제 2 교시

수학 영역(B 형)

2015학년도 대학수학능력시험 19번

19. 좌표공간에서 직선 $l: \frac{x}{2}=6-y=z-6$과 평면 α가 점 P(2, 5, 7)에서 수직으로 만난다. 직선 l 위의 점 A(a, b, c)와 평면 α 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}=6$일 때, $a+b+c$의 값은? (단, $a>0$) [4점]

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

문제분석

· 내용영역 : 기하와 벡터
　Ⅳ. 벡터
　　2. 벡터의 성분과 내적
　　3. 직선과 평면의 방정식

· 행동영역 : 내적문제해결능력
(두 가지 이상의 수학적 개념 · 원리 · 법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 주어진 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}=6$ 를 직선 l과 평면 α가 수직임을 이용하여 간단히 나타낸다.
(Hint. $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}$: 벡터의 분할)

(2) 한 점 P(2, 5, 7)을 지나고 직선 l의 방향벡터를 이용하여 직선 l 위의 점 A를 t에 관한 식으로 표현한다.

(3) 좌표공간에서 직선 위의 두 점의 거리를 구한다.

문제풀이

(1) 주어진 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}=6$ 를 직선 l과 평면 α가 수직임을 이용하여 간단히 나타낸다.
(풀이)
벡터의 분할에 의해 $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ}$ 이므로
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PQ})=6$
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ}=6$ 으로 표현할 수 있다.
이 때, 직선 l과 평면 α가 점 P에서 수직이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{PQ}=0$ 임을 알 수 있다.
$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AP}|^2=6$

---

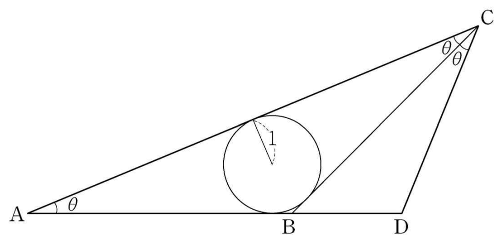
(2) 한 점 P(2, 5, 7)을 지나고 직선 l의 방향벡터를 이용하여 직선 l 위의 점 A를 t에 관한 식으로 표현한다.
(풀이)
직선 $l: \frac{x}{2}=6-y=z-6$ 의 방향 벡터는 $\vec{u}=(2,\ -1,\ 1)$ 이다.
직선 위의 한 점 P(2, 5, 7)와 방향 벡터 $\vec{u}=(2,\ -1,\ 1)$를 가지고 직선 위의 점 A를 구하면 $\overrightarrow{OP}+t\times\vec{u}=(2, 5, 7)+(2,\ -1,\ 1)t$이다.
따라서 점 A의 좌표는 $(2t+2,\ 5-t,\ t+7)$이다.

---

(3) 좌표공간에서 직선 위의 두 점의 거리를 구한다.
(풀이)
위의 (1)번에서 구한 $|\overrightarrow{AP}|^2=6$ 을 통해 선분 AP의 길이가 6임을 알 수 있다.
따라서 두 점 A와 P 사이의 거리를 구하면
$\overline{AP}=\sqrt{4t^2+t^2+t^2}$ 이다.
$\therefore |\overrightarrow{AP}|^2=6t^2=6$
$\therefore t=\pm 1$ 이므로 직선 위의 한 점 A의 좌표는 (4, 4, 8)과 (0, 6, 6)이고, 주어진 조건 $a>0$에 따르면 점 A의 좌표는 (4, 4, 8)임을 알 수 있다.

2015학년도 대학수학능력시험 20번

20. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BDC의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

문제분석

· 내용영역

① 중학교 3학년
　Ⅵ. 삼각비
　　2. 삼각비의 활용

② 고등학교 1학년
　Ⅶ. 삼각함수
　　2. 삼각형에의 응용

③ 수학Ⅱ
　Ⅲ. 함수의 극한과 연속
　　1. 함수의 극한

· 행동영역 : 내적문제해결능력
(두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 두 변의 길이와 끼인각을 알 때, 삼각형 넓이 구하는 공식을 안다.

(2) 삼각형 BDC의 넓이인 $S(\theta)$를 구하기 위해 선분 BC와 선분 CD를 삼각비를 활용하여 구한다.

(3) 함수의 극한을 이용하여 $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$값을 구한다.

문제풀이

(1) 두 변의 길이와 끼인각을 알 때, 삼각형 넓이 구하는 공식을 안다.

(풀이)

※ 중학교 3학년 Ⅵ. 삼각비 2. 삼각비의 활용에서 삼각형의 넓이를 구하는 다양한 공식을 배웁니다.

$$S = \frac{1}{2}ab \times \sin\theta$$

---

(2) 삼각형 BDC의 넓이인 $S(\theta)$를 구하기 위해 선분 BC와 선분 CD를 삼각비를 활용하여 구한다.

(풀이)

① 선분 AC의 중점을 M이라 할 때, 선분 AM를 구한다.

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\overline{AM}} \qquad \therefore \overline{AM} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

② 삼각형 BDC의 두 변 중 한 변인 선분 BC를 구한다.

$$\cos\theta = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}} \qquad \therefore \overline{AB} = \overline{BC} = \frac{1}{\cos\theta \times \tan\frac{\theta}{2}}$$

③ 사인법칙을 이용하여 선분 CD를 구한다.

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{\overline{CD}}{\sin\theta} \qquad \therefore \overline{CD} = \frac{2\sin\theta}{\sin3\theta \times \tan\frac{\theta}{2}}$$

④ 두 변 $\overline{BC}$, $\overline{CD}$와 끼인각 $\angle BCD = \theta$를 이용하여 삼각형 BDC의 넓이를 구한다.

$$\triangle BDC = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin\theta$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta \times \sin3\theta \times \tan^2\frac{\theta}{2}}$$

---

(3) 함수의 극한을 이용하여 $\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\}$값을 구한다.

(풀이)

$$\lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\} = \lim_{\theta \to +0} \frac{\theta \times \sin^2\theta}{\cos\theta \times \sin3\theta \times \tan^2\frac{\theta}{2}} = \lim_{\theta \to +0} \frac{1}{3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}$$

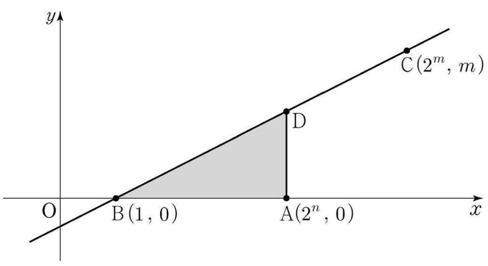
$$\therefore \lim_{\theta \to +0} \{\theta \times S(\theta)\} = \frac{4}{3}$$

2015학년도 대학수학능력시험 21번

21. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

> (가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$이다.
> (나) 두 점 B$(1, 0)$과 C$(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같다.

① 109　② 111　③ 113　④ 115　⑤ 117



문제분석

- 내용영역
  - ① 중학교 2학년
    - Ⅴ. 일차함수
      - 1. 일차함수와 그래프
  - ② 수학 Ⅰ
    - Ⅱ. 지수함수와 로그함수
      - 1. 지수
    - Ⅲ. 수열
      - 1. 등차수열과 등비수열
- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 기울기의 정의를 이용하여 점 D의 y좌표를 구한다.

(2) 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같도록 식을 만든다.

(3) 발견적 추론으로 수열 a_n을 구하고, $\sum_{n=1}^{10} a_n$을 구한다.

문제풀이

(1) 기울기의 정의를 이용하여 점 D의 y좌표를 구한다.
(풀이)
선분 BC와 선분 BD는 같은 직선 위에 있으므로 그 기울기가 같다.
따라서 $\frac{m}{2^m-1} = \frac{y}{2^n-1}$이므로 점 D의 y좌표는 $\frac{m(2^n-1)}{2^m-1}$이다.

---

(2) 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같도록 식을 만든다.
(풀이)
$\triangle\text{ABD} = \frac{1}{2} \cdot (2^n-1) \cdot \frac{m(2^n-1)}{2^m-1} \leqq \frac{m}{2}$ (단, m은 자연수)
위의 식을 정리해보면
$(2^n-1)^2 \leqq 2^m - 1$ 이와 같이 표현할 수 있다.

---

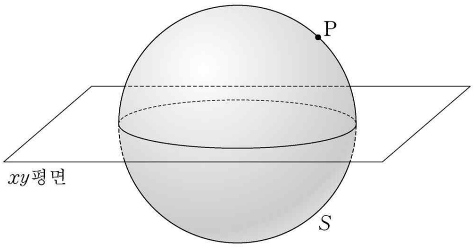
(3) 발견적 추론으로 수열 a_n을 구하고, $\sum_{n=1}^{10} a_n$을 구한다.
(풀이)
(2)에서 구한 식은 $(2^n-1)^2 \leqq 2^m - 1$ (단, n, m은 자연수) 이다.
주어진 식에서 문자 n, m 모두가 자연수이므로 n에 1부터 대입하여 수열 a_n을 구하면 된다.
$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6,\ a_4 = 8\ \cdots$
위와 같이 초항을 제외한 나머지 항들이 공차를 2로 하는 등차수열을 이룸을 알 수 있다.
$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = 109$ 이다.

※ 이와 같은 과정을 **발견적 추론**이라 한다. 문제에서 주어진 수열이 1~20항 내외라면 직접 써보는 것을 추천한다.
※ 수열 a_n의 일반항을 구하자면 $a_n = 2n\ (n \geqq 2)$, $a_1 = 1$로 표현 가능하다.
※ 등차수열의 합 구하는 방법은 여러 가지가 있으므로 본인이 가장 편하다고 생각하는 방식으로 구하면 된다.

2015학년도 대학수학능력시험 29번

29. 좌표공간에 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$과 점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 모든 원 C 에 대하여 C 의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 $\frac{q}{p}\pi$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) 〔4점〕

> (가) 원 C 는 점 P를 지나는 평면과 구 S 가 만나서 생긴다.
> (나) 원 C 의 반지름의 길이는 1 이다.



문제분석

- 내용영역 : 기하와 벡터
  - Ⅲ. 공간도형과 공간좌표
    - 1. 공간도형 - ③ 정사영
  - Ⅳ. 벡터
    - 2. 벡터의 성분과 내적
    - 3. 직선과 평면의 방정식
- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

⑴ 점 P를 지나고 조건에 만족하는 평면의 방정식을 임의의 법선벡터를 이용하여 구한다.

⑵ 주어진 조건인 원 C 의 반지름을 이용하여 원점과 원 C 를 포함하는 평면까지의 거리를 구한다.

⑶ 임의의 법선벡터를 이용하여 xy평면과의 이면각을 구한 뒤 원 C 의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구한다.

문제풀이

⑴ 점 P를 지나고 조건에 만족하는 평면의 방정식을 임의의 법선벡터를 이용하여 구한다.
(풀이)
조건에 만족하는 평면의 법선벡터를 $\vec{\mathrm{h}}=(a, b, c)$ 라고 할 때,
점 $\mathrm{P}(0, 5, 5)$를 지나는 평면의 방정식은
$ax+b(y-5)+c(z-5)=0$ 으로 표현할 수 있다.

⑵ 주어진 조건인 원 C 의 반지름을 이용하여 원점과 원 C 를 포함하는 평면까지의 거리를 구한다.
(풀이)
① 주어진 조건에서 원 C 의 반지름의 길이가 1이고,
좌표공간에 있는 구 $S: x^2+y^2+z^2=50$ 의 반지름의 길이가 $\sqrt{50}$이므로 원점에서 원 C 를 포함하는 평면까지의 거리는 7임을 알 수 있다.
※ 구와 평면을 단면화 하여 직각삼각형을 그려본다.
② ⑴에서 구한 평면의 방정식을 이용하여 수식적으로 원점과 평면까지의 거리를 표현하면 $\frac{|5(b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=7$ 이다.

⑶ 임의의 법선벡터를 이용하여 xy평면과의 이면각을 구한 뒤 원 C 의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값을 구한다.
(풀이)
① 임의의 법선벡터 $\vec{\mathrm{h}}=(a, b, c)$와 xy평면의 법선벡터 $\vec{\mathrm{h}}=(0, 0, 1)$를 이용하여 두 평면의 이면각을 구해보면
$\cos\theta=\frac{(a,b,c)\cdot(0,0,1)}{|(a,b,c)||(0,0,1)|}=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 이다.
이 때, 임의의 법선벡터 $\vec{\mathrm{h}}=(a, b, c)$를 크기가 1인 단위벡터라 가정하면, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$ 이다.
$\therefore \cos\theta=c$ 이고 원 C 의 넓이가 π이므로 원 C 의 xy평면 위로의 정사영의 넓이가 $c\pi$임을 알 수 있다. 그러므로 구하고자 하는 정사영의 최댓값은 c의 최댓값을 구하는 것과 같다.
② ⑵에서 구한 $\frac{|5(b+c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=7$ 에도 $\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1$ 을 대입하면 $|b+c|=\frac{7}{5}$ 임을 알 수 있다. 따라서 $\begin{cases} b^2+c^2=1 \\ |b+c|=\frac{7}{5} \end{cases}$ 인 연립방정식을 풀면 $c=\pm\frac{3}{5}$, $\pm\frac{4}{5}$이고, c의 최댓값이 $\frac{4}{5}$임을 알 수 있다.

※ 좌표공간상에서 구 $a^2+b^2+c^2=1$ 와 평면 $b+c=\frac{7}{5}$ 의 교선을 구하는 것이 옳으나 최댓값을 구하는 것이므로 $a=0$ 의 값을 대입하여 원과 직선의 교점을 구하는 것이 편리하다.

2015학년도 대학수학능력시험 30번

30. 함수 $f(x)=e^{x+1}-1$ 과 자연수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=100|f(x)|-\sum_{k=1}^{n}|f(x^k)|$$

이라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

문제분석

- 내용영역 : 수학Ⅱ
  - Ⅲ. 함수의 극한과 연속
    - 2. 함수의 연속
  - Ⅳ. 미분법
    - 1. 미분계수와 도함수
    - 2. 여러 가지 함수의 미분법

- 행동영역 : 내적문제해결능력
  (두 가지 이상의 수학적 개념・원리・법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력)

★ 문제해결 사고과정

(1) 함수 $|f(x)|$의 미분가능성을 조사한다.

(2) 함수 $|f(x^k)|$의 미분가능성을 조사한다.
(Hint. 수의 분류)

(3) 함수 $g(x)$의 미분가능성을 조사한다.

문제풀이

(1) 함수 $|f(x)|$의 미분가능성을 조사한다.
(풀이)
함수 $f(x)=e^{x+1}-1$ 이므로
$|f(x)|=\begin{cases} e^{x+1}-1 & (x\geq -1) \\ 1-e^{x+1} & (x<-1)\end{cases}$ 으로 나타낼 수 있다.
함수 $|f(x)|$의 도함수를 구하면 $\dfrac{d}{dx}|f(x)|=\begin{cases} e^{x+1} & (x\geq -1) \\ -e^{x+1} & (x<-1)\end{cases}$
이고, $x=-1$ 일 때 미분이 불가능함을 알 수 있다.

---

(2) 함수 $|f(x^k)|$의 미분가능성을 조사한다.
(풀이)
함수 $f(x^k)=e^{x^k+1}-1$ 이므로
$|f(x^k)|=\left|e^{x^k+1}-1\right|$ 으로 나타낼 수 있다.
이 때, k가 짝수일 때와 홀수일 때로 나눌 수 있다.
① $k=2m-1$ 이면 함수 $|f(x^k)|=\begin{cases} e^{x^k+1}-1 & (x\geq -1) \\ 1-e^{x^k}+1 & (x<-1)\end{cases}$ 이고
함수 $|f(x^k)|$의 도함수를 구하면
$\dfrac{d}{dx}|f(x^k)|=\begin{cases} kx^{k-1}e^{x^k+1} & (x\geq -1) \\ -kx^{k-1}e^{x^k+1} & (x<-1)\end{cases}$ 임으로 $x=-1$ 일 때
미분이 불가능함을 알 수 있다.
② $k=2m$ 이면 함수 $|f(x^k)|=e^{x^k+1}-1$ 이고 함수 $|f(x^k)|$의 도함수를 구하면 $\dfrac{d}{dx}|f(x^k)|=kx^{k-1}e^{x^k+1}$ 이므로 모든 실수 x에서 미분이 가능함을 알 수 있다.

---

(3) 함수 $g(x)$의 미분가능성을 조사한다.
(풀이)
위의 (1)과 (2)에서 구해본 결과 함수 $g(x)$ 또한 $x=-1$ 에서 미분이 가능하다면 모든 실수 x에서 미분이 가능함을 알 수 있다.
따라서 도함수 $g'(x)$가 $x=-1$ 에서 연속성을 조사하면 된다.
$\lim\limits_{x\to -1^+} g'(x)=100-(1-2e^2+3-4e^2+\cdots+(2m-1))$
$\lim\limits_{x\to -1^-} g'(x)=-100-(-1-2e^2-3-4e^2-\cdots-(2m-1))$
$\therefore \lim\limits_{x\to -1^+} g'(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} g'(x)$ 이므로
$200=2(1+3+\cdots+(2m-1))$ 임을 알 수 있다.
$\therefore m=10$ 이고 $k=19,\ 20$ 이므로 n의 값의 합은 39이다.

※ k 값을 구하는 과정에서 홀수인 k 값을 구하면 짝수인 $k+1$ 값 또한 답이 되는 것은 (2)에 의해서 자명하다.
※ (1), (2)와 마찬가지로 미분가능성 조사를 도함수의 연속성 조사로 대체했음을 명시하는 바입니다.