a_{22} = 0$ 이 되도록 하는 모든 k 의 값의 합을 구하라네요.

알려준 건 $a_1 = 0$ 인데 $a_{22} = 0$ 까지 가라고 합니다. 이렇게 항을 10개 이상 넘게 구하라고 하는 건 분명 규칙성이 존재하기 때문일 거예요. 아니면 미치지 않고서야 이걸 다 일일이 노가다하라고 하겠어요?

천천히 가봅시다. 일단 구조부터 확인해보죠. a_n 이 양수면 계속 $\frac{1}{k}$ 를 빼고, 그러다가 a_n 이 0 또는 음수가 되면

$\frac{1}{k+1}$ 을 계속 더해서 양수로 만드는 구조네요.

일단 $a_1 = 0$ 이니까 $a_2 = a_1 + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$ 입니다. 이건 양수죠? 따라서 $a_3 = a_2 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ 입니다.

이건 음수예요. 따라서 $a_4 = a_3 + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k}$ 입니다. 이건 양수일까요? 0 또는 음수일까요? 음...

이거 일단 k 에다 숫자를 넣으면서 구조를 조금 더 익혀볼게요. 만약 $k = 1$ 이라면

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{2} & (a_n \leq 0) \\ a_n - 1 & (a_n > 0) \end{cases} \text{입니다. 이러면 } a_1 \text{부터 순서대로 } 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots \text{의 규칙성을}$$

갖게 되네요. 항이 3마다 값이 반복돼요. 이러면 $a_{22} = 0$ 이 되네요? 일단 $k = 1$ 하나 나왔어요.

$$\text{만약 } k = 2 \text{이라면? } a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{3} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{2} & (a_n > 0) \end{cases} \text{입니다. 이러면 } 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \dots \text{의}$$

규칙성을 갖게 됩니다. 항이 5마다 값이 반복돼요. 이러면 $a_{22} = \frac{1}{3}$ 로 조건을 만족시키지 못합니다.

$$k = 3 \text{ 이라면 } a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{4} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{1}{3} & (a_n > 0) \end{cases} \quad \text{입니다. 이거 그냥 계산하기 편하게}$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{3}{12} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{4}{12} & (a_n > 0) \end{cases} \quad \text{으로 바꿔놓을게요. 어차피 통분하게 될 일 많을 것 같으니깐요. 이러면}$$

0, $\frac{3}{12}$, $-\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $-\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$, $-\frac{3}{12}$, 0, $\frac{3}{12}$, ... 의 값이 반복되고, 주기는 7입니다. 이러면 $a_{22} = 0$ 이 되겠네요. $k = 3$ 도 포함입니다.

2) 규칙 파악, 일반화

통분을 해서 보니까 지금 뭔가 규칙이 있죠? 0에서 시작해서 양수는 $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$ 로 점점 작아지고, 음수는 $-\frac{1}{12}$, $-\frac{2}{12}$, $-\frac{3}{12}$ 로 점점 작아지는 구조네요. 이게 번갈아서 나오구요. 0을 포함하면 총 7개의 숫자가 반복됩니다. 거기에 $\frac{1}{12}$ 는 $\frac{1}{3}$ 과 $\frac{1}{4}$ 의 곱이죠?

$k = 2$ 부분을 다시 보세요. 양수는 $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$, 음수는 $-\frac{1}{6}$, $-\frac{2}{6}$ 으로 점점 작아집니다. 0까지 포함하면 총 5개의 숫자구요. $\frac{1}{6}$ 은 $\frac{1}{2}$ 와 $\frac{1}{3}$ 의 곱입니다.

그러면 $k = 4$ 일 때를 예상해볼게요. 일단 $\frac{1}{4}$ 와 $\frac{1}{5}$ 의 곱인 $\frac{1}{20}$ 을 기준으로 양수는 $\frac{4}{20}$, ..., $\frac{1}{20}$ 으로, 음수는 $-\frac{1}{20}$, ..., $-\frac{4}{20}$ 으로 작아지지 않을까요? 0을 포함해서 총 주기는 9고 a_1 , a_{10} , a_{19} 가 0이 되니까 a_{22} 는 0이 아니겠네요.

$$\text{그럼 실제로 가봅시다. } k = 4 \text{ 이면 } a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{4}{20} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{5}{20} & (a_n > 0) \end{cases} \quad \text{이고}$$

0, $\frac{4}{20}$, $-\frac{1}{20}$, $\frac{3}{20}$, $-\frac{2}{20}$, $\frac{2}{20}$, $-\frac{3}{20}$, $\frac{1}{20}$, $-\frac{4}{20}$, 0, $\frac{4}{20}$, ... 의 형태가 반복됩니다. 맞네요!

지금 또 뭔갈 알아냈어요. 주기가 5, 7, 9로 2씩 증가하고 있어요. 딱 하나만 더 해보고 주기가 11이면 일반화해봅시다.

$$k = 5 \text{ 이면 } a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{5}{30} & (a_n \leq 0) \\ a_n - \frac{6}{30} & (a_n > 0) \end{cases} \text{ 이고}$$

$0, \frac{5}{30}, -\frac{1}{30}, \frac{4}{30}, -\frac{2}{30}, \frac{3}{30}, -\frac{3}{30}, \frac{2}{30}, -\frac{4}{30}, \frac{1}{30}, -\frac{5}{30}, 0, \frac{5}{30}, \dots$ 입니다. 주기는 11이네요. 맞습니다. 바로 가죠.

$k = 5$ 일 때는 주기가 11입니다. a_1, a_{12}, a_{23} 이 0이므로 a_{22} 는 0이 아니네요.

$k = 6$ 일 때는 주기가 13입니다. a_1, a_{14}, a_{27} 이 0이니까 a_{22} 는 0이 아닙니다.

이거 딱 보니까 당분간은 a_{22} 가 0이 되는 차례가 오지 않을 것 같네요. 이제 0이 되는 두 번째 항이 22항이 되어야 하니까 빠르게 찾아봅시다.

$k = 7$ 일 때는 주기가 15이고 a_1, a_{16} 이 0입니다. $k = 8$ 일 때는 주기가 17이고 a_1, a_{18} 이 0입니다. $k = 9$ 일 때는 주기가 19이고 a_1, a_{20} 이 0입니다. $k = 10$ 일 때는 주기가 21이고 a_1, a_{22} 가 0입니다. 찾았네요. 따라서 모든 k 의 합은 $1 + 3 + 10 = 14$ 입니다. 답은 ②번이네요.

5. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여

함수 $g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt$ 는 $x = 1$ 과 $x = 4$ 에서 극소이다.

$f(0)$ 의 값을 구하십시오. [2023학년도 6월 20]

5. 정답 13 [2023학년도 6월 20]

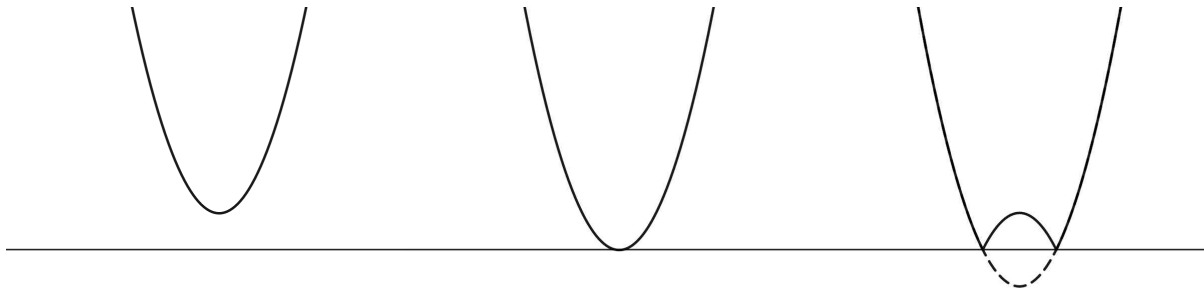
1) 정적분의 위끝과 아래끝에 변수가 있는 경우

최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$ 가 있는데 함수 $g(x) = \int_x^{x+1} |f(t)| dt$ 가 극소가 되는 부분이 $x = 1$ 과 $x = 4$ 입니다. $f(0)$ 을 구하라네요.

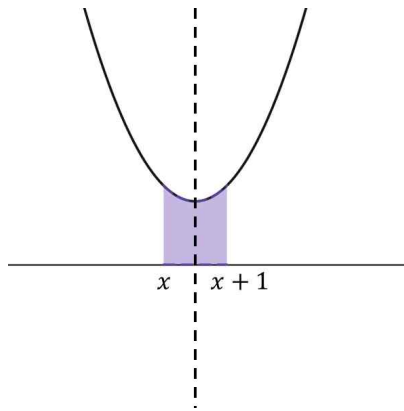
딱 봐도 일반적인 함수가 아니죠? 일단 넓이의 변화를 관찰해봅시다. 정적분은 원래 넓이를 구하는 거잖아요. $g(x)$ 는 $f(t)$ 를 절댓값을 씌워서 올린 다음 x 부터 $x+1$ 까지 간격이 1인 부분의 넓이를 말하는 거로 해석하면 될 것 같아요.

그 $g(x)$ 가 극소가 된다는 건? 정적분 값이 주변에서 가장 작아진다는 거로 해석해야죠.

그럼 이제 $f(x)$ 의 개형에 대해서 살펴봐야죠? 정적분을 일일이 계산할 수는 없으니까 직관으로 가장 작은 부분을 캐치해야 합니다. 일단 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수입니다. 우리는 이것 절댓값으로 씌워 올려야 하잖아요? 그러면 경우는 세 가지죠.



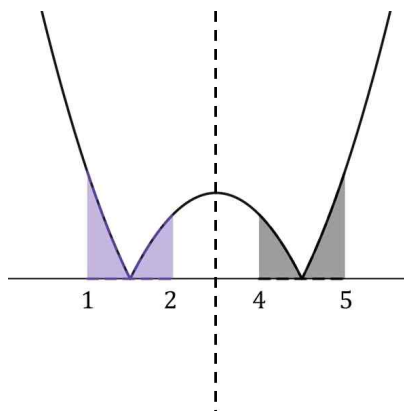
이렇게네요. 왼쪽부터 1, 2, 3번이라고 할게요. 1번과 2번은 절댓값으로 뒤집어 올리는 형태가 원래 형태와 차이가 없어 극소가 되는 부분이 딱 하나로 정해져 있습니다.



이렇게 대칭축을 중심으로 일정한 거리만큼 떨어져 있을 때 극소가 됩니다.

그런데 지금은 극소가 되는 부분이 2개잖아요? 바로 3번으로 갑시다.

결국 정적분값이 극소가 되는 부분은 대칭축과 관련이 있는 것 같네요. 절댓값으로 접어 올린 함수가 극소가 되는 부분이라면 결국



요런 느낌이어야겠어요. 대칭축은 $x = 3$ 입니다. $f(x) = 2(x - 3)^2 + a$ 의

형태겠네요.

그런데 여기서 더 뭘갈 할 수 있는 게 없어요. 이러면 원래대로 가봅시다. 정적분에 위끝 또는 아래끝에 변수가 있는 경우에 해야 할 행동을 해야죠.

일단 위끝과 아래끝은 같아지지 않기 때문에 바로 미분해보면 $g'(x) = |f(x+1)| - |f(x)|$ 입니다. 피적분함수인 $|f(x)|$ 가 연속이므로 정적분으로 정의된 함수는 미분가능합니다. $x = 1$ 과 $x = 4$ 에서 극소라는 건 결국 도함수의 함숫값이 0이라는 의미죠. 따라서 $|f(2)| = |f(1)|$ 입니다. 그림에서 $f(2) < 0$, $f(1) > 0$ 이므로 $f(1) = -f(2)$ 겠네요. 넣어보면 $a + 8 = -a - 2$ 이고 $a = -5$ 입니다. $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5$ 이고 $f(0) = 13$ 이네요.

6. 자연수 n 에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$ 의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n 의 값의 합을 구하시오.
[2023학년도 6월 21]

6. 정답 426 [2023학년도 6월 21]

1) 자연수 보이면 숫자 넣기

n 이 자연수인데 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$ 의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n 의 값의 합을 구하라네요.

일단 로그 밑을 좀 정리해볼게요. $64 = 2^6$ 이니까 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)$ 입니다. 이게 정수여야 한다는 거죠?

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = k$ 로 놓을게요. k 는 정수입니다. 식을 정리하면 $\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{3}{2}k$ 이고 지수로

바꿔버리면 $2^{\frac{3}{2}k} = \frac{3}{4n+16} = \frac{3}{4(n+4)}$ 입니다. 아예 4도 왼쪽으로 넘길게요. 그러면 $2^{\frac{3}{2}k+2} = \frac{3}{n+4}$ 입니다.

이제 n 에다 숫자를 넣을 차례입니다. $n=1$ 이면 $2^{\frac{3}{2}k+2} = \frac{3}{5}$ 입니다. 음... k 가 정수가 안 될 것 같은데요?

$n=2$ 이면 $2^{\frac{3}{2}k+2} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ 입니다. $k=-2$ 이네요. 됩니다! $n=3$ 이면 $2^{\frac{3}{2}k+2} = \frac{3}{7}$ 입니다. k 가 정수가 아닐

것 같아요. 하나만 더 해볼게요. $n=4$ 이면 $2^{\frac{3}{2}k+2} = \frac{3}{8}$ 입니다. 마찬가지로요.

이거 보면 결국 오른쪽의 $\frac{3}{n+4}$ 가 밑이 2인 지수 2^m 와 같은 형태여야 되는 것 같아요. 2^{-1} , 2^{-2} 뭐 이런

식으로요. 그럼 차라리 m 에다 숫자를 넣어서 n 을 구하는 게 빠르지 않을까요? 그런데 이미 $2^{\frac{3}{2}k+2} = \frac{3}{n+4}$ 의

형태로 되어 있네요. 그러면 k 에 정수를 넣어서 역으로 n 을 구해봅시다.

지금 n 이 증가할수록 $\frac{3}{n+4}$ 는 점점 작아지는 구조죠? 그러면 $2^{\frac{3}{2}k+2}$ 도 작아져야 하니까 k 에는 점점 작은 수를

넣어야겠어요. $k=-2$ 일 때 $n=2$ 를 확인했으니까 $k=-3$ 을 넣으면 $2^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{n+4}$ 입니다. 자연수가 나오지는

않겠어요. 보니까 $k=-2l$ (l 은 정수)의 형태가 아니면 안 되네요. 계속 가봅시다.

$k=-4$ 를 넣으면 $2^{-4} = \frac{3}{n+4}$ 입니다. $n=44$ 이네요. $k=-6$ 을 넣으면 $2^{-7} = \frac{1}{128} = \frac{3}{n+4}$ 이고

$n=380$ 입니다. $k=-8$ 을 넣으면 $2^{-10} = \frac{1}{1024} = \frac{3}{n+4}$ 인데 이건 1000을 넘죠? 따라서 구하는 값은

$$2 + 44 + 380 = 426 \text{입니다.}$$

7. 두 양수 $a, b (b > 3)$ 과 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때,

$g(4)$ 의 값을 구하시오. [2023학년도 6월 22]

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는
실수 t 의 값은 -3 과 6 뿐이다.

7. 정답 19 [2023학년도 6월 22]

1) 연속은 좌극한 우극한 함숫값 확인

일단 $a, b (b > 3)$ 가 있는데 둘 다 양수입니다. $a > 0, b > 3$ 이네요. 이때 최고차항의 계수가 1인 이차함수

$$f(x) \text{가 있는데 } g(x) = \begin{cases} (x+3)f(x) & (x < 0) \\ (x+a)f(x-b) & (x \geq 0) \end{cases} \text{라고 하네요. 애가 실수 전체의 집합에서 연속이라네요.}$$

일단 $x = 0$ 을 제외하고는 다 다항함수니까 연속성은 보장되어 있으므로 $x = 0$ 에서의 연속만을 조사해도 되겠죠? 결국 $3f(0) = af(-b)$ 입니다.

2) 함수 극한은 논리다

그리고 아래의 조건을 만족시킨다네요. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않게 되는 t 의

값이 -3 과 6 뿐이랍니다. 일단 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2}$ 의 값이 존재하지 않는다는 건 어떤

의미일까요? 좌극한값과 우극한값이 다르다는 거예요. 그러니까 $t = -3, t = 6$ 일 때 좌극한값과 우극한값이 달라지게 된다는 거죠. 바꿔 말하면 $t = -3, t = 6$ 이 둘만 아니면 모든 곳에서 좌극한값과 우극한값이 같아진다고도 말할 수 있겠네요.

일단 늘 해왔던 대로 가봅시다. 분자에 루트가 포함되어 있어요. 거기에 우리는 x 가 -3 으로 갈 때의 함숫값이 궁금한 건데 $g(t)$ 라는 함숫값이 있네요. 애는 극한값을 계산할 때는 변수에 포함되지 않으니까 사실상 상수나 다름없어요. 이걸 일단 숙지해두고, 루트가 포함되어 있으니까 유리화를 해볼까요?

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} - |g(t)|)(\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}{(x+3)^2(\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$
 이고

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|g(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|g(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$
 입니다.

이때 $x < 0$ 에서 $g(x) = (x+3)f(x)$ 이죠? 따라서 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$ 입니다.

이건 사실상 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+3)| \times |f(x)|}{(x+3)^2(\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$ 와도 같죠.

3) 절댓값 풀기

일단 절댓값이 있으니까 좀 풀어봅시다. 만약 이게 좌극한이라면, 즉 x 가 -3 보다 작은 부분에서 온다면

$$|x+3| = -(x+3) \text{입니다. 그러면 } \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-(x+3) \times |f(x)|}{(x+3)^2 (\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-|f(x)|}{(x+3) (\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{입니다.}$$

우극한도 마찬가지로 해볼까요? x 가 -3 보다 큰 부분에서 온다면 $|x+3| = x+3$ 입니다.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3) \times |f(x)|}{(x+3)^2 (\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{ 이고}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|f(x)|}{(x+3) (\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{이네요.}$$

먼저 $t \neq -3$, $t \neq 6$ 이어서 극한값이 존재한다는 상황부터 볼게요. 존재하지 않는다면 반대로 하면 되니까요.

극한값이 존재한다는 건 이 둘의 값이 존재하고, 같아야 한다는 거예요. 일단

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{-|f(x)|}{(x+3) (\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{ 와 } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{|f(x)|}{(x+3) (\sqrt{|(x+3)f(x)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)}$$

모두 분모가 0으로 가는데 극한값이 존재해야 하니까 분자도 0으로 가야겠죠? 따라서 $f(-3) = 0$ 입니다. 이때 $x < 0$ 에서 $g(x) = (x+3)f(x)$ 이니까 $g(-3) = 0$ 이기도 하겠네요. $f(-3) = g(-3) = 0$ 입니다.

아까 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수라고 했죠? 그러면 인수정리로 함수를 구해봅시다.

$f(x) = (x+3)(x+k)$ 라고 해볼게요. 이걸 좌극한 우극한에 각각 넣으면 둘 다

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+k)|}{(\sqrt{|(x+3)^2(x+k)| + \{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{가 됩니다. 이때 루트 안에 있는 } g(x) = (x+3)^2(x+k) \text{는}$$

$$x = -3 \text{에서 } 0 \text{이 되니까 사실상 } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+k)|}{(\sqrt{\{g(t)\}^2} + |g(t)|)} \text{가 되네요. 정리하면 } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+k)|}{2|g(t)|} \text{가 됩니다.}$$

이제 조금 더 세부적으로 살펴볼게요. 만약 저 식에서 $g(t) = 0$ 이라면요? 이러면 분모가 0이 되어 극한값이 존재하지 않게 될 가능성이 존재해요. 이 가능성을 확인해봐야 할 것 같네요.

$$\text{만약 } g(t) = 0 \text{이라면 } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|(x+k)|}{(\sqrt{|(x+3)^2(x+k)|})} \text{가 됩니다. 만약 } k = 3 \text{이 아니라면 당연히 분모가 } 0 \text{으로}$$

가니까 극한값이 존재하지 않게 되구요. $k = 3$ 이라고 하더라도

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3|}{\sqrt{|(x+3)^2(x+3)|}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{|x+3|}{|x+3|\sqrt{x+3}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{\sqrt{x+3}}$ 이 되어 분모가 0으로 가고 극한값이 존재하지 않게 됩니다.

그러면 결국 극한값이 존재하지 않게 되는 조건은 $g(t)=0$ 이어야 한다는 거네요. 그리고 그 t 의 값이 -3 과 6 만 존재해야 한다는 거구요. $g(-3)=g(6)=0$ 입니다. 아까 $x \geq 0$ 에서 $g(x)=(x+a)f(x-b)$ 라고 했었죠? 따라서 $(a+6)f(6-b)=0$ 입니다. $a > 0$ 이니까 $f(6-b)=0$ 이네요.

$6-b$ 는 -3 과 같을까요? 일단 다르다고 해볼게요. 그러면 $-k=6-b$ 가 되고 $f(x)=(x+3)(x+b-6)$ 입니다.

$$f(x-b)=(x-b+3)(x-6) \text{ 이고 } g(x)=\begin{cases} (x+3)^2(x+b-6) & (x < 0) \\ (x+a)(x-b+3)(x-6) & (x \geq 0) \end{cases} \text{ 이네요.}$$

아까 $g(t)=0$ 이 되는 t 의 값이 -3 과 6 “만” 존재해야 한다고 했었죠? 그 말은 그 둘을 제외하고는 0이 되는 부분이 없어야 한다는 거예요. 지금 식을 보면 확실하게 0이 되는 부분은 $x < 0$ 일 때 $x = -3$ 이고 $x \geq 0$ 일 때 $x = 6$ 이 있습니다. 방금 봤던 -3 과 6 이네요.

일단 $x \geq 0$ 일 때 $x = -a$ 는 $a > 0$ 이니까 범위에 포함되지 않으므로 신경 쓸 필요가 없습니다.

불확실한 부분은 $x < 0$ 일 때 $x = 6-b$ 와 $x \geq 0$ 일 때 $x = b-3$ 이네요. 애네 둘은 -3 과 6 이거나, 아예 범위 밖으로 나가야 합니다. 범위 안에 있으면 거기서 0이 되잖아요. -3 과 6 을 제외하고는 0이 되는 부분이 있으면 안 되니까요.

만약 $6-b = -3$ 이라면 $b = 9$ 인데 우리 아까 $6-b$ 와 -3 을 다르게 보자고 했었죠? 따라서 따라서 $6-b$ 는 $x \geq 0$ 의 범위로 나가야 합니다. $b \leq 6$ 이네요.

또한 $x \geq 0$ 에서도 $x = b-3$ 과 6 은 같으면 안 돼요. 그러면 범위 밖으로 나가야 하고 $b < 3$ 입니다. 그런데 맨 처음 조건에 $b > 3$ 이어야 한다고 했었죠? 모순입니다. 따라서 $b = 9$ 여야만 하네요. 그렇게 되면 $x < 0$ 일 때 $x = 6-b$ 은 -3 이 되고, $x \geq 0$ 일 때 $x = b-3$ 은 6 이 되어서 딱 0이 되는 부분이 -3 과 6 만 남게 됩니다.

마지막으로 연속 조건 확인 안 했죠? $f(x)=(x+3)^2$ 인데 $3f(0)=af(-9)$ 니까 $27=36a$ 이고 $a = \frac{3}{4}$ 입니다.

$g(4)$ 를 구해야 하는데 $x \geq 0$ 일 때 $g(x)=\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-6)^2$ 이니까 넣으면 $g(4)=19$ 입니다.

확통

8. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [2023학년도 6월 확통 28]

- ① $\frac{9}{20}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{11}{20}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{13}{20}$

8. 정답 ④ [2023학년도 6월 확통 28]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

1, 2, 3, 4, 5 중에서 4개를 골라서 배열하여 네 자리 자연수를 만드는데 5의 배수이거나 3500 이상인 확률을 구합니다. 구하는 확률은 $\frac{5\text{의 배수 or } 3500\text{ 이상}}{{}_5P_4}$ 이죠?

일단 5의 배수인 경우의 수, 3500 이상인 경우의 수를 각각 구한 다음에 겹치는 걸 빼는 쪽으로 방향을 잡으면 될 것 같아요. 먼저 5의 배수는 일의 자리가 0 또는 5여야 해요. 그런데 0은 없으니까 마지막 자리를 5로 고정시키고 나머지 3개의 자리는 5를 제외한 나머지 4개 중에서 골라서 배열하면 되겠네요. 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$ 입니다.

3500 이상인 경우는 케이스를 나눠야 해요. 천의 자리가 4 또는 5인 경우는 나머지 3자리를 아무렇게나 채워넣어도 됩니다. 어차피 3500보다는 커지니까요. 일단 4 또는 5를 고르는 경우의 수는 2이고, 나머지 3자리를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$ 입니다. 총 $2 \times 24 = 48$ 이네요.

천의 자리가 3이라면 무조건 백의 자리는 5여야 합니다. 1, 2, 4라면 3500보다 작아지게 되니까요. 나머지 두 개의 자리는 아무렇게나 배열해도 3500보다는 커집니다. 따라서 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$ 입니다.

이제 겹치는 경우를 빼봅시다. 일단 일의 자리를 5로 고정시켜야 합니다. 그러면 천의 자리는 3 또는 4가 되겠죠? 그런데 천의 자리에 3은 올 수 없습니다. 왜냐하면 천의 자리가 3이면 무조건 백의 자리는 5여야 하잖아요. 그런데 이미 5는 일의 자리로 고정시켰죠? 따라서 천의 자리는 4로 고정입니다.

이렇게 되면 나머지 두 자리는 아무렇게나 배열하면 됩니다. 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$ 입니다. 구하는 경우의 수는 $24 + 48 + 6 - 6 = 72$ 이네요. 구하는 확률은 $\frac{72}{120} = \frac{3}{5}$ 입니다. 답은 ④번이네요.

9. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하시오. [2023학년도 6월 확통 29]

(가) $f(f(1)) = 4$

(나) $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$

9. 정답 115 [2023학년도 6월 확통 29]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류, 조건해석, 합성함수는 치환하기

$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 가 있는데 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하합니다. 조건을 확인해볼까요?

(가)조건에서 $f(f(1))=4$ 여야 한다고 하네요. 합성함수의 형태죠? $f(1)=k$ 라 해봅시다. 그러면 $f(k)=4$ 입니다. 결국 $f(1)=k, f(k)=4$ 를 동시에 만족시켜야 하는 거예요.

단, $k=1$ 이 될 수는 없을 것 같아요. 왜냐하면 $f(1)=1, f(1)=4$ 이라는 이상한 결과가 도출되니까요. 그럼 가능한 k 는 2부터 5까지겠죠? 뭔가 k 에다 숫자 넣고 케이스 분류를 해야만 할 것 같은 기분이 들죠?

(나)조건에서 $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$ 이라고 합니다. k 에다 숫자 넣으면서 $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$ 도 만족시키도록 해봅시다.

2) 케이스 분류

2-1) $k=2$ 인 경우

먼저 $k=2$ 인 경우, $f(1)=2, f(2)=4$ 입니다. 그 이후로는 $2 \leq f(3) \leq f(5)$ 를 만족시키면 되겠죠? $f(4)$ 는 1부터 5까지 아무거나 고르면 되구요. 경우의 수는 5입니다. 이후 $2 \leq f(3) \leq f(5)$ 의 경우 2부터 5의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 고르면 자동적으로 작거나 같은 순서대로 $f(3), f(5)$ 가 결정됩니다. 경우의 수는 ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$ 입니다. 총 $5 \times 10 = 50$ 이네요.

2-2) $k=3$ 인 경우

$f(1)=3, f(3)=4$ 입니다. $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$ 를 만족시키긴 하네요. 그럼 이제 나머지 $f(2), f(4)$ 는 아무거나 고르게 하고 $3 \leq 4 \leq f(5)$ 만 만족시키도록 골라주면 됩니다. 먼저 $f(2), f(4)$ 의 값을 1부터 5 중에서 고르면 경우의 수는 $5^2 = 25$ 이고, $3 \leq 4 \leq f(5)$ 를 만족시키는 건 4, 5니까 경우의 수는 2입니다. 총 $25 \times 2 = 50$ 이네요.

2-3) $k=4$ 인 경우

$f(1)=4, f(4)=4$ 입니다. 이제 해야 할 건 $f(2)$ 를 1부터 5까지 정하는 것(경우의 수 5)과 $4 \leq f(3) \leq f(5)$ 를 만족시키도록 $f(3), f(5)$ 를 정하는 거겠네요. 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 고르면 자동적으로 작거나 같은 순서대로 $f(3), f(5)$ 이 결정되니까 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$ 입니다. 총 $5 \times 3 = 15$ 입니다.

2-4) $k = 5$ 인 경우

$f(1) = 5, f(5) = 4$ 인데 이진 불가능합니다. $f(1) \leq f(3) \leq f(5)$ 가 안 되잖아요?

따라서 경우의 수는 $50 + 50 + 15 = 115$ 입니다.

10. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c 라 하자. $b - a \geq 5$ 일 때, $c - a \geq 10$ 일 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)
[2023학년도 6월 확통 30]

10. 정답 9 [2023학년도 6월 확통 30]

1) 확통은 상황이해 후 기준 잡고 분류

일단 1부터 12까지의 수가 적힌 12개의 공이 있는데 3개를 꺼내서 작은 순서대로 a, b, c 라고 한다네요. a 가 가장 작고 c 가 가장 큰 거겠죠?

이때 $b-a \geq 5$ 일 때 $c-a \geq 10$ 일 확률을 구하합니다. 구하는 확률은 $\frac{b-a \geq 5 \text{ and } c-a \geq 10}{b-a \geq 5}$ 이죠?

분모와 분자가 모두 12개의 공 중 3개의 공을 꺼내는 전체 사건을 따르니까 경우의 수로 접근해도 되겠어요.

먼저 분모의 경우의 수를 구해봅시다. $b-a \geq 5$ 이어야 해요. 일단 천천히 기준을 잡고 케이스 분류를 해봅시다. 가장 작은 수인 a 를 기준으로 해보죠. $a=1$ 이라면 $6 \leq b < c$ 여야 합니다. 그러면 6부터 12까지의 7개의 숫자 중에서 2개만 고르면 자동으로 b, c 가 결정되겠죠? ${}_7C_2$ 입니다. $a=2$ 이라면 $7 \leq b < c$ 이고 ${}_6C_2$ 입니다.

$a=3$ 이라면 $8 \leq b < c$ 이고 ${}_5C_2$ 입니다. 이런 식으로 끝까지 가면 $a=6$ 일 때 $11 \leq b < c$ 이고 ${}_2C_2$ 입니다. 결국 ${}_2C_2 + {}_3C_2 + \dots + {}_7C_2 = 56$ 이네요.

이제 분자의 경우의 수를 구해봅시다. 이번엔 $b-a \geq 5$ 이면서 $c-a \geq 10$ 이어야 해요. 이러면 일단 경우의 수가 적은 $c-a \geq 10$ 를 먼저 고정시킨 후 $b-a \geq 5$ 를 충족시키도록 b 의 값을 찾아봅시다. 일단 $a=1, c=11$ 이라면 $6 \leq b < 11$ 이어야 합니다. 경우의 수는 5입니다.

$a=1, c=12$ 라면 $6 \leq b < 12$ 여야 합니다. 경우의 수는 6입니다.

$a=2, c=12$ 라면 $7 \leq b < 12$ 여야 합니다. 경우의 수는 5입니다.

총 $5+6+5=16$ 이네요. 구하는 확률은 $\frac{16}{56} = \frac{2}{7}$ 입니다. $p=7, q=2$ 이므로 $p+q=9$ 이네요.