# 2015 사관학교 1차 시험 (수학 B) 4점 해설

## [객관식]

14. $A\left(2\cos\frac{\pi}{6}, 2\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $B\left(2\cos\frac{2}{3}\pi, 2\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

부피를 $V$라 하면,

$$V = \pi\int_{-1}^{\sqrt{3}} 4 - x^2 dx - \left(\pi + \frac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)$$
$$= \frac{8(\sqrt{3}+1)}{3}\pi$$

15. $S_1 = \frac{1}{2}t\left(1 - \frac{t^2}{2} - \sqrt{1-t^2}\right)$

$S_2 = \frac{1}{2}t\sin^4 t$ 이므로,

$$\lim_{t \to +0}\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{8}$$

16. ㄱ. $(A+2B)(2A-B) = (2A-B)(A+2B) = E$에서 $AB = BA$이다. (참)

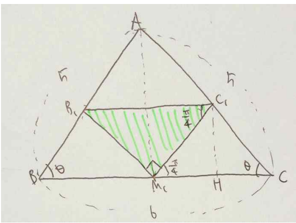
ㄴ. ㄱ에 의해, 조건식은 $2A^2 - 2B^2 = E$로 변형된다. 또 ㄱ에 의해 식을 변형 하면, $2(A-B)(A+B) = E$이므로, $(A+B)$의 역행렬이 존재한다. (참)

ㄷ. $A^2 - B^2 = \frac{1}{2}E$이므로, $A^2 = \frac{1}{2}E$, $B^2 = O$

$AB = BA = O$에서, $A^{-1}$를 곱해주면, $B = O$ (참)

정답은 ㄱ,ㄴ,ㄷ

17.




그림에서 직각삼각형 $B_nM_nC_n$은 대칭성에 의해 직각이등변삼각형이다. $C_1$에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 $H$라 하고 그 길이를 $k$라 하자. $\angle ACB = \theta$라 하면 $\overline{CH} = k\cot\theta = \frac{3}{4}k$

$\angle B_1C_1M_1 = \frac{\pi}{4}$이므로, $\angle C_1M_1C = \frac{\pi}{4}$이다.

$\overline{M_1H} = \overline{C_1H} = 3 - \frac{3}{4}k$이므로, $k = 3 - \frac{3}{4}k$

$k = \frac{12}{7}$, $S_1 = \frac{144}{49}$이다. 공비 $r$을 구하면,

$r = \left(\frac{\frac{12}{7}}{3}\right)^2 = \frac{16}{49}$이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{144}{49}}{1 - \frac{16}{49}} = \frac{48}{11}$$

18. $\overline{OB_n} = a_n\sqrt{1+b_n^2}$이므로 $p = 1$

$\sqrt{1+b_n^2} = \frac{1}{2}\left(n + 1 + \frac{1}{n+1}\right)$이므로

$a_{n+1} = a_n + 2r_n = (n+1)a_n$이다.

따라서, $f(n) = n + 1$

$\therefore a_n = 2 \times n!$

따라서, $g(n) = 2 \times n!$

$p + f(4) + g(4) = 1 + 5 + 48 = 54$

19. $A_1, A_k, A_m$이 한 직선 위에 있기 위해서는 각각의 $x$좌표와 $y$좌표가 등차수열을 이루어야한다. 즉, $A_k$의 $x$좌표는 1이고, $A_m$의 $x$좌표는 2이다. 지표와 가수 조건에 의해 $A_k(1, \log k - 1)$, $A_m(2, \log m - 2)$

$A_1(0,0)$이므로, 공차는 $\log k - 1$이다.

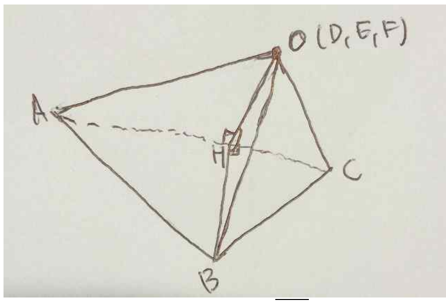
즉, $2\log k - 2 = \log m - 2$이고, $k^2 = m$의 식을 얻는다.

$10 < k < 100$, $100 \leq m < 1000$에서,

$m = k^2$을 대입하면, $10 < k < 10\sqrt{10}$이고, 이를 만족하는 자연수 $k$의 최대값은 31이다. 그렇다면 $m = 31^2 = 961$

$\therefore m + k$의 최대값은 992이다.

20.




사면체의 전개도이므로, $\overline{CF} = 2$

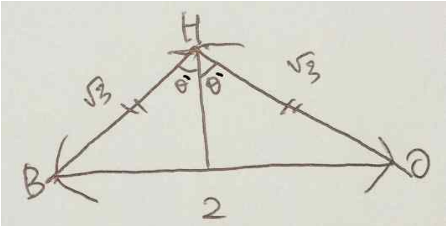
$\overline{BC} = \overline{CF}$, $\overline{AC}$는 공통, $\angle ABC = \angle AFC$

이므로, $\triangle ABC \equiv \triangle AFC$이다.

면 $ACF$와 $ABC$의 교선은 $AC$이고,

이면각의 정의에 의해 점 $B$와 $F$에서

교선에 각각 수선의 발을 내리면, 그 점은 $H$로 동일하다.




삼각형 $BOH$에서

$\cos\theta' = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고, 배각의 공식에 의해

$\cos 2\theta' = \dfrac{1}{3}$ 예각의 크기를 물어봤으므로,

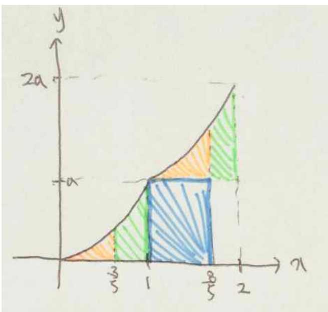
구한 $\cos 2\theta'$의 절댓값이 정답이다.

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

21. 원이 $t$만큼 굴러가면, 점 $P$는 $t$만큼 원주 위를 움직인다. ($\because r\theta = t,\ r = 1$)
따라서 점 $P$의 좌표를 구하면,
$P\left(t+\cos\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right), 2+\sin\left(t+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ 정리하면
$P(t-\sin t, 2+\cos t)$이다. 매개변수 함수의 미분법에 의해, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-\sin t}{1-\cos t}$에 $t = \dfrac{2}{3}\pi$ 대입
$\therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
(※참고 : 사이클로이드 곡선)

# [주관식]

26.




$\int_0^2 g(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x-1)+f(1)dx = 1$

을 만족한다. 그림에서

$\int_0^1 f(x)dx + \int_0^2 f(x-1)+f(1)dx = \dfrac{5}{3}a$이다.

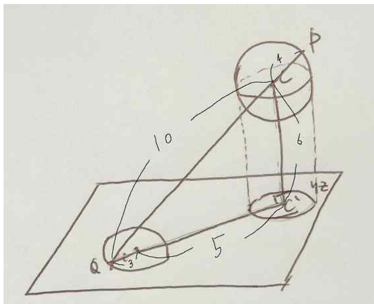
따라서 $a = \dfrac{3}{5}$이다. 그림을 다시 보면 바로

$P(a \le X \le a+1) = \dfrac{14}{25}$임을 알 수 있다.

$p = 25, q = 14$이므로, $p+q = 39$

27. $l$의 기울기는 $-\dfrac{1}{4}$이고, $m$의 기울기는 $-\dfrac{k}{4}$이다. 두 직선이 이루는 예각을 $\theta$라 하면, $\tan\theta = 1$을 만족한다.
$\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{4}, \tan\theta_2 = -\dfrac{k}{4}$라고 하면,
$\tan\theta = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{\dfrac{k}{4} - \dfrac{1}{4}}{1+\dfrac{k}{16}} = 1$
$k = \dfrac{20}{3}$이므로, $3k = 20$

28.




구의 중심을 $C$라 하고, 구를 $yz$평면에 정사영한 원의 중심을 $C'$이라 하자. 그렇다면, $C'(0,-1,5)$이다.
$C'$과 원 위의 점 $Q$ 사이의 거리의 최댓값을 구하면 $3+\sqrt{25} = 8$이다. $C$와 $yz$평면 사이의 거리는 6이므로 $C$와 $Q$의 거리의 최댓값은 10이다. $\overline{PQ}$의 최댓값은 $\overline{CQ}$의 최댓값에 구의 반지름을 더한 14가 된다. (그림 참고)

29. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CX} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AC})$이다. 원의 중심을 $O$라 하자.
$\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AX} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{AC})$
$p\overrightarrow{AB}$를 $x$축, $q\overrightarrow{AD}$를 $y$축으로 생각하면,
원 $O$는 $x$축과 $y$축에 동시에 접하는 원이다.
즉, $O$의 방정식을 구하면
$(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2\ (a < 4) \cdots ①$
$O$가 점 $C$를 지나므로 $C(4,4)$를 ①에 대입
$a = 8 \pm 4\sqrt{2}$에서 $a < 4$이므로 $a = 8 - 4\sqrt{2}$

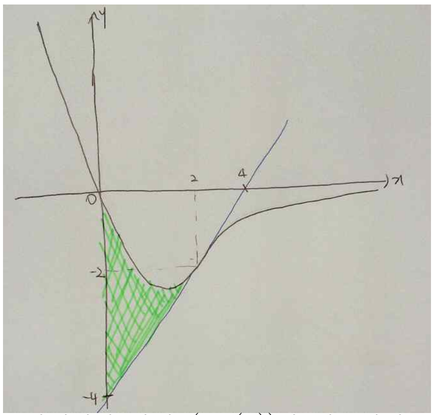
# 2015 사관학교 1차 시험 (수학 B) 4점 해설

$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{AC})=16-16\sqrt{2}+(32-16\sqrt{2})\cos\theta$

이므로, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CX}$의 최댓값은 $48-32\sqrt{2}$

$a=48, b=32$이므로 $a+b=80$

30.




그림에서와 같이 $(a, f(a))$가 변곡점인 순간

조건을 만족시킨다. 즉, $a=2$

접선의 방정식을 구하면 $y=x-4$이다.

문제에서 요구하는 넓이를 $S$라 하자.

$$S=\int_0^2 f(x)-x+4dx=9-e^2$$

$k=9$