제 2 교시

2014학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가 문제지

수학 영역

(B 형)

성명		수험 번호						–				

- ○ 자신이 선택한 유형(A 형/B 형)의 문제지인지 확인하시오.
- ○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- ○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

  푸르른 보리밭길 맑은 하늘에

- ○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- ○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.
- ○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- ○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

제 2 교시

수학 영역(B 형)

5지선다형

1. 두 행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이고 $A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

3. 함수 $f(x)=\sqrt{7}\sin x-3\cos x$의 최댓값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 부등식

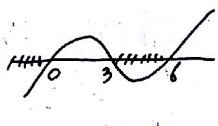
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}\le 0$$

을 만족시키는 양의 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{2x-6}{x(x-6)} \le 0$, $x \ne 0, 6$

$2(x-3)\cdot x\cdot(x-6) \le 0$



자연수 $x = 3.4.5$

5. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$\sin 2x - \sin x = 4\cos x - 2$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

$\sin x \cdot (2\cos x - 1) = 2(2\cos x - 1)$

$(2\cos x - 1) \cdot (\sin x - 2) = 0$

$\therefore \cos x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ 이므로 모든 해의 합은 2π

6. 한 개의 주사위를 A는 4번 던지고 B는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하자. $a+b$의 값이 6일 확률은? [3점]

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

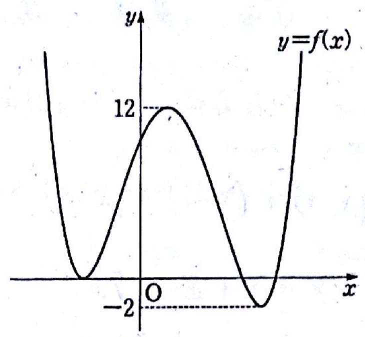
$(a, b) =$ $(3, 3)$ $(4, 2)$ 이므로

$(a, b) = (3, 3)$일 때 ${}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{3^7}$

$(a, b) = (4, 2)$일 때 $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times {}_3C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{6}{3^7}$

$\therefore \frac{8+6}{3^7} = \frac{14}{3^7}$

7. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, 함수 $f(x)$의 극댓값은 12, 두 극솟값은 각각 -2, 0이다.



방정식 $f(x) - \sqrt{f(x)-3} = 9$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(x) - 9 = \sqrt{f(x)-3}$, $f(x) \ge 9$

$f(x) = t$ 치환하면 $(t \ge 9)$

$t^2 - 18t + 81 = t - 3$

$t^2 - 19t + 84 = 0$

$(t-12)(t-7) = 0$

$\therefore t = 12$

따라서 $f(x) = 12$의 서로 다른 실근의 개수는 3개.

Generated by CamScanner from intsig.com

8. 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 21 ② 28 ③ 36 ④ 45 ⑤ 56

$X = x+1 \geq 0$, $Y = y+1 \geq 0$, $Z = z+1 \geq 0$.

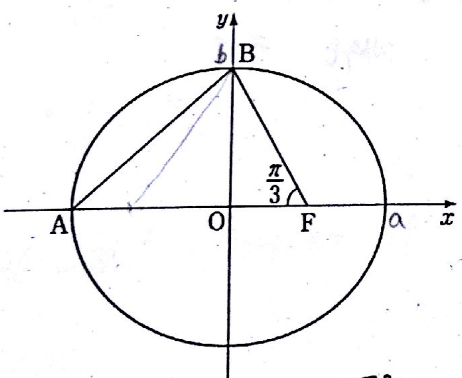
$\therefore (X-1)+(Y-1)+(Z-1)=4$

$\therefore X+Y+Z=7$.

음이 아닌 정수해의 개수는 ${}_3H_7 = 36$.

9. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점을 $F(c, 0)$ $(c>0)$, 이 타원이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 음수인 점을 A, y축과 만나는 점 중에서 y좌표가 양수인 점을 B라 하자. $\angle AFB=\frac{\pi}{3}$이고 삼각형 AFB의 넓이는 $6\sqrt{3}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30



$a^2-b^2=c^2$에서 $a^2=b^2+c^2=\overline{BF}^2$ $\therefore \overline{BF}=a$

$\triangle BFF'$은 정삼각형이므로 $a=2c$

$6\sqrt{3}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot(a+c)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $c=2$, $a=4$

$b^2=12$

$\therefore a^2+b^2=16+12=28$.

10. 질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$\log\frac{b}{a}=-1+k\log c \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g이다. 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g)은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.) [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$\log\frac{4}{10}=-1+k\cdot\log 8$

$\therefore k=\frac{2}{3}$

$\log\frac{b}{20}=-1+k\cdot\log 27$

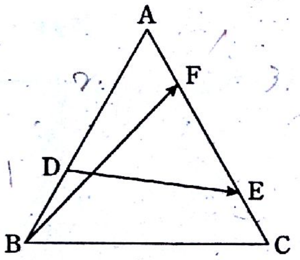
$=-1+2\cdot\log 3$

$=\log\frac{9}{10}$.

$\therefore b=18$

11. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 2:1로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DE}|^2$의 값은? [3점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



좌표축을 도입하자

(BC의 중점을 원점으로 설정).

$A\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$D\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $F\left(\frac{3}{8}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$, $E\left(\frac{9}{8}, \frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$

$\therefore \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE} = (\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD})$

$= \left(\frac{15}{8}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) + \left(\frac{17}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right)$

$= (4, \sqrt{3})$

$\therefore |\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2 = 16 + 3 = 19$

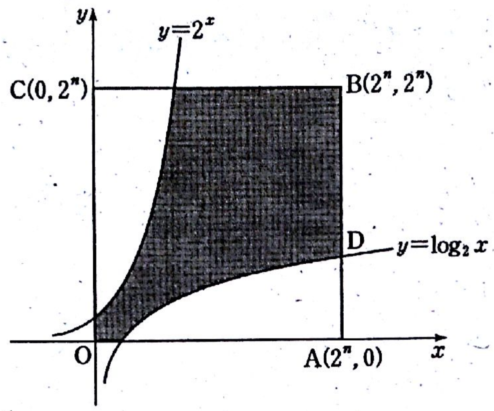
12. 어느 도시에서 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 주민들의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 100명을 임의추출하여 조사한 결과 90명이 개방 시간 연장을 희망하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[\hat{p}-c, \hat{p}+c]$일 때, c의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.) [3점]

① 0.0431 ② 0.0588 ③ 0.0645
④ 0.0759 ⑤ 0.0816

$n = 100$, $\hat{p} = 0.9$이므로

$c = 1.96 \times \sqrt{\frac{0.9 \times 0.1}{100}} = 0.0588$

[13~14] 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 O(0, 0), A(2^n, 0), B(2^n, 2^n), C(0, 2^n)인 정사각형 OABC와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



13. 선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 2:3으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는? [3점]

① $-\frac{13}{28}$ ② $-\frac{25}{56}$ ③ $-\frac{3}{7}$ ④ $-\frac{23}{56}$ ⑤ $-\frac{11}{28}$

F(4, 16) 이므로 E(4, 2)

따라서 $\overline{AD}$를 2:3으로 내분하는 점의

좌표는 $(2^n, 2)$ 이다.

이 때 $A(2^n, 0)$, $D(2^n, n)$ 이므로

$$(2^n, 2) = \left(2^n, \frac{2n}{5}\right)$$

∴ $n=5$ 이므로 D(32, 5)

$\overline{DF}$의 기울기는 $-\frac{11}{28}$ 이다.

14. 정사각형 OABC와 그 내부는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는? [4점]

① $14+\frac{12}{\ln 2}$ ② $16+\frac{14}{\ln 2}$ ③ $18+\frac{16}{\ln 2}$ ④ $20+\frac{18}{\ln 2}$ ⑤ $22+\frac{20}{\ln 2}$

$$S = 2\cdot\left\{\frac{1}{2}\cdot 2^n\cdot 2^n - \int_1^{2^n} \log_2 x\,dx\right\}$$

$n=3$ 대입 하면

$$S = 2\left\{32 - \int_1^8 \log_2 x\,dx\right\}$$

$$= 64 - 2\cdot\frac{1}{\ln 2}\int_1^8 \ln x\cdot dx$$

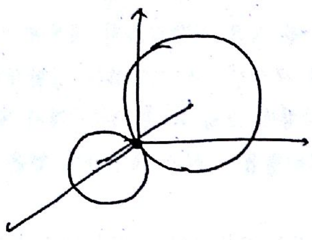
$$= 64 - 2\cdot\left(24 - \frac{7}{\ln 2}\right)$$

$$= 16 + \frac{14}{\ln 2}$$

15. 좌표공간에서 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$과 구 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$이 원점에서 서로 접할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$(x+3)^2+(y+a)^2+(z+b)^2=9+a^2+b^2$



$(-3, -a, -b) \,/\!/\, (1, 2, 1)$

$\therefore -a=-6, \ -b=-3$ 이므로

$a=6, \ b=3$

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고

$$na_{n+1}-2na_n+\frac{n+2}{n+1}=0 \quad (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> $a_{n+1}-2a_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}=0$에서
>
> $a_n-2a_{n-1}+\dfrac{n+1}{n(n-1)}=0 \ (n\ge 2)$이므로
>
> $a_{n+1}-a_n-2(a_n-a_{n-1})+\dfrac{1}{n(n+1)}-\boxed{(가)}=0 \ (n\ge 2)$
>
> 이다. $b_n=a_{n+1}-a_n \ (n\ge 1)$이라 놓으면 $b_1=\dfrac{3}{2}$이고,
>
> $b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}=2b_{n-1}+\boxed{(가)} \ (n\ge 2)$
>
> 이다. 따라서
>
> $b_n+\dfrac{1}{n(n+1)}=2^n \ (n\ge 1)$
>
> 이다. 즉, $b_n=2^n-\dfrac{1}{n(n+1)} \ (n\ge 1)$
>
> 이므로 $a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\boxed{(나)} \ (n\ge 2)$이다.
>
> $n=1$일 때에도 이 식을 만족시키므로
>
> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\boxed{(나)}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $g(6)-f(4)$의 값은? [4점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

$(가)=\dfrac{2}{n(n-1)}=f(n)$

$(나)=2^n+\dfrac{1}{n}=g(n)$

$\therefore g(6)-f(4)=2^6+\dfrac{1}{6}-\dfrac{2}{4\cdot 3}=64$

17. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A - A^2B = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1} = 2E - AB$

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. $A = \frac{1}{2}(E + BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ) $A(2E - AB) = E$ 이므로

$A^{-1} = 2E - AB$ (참)

ㄴ) $A(2E - AB) = (2E - AB) \cdot A = E$ 이므로

$A^2B = ABA$

$\therefore AB = BA$ (참)

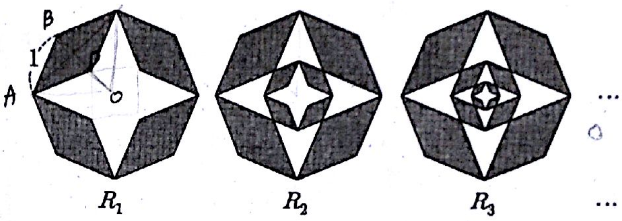
ㄷ) $2A = E + BA^2$ 과 동치이다.

조건에서 $2A = E + A^2B$ 이고

$AB = BA$ 이므로 $A^2B = A \cdot BA = BA^2$

따라서 $2A = E + BA^2$ (참)

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $2+\sqrt{2}$ ② $1+2\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$
④ $1+3\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$

$\overline{OA} = \overline{OB} = x$ 라 하면

$1^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = (2-\sqrt{2}) \cdot x^2$

$\therefore x^2 = \frac{1}{2-\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

한편, $\triangle OAB \sim \triangle ABD$ 이므로 (닮음비 $x : 1$)

$\triangle ABD = \triangle OAB \times \frac{1}{x^2} = \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore S_1 = 8 \times \triangle ABD = 2\sqrt{2}$

무한등비급수에서의 공비 r을 찾자.

$\overline{OB} : \overline{OD} = x : (x - \frac{1}{x})$

$\therefore$ 공비 $r = \left(\frac{x - \frac{1}{x}}{x}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = (-1+\sqrt{2})^2$
$= 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{2\sqrt{2}}{1-(3-2\sqrt{2})} = 2+\sqrt{2}$

19. 좌표공간에서 y축을 포함하는 평면 α에 대하여 xy평면 위의 원 $C_1 : (x-10)^2+y^2=3$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 yz평면 위의 원 $C_2 : y^2+(z-10)^2=1$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S로 같을 때, S의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{10}}{6}\pi$ ② $\frac{\sqrt{10}}{5}\pi$ ③ $\frac{7\sqrt{10}}{30}\pi$

④ $\frac{4\sqrt{10}}{15}\pi$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

평면 α의 법선벡터를 $(1, 0, a)$라 하면

$\alpha : x + az = 0.$

평면 α와 xy 평면이 이루는 각도 θ_1은

두 법선 벡터 $(1.0.a)$와 $(0,0,1)$이 이루는 각도이다.

$$\cos\theta_1 = \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\therefore S = 3\pi \times \frac{|a|}{\sqrt{1+a^2}} \quad \cdots ①$$

한편, 평면 α와 yz평면이 이루는 각도 θ_2는

두 법선벡터 $(1.0.a)$와 $(1,0,0)$이 이루는 각도이다.

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$$

$$\therefore S = \pi \times \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \quad \cdots ②$$

①=② 이므로 $3|a| = 1$ $\therefore |a| = \frac{1}{3}$

따라서 $S = \frac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

20. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $G(t)$는 평균이 t, 표준편차가 $\frac{1}{t^2}$인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$G(t) = P\left(X \le \frac{3}{2}\right)$$

이다. 함수 $G(t)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

① 0.3085 ② 0.3446 ③ 0.6915

④ 0.7257 ⑤ 0.7580

$X \sim N\left(t, \left(\frac{1}{t^2}\right)^2\right)$, $t > 0$.

$$G(t) = P\left(X \le \frac{3}{2}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{\frac{3}{2} - t}{\frac{1}{t^2}}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{3}{2}t^2 - t^3\right)$$

$g(t) = \frac{3}{2}t^2 - t^3$이 최대일 때

함수 $G(t)$도 최대가 된다.

$$g'(t) = -3t^2 + 3t$$
$$= -3t(t-1)$$

$t=1$에서 최댓값 $g(1) = \frac{1}{2}$

$$\therefore G(t) \le P\left(Z \le \frac{1}{2}\right) = 0.6915$$

21. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \ge e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

$\frac{dx}{dt} = e^t$

$\frac{dy}{dt} = (4t+n)\cdot e^t + (2t^2+nt+n)\cdot e^t$

$= e^t \cdot \{2t^2+(4+n)\cdot t+2n\}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2t^2+(4+n)\cdot t+2n$

$= (2t+n)\cdot(t+2)$

n	t	nt
3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{9}{2}$
4	-2	-8
5	-2	-10
6	-2	-12

이때 $\frac{y}{x} = 2t^2+nt+n$ 이므로

$\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$

$= 2\{\frac{9}{4}+12\} - \frac{9}{2} - 8 - 10 - 12 + 18$

$= 12$

단답형

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+9x}{2x}$의 값을 구하시오. [3점]

6

23. 일차변환 $f:(x,y)\to(ax+by, 4x-5y)$와 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하는 회전변환 g가 $f\circ g=g\circ f$를 만족시킨다. 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]

20

수학 영역(B형)

24. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2=-2$, $a_5=7$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값을 구하시오. [3점]

250

25. 휴대 전화의 메인 보드 또는 액정 화면 고장으로 서비스센터에 접수된 200건에 대하여 접수 시기를 품질보증 기간 이내, 이후로 구분한 결과는 다음과 같다.

(단위: 건)

구분	메인 보드 고장	액정 화면 고장	합계
품질보증 기간 이내	90	50	140
품질보증 기간 이후	a	b	60

접수된 200건 중에서 임의로 선택한 1건이 액정 화면 고장 건일 때, 이 건의 접수 시기가 품질보증 기간 이내일 확률이 $\frac{2}{3}$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, 메인 보드와 액정 화면 둘 다 고장인 경우는 고려하지 않는다.) [3점]

10.

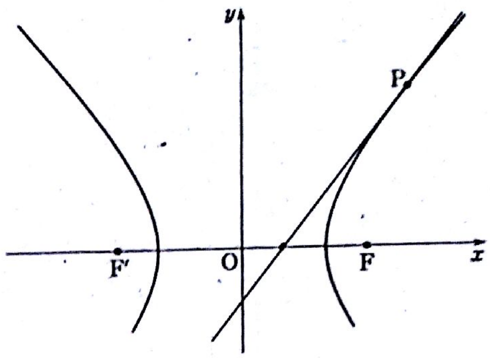
$a+b=60$

$\frac{2}{3}=\frac{50}{50+b}$

$\therefore$ $b=25$, $a=35$ 이므로

$a-b=10$

26. 그림과 같이 두 초점이 F(3, 0), F′(−3, 0)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P(4, k)에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 F′F를 2:1로 내분할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]



$a^2+b^2=9$

접선 $\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1$

$y=0$, $x=\frac{a^2}{4}$ $\therefore$ x절편 $Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right)$

$\frac{a^2}{4}+3 : 3-\frac{a^2}{4}=2:1$

$\therefore$ $a^2=4$, $b^2=5$

$\therefore$ $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $P(4, k)$ 이므로

$k^2=15$

27. 함수 $f(x)=\ln(\tan x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}$의 값을 구하시오. [4점]

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ 이므로 $g(0)=\frac{\pi}{4}$

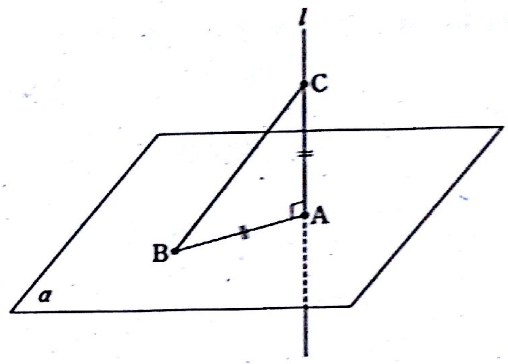
$\lim_{h\to 0} 4\times\frac{g(8h)-g(0)}{h} = 32\cdot g'(0)$

$f'(x)=\frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$ 이므로 $g'(0)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{2}$

따라서 준 식의 값은 16이다.

28. 좌표공간에서 직선 $l: x-1=\frac{y}{2}=1-z$와 평면 α가 점 A(1, 0, 1)에서 수직으로 만난다. 평면 α 위의 점 B$(-1, a, a)$와 직선 l 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 점 C에서 원점까지의 거리는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]



평면 α : $(x-1)+2\cdot y-1\cdot(z-1)=0$

$x+2y-z=0.$

$B(-1,a,a)$ 대입하면

$-1+2a-a=0$ $\therefore a=1$

$\overline{AB}=\sqrt{5}$ 이다.

점 $C(t+1, 2t, 1-t)$라 하면

$\overline{AC}^2=t^2+4t^2+t^2$

$=6t^2=5$ $\therefore t^2=\frac{5}{6}$

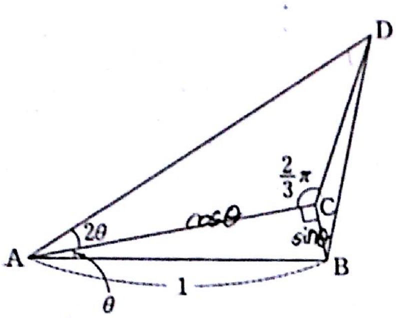
$d^2=(t+1)^2+4t^2+(1-t)^2$

$=6t^2+2=7.$

29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 빗변으로 하고 $\angle BAC=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D를

$$\angle ACD=\frac{2}{3}\pi, \qquad \angle CAD=2\theta$$

가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=p$이다. $300p^2$의 값을 구하시오. (단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.) [4점]



$\triangle ACD$ 에서 $\dfrac{\overline{CD}}{\sin 2\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$

$\therefore \overline{CD}=\dfrac{\cos\theta\cdot\sin2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$

$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\sin\theta\cdot\overline{CD}\cdot\sin\frac{5\pi}{6}$

$=\frac{1}{4}\cdot\sin\theta\cdot\dfrac{\cos\theta\cdot\sin2\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$

$\therefore \lim_{\theta\to+0}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\dfrac{\sin2\theta}{2\theta}\cdot\dfrac{2\cdot\cos\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)}$

$=\frac{1}{4}\cdot\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt3}=p$

$\therefore 300p^2=100$

30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g(e^x)=\begin{cases} f(x) & (0\le x<1)\\ g(e^{x-1})+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx=6e^2+4$이다. $\int_1^{e} f(\ln x)\,dx=ae+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]

$e^x=t$ 로 치환하면

$g(t)=\begin{cases} f(\ln t) & (0\le t<e)\\ g\left(\frac{t}{e}\right)+5 & (e\le x\le e^2)\end{cases}$

$\int_1^{e^2} g(x)dx=\int_1^{e} g(x)dx+\int_e^{e^2} g(x)dx$

$=\int_1^{e} f(\ln x)dx+\int_e^{e^2}\left\{g\left(\frac{x}{e}\right)+5\right\}dx \cdots ①$

한편, $\int_e^{e^2} g\left(\frac{x}{e}\right)dx=\int_1^{e} g(u)\cdot e\cdot du=e\cdot\int_1^{e} f(\ln u)du$

$\frac{x}{e}=u$ 치환

①식 : $6e^2+4=(1+e)\int_1^{e} f(\ln x)dx+5(e^2-e)$

$\therefore (1+e)\int_1^{e} f(\ln x)dx=e^2+5e+4$
$=(e+1)(e+4)$

$\therefore \int_1^{e} f(\ln x)\,dx=e+4$

$a^2+b^2=1+16=17$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.