5. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 하는 실수 t의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$sol1)$

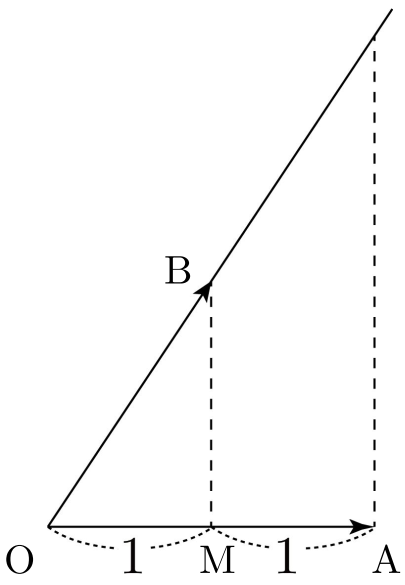
두 벡터가 서로 수직이면 그 내적값이 0이 됨을 이용하면

$\vec{a}\cdot(\vec{a}-t\vec{b})=|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=4-2t=0$

$\therefore t=2$

$sol2)$

문제상황이 나타내는 상황을 기하학적으로 해석하면



왼쪽의 그림과 같은 상황에서 $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$를 만족하는 직선 OB 위의 점 B′이 $\mathrm{B'A}\perp\mathrm{OA}$를 만족한다고 볼 수 있습니다. A를 지나는 직선 OA의 법선과 직선 OB의 교점이 곧 B′이 됩니다. 이 때 △ABM과 △OB′A는 닮음이므로 그 닮음비는

$\dfrac{|\overrightarrow{OB'}|}{|\overrightarrow{OB}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OM}|}=t=2$입니다.

27. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-4, 0)$, $(0, 0)$을 지날 때, 무리방정식

$$f(\sqrt{x+1}-x)=f(1)$$

의 모든 실근의 합을 구하시오. [4점]

$sol1)$

문제조건에서 $f(x)=x(x+4)=x^2+4x$이고 $f(1)=5$입니다.
$\sqrt{x+1}-x=t$로 치환하면
$f(t)=t^2+4t=5$에서 $t=1\,\text{or}\,-5$을 얻습니다.
$t=\sqrt{x+1}-x=1$인 경우,
$x+1=x^2+2x+1$, $x=0,-1$이며 무연근은 없습니다.
$t=\sqrt{x+1}-x=-5$인 경우,
$x+1=x^2-10x+25$, $x^2-11x+24=0$, $x=3, 8$인데 $x=3$은 무연근이므로
제외해줍니다. 따라서 모든 실근의 합은 $0+(-1)+8=7$입니다.

$sol2)$

이차함수의 대칭성을 고려하면 $f(t)=f(1)$을 만족하는 실수 t는 1과 -5임을 바로 알 수 있습니다. 이후의 풀이는 $sol1)$과 같습니다.

30. 양의 실수 전체의 집합에서 감소하고 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 양의 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다.
> (나) 임의의 양의 실수 t에 대하여 세 점
> $(0,0)$, $(t, f(t))$, $(t+1, f(t+1))$
> 을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 $\dfrac{t+1}{t}$이다.
> (다) $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx=2$

$\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} \frac{f(x)}{x}dx=\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$sol)$

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$라고 하면 $g(x)-g(x+1)=\dfrac{2}{x^2}$임은 쉽게 알 수 있습니다.

부분적분을 하기에는 주어진 정보가 너무 부족하니 $g(x)-g(x+1)=\dfrac{2}{x^2}$을 이용한 치환적분으로 답을 구합시다.

구하는 값은 $\displaystyle\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx$이고 계산에 이용할 수 있는 정적분값은 $\displaystyle\int_1^2 g(x)dx=2$뿐인데 치환적분으로는 적분구간을 $[1,2]$에서 1씩밖에 옮길 수 없으니 적분구간을 나눠서 조절하면,

$$\int_1^2 g(x)dx=\int_1^{\frac{3}{2}} g(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^2 g(x)dx=\int_1^{\frac{3}{2}} g(x+1)+\frac{2}{x^2}dx+\int_{\frac{3}{2}}^2 g(x)dx$$

$$=\int_2^{\frac{5}{2}} g(x)dx+\int_{\frac{3}{2}}^2 g(x)dx+\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2}dx=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(x)dx+\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2}dx=2$$

이제 치환적분을 통해 적분구간을 적절하게 옮기면

$$2=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(x)dx+\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2}dx=\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} g(x+1)+\frac{2}{x^2}dx+\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^2}dx=\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} g(x)dx+\int_1^{\frac{5}{2}} \frac{2}{x^2}dx$$

$$=\int_{\frac{5}{2}}^{\frac{7}{2}} g(x+1)+\frac{2}{x^2}dx+\int_1^{\frac{5}{2}} \frac{2}{x^2}dx=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx+\int_1^{\frac{7}{2}} \frac{2}{x^2}dx$$

$$=\int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x+1)+\frac{2}{x^2}dx+\int_1^{\frac{7}{2}} \frac{2}{x^2}dx=\int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx+\int_1^{\frac{9}{2}} \frac{2}{x^2}dx$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx = 2 - \int_{1}^{\frac{7}{2}} \frac{2}{x^2}dx, \quad \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = 2 - \int_{1}^{\frac{9}{2}} \frac{2}{x^2}dx$$

$$\therefore \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{9}{2}} g(x)dx + \int_{\frac{9}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = 4 + \left[\frac{2}{x}\right]_{1}^{\frac{7}{2}} + \left[\frac{2}{x}\right]_{1}^{\frac{9}{2}}$$

$$= 4 + \frac{4}{7} - 2 + \frac{4}{9} - 2 = 4 \times \frac{9+7}{63} = \frac{64}{63}$$

$\therefore p + q = 127$

$sol2)$

위 풀이에서 $\frac{d}{dt}G(t) = g(t)$를 만족하는 $G(t)$를 생각해서 $g(t) - g(t+1) = \frac{2}{t^2}$의 양 변을 적분하면 (부정적분)

$G(t) - G(t+1) = \frac{-2}{t} + C$ 이고 $G(2) - G(1) = 2$ 이므로 $C = 0$입니다.

t에 $\frac{7}{2}$와 $\frac{9}{2}$를 각각 대입하면

$G\left(\frac{7}{2}\right) - G\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{4}{7}$, $G\left(\frac{9}{2}\right) - G\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{4}{9}$

이고 양 변을 더하면

$G\left(\frac{11}{2}\right) - G\left(\frac{7}{2}\right) = \int_{\frac{7}{2}}^{\frac{11}{2}} g(x)dx = 4\left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{64}{63}$이므로, $p + q = 127$이 됩니다.