[2013 수능대비 오답노트 01차]

주인공비 극한 : 최고차항 맞춰서 극한구하기. **로그그래프 지수그래프 : 결국은 점이다.** **행렬문자정리 : 두 개곱이 어쩌구E 나오면 바꿔쓸수 있다.** **삼각형넓이 : 1/2 낀낀 사인세타** **급수가 수렴 : 수열은 0으로간다**

[2012.05 대성]

9. 수열 $\left\{\dfrac{(2n^2+1)a_n}{n+2}\right\}$이 0이 아닌 값에 수렴할 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{2n}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$$a_n = k\frac{(n+2)}{(2n^2+1)} \qquad a_{2n} = k\frac{(\quad +2)}{(\quad +1)}$$

9. $b_n=\dfrac{(2n^2+1)a_n}{n+2}$이라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+1)a_n}{n+2}=\beta(\beta\neq 0)$라 두면

$a_n=\dfrac{(n+2)b_n}{2n^2+1}$에서 $a_{2n}=\dfrac{(2n+2)b_{2n}}{2(2n)^2+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n}=\beta(\beta\neq 0)$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{2n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)b_n}{2n^2+1}\times\dfrac{8n^2+1}{(2n+2)b_{2n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(8n^2+1)b_n}{2(n+1)(2n^2+1)b_{2n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)(8n^2+1)}{2(n+1)(2n^2+1)}\times\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{b_{2n}}$

$=2\times 1=2$

답 ④

12. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

을 만족시킨다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

12. $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$

에서 $a_{n+1}=a_n+4b_n$, $b_{n+1}=2b_n$

$b_{n+1}=2b_n$에서

$b_n=b_1\times 2^{n-1}=2\times 2^{n-1}=2^n$

$a_{n+1}=a_n+4b_n=a_n+4\times 2^n$에서

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\times 2^k=1+\frac{8(2^{n-1}-1)}{2-1}$$

$$=4\cdot 2^n-7$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{4\cdot 2^n-7}=\frac{1}{4}$$

답 ①

13. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = 20 + 10 \cdot (-1)^n$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}$ 의 값은? **[4점]**

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

13. 자연수 k에 대하여

$a_{2k-1} = 20 + 10 \cdot (-1) = 10$

$a_{2k} = 20 + 10 \cdot 1 = 30$

이므로

$n = 2m - 1$일 때 $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{2m-1} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_{2k} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}$$
$$= 40m - 30 = 20n - 10$$

$n = 2m$일 때 $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{2m} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_{2k} + \sum_{k=1}^{m} a_{2k-1}$$
$$= 40m = 20n$$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$$20n - 10 \le \sum_{k=1}^{n} a_k \le 20n$$

$$\therefore\ \frac{20n-10}{n} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \le \frac{20n}{n}$$

$\lim_{n \to \infty} \frac{20n-10}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{20n}{n} = 20$이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = 20$$

답 ④

15. 이차정사각행렬 A가 다음 두 조건을 만족시킨다.

> (가) $A^2-A-4E=O$
>
> (나) 연립방정식 $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$의 해는 $x=4$, $y=1$이다.

연립방정식 $(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha+\beta$의 값은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) **[4점]**

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

15. $A^2-A-4E=(A+E)(A-2E)-2E=O$ 이므로

$$(A+E)\left\{\frac{1}{2}(A-2E)\right\}=E$$

$$\therefore\ (A+E)^{-1}=\frac{1}{2}(A-2E)=\frac{1}{2}A-E$$

이때, $(A+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$에서

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(A+E)^{-1}\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{2}A-E\right)\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(나)에서 $A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$이므로

$$\left(\frac{1}{2}A-E\right)\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}A\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

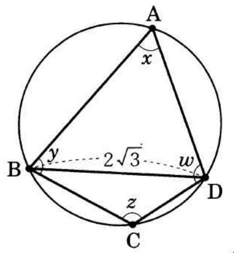
$$=-A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ \alpha+\beta=12+(-5)=7$$

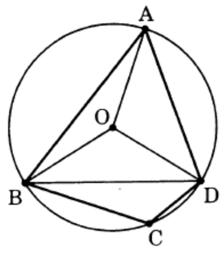
답 ③

19. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 원에 내접하고 $\overline{BD}=2\sqrt{3}$ 인 사각형 ABCD의 네 내각 ∠A, ∠B, ∠C, ∠D의 크기를 차례대로 x, y, z, w라 하자. 2^x, 2^y, 2^w, 2^z이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $(z+w)-(x+y)$의 값은? **[4점]**



① $\frac{\pi}{9}$ ② $\frac{2\pi}{9}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{4\pi}{9}$ ⑤ $\frac{5\pi}{9}$

19.



△ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin x}=2\times 2$$

$$\therefore \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore x=\frac{\pi}{3}$$

또한 $x+z=\pi$이므로 $z=\frac{2}{3}\pi$

2^x, 2^y, 2^w, 2^z가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 x, y, w, z는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 이때, 공차를 d라 하면

$$z=x+3d$$

$\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+3d$이므로 $d=\frac{\pi}{9}$

따라서

$$(z+w)-(x+y)=2x+5d-(2x+d)$$
$$=4d=\frac{4\pi}{9}$$

답 ④

20. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$, 가수를 $g(x)$라 하자. 자연수 k에 대하여 두 등식

$$f(x)=k,\ g(x)=g(f(10x))$$

를 모두 만족시키는 양수 x를 a_k라 하자. 예를 들어, $a_1=20$이다. 이때, $a_8\times a_9\times a_{10}$의 값은? **[4점]**

① 3.3×10^{27} ② 9.9×10^{27} ③ 1.1×10^{28}

④ 3.3×10^{28} ⑤ 9.9×10^{28}

20. $\log x=f(x)+g(x)$이다.

$f(x)=k$이면 $f(10x)=k+1$이므로

$g(x)=g(f(10x))$에서

$g(x)=g(k+1)$

i) $f(x)=8$이면 $g(x)=g(8+1)=\log 9$이므로

$\log a_8=8+\log 9$

ii) $f(x)=9$이면

$g(x)=g(9+1)=\log 10-1=0$이므로

$\log a_9=9+0=9$

iii) $f(x)=10$이면

$g(x)=g(10+1)=\log 11-1=\log 1.1$이므로

$\log a_{10}=10+\log 1.1$

따라서

$\log(a_8\times a_9\times a_{10})$

$=\log a_8+\log a_9+\log a_{10}$

$=(8+\log 9)+9+(10+\log 1.1)$

$=27+\log 9+\log 1.1=27+\log(9\times1.1)$

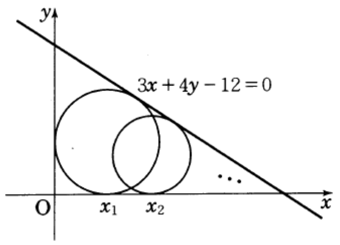
$=\log(10^{27}\times9.9)$

$\therefore\ a_8\times a_9\times a_{10}=9.9\times10^{27}$

답 ②

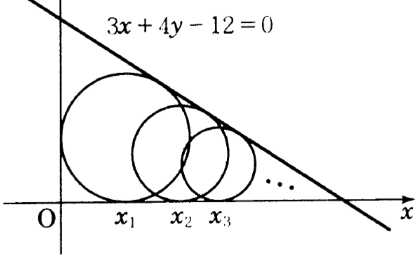
28. 수열 $\{x_n\}$과 원 C_n이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x_1=1$, $x_{n+1}=x_n+p^n$ (p는 $0<p<1$ 인 상수이다.)
(나) 원 C_n은 점 $(x_n,\ 0)$을 지나고 x축과 직선 $3x+4y-12=0$에 모두 접한다.



원 C_n의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} S_n=0$일 때, $100p$의 값을 구하시오. **[4점]**

28. **단답형**



직선 $3x+4y-12=0$과 x축의 교점의 x좌표는 4이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=0$이려면 $\lim_{n\to\infty} x_n=4$이어야 한다.

$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1} p^k$이므로

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1+\frac{p}{1-p}=4$$

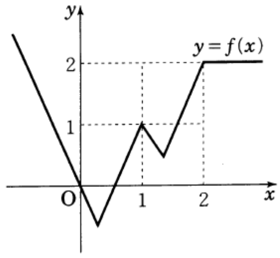
따라서 $p=\frac{3}{4}$이므로 $100p=100\times\frac{3}{4}=75$

답 75

29. 함수

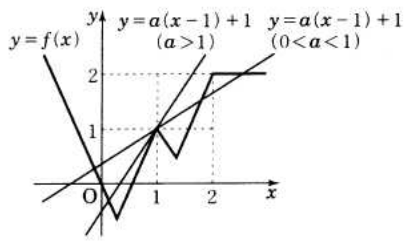
$$f(x)=\begin{cases} 2\left|x-\frac{1}{4}\right|-\frac{1}{2} & (x<1) \\ 2\left|x-\frac{5}{4}\right|+\frac{1}{2} & (1\le x\le 2) \\ 2 & (x>2) \end{cases}$$

의 그래프는 다음과 같다.

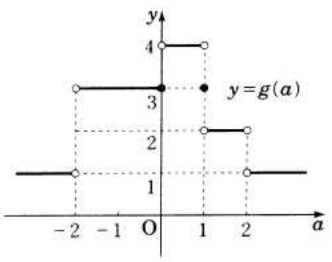


실수 a에 대하여 직선 $y=a(x-1)+1$ (단, $a\neq 2$, $a\neq -2$)과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 개수를 $g(a)$라 하자.
$\lim_{a\to 1-0} g(a)=A$, $\lim_{a\to 1+0} g(a)=B$라 할 때 $10A+B$의 값을 구하시오. **[4점]**

29. 단답형 직선 $y=a(x-1)+1$은 실수 a의 값에 관계없이 항상 점 (1, 1)을 지나고 a는 이 직선의 기울기이다.



함수 $g(a)$는 함수 $y=f(x)$와 직선 $y=a(x-1)+1$의 교점의 개수이므로 $y=g(a)$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore A=\lim_{a\to 1-0} g(a)=4$

$B=\lim_{a\to 1+0} g(a)=2$

$\therefore 10A+B=42$

답 42

[2012.05 중앙]

8. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)=2012$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_{2n}}$의 값은? [3점]

① 4　　② 2　　③ 1　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $\frac{1}{4}$

8. 이해력 - 수열의 극한　　[3점] 정답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)=0$이어야 한다.

이때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{2n^2}{n^2+1}\right)=0$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}=0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}-2=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

$2n=m$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a_{2n}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{a_{2n}}=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}\frac{m}{a_m}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

10. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 두 등식

$(A+B)^2=E$, $(A+B)(A-B)=O$

가 성립할 때, 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은? (단, O는 영행렬, E는 단위행렬이다.) [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$

③ 1 ④ 2

⑤ 4

10. 이해력 - 행렬과 그래프 [3점] **정답** ③

$(A+B)^2=E$이므로 $(A+B)^{-1}=A+B$이다.

$(A+B)(A-B)=O$에서

$(A+B)^{-1}(A+B)(A-B)=(A+B)^{-1}O$

$A-B=O$

$\therefore A=B$

$(A+B)^2=E$에서

$4A^2=E$

$A^2=\frac{1}{4}E$

$\therefore AB+BA=A^2+A^2=2A^2=\frac{1}{2}E$

따라서, 행렬 $AB+BA$의 모든 성분의 합은 1이다.

14. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A^2+B=E,\ A^2B=O$$

가 성립할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, O는 영행렬이고, E는 단위행렬이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 행렬 B^2의 역행렬은 존재하지 않는다.

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $A^4+B^4=E$

① ㄱ ② ㄴ

③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 추론 능력(추측) - 행렬과 그래프 [4점] **정답** ④

ㄱ. (거짓) 【반례】 $A=O$, $B=E$이면 주어진 두 등식이 성립하고 $B^2=E$이므로 B^2의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. (참) $B=-A^2+E$이므로

$AB=A(-A^2+E)=-A^3+A$

$BA=(-A^2+E)A=-A^3+A$

$\therefore AB=BA$

ㄷ. (참) $A^2+B=E$에서

$(A^2+B)B=EB$, $A^2B+B^2=B$

$\therefore B^2=B$ ($\because A^2B=O$)

또, $A^2+B=E$에서

$A^2(A^2+B)=A^2E$, $A^4+A^2B=A^2$

$\therefore A^4=A^2$ ($\because A^2B=O$)

$\therefore A^4+B^4=A^2+B^2=A^2+B=E$

16. 두 실수 x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}$을 만족시키는 x, y가 존재하도록 하는 상수 k의 값은? [4점]

① $-\frac{7}{2}$　② -1　③ $\frac{3}{2}$　④ 4　⑤ $\frac{13}{2}$

16. 수학 내적 문제 해결 능력 - 지수함수와 로그함수

[4점] **정답** ②

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1-k & -3 \\ -2 & 2-k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^x \\ 3^y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이때, $2^x>0$, $3^y>0$이므로 주어진 등식을 만족하는 실수 x, y가 존재하려면 행렬 $\begin{pmatrix} 1-k & -3 \\ -2 & 2-k \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$(1-k)(2-k)-6=0$, $k^2-3k-4=0$

$(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

(i) $k=-1$일 때

$2\cdot2^x-3\cdot3^y=0$

즉, $2^{x+1}=3^{y+1}$을 만족시키는 실수 x, y가 존재한다.

(ii) $k=4$일 때

$-3\cdot2^x-3\cdot3^y=0$

즉, $2^x=-3^y$을 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

$\therefore k=-1$

17. 다음과 같이 규칙적으로 나열된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$a_1=\sqrt{2},\ a_2=\sqrt{2\sqrt{2}},\ a_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ a_4=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}},\ \cdots$$

이때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
ㄴ. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<2$이다.
ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\log_2 a_n=1$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

17. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열의 극한

[4점] 정답 ⑤

ㄱ. (거짓) $a_1=2^{\frac{1}{2}}$, $a_2=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$a_3=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=2^{\frac{7}{8}}$

이때, ${a_2}^2=2^{\frac{3}{2}}$, $a_1a_3=2^{\frac{1}{2}+\frac{7}{8}}=2^{\frac{11}{8}}$이므로

${a_2}^2\neq a_1a_3$

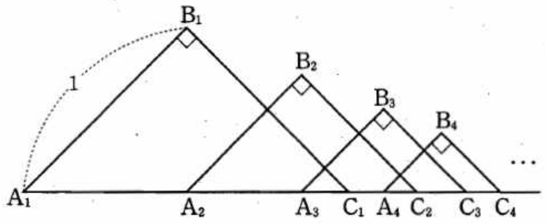
따라서, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이 아니다.

ㄴ. (참) $a_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n<2$이다.

ㄷ. (참) $\log_2 a_n=1-\frac{1}{2^n}$이므로

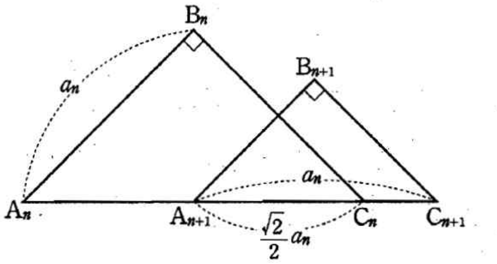
$\lim_{n\to\infty}\log_2 a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$

18. $\overline{A_1B_1}=1$이고 $\angle B_1=90°$인 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$이 있다. 그림과 같이 선분 A_1C_1의 중점을 A_2라 하고, $\overline{A_2B_2}=\overline{A_1A_2}$, $\angle B_2=90°$인 직각이등변삼각형 $A_2B_2C_2$를 그린다. 이와 같이 선분 A_nC_n의 중점을 A_{n+1}이라 하고, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\overline{A_nA_{n+1}}$, $\angle B_{n+1}=90°$인 직각이등변삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}(n=1, 2, 3, \cdots)$을 그린다. 이때, $\sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_nC_{n+1}}$의 값은? (단, 삼각형은 오른쪽 방향으로 그린다. 또한, $n=1, 2, 3, \cdots$일 때, 점 C_{n+1}은 직선 A_nA_{n+1} 위에 있고, 선분 A_nB_n과 선분 $A_{n+1}B_{n+1}$은 평행하다.) [4점]



① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\frac{3}{2}$　　④ 2　　⑤ $1+\sqrt{2}$

18. 추론 능력(추측) - 수열의 극한　[4점] **정답** ①



그림과 같이 $\overline{A_nB_n}=a_n$이라 하면

$a_1=1$, $a_{n+1}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$

이므로 $a_n=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$이다.

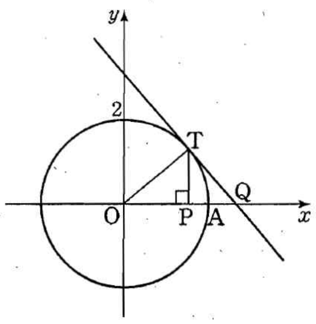
또, $\overline{A_{n+1}C_n}=\overline{A_nA_{n+1}}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$이고,

$\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{2}a_{n+1}=a_n$이므로

$\overline{C_nC_{n+1}}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)a_n=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{C_nC_{n+1}}=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$

19. 그림과 같이 원 $x^2+y^2=4$의 제1사분면 위의 점 $\mathrm{T}(t,\ s)$에서 x축에 내린 수선의 발을 P라 하고, 점 T에서 이 원에 접하는 직선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$에 대하여 $\lim_{t \to 2-0} \frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{2}$
② $\frac{\sqrt{2}}{2}$
③ 1
④ $\sqrt{2}$
⑤ 2

19. 수학 내적 문제 해결 능력 - 함수의 극한과 연속

[4점] **정답** ③

$\overline{\mathrm{AP}}=2-t$

$\triangle\mathrm{POT} \backsim \triangle\mathrm{TOQ}$이므로

$\overline{\mathrm{OT}} : \overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OP}} : \overline{\mathrm{OT}}$

$2 : \overline{\mathrm{OQ}}=t : 2$

$\therefore \overline{\mathrm{OQ}}=\frac{4}{t}$

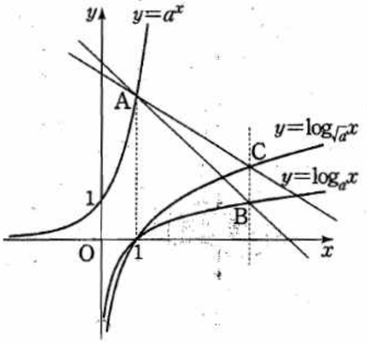
$\therefore \overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{OA}}=\frac{4}{t}-2=\frac{4-2t}{t}$

$$\therefore \lim_{t \to 2-0} \frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}=\lim_{t \to 2-0} \frac{4-2t}{t(2-t)}$$

$$=\lim_{t \to 2-0} \frac{2}{t}$$

$$=\frac{2}{2}=1$$

20. 그림과 같이 곡선 $y=a^x$과 직선 $x=1$이 만나는 점을 A라 하고, 점 A를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 B라 하자. 또, 점 B를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_{\sqrt{a}} x$와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\text{AB}}=3\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, $a>1$) [4점]



① 1　　② $\frac{3}{2}$

③ 2　　④ $\frac{5}{2}$

⑤ 3

20. 이해력 - 지수함수와 로그함수 [4점] **정답** ②

두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때, 직선 AB도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서, 점 A의 좌표가 $(1, a)$이므로 점 B의 좌표는 $(a, 1)$이다.

이때, $\overline{\text{AB}}=(a-1)\sqrt{2}$이고, $\overline{\text{AB}}=3\sqrt{2}$이므로 $a=4$이다.

이때, $y=\log_{\sqrt{a}} x=2\log_a x=2\log_4 x$이므로 $x=4$일 때 $y=2$이다.

따라서, 점 C의 좌표는 $(4, 2)$이다.

그러므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4-1)\times(2-1)=\frac{3}{2}$

21. 두 자연수 m, n이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $\log m$의 지표는 0이고, 가수는 $\log 6$보다 크다. (나) $\log n$의 지표는 1이고, 가수는 $\log 2$보다 작다.

이때, 집합 $\{x \mid x$는 $\log mn$의 가수$\}$의 원소의 개수는? [4점]

① 26　② 27　③ 28　④ 29　⑤ 30

21. 이해력 - 지수함수와 로그함수 [4점] **정답** ②

(가)에서 자연수 m은 7, 8, 9의 3개이고, (나)에서 자연수 n은 10, 11, 12, $\cdots$, 19의 10개이다.
따라서, 순서쌍 (m, n)의 개수는 30이다.
이때, $7\times10=70\le mn\le 9\times19=171$이고,
$7\times16=8\times14$, $7\times18=9\times14$, $8\times18=9\times16$
이므로 mn의 값 중에서 다른 것은 27개이다.
이때, 이 27개의 자연수의 상용로그의 가수는 모두 다르다. 따라서, 구하는 집합의 원소의 개수는 27이다.

26. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A^{3n}=A^{n+4}$을 만족시키는 50 이하의 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

26. 수학 내적 문제 해결 능력 - 행렬과 그래프

[4점] **정답** 442

$$A^2=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

$\therefore A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

따라서, 두 자연수 n, m에 대하여

$A^n=A^m$이면 $n-m=6k$ (k는 정수)

$A^{3n}=A^{n+4}$에서

$3n-(n+4)=6k$ (k는 정수)

$2n-4=6k$ (k는 정수)

따라서, $n=3k+2$이어야 하므로 50 이하의 자연수 n은

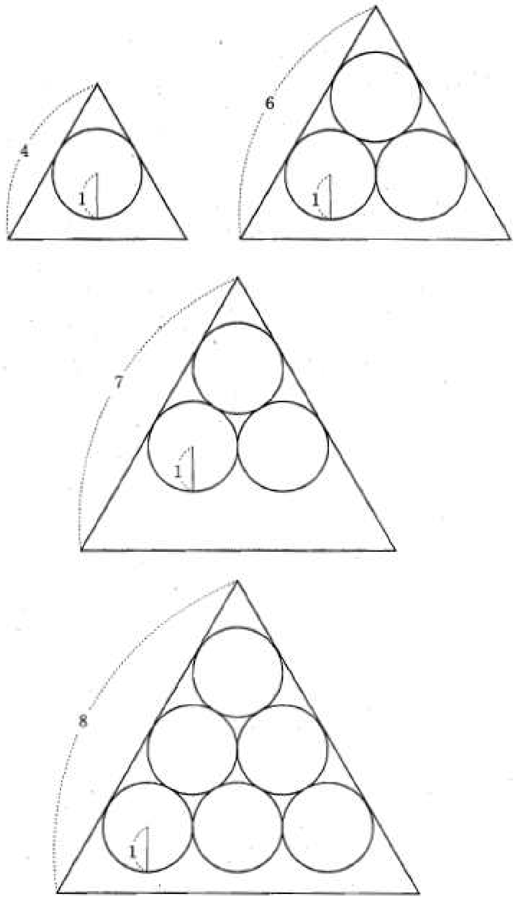
2, 5, 8, $\cdots$, 47, 50

의 17개이다.

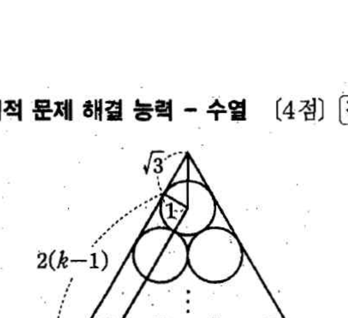
따라서, 구하는 모든 자연수 n의 합은

$$2+5+\cdots+50=\frac{17}{2}(2+50)=442$$

30. 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 n인 정삼각형이 있다. 이 정삼각형의 내부에 반지름의 길이가 1인 원을 위에서부터 1개, 2개, 3개, 4개, …씩 이웃한 원끼리 모두 접하면서 겹치지 않게 넣을 때, 넣을 수 있는 원의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 그림과 같이 $a_4=1$, $a_6=3$, $a_7=3$, $a_8=6$이다. 이때, a_{50}의 값을 구하시오. [4점]



30. 수학 내적 문제 해결 능력 - 수열 [4점] $\boxed{\text{정답}}$ 300



그림에서 반지름의 길이가 1인 원을 최대

$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$개 넣을 수 있는 정삼

각형의 한 변의 길이의 최솟값은

$2(k-1)+2\sqrt{3}$

이때, $3<2\sqrt{3}<4$이므로 $k=24$일 때

$2(k-1)+2\sqrt{3}<50<2k+2\sqrt{3}$

$\therefore a_{50}=1+2+3+\cdots+24=\dfrac{24\times25}{2}=300$

[2012.05 예비A]

6. 로그부등식 $\log_{\sqrt{2}}|x|<5$를 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

6.
출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?

$\log_{\sqrt{2}}|x|<5$

$\log_{\sqrt{2}}|x|<\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^5$

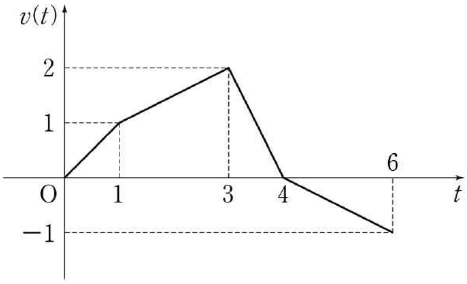
$\therefore 0<|x|<(\sqrt{2})^5 \cdots$ ㉠

$(\sqrt{2})^5=4\sqrt{2}$, $5<4\sqrt{2}<6$

이므로
부등식 ㉠을 만족시키는 정수 x는
-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5
의 10개이다.

<답> ③

10. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0 \le t \le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.
점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=6$까지 움직인 거리는? [3점]



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

10.
출제의도 : 속도를 나타내는 함수를 정적분하여 움직인 거리를 구할 수 있는가?

$$\int_0^6 |v(t)|dt = \int_0^4 v(t)dt + \int_4^6 \{-v(t)\}dt$$

$$= \frac{1}{2}\times1\times1 + \frac{1}{2}\times2\times(1+2) + \frac{1}{2}\times1\times2 + \frac{1}{2}\times2\times1$$

$$= \frac{1}{2}+3+1+1$$

$$= \frac{11}{2}$$

<답> ⑤

11. 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$를 만족시키고,

$$f(x)=\begin{cases} ax+1 & (-1\le x<0) \\ 3x^2+2ax+b & (0\le x<1) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

11.
출제의도 : 연속함수의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-1$, $x=0$에서도 연속이다.

i) $x=0$에서 $f(x)$가 연속이므로

$f(0)=\lim\limits_{x\to -0}f(x)$. 즉,

$3\times 0^2+2a\times 0+b=\lim\limits_{x\to -0}(ax+1)$ $\therefore$ $b=1$

ii) $x=-1$에서 $f(x)$가 연속이고 $f(x+2)=f(x)$이므로

$$\lim_{x\to -1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}(3x^2+2ax+b)$$

이다.

그러므로 $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-0}(3x^2+2ax+b)$

$-a+1=3+2a+b$ $\therefore$ $a=-1$

따라서 $a+b=0$

<답> ③

14. 어느 고등학교 학생들의 일주일 독서 시간은 평균 7시간, 표준편차 2시간인 정규분포를 따른다고 한다. 이 고등학교 학생 중 임의추출한 36명의 일주일 독서 시간의 평균이 6시간 40분 이상 7시간 30분 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.8185　② 0.7745　③ 0.6687
④ 0.6247　⑤ 0.5328

14.
출제의도 : 모집단의 분포를 이용하여 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

어느 고등학교 학생들의 일주일 독서 시간을 확률변수 X라고 할 때 X는 평균이 7, 표준편차가 2인 정규분포를 따른다. 이 고등학교 학생 중 36명을 임의추출하여 만든 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(7, \frac{2^2}{36}\right)$을 따른다.

따라서

$$\mathrm{P}\left(6+\frac{40}{60} \le \overline{X} \le 7+\frac{30}{60}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\frac{6+\frac{40}{60}-7}{\frac{1}{3}} \le \frac{\overline{X}-7}{\frac{1}{3}} \le \frac{7+\frac{30}{60}-7}{\frac{1}{3}}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(-1 \le Z \le \frac{3}{2}\right)$$

$$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 1) + \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$$

$$= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745$$

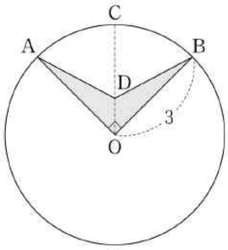
<답> ②

16. 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 그림과 같이 $\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{2}$인 원 위의 두 점을 A, B라 하고, 호 AC와 호 BC의 길이가 같은 점을 C라 하자. 선분 OC를 1:2로 내분하는 점을 D라 하고, 네 선분 OA, AD, DB, BO로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

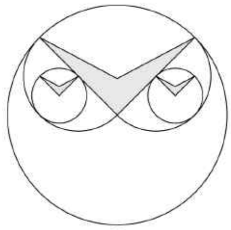
그림 R_1에서 두 반지름 OA, OB를 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 두 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

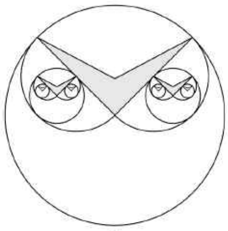
그림 R_2에서 그린 두 내접원의 4개의 반지름을 각각 지름으로 하는 4개의 반원을 그리고, 4개의 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 4개의 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1


R_2


R_3

......

① $\frac{11\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{13\sqrt{2}}{7}$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{7}$

첫째항은 점 D가 선분 OC를 1:2로 내분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

각 AOB를 이등분한 각이 COB이므로 $\angle \mathrm{COB} = \frac{\pi}{4}$

그러므로 첫째항은

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}} = \dfrac{12\sqrt{2}}{7}$

<답> ②

17. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 = A - E, \quad (AB)^2 = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>
ㄱ. A와 B는 모두 역행렬을 가진다. ㄴ. $BAB = -A^2$ ㄷ. $B^2AB^2 = A^2 + B^2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17.
출제의도 : 역행렬과 행렬의 곱을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

ㄱ. (참) $(AB)^2 = E$이므로 $ABAB = E$이다. 두 행렬 M, N에 대하여 $MN = NM = E$이면 $N^{-1} = M$이고 $M^{-1} = N$이므로
$A^{-1} = BAB$이고 $B^{-1} = ABA$이다.

ㄴ. (참) $A^2 = A - E$에서
$E = A - A^2 = A(E - A)$이다.
즉, $A^{-1} = E - A$
그러므로 $BAB = E - A = -(A - E) = -A^2$

ㄷ. (참) $B^2AB^2 = B(BAB)B = B(E-A)B$
$= B^2 - BAB = B^2 - (-A^2)$
$= A^2 + B^2$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

<답> ⑤

18. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 0$이고

$$a_{n+1} = (-1)^n a_n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, a_{50}의 값은? [4점]

① -50 ② -25 ③ 0 ④ 25 ⑤ 50

18.

출제의도 : 수열의 규칙성을 찾을 수 있는가?

$a_2 = (-1)^1 a_1 + \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$a_3 = (-1)^2 a_2 + \sin\frac{2\pi}{2} = 1$

$a_4 = (-1)^3 a_3 + \sin\frac{3\pi}{2} = -2$

$a_5 = (-1)^4 a_4 + \sin\frac{4\pi}{2} = -2$

$a_6 = (-1)^5 a_5 + \sin\frac{5\pi}{2} = 3$

$a_7 = (-1)^6 a_6 + \sin\frac{6\pi}{2} = 3$

$a_8 = (-1)^7 a_7 + \sin\frac{7\pi}{2} = -4$

항과 함께 수열을 나열하면

a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	$\cdots$
1	1	-2	-2	3	3	-4	$\cdots$

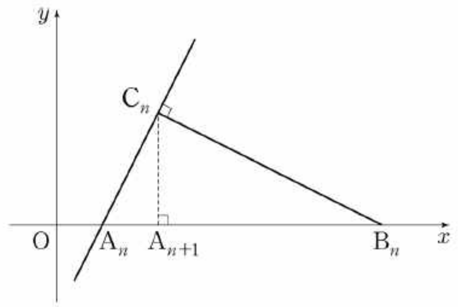
따라서 $a_{50} = a_{2\times 25} = 25$

<답> ④

19. 좌표평면에서 점 A_1의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 점 A_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 A_n을 x축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 점을 B_n이라 한다. (나) 점 B_n에서 기울기가 2이고 점 A_n을 지나는 직선에 내린 수선의 발을 C_n이라 한다. (다) 점 C_n에서 x축에 내린 수선의 발을 A_{n+1}이라 한다.

점 A_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^2}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{1}{5}$ ③ $\dfrac{3}{10}$ ④ $\dfrac{2}{5}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x = a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{5}n$

그러므로 $a_n = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{5}k$

$= 1 + \dfrac{1}{5}\times\dfrac{(n-1)n}{2}$

$= \dfrac{n^2-n+10}{10}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n+10}{10n^2} = \dfrac{1}{10}$

<답> ①

20. 정의역이 $\{x \mid 1 \le x < 100\}$이고 함숫값이 $\log x$의 가수인 함수를 $f(x)$라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2-\frac{x}{n}$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 자연수 n의 개수는? [4점]

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

두 그래프가 만나는 점의 개수가 2이므로

직선 $y=2-\frac{x}{n}$이 지나는 점을 이용하여 n의 값을 다음과 같이 구할 수 있다.

i) 점 (10, 0)을 지나는 경우

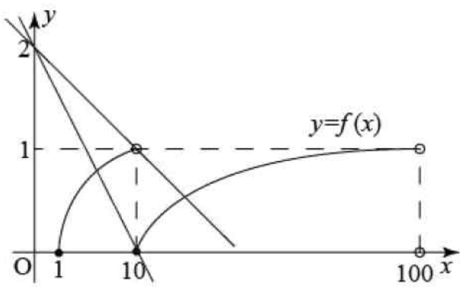
$0=2-\frac{10}{n}$에서 $n=5$

ii) 점 (10, 1)을 지나는 경우

$1=2-\frac{10}{n}$에서 $n=10$

i), ii)에 의해서 $5 \le n < 10$

따라서 자연수 n의 개수는 5



<답> ⑤

24. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이

$$S_n = 2^{n-1} + 5$$

일 때, $a_1 + a_5$의 값을 구하시오. [3점]

24.

출제의도: 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 항을 구할 수 있는가?

$a_1 = S_1 = 2^0 + 5 = 6$

$a_5 = S_5 - S_4 = (2^4 + 5) - (2^3 + 5) = 8$

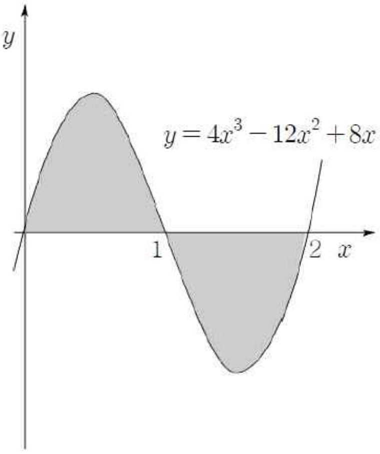
$\therefore \quad a_1 + a_5 = 6 + 8 = 14$

<답> 14

26. 함수 $y=4x^3-12x^2+8x$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

26.
출제의도 : 정적분을 활용하여 곡선과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$y=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$이므로
함수 $y=4x^3-12x^2+8x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 |4x^3-12x^2+8x|dx$$
$$=\int_0^1 (4x^3-12x^2+8x)dx+\int_1^2 (-4x^3+12x^2-8x)dx$$
$$=\left[\ x^4-4x^3+4x^2\right]_0^1+\left[\ -x^4+4x^3-4x^2\right]_1^2$$
$$=1+1$$
$$=2$$

<답> 2

27. $(a+b+c)^4(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하시오. [4점]

27.
출제의도 : 중복조합을 이용하여 다항식의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구할 수 있는가?

$(a+b+c)^4$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 세 문자 a, b, c에서 중복을 허용하여 네 문자를 선택하는 방법의 수와 같으므로 이 경우의 서로 다른 항의 개수는

${}_{3+4-1}C_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} = 15$(가지)

$(x+y)^3$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 서로 다른 두 문자 x, y에서 중복을 허용하여 세 문자를 선택하는 방법의 수와 같으므로 이 경우의 서로 다른 항의 개수는

${}_{2+3-1}C_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$(가지)

따라서 주어진 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 $15\times4=60$(가지)

<답> 60

28. 통신이론에서 신호의 주파수 대역폭이 B(Hz)이고 신호잡음전력비가 x일 때, 전송할 수 있는 신호의 최대 전송 속도 C(bps)는 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$C = B \times \log_2(1+x)$$

신호의 주파수 대역폭이 일정할 때, 신호잡음전력비를 a에서 $33a$로 높였더니 신호의 최대 전송 속도가 2배가 되었다. 양수 a의 값을 구하시오. (단, 신호잡음전력비는 잡음전력에 대한 신호전력의 비이다.) [4점]

28.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

신호잡음전력비가 a일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_a, 신호잡음전력비가 $33a$일 때 신호의 최대 전송 속도를 C_{33a}라 하자.

$C_a = B \times \log_2(1+a)$

$C_{33a} = B \times \log_2(1+33a)$

이때 $C_{33a} = 2C_a$이므로

$B \times \log_2(1+33a) = 2B \times \log_2(1+a)$

$1+33a = (1+a)^2$

$a^2 - 31a = 0$

$\therefore \quad a = 31 \quad (\because \; a > 0)$

<답>31

29. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 규칙에 따라 점수를 얻는 시행을 한다.

(가) 한 번 던져 나온 눈의 수가 5 이상이면 나온 눈의 수를 점수로 한다. (나) 한 번 던져 나온 눈의 수가 5보다 작으면 한 번 더 던져 나온 눈의 수를 점수로 한다.

시행의 결과로 얻은 점수가 5점 이상일 때, 주사위를 한 번만 던졌을 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29.

출제의도 : 조건부확률을 구할 수 있는가?

주사위를 던져 얻은 점수가 5점 이상인 사건을 A, 주사위를 한 번만 던져 얻은 점수가 5점 이상인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{9}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

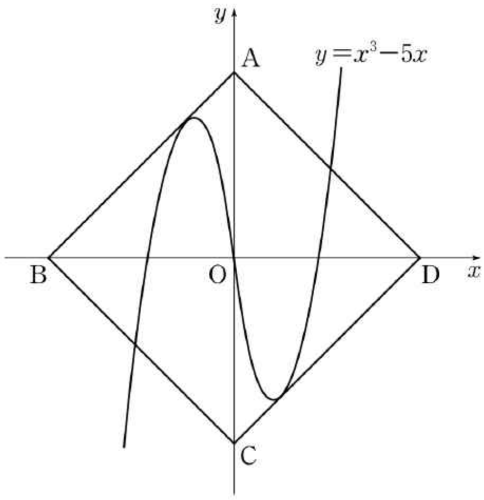
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{5}$$

$\therefore p=5,\ q=3$

$\therefore p^2+q^2=25+9=34$

<답>34

30. 그림과 같이 정사각형 ABCD의 두 꼭짓점 A, C는 y축 위에 있고, 두 꼭짓점 B, D는 x축 위에 있다. 변 AB와 변 CD가 각각 삼차함수 $y=x^3-5x$의 그래프에 접할 때, 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구하시오. [4점]



30
출제의도 : 미분법과 접선의 방정식을 활용할 수 있는가?

직선 AB와 삼차함수 $y=x^3-5x$가 접하는 점의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$이라 하면 직선 AB의 기울기가 1이므로 $y'_{x=x_1}=1$이다.

$y'=3x^2-5$이므로

$y'_{x=x_1}=3x_1^2-5=1$

$\therefore x_1=-\sqrt{2}\,(\because x_1<0)$

$y_1=-2\sqrt{2}+5\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

이때, 직선 AB의 방정식은

$y-3\sqrt{2}=x-(-\sqrt{2})$

$\therefore y=x+4\sqrt{2}$

두 점 A, B의 좌표가

$A(0,\ 4\sqrt{2})$, $B(-4\sqrt{2},\ 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=8$

따라서 구하는 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는 $4\overline{AB}=4\times8=32$

<답> 32

[오답노트 01차 ~]

2012.05 대성	9 12 13 15 19
	20 28 29
2012.05 중앙	8 10 14 16 17
	18 19 20 21 26 30
2012.05 예비A	6 10 11 14 16
	17 18 19 20 24
	26 27 28 29 30

[2013 수능대비 오답노트 02차]

내접원 : 어디로 선을 그을까? 반지름뭔가 길이비 넓이비 뭔가
식세우기 : 근을 알고 있어서 세우는 것인가, 계수를 세우는 것일까
함수의 연속 : h(x)=f(x)g(x) 하나가 삐꾸인데 함수 연속 만드려면 강한0만들기
돈문제 : 이익이 최대가 되는? 도함수활용
[ ] 극한 : 이차함수에 사용할 때 주의할 것

[2012.06 평가원]

7. 밀폐된 용기 속의 액체에서 증발과 응축이 계속하여 같은 속도로 일어나는 동적 평형 상태의 증기압을 포화 증기압이라 한다. 밀폐된 용기 속에 있는 어떤 액체의 경우 포화 증기압 P(mmHg)와 용기 속의 온도 t(℃) 사이에 다음과 같은 관계식이 성립한다고 한다.

$$\log \mathrm{P} = 8.11 - \frac{1750}{t+235} \quad (0 < t < 60)$$

용기 속의 온도가 15℃일 때의 포화 증기압을 P_1, 45℃일 때의 포화 증기압을 P_2라 할 때, $\frac{\mathrm{P}_2}{\mathrm{P}_1}$의 값은? [3점]

① $10^{\frac{1}{4}}$ ② $10^{\frac{1}{2}}$ ③ $10^{\frac{3}{4}}$

④ 10 ⑤ $10^{\frac{5}{4}}$

$$\log P_1 = 8.11 - \frac{1750}{15+235} = 8.11 - \frac{1750}{250}$$

$$\log P_2 = 8.11 - \frac{1750}{45+235} = 8.11 - \frac{1750}{280}$$

$$\therefore \log \frac{P_2}{P_1} = \log P_2 - \log P_1$$

$$= \left(8.11 - \frac{1750}{280}\right) - \left(8.11 - \frac{1750}{250}\right)$$

$$= \frac{1750}{250} - \frac{1750}{280}$$

$$= 175\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right)$$

$$= 175 \times \frac{3}{25 \times 28}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{3}{4}}$$

<답> ③

8. 첫째항이 1이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2$$

일 때, $\frac{b_6}{b_3}$의 값은? [3점]

① 56　　② 58　　③ 60　　④ 62　　⑤ 64

일반항 $a_n = 2^{n-1}$이므로

$b_n = (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (2^n)^2 - (2^{n-1})^2$

$= 2^{2n} - 2^{2n-2}$

$\therefore \frac{b_6}{b_3} = \frac{2^{12} - 2^{10}}{2^6 - 2^4} = \frac{2^6(2^6 - 2^4)}{2^6 - 2^4} = 2^6 = 64$

<답> ⑤

10. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t일 때의 위치는 각각 $f(t)=2t^2-2t$, $g(t)=t^2-8t$이다. 두 점 P와 Q가 서로 반대방향으로 움직이는 시각 t의 범위는? [3점]

① $\frac{1}{2}<t<4$ ② $1<t<5$ ③ $2<t<5$

④ $\frac{3}{2}<t<6$ ⑤ $2<t<8$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도는 각각
$f'(t)=4t-2$, $g'(t)=2t-8$
이다.
이때, 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t)<0$이어야 하므로
$(4t-2)(2t-8)=4(2t-1)(t-4)<0$
$\therefore \frac{1}{2}<t<4$

<답> ①

11. 첫째항이 2이고, 각 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}} = \frac{1}{3}$일 때, S_{11}의 값은? [3점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$a_1 = S_1 = 2$, $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2}\right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}}\right)$$

$$= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}}$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_{11}}$$

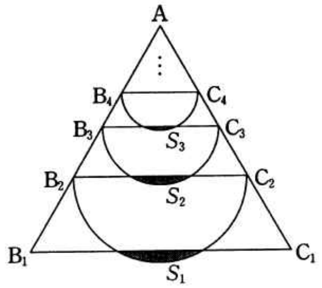
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$\therefore\ S_{11} = 6$

<답> ①

12. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 AB_1C_1이 있다. 그림과 같이 선분 AB_1과 선분 AC_1을 2:1로 내분하는 점을 각각 B_2, C_2라 하고, 선분 B_2C_2를 지름으로 하는 원의 호 B_2C_2와 선분 B_1C_1로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1이라 하자.
정삼각형 AB_2C_2에서 선분 AB_2와 선분 AC_2를 2:1로 내분하는 점을 각각 B_3, C_3이라 하고, 선분 B_3C_3을 지름으로 하는 원의 호 B_3C_3과 선분 B_2C_2로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [3점]



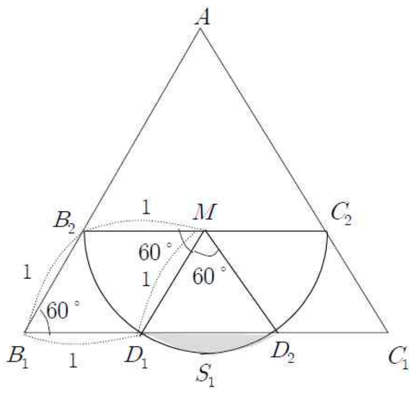
① $\frac{3\pi-5\sqrt{3}}{10}$　② $\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$　③ $\frac{4\pi-5\sqrt{3}}{10}$
④ $\frac{8\pi-9\sqrt{3}}{20}$　⑤ $\frac{10\pi-9\sqrt{3}}{20}$

삼각형 AB_nC_n과 삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는 3:2 이므로 넓이의 비는 9:4 이다.
따라서, 각 단계에서 얻은 부분의 넓이는 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열을 이룬다.
또한,

$\overline{B_2C_2}=3\times\frac{2}{3}=2$

이므로 그림과 같이 선분 B_2C_2의 중점을 M, 선분 B_1C_1과 호 B_2C_2가 만나는 점을 D_1, D_2라 하면 사각형 $B_1B_2MD_1$은 한 변의 길이가 1인 평행사변형이므로 삼각형 MD_1D_2는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

$\therefore\ S_1=\pi\times\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$



$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{36-16}=\frac{6\pi-9\sqrt{3}}{20}$$

<답> ②

14. 집합 S가

$$S=\{M \mid M\text{은 이차정사각행렬이고 } M^2=M\}$$

일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$

ㄴ. $A \in S$이고 A의 역행렬이 존재하면 $A=E$이다.

ㄷ. $A+E \in S$이면 $A^4 \in S$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S$(참)

ㄴ. $A \in S$ 이므로 $A^2=A$

A^{-1}이 존재하므로

$A^2=A$의 양변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$A^2A^{-1}=AA^{-1}$　$\therefore A=E$(참)

ㄷ. $A+E \in S$ 이므로 $(A+E)^2=A+E$

$A^2+2A+E=A+E$

$\therefore A^2=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-A)^2=A^2=-A$

$(A^4)^2=(-A)^2=A^2=-A$

이므로 $(A^4)^2=A^4$　$\therefore A^4 \in S$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

15. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고, $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$라 할 때,

$$a_{n+1}=\frac{S_n}{a_n}\quad(n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 S_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식으로부터 $a_2=\frac{S_1}{a_1}=1$이다.
>
> $n\ge 3$일 때,
>
> $$a_n=\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{S_{n-2}+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{a_{n-2}a_{n-1}+a_{n-1}}{a_{n-1}}$$
>
> 이므로
>
> $a_n=a_{n-2}+1$
>
> 이다. 따라서 일반항 a_n을 구하면, 자연수 k에 대하여
>
> $n=2k-1$일 때, $a_{2k-1}=k+1$
>
> $n=2k$일 때, $a_{2k}=\boxed{\text{(가)}}$
>
> 이다. 한편, $S_n=a_n\,a_{n+1}$이므로
>
> $$S_n=\begin{cases}(k+1)\times\boxed{\text{(가)}} & (n=2k-1)\\ \boxed{\text{(나)}} & (n=2k)\end{cases}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(6)+g(7)$의 값은? [4점]

① 65 ② 67 ③ 69 ④ 71 ⑤ 73

$a_n=a_{n-2}+1$에서

(i) $n=2k-1$일 때,

$a_{2k-1}=a_{2k-3}+1(k\ge 2)$

수열 $\{a_{2k-1}\}$은 첫째항이 $a_1=2$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k-1}=2+(k-1)\cdot 1=k+1(k\ge 1)$

(ii) $n=2k$일 때,

$a_{2k}=a_{2k-2}+1(k\ge 2)$

수열 $\{a_{2k}\}$는 첫째항이 $a_2=1$이고 공차가 1인 등차수열이므로

$a_{2k}=1+(k-1)\cdot 1=\boxed{k}(k\ge 1)$

이다. $S_n=a_na_{n+1}$이므로

$$S_n=\begin{cases}a_{2k-1}a_{2k}=(k+1)\times\boxed{k} & (n=2k-1)\\ a_{2k}a_{2k+1}=\boxed{k(k+2)} & (n=2k)\end{cases}$$

따라서 $f(k)=k,\ g(k)=k(k+2)$

$\therefore f(6)+g(7)=6+63=69$

<답> ③

16. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$의 값은? [4점]

① 255 ② 265 ③ 275 ④ 285 ⑤ 295

이차방정식 $x^2-2x-1=0$에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(k-\alpha)(k-\beta)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\{k^2-(\alpha+\beta)k+\alpha\beta\}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2-(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{10}k+\alpha\beta\sum_{k=1}^{10}1$$

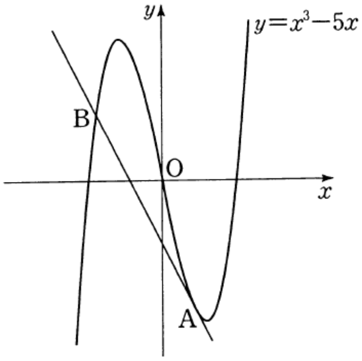
$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}-2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+(-1)\cdot 10$$

$$=385-110-10$$

$$=265$$

<답> ②

17. 곡선 $y=x^3-5x$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선이 점 A가 아닌 점 B에서 곡선과 만난다. 선분 AB의 길이는? [4점]



① $\sqrt{30}$ ② $\sqrt{35}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

$f(x)=x^3-5x$ 라 하면

$f'(x)=3x^2-5$

이므로 점 $\mathrm{A}(1,\ -4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-5=-2$

따라서 접선의 방정식은

$y-(-4)=-2(x-1)$

$\therefore\ y=-2x-2$

이 때, 접선과 곡선 $y=f(x)$가 만나는 점의 x좌표는

$x^3-5x=-2x-2$

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)^2(x+2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=-2$

따라서 $\mathrm{B}(-2,\ 2)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(-2-1)^2+(2+4)^2}$

$=\sqrt{9+36}$

$=3\sqrt{5}$

<답> ④

18. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{6}$　　② $\frac{1}{4}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{5}{12}$　　⑤ $\frac{1}{2}$

$(-3)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수가 a_n이므로 방정식 $x^n=(-3)^{n-1}$에서

(i) $n=2k+1$(k는 자연수)인 경우

$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$

n이 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$(k는 자연수)

(ii) $n=2k$(k는 자연수)인 경우

$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$

n이 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0$(k는 자연수)

(i), (ii)에 의하여

$$a_n=\begin{cases} a_{2k+1}=1\ (n=2k+1) \\ a_{2k}\quad\ =0\ (n=2k) \end{cases}$$ (단, k는 자연수)

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_6}{2^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^3}+\frac{0}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{0}{2^6}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$$

<답> ①

19. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x & (|x|\geq 1) \\ -x & (|x|<1) \end{cases}$$

에 대하여, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개이다.

ㄴ. 함수 $(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\{f(x)\}^2$은 실수 전체의 집합에서 연속이다.

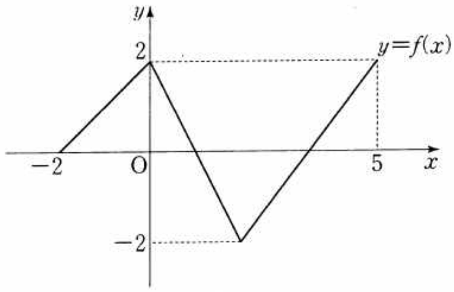
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20. 닫힌 구간 $[-2, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\dfrac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는? [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

(i) $nf(a)-1\ge 0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{nf(a)-1-nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{2n+3}=0$$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$에 모순

(ii) $nf(a)-1<0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-nf(a)+1-nf(a)}{2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2nf(a)+1}{2n+3}=-f(a)=1$$

$\therefore f(a)=-1$

따라서 주어진 그래프에서 $f(a)=-1$인 상수 a의 개수는 2개이다.

<답> ②

21. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 할 때, $f(2x) \le f(x)$를 만족시키는 100보다 작은 자연수 x의 개수는? [4점]

① 55 ② 57 ③ 59 ④ 61 ⑤ 63

자연수는
5, 6, 7, 8, 9와 50, 51, 52, …, 99로 모두
55개다.

<답> ①

27. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 9$를 만족시킨다.

$g(x) = xf(x)$라 할 때, $g'(1)$의 값을 구하시오. [4점]

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 9$에서 $\lim_{x \to 1}(x-1) = 0$이므로

$\lim_{x \to 1}\{f(x)-5\} = 0$이어야 한다.

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 5$

다항함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 연속

이므로 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$이다.

$\therefore f(1) = 5$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) = 9$$

$$\begin{aligned}\therefore g'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{xf(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{\{xf(x)-f(x)\}+\{f(x)-f(1)\}}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f(x)}{x-1} + \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \to 1} f(x) + f'(1) \\ &= f(1) + f'(1) \\ &= 5+9 \\ &= 14\end{aligned}$$

<답> 14

28. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_1=2$이고, $n \geq 1$일 때 a_{n+1}은

$$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$$

을 만족시키는 자연수 k의 개수이다. a_{10}의 값을 구하시오.

[4점]

$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n > 0$이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n < \frac{k}{a_n} < n+2$$

$$\therefore\ na_n < k < (n+2)a_n$$

이때, na_n, $(n+2)a_n$은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n - 1 = 2a_n - 1$$

$$\therefore\ a_{n+1} = 2a_n - 1$$

이때, $a_{n+1}-1=2(a_n-1)$이므로 수열 $\{a_n-1\}$은 첫째항이 $a_1-1=1$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore\ a_n - 1 = 1\times 2^{n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore\ a_n = 2^{n-1}+1$$

$$\therefore\ a_{10} = 2^9+1 = 513$$

<답> 513

29. 방정식

$$4^{x}+4^{-x}+a(2^{x}-2^{-x})+7=0$$

이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

$4^{x}+4^{-x}+a(2^{x}-2^{-x})+7=0$

$(2^{x}-2^{-x})^2+a(2^{x}-2^{-x})+9=0$

$2^{x}-2^{-x}=X$ 로 놓으면

$X^2+aX+9=0$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식 D는

$D=a^2-36\geq 0$

$(a+6)(a-6)\geq 0$

$\therefore\ a\leq -6$ 또는 $a\geq 6$

따라서 양수 a의 최솟값 m은

$m=6$

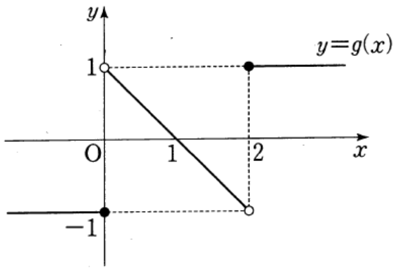
$\therefore\ m^2=36$

<답> 36

6. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-1 & (x\le 0)\\ -x+1 & (0<x<2)\\ 1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은? [3점]



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

쉽게 생각해서 이차함수f(x)가 g(x) 삐꾸되는 곳에서 강한! 0 되도록 하면 됨.

06 | 함수 $g(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 불연속이고, 나머지 경우는 연속이다.
따라서, 함수 $f(x)\cdot g(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 연속일 조건을 구하면 된다.

(i) $\lim_{x\to -0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to -0} f(x)\cdot(-1)=-f(0)$

$\lim_{x\to +0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to +0} f(x)\cdot 1=f(0)$

$f(0)\cdot g(0)=-f(0)$

$\therefore f(0)=-f(0)$이어야 하므로 $f(0)=0$

(ii) $\lim_{x\to 2-0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 2-0} f(x)\cdot(-1)=-f(2)$

$\lim_{x\to 2+0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to 2+0} f(x)\cdot 1=f(2)$

$f(2)\cdot g(2)=-f(2)$

$\therefore f(2)=-f(2)$이어야 하므로 $f(2)=0$

(i), (ii)에서, $f(x)=x(x-2)$

$f(5)=5\times 3=15$

[2012.06 종로]

6. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A^{2n-1}=A^n(n\geq 2)$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

6. $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$이므로

$$A^3=A^2A$$
$$=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-E$$

따라서, $A^6=E$이고 k, l이 6 이하의 서로 다른 자연수이면 $A^k\neq A^l$이다.

$A^{2n-1}=A^n$이 성립하려면 $2n-1-n$이 6의 배수이어야 하므로

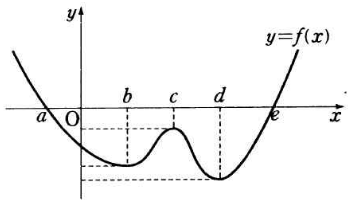
$n=6m+1$ (m은 자연수)

따라서, 구하는 자연수 n의 최솟값은 $m=1$일 때 7이다.

7. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\{f(x)\}^2$$

이라 정의하면 함수 $F(x)$는 $x=$ [(가)] 에서 극솟값을 갖는다. 이때 [(가)] 에 알맞은 모든 값은?



[3점]

① c ② $a,\ e$ ③ $b,\ d$

④ $a,\ c,\ e$ ⑤ $b,\ c,\ d$

7. $F'(x)=2f(x)f'(x)=0$에서

$f(x)=0$ $\therefore x=a$ 또는 $x=e$

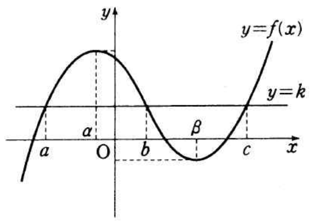
$f'(x)=0$ $\therefore x=b$ 또는 $x=c$ 또는 $x=d$

증감표를 조사하면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	↘		↗		↘		↗		↘		↗

따라서, $F(x)$는 $x=a$, $x=c$, $x=e$에서 극솟값을 갖는다.
따라서, [(가)] 에 알맞은 모든 값은 $a,\ c,\ e$이다.

10. 그림과 같이 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 세 점의 x좌표가 각각 a, b, c이다. 다음 중 $3\alpha\beta$의 값을 a, b, c로 바르게 나타낸 것은? (단, k는 상수이다.) [4점]



① $a+b+c$ ② $ab+bc+ca$ ③ abc

④ $\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ ⑤ $\dfrac{abc}{a+b+c}$

10. $f(a)=f(b)=f(c)=k$이므로

$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)+k$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)\\&\quad+(x-a)(x-b)\\&=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca\end{aligned}$$

한편 $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$이므로

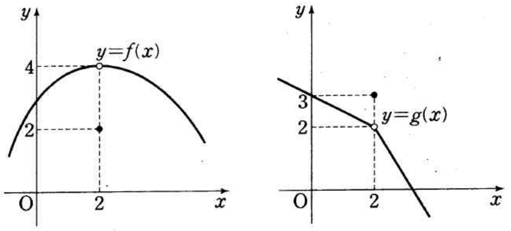
이차방정식 $3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$의 두 근이 α, β이다.

따라서, 근과 계수의 관계를 이용하면

$$\alpha\beta=\frac{ab+bc+ca}{3}$$

$$\therefore 3\alpha\beta=ab+bc+ca$$

11. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{[f(x)]}$ 의 값은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1

④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

11. $\lim_{x\to2-0}[f(x)]=3$, $\lim_{x\to2+0}[f(x)]=3$이므로

$\lim_{x\to2}[f(x)]=3$, $\lim_{x\to2}g(x)=2$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)}{[f(x)]}=\frac{\lim_{x\to2}g(x)}{\lim_{x\to2}[f(x)]}=\frac{2}{3}$$

12. 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$를 만족시키는 연속함수 $f(x)$가 있다.

$$\int_1^5 f(x)dx=12,\ \int_{-1}^4 f(x)dx=18$$

일 때, $\int_{2012}^{2014} f(x)dx-\int_{2011}^{2012} f(x)dx$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

12. $f(x+3)=f(x)$

$2011=3\times670+1$, $2012=3\times670+2$,
$2014=3\times671+1$

이므로

$$\int_{2012}^{2014} f(x)dx-\int_{2011}^{2012} f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$$

한편,

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_4^5 f(x)dx,\ \int_{-1}^1 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx$$

이때 $\int_1^2 f(x)dx=\int_4^5 f(x)dx=a$,

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_2^4 f(x)dx=b$라 하면

$$\int_1^5 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx+\int_4^5 f(x)dx$$
$$=2a+b=12$$

$$\int_{-1}^4 f(x)dx=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_1^2 (x)dx+\int_2^4 f(x)dx$$
$$=a+2b=18$$

두 식을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=8$

$$\therefore \int_{2012}^{2014} f(x)dx-\int_{2011}^{2012} f(x)dx$$
$$=\int_2^4 f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$$
$$=b-a$$
$$=8-2=6$$

13. 어느 인터넷 쇼핑몰에서 한 개에 60원씩 이익이 남도록 가격을 정하여 팔면 하루에 3600개가 팔리는 제품이 있다. 이 가격에서 한 개당 $x(x>0)$원씩 올리면 하루 판매 개수는 x^2개가 줄어든다고 한다. 하루에 판매한 총 이익금이 최대가 되도록 이 제품의 가격을 정할 때, 하루에 판매한 총 이익금은? [4점]

① 245000원 ② 248000원 ③ 252000원
④ 256000원 ⑤ 264000원

13. 가격을 x원 올릴 때, 하루에 판매한 총 이익금을 $f(x)$라 하면

$$f(x)=(60+x)(3600-x^2)$$
$$\begin{aligned} f'(x)&=(3600-x^2)+(60+x)(-2x) \\ &=-3x^2-120x+3600 \\ &=-3(x^2+40-1200) \\ &=-3(x-20)(x+60) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=20$ 또는 $x=-60$
증감표를 조사하면 $x=20$일 때, $f(x)$는 극대이면서 최대이다.
따라서, 구하는 최대의 총 이익금은

$$\begin{aligned} f(20)&=80\times(3600-400)=80\times3200 \\ &=256000(\text{원}) \end{aligned}$$

14. 수열 $\{a_n\}$이 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k$$

를 만족시킨다. 다음은 서로 이웃한 세 항 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구하는 과정이다.

> 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)a_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n\\&=\boxed{\text{(가)}}\times a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\end{aligned}$$
>
> 이때 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면
>
> $a_{n+1}=\boxed{\text{(가)}}\times a_n+S_{n-1}$ …… ㉠
>
> 이므로
>
> $a_{n+2}=\boxed{\text{(가)}}\times a_{n+1}+S_n$ …… ㉡
>
> ㉡－㉠을 계산하면 등식
>
> $a_{n+2}-\boxed{\text{(나)}}\times a_{n+1}+a_n=0$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$
>
> 이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 들어갈 수를 각각 p, q라 할 때, $p+q$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

14. $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$일 때,

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)a_k\\&=\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)a_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n\\&=\sum_{k=1}^{n-1}\{(n-1)+1-k\}a_k+\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n\\&=a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k+a_n\\&=\boxed{2}a_n+\sum_{k=1}^{n-1}a_k\end{aligned}$$

이때 $\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$이라 하면

$a_{n+1}=2a_n+S_{n-1}$ …… ㉠

이므로

$a_{n+2}=2a_{n+1}+S_n$ …… ㉡

㉡－㉠을 계산하면

$$\begin{aligned}a_{n+2}-a_{n+1}&=2(a_{n+1}-a_n)+S_n-S_{n-1}\\&=2(a_{n+1}-a_n)+a_n\end{aligned}$$

$\therefore a_{n+2}-\boxed{3}a_{n+1}+a_n=0$

$\therefore p=2,\ q=3$

$\therefore p+q=5$

15. 자연수 k에 대하여 집합 S_k를 다음과 같이 정의하자.

$$S_k=\left\{X \,\middle|\, X\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ X\text{는 이차정사각행렬}\right\}$$

옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, m, n은 자연수이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $A\in S_m$, $B\in S_n$이면 $A+B\in S_{m+n}$이다.
ㄴ. $A\in S_m$, $B\in S_n$이면 $AB\in S_{mn}$이다.
ㄷ. $A\in S_n$, $B\in S_n$이면 행렬 $A-B$의 역행렬은 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. ㄱ. $A\in S_m$, $B\in S_n$이면 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

$B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로 $(A+B)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(m+n)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이다.

$\therefore A+B\in S_{m+n}$ $\therefore$ 참

ㄴ. $A\in S_m$, $B\in S_n$이면 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

$B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이다.

이때 $B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$의 양변의 왼쪽에 A를 곱하면

$$AB\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=A\left\{n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}=nA\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=nm\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

$\therefore AB\in S_{mn}$ $\therefore$ 참

ㄷ. $A\in S_n$, $B\in S_n$이면 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,

$B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=n\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이다.

이때 $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$이므로 $(A-B)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이다.

행렬 $A-B$의 역행렬이 존재하면

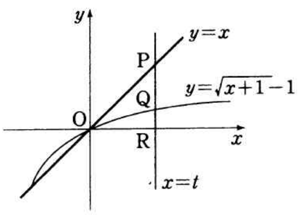
$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=(A-B)^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$이므로 모순이다.

따라서, 행렬 $A-B$의 역행렬은 존재하지 않는다.

$\therefore$ 참

따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

16. 그림과 같이 직선 $x=t(t>0)$가 직선 $y=x$, 곡선 $y=\sqrt{x+1}-1$ 및 x축과 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자. 이때 $\lim_{t\to+0}\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}$의 값은? [4점]



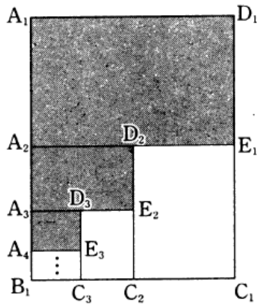
① 1
② $\sqrt{2}$
③ $\sqrt{3}$
④ 2
⑤ 3

16. 세 점 P, Q, R의 좌표는 $P(t,\ t)$, $Q(t,\ \sqrt{t+1}-1)$, $R(t,\ 0)$이고, $\overline{PR}=t$, $\overline{QR}=\sqrt{t+1}-1$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+0}\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}&=\lim_{t\to+0}\frac{t}{\sqrt{t+1}-1}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{(\sqrt{t+1}-1)(\sqrt{t+1}+1)}\\&=\lim_{t\to+0}\frac{t(\sqrt{t+1}+1)}{t}\\&=\lim_{t\to+0}(\sqrt{t+1}+1)\\&=2\end{aligned}$$

17. 넓이가 12인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 그림과 같이 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1의 중점을 각각 A_2, C_2, E_1이라 하고, 선분 A_2E_1의 중점을 D_2라 하자. 또, 세 선분 A_2B_1, B_1C_2, C_2D_2의 중점을 각각 A_3, C_3, E_2라 하고, 선분 A_3E_2의 중점을 D_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 중점들을 정해나갈 때, 직사각형 $A_kA_{k+1}E_kD_k$의 넓이를 S_k라 하고, 직사각형 $C_kE_kD_{k+1}C_{k+1}$의 넓이를 $T_k(k=1, 2, 3, \cdots)$라 하자.

$\sum_{k=1}^{\infty}(S_k-T_k)$의 값은? [4점]



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

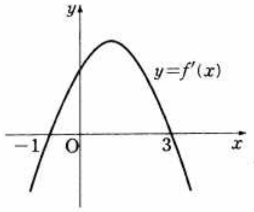
17. 수열 $\{S_k\}$는 첫째항이 6, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이고,

수열 $\{T_k\}$는 첫째항이 3, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

수열 $\{S_k-T_k\}$인 첫째항이 $S_1-T_1=3$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^{\infty}(S_k-T_k)=\frac{3}{1-\frac{1}{4}}=4$$

18. 삼차함수 $y=f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



〈보 기〉

ㄱ. $f(3)=0$이면 $f(-1)<0$이다.
ㄴ. $f(3)>0$이면 $f(0)>0$이다.
ㄷ. $f(-1)>0$이면 $f(2)>0$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 함수 $y=f(x)$의 증감표를 만들면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-1)$	↗	$f(3)$	↘

ㄱ. $f(3)=0$이면 극댓값이 0이다.
이때 $-1<x<3$에서 증가하므로 극솟값은 음수이다.
$\therefore f(-1)<0$　$\therefore$ 참

ㄴ. 【반례】 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x^2+3x-3$이면
$f'(x)=-x^2+2x+3$
$\therefore f'(-1)=f'(3)=0$
따라서, $y=f'(x)$의 그래프는 문제의 그림과 같다.
$f(3)=-9+9+9-3=6$
따라서, $f(3)>0$이지만 $f(0)=-3<0$이다.　$\therefore$ 거짓

ㄷ. $f(-1)>0$이면 극솟값이 양수이다.
이때 $-1<x<3$에서 증가하므로 $f(2)>0$이다. $\therefore$ 참

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

19. 건전지로 움직이는 토끼 장난감이 있다. 이 장난감이 한 번 점프할 때마다 건전지에 남아 있는 전하량은 점프하기 직전에 남아 있던 전하량의 2%씩 줄어든다고 한다. 또, 이 장난감에 들어 있는 건전지에 남아 있는 전하량이 새 건전지에 있던 전하량의 2% 이하가 되면 이 장난감은 더 이상 점프하지 못한다고 한다. 이 장난감에 새 건전지를 넣은 후, 이 장난감이 점프할 수 있는 최대 횟수는? (단, $\log 9.8 = 0.9912$, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [4점]

① 192 ② 194 ③ 196
④ 198 ⑤ 200

19. 처음에 k번(k는 자연수) 점프한 후에 건전지에 남아 있는 전하량은 새 건전지에 있던 전하량의 0.98^k 배이므로

$$0.98^k \le 0.02 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이면 더 이상 점프할 수 없다.

㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.98^k = k(\log 9.8 - 1) \le \log 0.02 = -2 + \log 2$$

$$\therefore k \ge \frac{-2+0.3010}{0.9912-1} = \frac{1.6990}{0.0088} = 193.\cdots$$

따라서, 이 장남감이 점프할 수 있는 최대 횟수는 194이다.

21. 자연수 N이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\log N$의 지표는 10이고 가수는 $\log 2$보다 작다.
(나) N을 소인수분해하면 $N=2^{12}\times 5^{8}\times n$이다.

이때 모든 n의 값의 합은? (단, n은 소수이다.) [4점]

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

21. (가)에서 $10^{10}\le N<2\times 10^{10}$이므로 (나)에서

$10^{10}\le 16n\times 10^{8}<2\times 10^{10}$

따라서, $100\le 16n<200$이므로

$7\le n\le 12$

이때 n은 2, 5가 아닌 소수이어야 하므로

$n=7$ 또는 $n=11$

따라서, 구하는 모든 n의 값의 합은

$7+11=18$

28. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_3^5 f(x)dx=5$일 때

$$\int_0^5 \{f(x)+4\}dx-\int_0^3 \{f(x)+3\}dx$$

의 값을 구하시오. [3점]

28. $\int_0^5 \{f(x)+4\}dx-\int_0^3 \{f(x)+3\}dx$

$$=\int_0^5 f(x)dx+\int_0^5 4dx-\int_0^3 f(x)dx-\int_0^3 3dx$$

$$=\int_0^5 f(x)dx-\int_0^3 f(x)dx+\Big[\,4x\,\Big]_0^5-\Big[\,3x\,\Big]_0^3$$

$$=\int_3^5 f(x)dx+20-9$$

$$=5+11=16$$

29. x, y에 대한 연립방정식 $\begin{pmatrix} |a| & |b| \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 실수 a, b에 대하여 $a+b$의 최댓값을 구하시오. [4점]

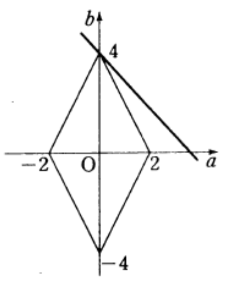
29. 주어진 연립방정식 $\begin{pmatrix} |a| & |b| \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 정리하면

$$\begin{pmatrix} |a| & |b| \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}-2E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} |a|-2 & |b| \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

이때 행렬 $\begin{pmatrix} |a|-2 & |b| \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 하므로 $2|a|+|b|=4$이다.

따라서, 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



따라서, $a+b=k$라 하면 $b=-a+k$이므로 $a=0$, $b=4$일 때, k의 최댓값은 4이다.

[오답노트 02차 ~]

2012.06 평가원	7 8 10 11 12
	14 15 16 17 18
	19 20 21 27 28 29 (가형)6
2012.06 종로	6 7 10 11 12
	13 14 15 16 17
	18 19 21 28 29

[2013 수능대비 오답노트 03차]

시그마 양옆지우기 : 끝에 영인지 꼭 확인해보자 **삼각형넓이 최대 : 식세우기 길이밝히고 미분~** **사랑의하트 : 분수꼴 정리할 때 하트를 그리는 경우** **산술기하 : 둘다 + 이고 최대값 최소값 언급하는데 합 곱 으로 연결될 때** **무한등비 두 개씩 : 두 개씩 묶어 등비 고려하기**

[2012.06 대성]

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)$의 값은? **[2점]**

① 1 ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{3}-1$ ⑤ $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. (주어진 식)

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{k+1}{k+2}}-\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+\cdots+\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}-\sqrt{\frac{n-1}{n}}\right)+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\right)$$

$$=1-\sqrt{\frac{1}{2}}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 ⑤

8. 어떤 방사능 물질은 단위 시간당 일정한 비율로 붕괴되어 t년 후에 남아있는 방사능 물질의 양을 M이라 하면 다음 관계식이 성립한다고 한다.

$\log_2 \frac{M}{M_0} = kt$ (k는 상수, M_0는 초기 방사능 물질의 양)

5년 후 방사능 물질의 양이 초기 방사능 물질의 양의 $\frac{1}{2}$이 된다고 할 때, 40년 후의 방사능 물질의 양은 초기 방사능 물질의 양의 $\frac{1}{A}$이 된다. 이때, A의 값은? **[3점]**

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

8. $t=5$일 때, $M = \frac{1}{2}M_0$이므로 $\log_2 \frac{1}{2} = 5k$

$\therefore\ k = -\frac{1}{5}$

따라서 $t=40$일 때 $\log_2 \frac{M}{M_0} = -\frac{40}{5} = -8$

$\therefore\ M = 2^{-8}M_0 = \frac{1}{256}M_0$

$\therefore\ A = 256$

답 ④

13. 그림과 같이 두 줄로 되어있는 정사각형의 맨 왼쪽의 두 빈 칸에는 모두 1을 적어 넣고, 임의의 네 칸

p	r
q	s

에 대하여 $r=p+q$, $s=q+r$를 만족시키는 자연수 p, q, r, s를 차례로 적어 넣는다.

1	2	5	13	34	⋯
1	3	8	21	55	⋯

그림의 제1행의 수열을 $\{a_n\}$이라 하고, 제2행의 수열을 $\{b_n\}$이라 하자. 즉,

$\{a_n\}$: 1, 2, 5, 13, 34, ⋯

$\{b_n\}$: 1, 3, 8, 21, 55, ⋯

이다. $a_m=610$, $b_m=987$일 때, $\sum_{k=1}^{m+1} a_k$의 값은? **[4점]**

① 2572 ② 2576 ③ 2580
④ 2584 ⑤ 2588

13. 주어진 그림의 수열 조건에서

$a_n+b_n=a_{n+1}$ ⋯⋯ ㉠

$b_n+a_{n+1}=b_{n+1}$ ⋯⋯ ㉡

이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m+a_{m+1}\\ &= b_1+a_2+a_3+\cdots+a_m+a_{m+1}\ (\because\ a_1=b_1)\\ &= b_2+a_3+\cdots+a_m+a_{m+1}\ (\because\ ㉡)\\ &= b_3+\cdots+a_m+a_{m+1}\ (\because\ ㉡)\\ &\ \vdots\\ &= b_{m+1}\end{aligned}$$

㉠에서 $a_{m+1}=a_m+b_m=610+987=1597$

㉡에서 $b_{m+1}=b_m+a_{m+1}=987+1597$
$=2584$

$\therefore \sum_{k=1}^{m+1} a_k=b_{m+1}=2584$

답 ④

14. 다음은 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n+k} < \frac{n}{2} \qquad \cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(1) $n=2$일 때

(좌변)$=\frac{5}{6}$, (우변)$=1$

이므로 부등식 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$ $(m=2, 3, 4, \cdots)$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m+k} < \frac{m}{2}$$

$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{(m+1)+k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \frac{k-1}{m+k} + \boxed{\text{(가)}} + \frac{1}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m+k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k} + \boxed{\text{(가)}} + \frac{1}{2}$$

$$< \frac{m}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+m} + \boxed{\text{(가)}} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\boxed{\text{(나)}}}{2(2m+1)}$$

$$< \frac{m+1}{2}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

따라서 (1), (2)에 의하여 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\frac{g(4)}{f(4)}$의 값은? **[4점]**

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

14 (1) $n=2$일 때

(좌변)$=\frac{1}{2+1}+\frac{2}{2+2}=\frac{4+6}{12}=\frac{5}{6}$

(우변)$=\frac{2}{2}=1$

이므로 부등식$(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$ $(m=2, 3, 4, \cdots)$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m+k} < \frac{m}{2}$$

$n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{k}{(m+1)+k}$$

$$=\frac{1}{m+2}+\frac{2}{m+3}+\frac{3}{m+4}+\cdots+\frac{m-1}{2m}+\frac{m}{2m+1}+\frac{m+1}{2m+2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \frac{k-1}{m+k} + \boxed{\frac{m}{2m+1}} + \frac{1}{2}$$

$$=\sum_{k=1}^{m} \frac{k}{m+k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+k} + \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{2}$$

$$< \frac{m}{2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{m+m} + \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{m}{2} - \frac{m}{2m} + \frac{m}{2m+1} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2} + \frac{m}{2m+1}$$

$$= \frac{\boxed{m(2m+3)}}{2(2m+1)}$$

$$< \frac{m}{2} + \frac{m}{2m} = \frac{m+1}{2}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 성립한다.

이상에서 $f(m)=\frac{m}{2m+1}$, $g(m)=m(2m+3)$

이므로

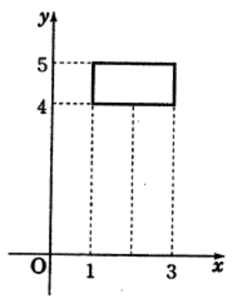
$$\frac{g(m)}{f(m)}=(2m+1)(2m+3)$$

$$\therefore \frac{g(4)}{f(4)}=(2\times4+1)(2\times4+3)$$

$$=9\times11=99$$

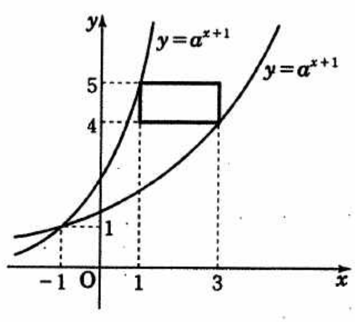
답 ⑤

15. 좌표평면에서 함수 $y=a^{x+1}$의 그래프가 네 점 $(1,\ 5)$, $(1,\ 4)$, $(3,\ 4)$, $(3,\ 5)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형과 만나도록 양수 a의 값을 정할 때, a의 최댓값을 α, 최솟값을 β라 하자. $\alpha^2+\beta^2$의 값은? **[4점]**



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

15. $y=a^{x+1}$에서 $x=-1$이면 $y=1$이므로 함수 $y=a^{x+1}$의 그래프는 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.



위 그림에서 점 $(1,\ 5)$를 지날 때 a의 값이 최댓값 α이고 점 $(3,\ 4)$를 지날 때 a의 값이 최솟값 β이므로

$5=a^{1+1}=a^2$에서 $\alpha=\sqrt{5}$

$4=a^{3+1}=a^4$에서 $\beta=\sqrt{2}$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{2})^2=5+2=7$

답 ②

16. 어느 해수욕장에 있는 모래는 해마다 5%씩 파도에 쓸려 사라진다고 한다. 그래서 이 해수욕장 관리소에서는 매년 7월 1일에 760톤의 모래를 보충하고 있다. 이러한 현상과 모래 보충 과정이 매년 반복된다고 하고 매년 760톤의 모래를 보충한 직후에 이 해수욕장에 남아있는 모래의 양을 측정한다고 할 때, 이때 측정된 모래의 양은 p톤에 한없이 가까워진다. p의 값은? **[4점]**

① 15100 ② 15200 ③ 15300
④ 15400 ⑤ 15500

$$a_{n+1} = 0.95a_n + 760$$

$$\alpha = 0.95\alpha + 760$$

16. 금년 7월 1일에 모래를 보충한 직후 해수욕장에 남아 있는 모래의 양을 a(톤)이라 하고 금년부터 n년 후 7월 1일에 모래를 보충한 직후 해수욕장에 남아있는 모래의 양을 a_n(톤)이라 하자.

$a_{n+1}=\frac{19}{20}a_n+760$이고 $a_1=\frac{19}{20}a+760$이므로

$$a_{n+1}-15200=\frac{19}{20}(a_n-15200)$$

$$a_n-15200=(a_1-15200)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}$$

$$a_n=(a_1-15200)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}+15200$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} (a_1-15200)\left(\frac{19}{20}\right)^{n-1}+15200$$

$$=15200$$

$$\therefore p=\lim_{n\to\infty} a_n=15200$$

답 ②

17. 두 실수 x, y가 등식 $5^x=2^y=3$을 만족시킬 때, 다음 중 x, y, $\frac{y}{x}$의 대소 관계를 옳게 나타낸 것은? **[4점]**

① $x<y<\frac{y}{x}$ ② $x<\frac{y}{x}<y$ ③ $\frac{y}{x}<x<y$

④ $y<\frac{y}{x}<x$ ⑤ $y<x<\frac{y}{x}$

17. $\log_5 1<x=\log_5 3<\log_5 5$이므로

$0<x<1$ … ㉠

$y=\log_2 3>\log_2 2=1$이므로

$y>1$ … ㉡

㉠, ㉡에서

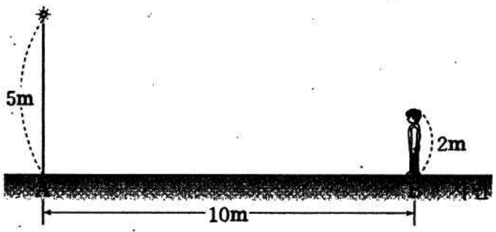
$y<\frac{y}{x}$ … ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$x<y<\frac{y}{x}$

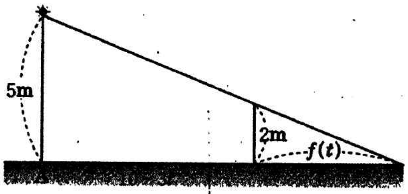
답 ①

18. 그림과 같이 지면에 있는 A지점으로부터 5m 높이의 위치에 광원이 있고, A지점으로부터 10m 떨어진 지면 위의 B지점에 키가 2m인 사람이 똑바로 서 있다. 이 사람이 매초 3m의 일정한 속도로 A지점을 향해 똑바로 서서 걸어간다. B를 출발한 지 2초가 되는 순간, 이 사람의 그림자 길이의 시간에 대한 순간변화율은 p(m/초)이다. p의 값은? **[4점]**



① -1 ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{7}{4}$ ⑤ -2

18.



이 사람이 출발한 후 t초 동안 이동한 거리는 $3t$(m)이다.

그림자의 길이를 $f(t)$(m)라 하면

$f(t):2=(f(t)+10-3t):5$

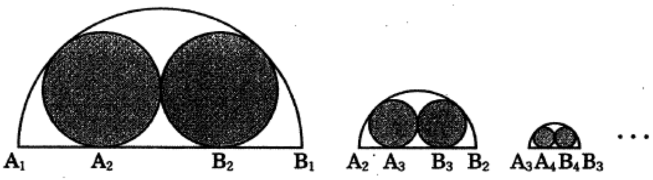
$5f(t)=2f(t)+20-6t$이므로 $f(t)=-2t+\frac{20}{3}$

따라서 2초가 되는 순간 이 사람의 그림자 길이의 순간변화율은

$p=f'(2)=-2$

답 ⑤

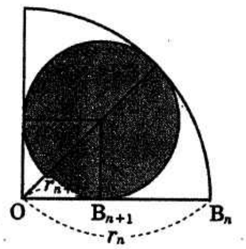
19. 그림과 같이 길이가 12인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원에 대하여 크기가 같고 서로 외접하며 반원에 내접하는 두 원과 선분 A_1B_1이 만나는 점을 A_2, B_2라 하자. 또, 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원에 대하여 크기가 같고 서로 외접하며 반원에 내접하는 두 원과 선분 A_2B_2가 만나는 점을 A_3, B_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 선분 A_nB_n을 지름으로 하는 반원에 대하여 크기가 같고 서로 외접하며 반원에 내접하는 두 원과 선분 A_nB_n이 만나는 점을 A_{n+1}, B_{n+1}이라 하자.



선분 $A_nB_n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 지름으로 하는 반원에 내접하는 두 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? **[4점]**

① $35(\sqrt{2}-1)\pi$ ② $35(\sqrt{2}+1)\pi$ ③ $36(\sqrt{2}-1)\pi$
④ $36(\sqrt{2}+1)\pi$ ⑤ $37(\sqrt{2}-1)\pi$

19.



선분 A_nB_n의 중점을 O라 하고 $\overline{OB_n}=r_n$이라 하면 $\sqrt{2}r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$에서

$r_{n+1}=(\sqrt{2}-1)r_n$ ⋯ ㉠

$S_n=2r_{n+1}{}^2\pi$이므로 $S_1=2r_2{}^2\pi$

$r_1=6$이고 ㉠에 의해 $r_2=6(\sqrt{2}-1)$

$\therefore S_1=72(\sqrt{2}-1)^2\pi=72(3-2\sqrt{2})\pi$

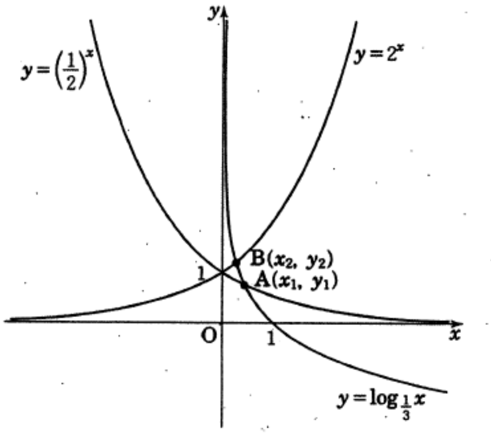
㉠에서 $S_{n+1}=(\sqrt{2}-1)^2S_n$이므로

$S_{n+1}=(3-2\sqrt{2})S_n$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{72(3-2\sqrt{2})\pi}{1-(3-2\sqrt{2})}=36(\sqrt{2}-1)\pi$$

답 ③

20. 좌표평면에서 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$의 그래프가 두 지수함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=2^x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$라 할 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? **[4점]**



〈보기〉

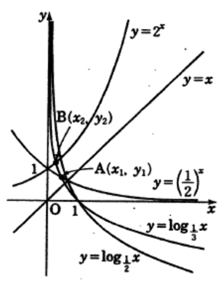
ㄱ. $x_1 < y_1$

ㄴ. $x_1 y_2 > x_2 y_1$

ㄷ. $\frac{y_1}{x_1} > \frac{y_2 - 1}{x_2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20.



ㄱ. 그림에서 점 A는 직선 $y=x$의 윗부분에 있으므로

$x_1 < y_1$ (참)

ㄴ. 원점 O에 대하여 직선 OA의 기울기는 $\frac{y_1}{x_1}$,

직선 OB의 기울기는 $\frac{y_2}{x_2}$이므로

$\frac{y_1}{x_1} < \frac{y_2}{x_2}$이고 x_1, x_2가 모두 양수이므로

$x_1 y_2 > x_2 y_1$ (참)

ㄷ. 점 C(1, 2), D(0, 1)이라 하자.

함수 $y=2^x$ 위의 점 C(1, 2)에 대하여 직선 DC의 기울기는 1이므로 직선 DB의 기울기는 1보다 작다.

$\therefore \frac{y_2 - 1}{x_2} < 1$

그런데 직선 OA의 기울기는 1보다 크므로

$\frac{y_1}{x_1} > 1$ ($\because$ ㄱ)

$\therefore \frac{y_1}{x_1} > \frac{y_2 - 1}{x_2}$ (참)

답 ⑤

21. 두 점 A$(-a,\ 0)$, B$(a,\ 0)$에서 곡선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-2)$에 그은 두 접선이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형이 되도록 하는 a의 값은? (단, $a>\sqrt[4]{2}$) **[4점]**

① $\frac{5}{4}$ ② $\sqrt{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 2

21. 곡선 $y=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-2)$는 y축에 대하여 대칭이고, 두 점 A, B도 y축에 대하여 대칭이므로 두 접선도 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 점 A$(-a,\ 0)$에서 곡선

$y=-\frac{\sqrt{3}}{4}(x^4-2)$에 그은 접선 l이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $60°$이어야 하므로 직선 l의 기울기는 $\sqrt{3}$이다.

$y'=-\sqrt{3}x^3$이므로 직선 l의 접점의 x좌표를 t라 하면 $-\sqrt{3}t^3=\sqrt{3}$에서 $t=-1$이다.

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=\sqrt{3}(x+1)-\frac{\sqrt{3}}{4}\{(-1)^4-2\}$$

$$\therefore\ y=\sqrt{3}x+\frac{5}{4}\sqrt{3}$$

이때, $-a$는 직선 l의 x절편이므로 $-a=-\frac{5}{4}$이다.

$$\therefore\ a=\frac{5}{4}$$

답 ①

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\left\{\dfrac{a_n+1}{a_n+2}\right\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열일 때, $\lim_{n\to\infty} a_n = p$이다. $50p^2$의 값을 구하시오. [3점]

24. 단답형 $\dfrac{a_n+1}{a_n+2}=2\cdot 2^{n-1}=2^n$이므로

$a_n+1=2^n(a_n+2)$

따라서 $a_n=\dfrac{1-2^{n+1}}{2^n-1}$이므로

$$p=\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2^{n+1}}{2^n-1}=-2$$

$\therefore\ 50p^2=200$

답 200

25. 첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{10}(a_{2n}-a_{2n-1})=\frac{3^k-1}{4}$$

이다. 자연수 k의 값을 구하시오. **[3점]**

25. 단답형 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1\cdot 3^{n-1}=3^{n-1}$이므로

$$a_{2n}-a_{2n-1}=3^{2n-1}-3^{2n-2}=3^{2n-2}(3-1)=2\cdot 9^{n-1}$$

수열 $\{a_{2n}-a_{2n-1}\}$은 첫째항이 2이고 공비가 9인 등비수열이다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}(a_{2n}-a_{2n-1})=\frac{2\cdot(9^{10}-1)}{9-1}$$

$$=\frac{3^{20}-1}{4}$$

$\therefore k=20$

답 20

27. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$에 대하여 $A^{13}=\frac{1}{k}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$일 때, k의 값을 구하시오. **[4점]**

27. 단답형 $A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$이므로

$$A^2=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=-\frac{1}{4}E$$

$$\therefore A^{13}=(A^4)^3A=-\frac{1}{4^3}A$$

$$=\frac{1}{2\times 4^3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore k=2\times 4^3=128$$

답 128

28. 다음 두 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구하시오.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

(가) $1 \le n < 100$
(나) $\log n - [\log n] \ge \frac{1}{2}$

28. 단답형 i) $1 \le n < 10$일 때

$[\log n] = 0$이므로

$$\log n - [\log n] = \log n \ge \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{10} \le n < 10$$

따라서 자연수 n은 4, 5, …, 9이므로 개수는 6이다.

ii) $10 \le n < 100$일 때

$[\log n] = 1$이므로

$$\log n - [\log n] = \log n - 1 \ge \frac{1}{2}$$

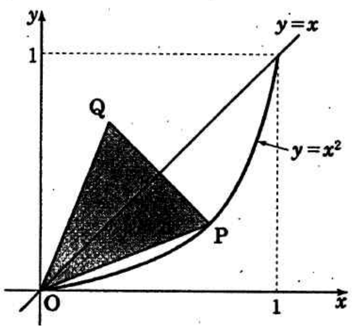
$$10\sqrt{10} \le n < 100$$

따라서 자연수 n은 32, 33, …, 99이므로 개수는 68이다.

i), ii)에서 자연수 n의 개수는 $6+68=74$이다.

답 74

29. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2(0<x<1)$ 위의 점 P를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q라 하자. 삼각형 OPQ의 넓이의 최댓값을 M이라 할 때, $80M$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



1) 두점사이의 거리 $P(t, t^2)$ $Q(t^2, t)$

2) 두점사리의 중점, 그리고 O까지의 루트2배 거리

3) 삼각형의 넓이

29. 단답형 점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 $Q(t^2,\ t)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{2(t-t^2)^2}=\sqrt{2}|t-t^2|$

$=\sqrt{2}(t-t^2)$ $(\because\ t>t^2)$

$\overline{PQ}$의 중점을 M이라 하면 $M\left(\frac{t+t^2}{2},\ \frac{t+t^2}{2}\right)$이므로

$\overline{OM}=\sqrt{2\left(\frac{t+t^2}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(t+t^2)$

삼각형 OPQ의 넓이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{OM}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}(t-t^2)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(t+t^2)$

$=\frac{1}{2}(t^2-t^4)$

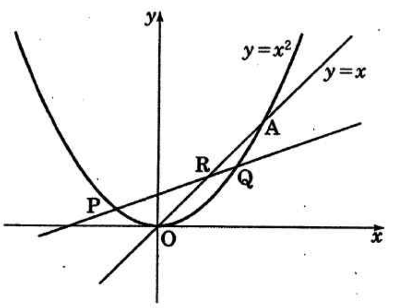
$f'(t)=t-2t^3=t(1-2t^2)$이므로 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{\sqrt{2}}$일 때 극대이자 최대이다.

$\therefore\ M=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$

$\therefore\ 80M=80\times\frac{1}{8}=10$

답 10

30. 좌표평면에서 곡선 $y=x^2$ 위의 두 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$, $\mathrm{Q}(a+1,\ (a+1)^2)$에 대하여 직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점을 R라 하자. 점 P가 원점 O에 한없이 가까워질 때, 점 R는 점 $(p,\ q)$에 한없이 가까워진다. 이때, $16(p^2+q^2)$의 값을 구하시오. (단, $a\neq0$이다.) **[4점]**



30. 단답형 직선 PQ의 방정식은

$$y=\frac{(a+1)^2-a^2}{(a+1)-a}(x-a)+a^2$$

즉, $y=(2a+1)x-a^2-a$

직선 PQ와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면 $x=(2a+1)x-a^2-a$에서

$$x=\frac{a(a+1)}{2a}=\frac{a+1}{2}\quad(\because\ a\neq0)$$

따라서 점 R의 좌표를 $\left(\frac{a+1}{2},\ \frac{a+1}{2}\right)$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a\to0$이므로 교점 R의 좌표 $(x,\ y)$는

$$x=\lim_{a\to0}\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{1}{2},\ y=\lim_{a\to0}\left(\frac{a+1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$로 가까워진다.

$\therefore\ p=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$

$\therefore\ 16(p^2+q^2)=8$

답 8

[2011.07 교육청]

7. 자연수 k에 대하여 집합 A_k를

$$A_k=\left\{x \,\middle|\, \log x-[\log x]=\frac{1}{k},\ 1 \le x \le 10^5\right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\sqrt{10} \in A_2$

ㄴ. $n(A_3)=n(A_5)$

ㄷ. $A_m \cap A_n \neq \phi$를 만족하는 서로 다른 자연수 m, n이 존재한다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수의 성질 추론하기

$\log x=[\log x]+\frac{1}{k}=(\text{정수})+\frac{1}{k}$

$k=1$일 때, $A_1=\phi$

$k \neq 1$일 때,

$$A_k=\left\{10^{\frac{1}{k}},\ 10^{1+\frac{1}{k}},\ 10^{2+\frac{1}{k}},\ 10^{3+\frac{1}{k}},\ 10^{4+\frac{1}{k}}\right\}$$

ㄱ. $A_2=\left\{10^{\frac{1}{2}},\ 10^{\frac{3}{2}},\ 10^{\frac{5}{2}},\ 10^{\frac{7}{2}},\ 10^{\frac{9}{2}}\right\}$ 이므로

$\sqrt{10} \in A_2$ (참)

ㄴ. 2이상의 자연수 k에 대하여

$n(A_k)=5$ (참)

ㄷ. 서로 다른 자연수 m, n에 대하여 $A_m \cap A_n=\phi$ (거짓)

8. 함수 $y=\dfrac{3^{2x}+3^{x}+9}{3^{x}}$ 의 최솟값은? [3점]

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

8. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기
$3^{x}=t(t>0)$라 하면
$y=\dfrac{t^2+t+9}{t}=t+1+\dfrac{9}{t}$이고, $t+\dfrac{9}{t}\geq 6$
따라서 최솟값은 7

9. 어느 건물의 실내온도 28℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량을 A라 하자. 실내온도를 1℃ 내릴 때마다 그 온도를 유지하기 위한 시간당 전력소비량은 일정한 비율로 증가한다. 실내온도 25℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량이 $1.23A$일 때, 실내온도 20℃를 유지하기 위한 시간당 전력소비량은 A의 몇 배인가? (단, $\log 1.23 = 0.09$, $\log 1.40 = 0.15$로 계산하고, 소수점 아래 셋째 자리에서 반올림한다.) [3점]

① 1.72 ② 1.86 ③ 2.00 ④ 2.14 ⑤ 2.28

9. [출제의도] 로그를 이용하여 수학외적문제 해결하기

전력소비량의 증가율을 r이라 하면

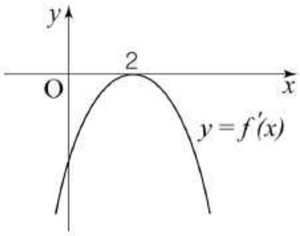
$(1+r)^3 A = 1.23A$

$\log(1+r) = 0.03$

$$\begin{aligned}\log(1+r)^8 &= 8\log(1+r) = 0.24 \\ &= \log 1.23 + \log 1.40 = \log 1.722\end{aligned}$$

따라서 1.72배

10. 그림은 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다.



함수 $f(x)$에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 감소상태에 있다.
ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

10. [출제의도] 도함수의 그래프를 이용하여 함수의 그래프 추론하기

$f'(x)=a(x-2)^2\ (a<0)$이므로

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	↘		↘

ㄱ. $f'(0)<0$이므로 $x=0$에서 감소상태 (참)
ㄴ. 극댓값은 존재하지 않는다. (거짓)
ㄷ. 모든 실수에 대하여 함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

11. 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$에 대하여 $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$를

$$d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

라 정의하자. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$과 $\mathrm{P}_n(n,\ 2^n)$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A},\ \mathrm{P}_n)$의 값은? [3점]

① 2^9+45　② $2^{10}+43$　③ $2^{10}+45$　④ $2^{11}+43$　⑤ $2^{11}+45$

11. [출제의도] 등차・등비수열의 합 계산하기

$d(\mathrm{A},\mathrm{P}_n)=|1-n|+|0-2^n|$ 이다.

$$\sum_{n=1}^{10} d(\mathrm{A},\mathrm{P}_n)=\sum_{n=1}^{10}(-1+n+2^n)=2^{11}+43$$

14. 함수 $f(x)=\begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty}(x^4+x^2)(1-x^2)^n & (|x|<1) \\ 0 & (|x|\ge 1) \end{cases}$ 에 대하여

$\lim_{x\to -1+0} f(x)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

14. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$x \ne 0$ 이고 $-1<x<1$ 일 때,

$0<1-x^2<1$ 이므로

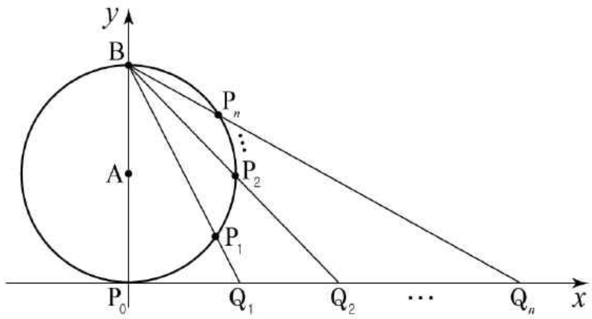
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^4+x^2)(1-x^2)^n$$

$$=\frac{x^4+x^2}{1-(1-x^2)}=x^2+1$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (|x|<1,\ x\ne 0) \\ 0 & (|x|\ge 1,\ x=0) \end{cases}$$

따라서 $\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+1)=2$

16. 그림과 같이 중심이 A(0, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n은 다음 규칙을 만족한다.



(가) 점 P_0은 원점이고, 점 P_n은 제 1사분면의 점이다.
(나) 호 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $l_{n+1} = r\,l_n$이다.
(다) 점 Q_n은 점 B(0, 2)와 점 P_n을 이은 직선이 x축과 만나는 점이다.

$\mathrm{Q}_2(2,\ 0)$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{8}{15}\pi$일 때, 상수 r의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

16. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학 내적문제 해결하기

$\angle \mathrm{P}_{n-1}\mathrm{AP}_n = \theta_n$이라 하면 $l_n = \theta_n$이고

(나)에 의하여 $\theta_n = \theta_1 r^{n-1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n = \frac{\theta_1}{1-r} = \frac{8}{15}\pi \cdots ①$$

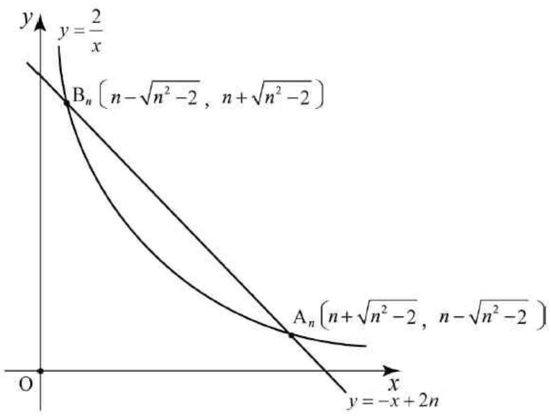
(다)에 의하여 $\theta_1(1+r) = \frac{\pi}{2} \cdots ②$

따라서 ①, ②에 의하여 $r = \frac{1}{4}$

17. 2 이상의 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\frac{2}{x}$와 직선 $y=-x+2n$의 두 교점을 A_n, B_n이라 하고 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이를 l_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은? [4점]

① $2\sqrt{2}$　② 3　③ $\sqrt{10}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ 4

17. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적문제 해결하기



두 점 사이의 거리 $l_n=\sqrt{8n^2-16}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8n^2-16}}{n}=2\sqrt{2}$

18. 자연수 n에 대하여

집합 $A_n = \{k \mid \log_k 3^n = [\log_k 3^n],\ k$는 자연수$\}$라 할 때, A_6의 모든 원소의 곱은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

① 3^6 ② 3^8 ③ 3^{10} ④ 3^{12} ⑤ 3^{14}

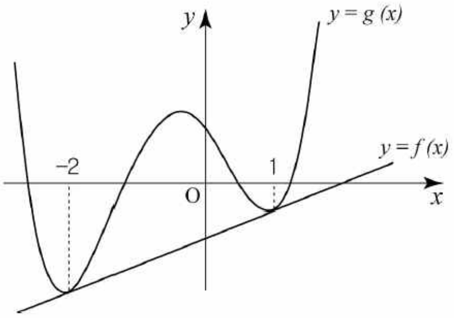
18. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_k 3^6$의 값이 정수이므로

$k = 3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^6$이다.

따라서 $3 \times 3^2 \times 3^3 \times 3^6 = 3^{12}$

20. 그림과 같이 일차함수 $y=f(x)$의 그래프와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=g(x)$의 그래프는 x좌표가 -2, 1인 두 점에서 접한다. 함수 $h(x)=g(x)-f(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$의 극댓값은? [4점]



① $\frac{81}{16}$ ② $\frac{83}{16}$ ③ $\frac{85}{16}$ ④ $\frac{87}{16}$ ⑤ $\frac{89}{16}$

20. [출제의도] 함수의 극대 · 극소 이해하기

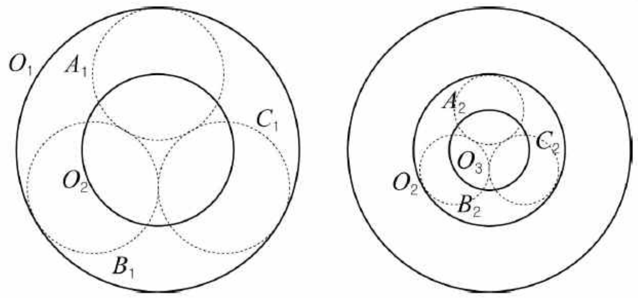
$h(x)=g(x)-f(x)=(x+2)^2(x-1)^2$

$h'(x)=2(x+2)(x-1)(2x+1)$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 $h\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{81}{16}$

21. 반지름의 길이가 3인 원 O_1이 있다. 그림과 같이 원 O_1에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_1, B_1, C_1의 중심을 지나는 원을 O_2라 하자. 원 O_2에 내접하고 서로 외접하게 그린 반지름의 길이가 같은 세 원 A_2, B_2, C_2의 중심을 지나는 원을 O_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 그린 원 O_n의 둘레의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} l_n$의 값은? [4점]



① $(5+4\sqrt{3})\pi$ ② $(6+4\sqrt{3})\pi$ ③ $(7+4\sqrt{3})\pi$
④ $(8+4\sqrt{3})\pi$ ⑤ $(9+4\sqrt{3})\pi$

21. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 수학 내적문제 해결하기

원 A_n의 반지름의 길이를 a_n, 원 O_n의 반지름의 길이를 r_n라 하면

$r_1 = 3$, $a_n = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_{n+1}$, $r_n - r_{n+1} = a_n$ 이므로

$r_n - r_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} r_{n+1}$, $r_{n+1}\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = r_n$

$r_{n+1} = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} r_n$, $r_{n+1} = 2(2-\sqrt{3})r_n$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{6\pi}{1-(4-2\sqrt{3})} = (6+4\sqrt{3})\pi$

23. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^{3}\frac{1}{n}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$$\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^{3}\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}x^{3}\,dx=10$$

24. 한 변의 길이가 $12\sqrt{3}$ 인 정삼각형과 그 정삼각형에 내접하는 원으로 이루어진 도형이 있다. 이 도형에서 정삼각형의 각 변의 길이가 매초 $3\sqrt{3}$ 씩 늘어남에 따라 원도 정삼각형에 내접하면서 반지름의 길이가 늘어난다. 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$ 이 되는 순간, 정삼각형에 내접하는 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율이 $a\pi$ 이다. 이때, 상수 a 의 값을 구하시오. [4점]

24. [출제의도] 도함수의 성질을 활용하여 수학 내적문제 해결하기

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 x_t, 그에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_t라 하면,

$r_t = \dfrac{\sqrt{3}}{6} x_t$, $x_t = 12\sqrt{3} + 3\sqrt{3}\,t$이므로

$r_t = \dfrac{12+3t}{2}$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이는

$S(t) = \pi\left(\dfrac{12+3t}{2}\right)^2$ 이므로

$x_t = 24\sqrt{3}$ 일 때, $t=4$

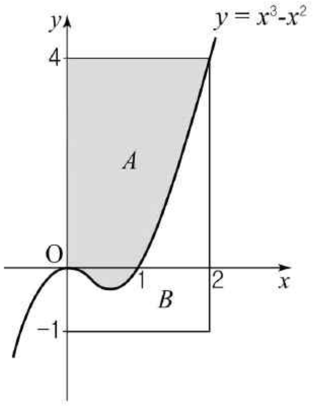
$S'(4) = 2\pi\left(\dfrac{12+3\times4}{2}\right)\times\dfrac{3}{2} = 36\pi$이다.

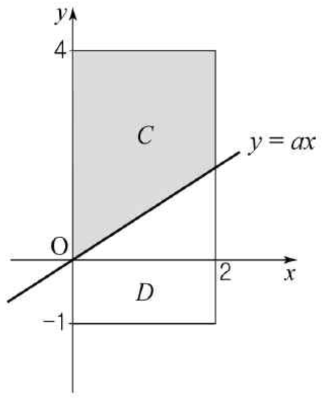
따라서 $a = 36$

25. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가
$f(x)f'(x)=2x^3-9x^2+5x+6$을 만족할 때, $f(-3)$의 값을 구하시오. [3점]

25. [출제의도] 도함수 이해하기
$f(x)$가 n차 함수이면
$f'(x)$는 $(n-1)$차 함수이다. $\therefore n=2$
$f(x)=x^2+ax+b,\ f'(x)=2x+a$
$f(x)f'(x)=(x^2+ax+b)(2x+a)$
$3a=-9,\ ab=6$ 이므로 $a=-3, b=-2$
따라서 $f(-3)=9-3a+b=16$

26. 그림과 같이 네 점 $(0,\ -1)$, $(2,\ -1)$, $(2,\ 4)$, $(0,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 내부가 곡선 $y=x^3-x^2$에 의하여 나누어지는 두 부분을 A, B, 직선 $y=ax$에 의하여 나누어지는 두 부분을 C, D라 하자. 영역 A의 넓이와 영역 C의 넓이가 같을 때, $300a$의 값을 구하시오. [4점]





아래 해답처럼 말고 위 - 아래, 오른쪽은 사다리꼴

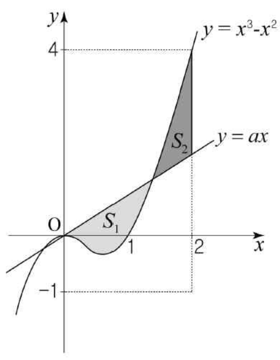
$$A=\int_0^2 (4)-(x^3-x^2)dx$$

26. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기

A와 C의 넓이가 같으므로 $S_1=S_2$

$$\int_0^2 (x^3-x^2-ax)\,dx=0 \quad \therefore a=\frac{2}{3}$$

따라서 $300a=200$

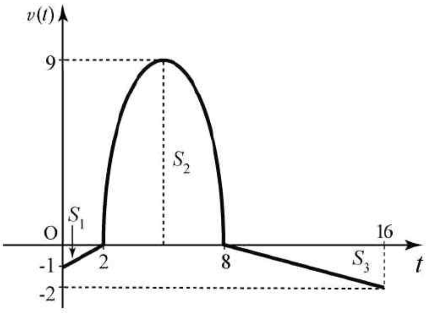


27. 원점 O를 출발하여 수직선 위를 16초 동안 움직이는 점 P의 t초 후의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} \frac{1}{2}t-1 & (0 \le t < 2) \\ -t^2+10t-16 & (2 \le t < 8) \\ 2-\frac{1}{4}t & (8 \le t \le 16) \end{cases}$$

일 때, 선분 OP의 길이의 최댓값을 구하시오. [4점]

27. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학내적문제 해결하기



$S_1 = \int_0^2 v(t)\,dt,$ $S_2 = \int_2^8 v(t)\,dt,$

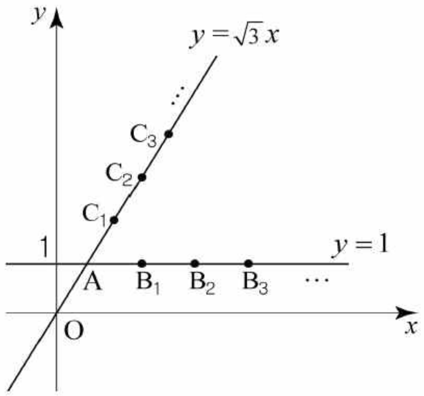
$S_3 = \int_8^{16} v(t)\,dt$

라 할 때,

$S_1 = -1,$ $S_2 = 36,$ $S_3 = -8$

따라서 $(\overline{\mathrm{OP}}$의 최댓값$) = S_1 + S_2 = 35$

28. 그림과 같이 점 A는 두 직선 $y=1$과 $y=\sqrt{3}x$의 교점이다. 자연수 n에 대하여 $y=1$ 위에 $\overline{AB_n}=n$인 점을 B_n, $y=\sqrt{3}x$ 위에 $\overline{AC_n}=n$인 점을 C_n이라 하자. 삼각형 AB_nC_n의 무게중심의 y좌표를 a_n이라 할 때, $a_n>6$를 만족하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, B_n, C_n은 제 1사분면의 점이다.) [4점]



28. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적문제 해결하기

삼각형 AB_nC_n은 한 변의 길이가 n인 정삼각형

이므로 $a_n=\dfrac{\sqrt{3}}{2}n\times\dfrac{1}{3}+1$

$a_n>6$, $n>\sqrt{300}$

따라서 n의 최솟값은 18

[오답노트 03차 ~]

2012.06 대성	3 8 13 14 15
	16 17 18 19 20
	21 24 25 27 28 29 30
2011.07 교육청	7 8 9 10 11
	14 16 17 18 20
	21 23 24 25 26 27 28

[2013 수능대비 오답노트 04차]

등비수열 로그혼합유형 : 식세우기 로그씌우기, 일단 - 안나오게 **등비급수 신유형 : a 숨기거나, r 숨기는 유형 파악** **역함수 적분 : 네모 아니면 고구마** **식세우기 극한 : 원이 나오는 경우 문자에 집중** **1/n t : 고쳐서 로피탈 하는게 좋은 경우** **이항정리 삼각형 : 이항정리를 이용한 정의들을 기억하자**

[2012.07 교육청]

8. 체중이 각각 75kg, 80kg인 갑과 을이 1개월짜리 다이어트 프로그램에 참가하여 동시에 다이어트를 시작하였다. 갑은 매일 전날에 비해 0.3%의 체중이 감소하였고, 을은 매일 전날에 비해 0.5%의 체중이 감소하였다고 할 때, 갑과 을의 체중이 같아지는 때는 다이어트 시작일로부터 며칠 후인가? (단, $\log 2 = 0.301$, $\log 3 = 0.477$, $\log 9.95 = 0.998$, $\log 9.97 = 0.999$로 계산한다.) [3점]

① 15일 ② 18일 ③ 22일
④ 25일 ⑤ 28일

8. [출제의도] 상용로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$75(0.997)^n = 80(0.995)^n$

$n(\log 0.997 - \log 0.995) = \log 80 - \log 75$

$n(-1 + 0.999 + 1 - 0.998) = 5\log 2 - \log 3 - 1$

$0.001 \times n = 0.028$

$\therefore n = 28$

10. 실수 전체에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(x)=f(x+4)$를 만족하고

$$f(x)=\begin{cases}-4x+2 & (0 \le x < 2)\\ x^2-2x+a & (2 \le x \le 4)\end{cases}$$

일 때, $\int_9^{11} f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① -8　② $-\frac{26}{3}$　③ $-\frac{28}{3}$

④ -10　⑤ $-\frac{32}{3}$

10. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$이다.

$2=16-8+a$

$a=-6$

$$\int_9^{11} f(x)\,dx=\int_1^3 f(x)\,dx$$

$$=\int_1^2(-4x+2)\,dx+\int_2^3(x^2-2x-6)\,dx$$

$$=-\frac{26}{3}$$

11. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)=x^2-(n+1)x+n^2$, $g(x)=n(x-1)$의 그래프의 두 교점의 x좌표를 a_n, b_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{19} \frac{100}{a_n b_n}$의 값은? [3점]

① 80 ② 85 ③ 90 ④ 95 ⑤ 100

11. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$x^2-(n+1)x+n^2=nx-n$

$x^2-(2n+1)x+n(n+1)=0$

$x=n\,,\ n+1$

$a_n b_n = n(n+1)$

$$\sum_{n=1}^{19}\frac{100}{n(n+1)}=100\sum_{n=1}^{19}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=100\left(1-\frac{1}{20}\right)$$
$$=95$$

12. 함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$에 대하여 $\dfrac{f'(1)}{f'(4)}$의 값은? [4점]

① -80 ② -84 ③ -88 ④ -92 ⑤ -96

12. [출제의도] 미분계수 계산하기

$$f'(x)=(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$+(x-1)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$\vdots$$
$$+(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$
$$f'(1)=(1-2)(1-3)\cdots(1-10)$$
$$f'(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)\cdots(4-10)$$
$$\frac{f'(1)}{f'(4)}=\frac{(-7)\times(-8)\times(-9)}{3\times2\times1}=-84$$

(별해)

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\{(x-2)(x-3)(x-4)\cdots(x-10)\}$$
$$=-9!$$
$$f'(4)=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4}\{(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)\cdots(x-10)\}$$
$$=3!\times6!$$
$$\therefore\frac{f'(1)}{f'(4)}=-84$$

13. 다항함수 $f(x)$가 $\lim_{x\to1}\dfrac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^2-1}=2$를 만족할 때, $f'(1)$의 값은? [4점]

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

13. [출제의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

극한값의 성질에 의하여

$\int_1^1 f(t)\,dt-f(1)=0$이므로 $f(1)=0$,

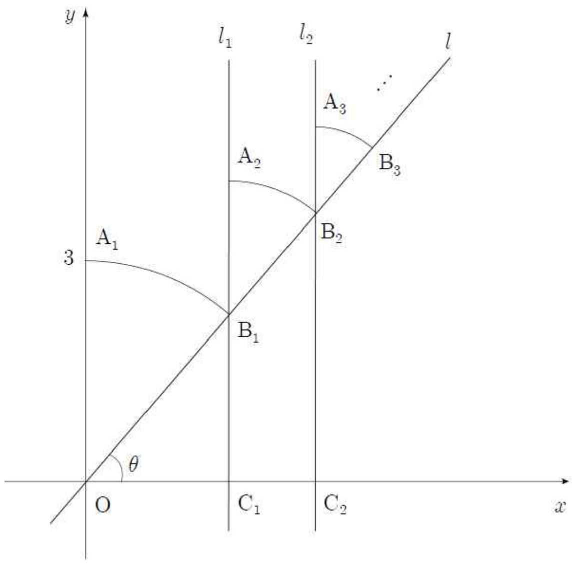
$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt}{x^2-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$

$$=\frac{f(1)}{2}-\frac{f'(1)}{2}=2$$

$\therefore\ f'(1)=-4$

14. 그림과 같이 원점 O를 지나고 기울기가 $\tan\theta$인 직선 l과 점 $A_1(0,\ 3)$이 있다. 점 O를 중심으로 하고 $\overline{OA_1}$을 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 B_1이라 하자. B_1을 지나고 y축에 평행한 직선 l_1이 x축과 만나는 점을 C_1이라 하고, 직선 l_1 위에 $\overline{OC_1} = \overline{B_1A_2}$가 되는 점 A_2를 잡는다. 점 B_1을 중심으로 하고 $\overline{B_1A_2}$를 반지름으로 하는 원과 직선 l이 만나는 점을 B_2라 하자. B_2를 지나고 y축에 평행한 직선 l_2가 x축과 만나는 점을 C_2라 하고, 직선 l_2 위에 $\overline{C_1C_2} = \overline{B_2A_3}$이 되는 점 A_3을 잡는다. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 부채꼴 $B_{n-1}B_nA_n$의 호의 길이를 $\widehat{A_nB_n}$이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{A_nB_n} = 9\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$이다. $\overline{B_1C_1}$의 값은? $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right.$ 이고 B_0은 원점이다.$\left.\right)$ [4점]



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

14. [출제의도] 무한등비급수의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

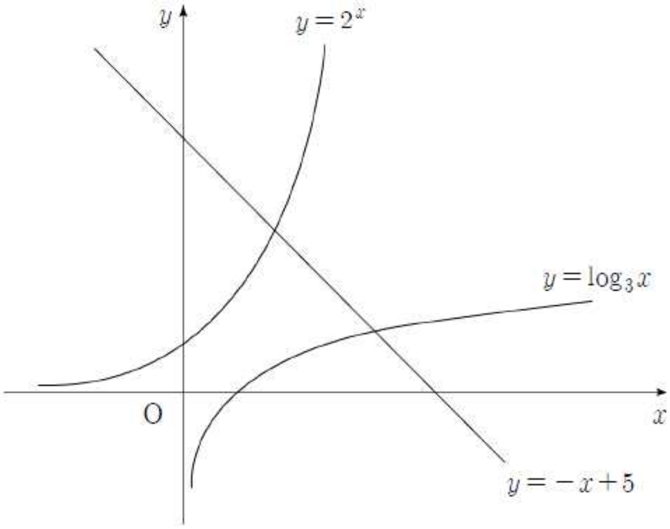
수열 $\left\{\widehat{A_nB_n}\right\}$은 첫째항이 $3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$이고 공비가 $\cos\theta$인 등비수열이다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{A_nB_n} = \frac{3\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{1 - \cos\theta} = 9\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\overline{B_1C_1} = 3\sin\theta = \sqrt{5}$$

15. 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_3 x$ 와 직선 $y=-x+5$ 가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$, $\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $a_1 > b_2$

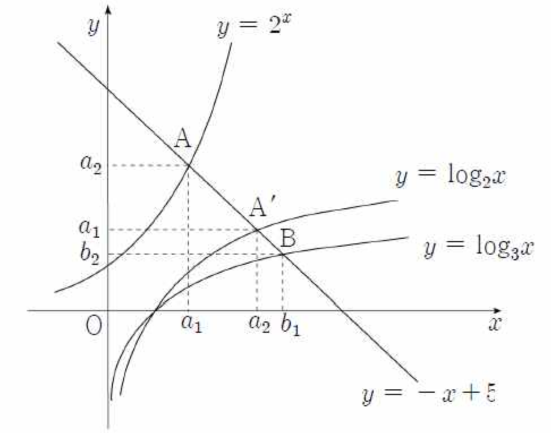
ㄴ. $a_1+a_2=b_1+b_2$

ㄷ. $\dfrac{a_1}{a_2}<\dfrac{b_2}{b_1}$

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 추론하기



ㄱ. $y=\log_2 x$ 와 $y=-x+5$ 가 만나는 점 $\mathrm{A}'(a_2,a_1)$ $\therefore a_1 > b_2$ (참)

ㄴ. 두 점 A, B는 $y=-x+5$ 위의 점이므로 $a_1+a_2=b_1+b_2=5$ (참)

ㄷ. 직선 OA′와 직선 OB의 기울기에 의해 $\dfrac{a_1}{a_2}>\dfrac{b_2}{b_1}$ (거짓)

17. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}=a_{n+1}+\frac{a_n}{n+1}$$

으로 정의할 때, 다음은 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다.

> $b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$이라 놓으면 $a_n=(n+1)b_n$이므로
>
> $$(n+3)b_{n+2}=(\boxed{(가)})\,b_{n+1}+b_n$$
>
> $$(n+3)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(b_{n+1}-b_n)\ \cdots\cdots\ (\bigstar)$$
>
> 식 $(\bigstar)$에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\ (m\geq 2)$를 대입하면
>
> $$4(b_3-b_2)=-(b_2-b_1)$$
> $$5(b_4-b_3)=-(b_3-b_2)$$
> $$\vdots$$
> $$(m+2)(b_{m+1}-b_m)=-(b_m-b_{m-1})$$
>
> 좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,
>
> $$b_{m+1}-b_m=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+2}\right)(b_2-b_1)$$
>
> $$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\ (n\geq 2)$$
>
> 따라서 $a_1=1,\ a_n=(n+1)\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{(나)}\right)\ (n\geq 2)$이다.

위의 (가), (나)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$라 할 때, $f(1)g(3)$의 값은? [4점]

(문제에 답이 보이는)

① $\dfrac{1}{240}$ ② $\dfrac{1}{180}$ ③ $\dfrac{1}{40}$ ④ $\dfrac{1}{30}$ ⑤ $\dfrac{1}{24}$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 일반항 추론하기

$b_n=\dfrac{a_n}{n+1}$이라 놓으면 $a_n=(n+1)b_n$이므로

$(n+3)b_{n+2}=\boxed{(n+2)}\,b_{n+1}+b_n$

$(n+3)(b_{n+2}-b_{n+1})=-(b_{n+1}-b_n)\ \cdots\cdots\ (\bigstar)$

식 $(\bigstar)$에 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1\ (m\geq 2)$를 대입하면

$$4(b_3-b_2)=-(b_2-b_1)$$
$$5(b_4-b_3)=-(b_3-b_2)$$
$$\vdots$$
$$(m+2)(b_{m+1}-b_m)=-(b_m-b_{m-1})$$

좌변과 우변을 각각 곱하여 정리하면,

$$b_{m+1}-b_m=\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(-\frac{1}{m+2}\right)(b_2-b_1)$$

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)\ (n\geq 2)$$

$$\therefore a_n=(n+1)\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\boxed{\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}}\right)\ (n\geq 2)$$

$$f(n)=n+2,\ g(k)=\frac{(-1)^{k-1}}{(k+2)!}$$

$$\therefore f(1)g(3)=\frac{1}{40}$$

18. 자연수 n에 대하여 함수 $y=\log_c|x|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 x좌표를 각각 a_n, b_n $(a_n>b_n)$이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a_n+b_n=0$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{c}{1-c}$이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$이 발산하면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. [출제의도] 무한급수의 성질 추론하기
$y=\log_c|x|$과 $y=n$의 교점의 x좌표를 구하면

$a_n=c^n$이고 $b_n=-c^n$이다. 즉, $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$은 공비가 c인 등비수열이다.
ㄱ. $a_n+b_n=c^n+(-c^n)=0$ (참)
ㄴ. $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ 이면 $0<c<1$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{c}{1-c}$ (참)

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$이 발산하면 수열 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$의 공비 $\frac{1}{c}$은 $\frac{1}{c}>1$ 이므로 수열 $\{a_n\}$의 공비 c는 $0<c<1$이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴한다. (거짓)

19. 정수 a, b, c에 대하여 함수 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+10$이 다음 두 조건을 모두 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 α에 대하여 $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx=2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
>
> (나) $-6<f'(1)<-2$

이때, 함수 $y=f(x)$의 극솟값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

19. [출제의도] 도함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

조건 (가)에 의해 $y=f(x)$의 그래프는 y축 대칭이므로

$f(x)=x^4+bx^2+10$

$f'(x)=4x^3+2bx$, $f'(1)=4+2b$ 이므로

$-6<4+2b<-2$

$-10<2b<-6$

$-5<b<-3$ 이므로 $b=-4$

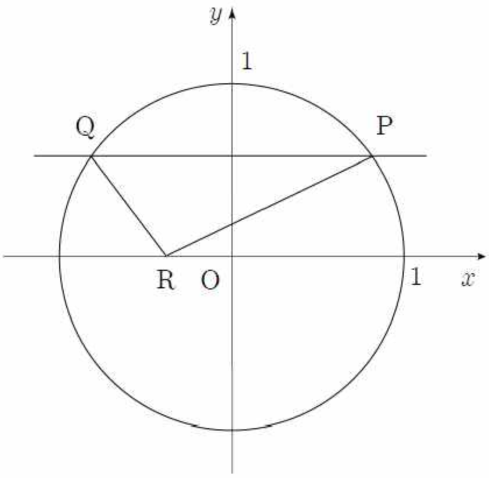
$f(x)=x^4-4x^2+10$

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

극솟값은 $f(-\sqrt{2})=f(\sqrt{2})=6$

20. 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점 $\mathrm{P}(\alpha,\ \beta)$를 지나고 x축과 평행한 직선을 그어 원과 만나는 다른 점을 Q, x축 위의 한 점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\alpha)$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\alpha\to 1-0}\frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}$의 값은? [4점]



① 1　　② $\sqrt{2}$　　③ $\sqrt{3}$　　④ 2　　⑤ $\sqrt{5}$

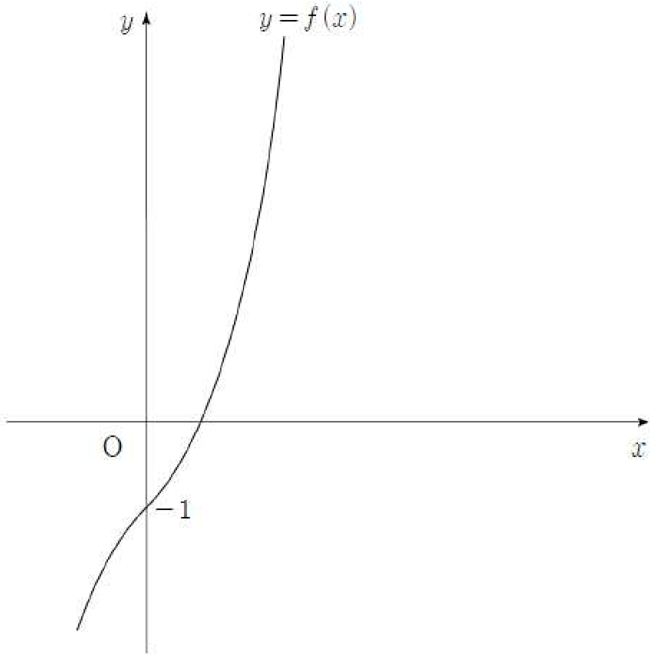
20. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$S(\alpha)=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$ 이므로

$$\lim_{\alpha\to 1-0}\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}}=\lim_{\alpha\to 1-0}\frac{\alpha\sqrt{(1-\alpha)(1+\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$$

$$=\lim_{\alpha\to 1-0}\alpha\sqrt{1+\alpha}=\sqrt{2}$$

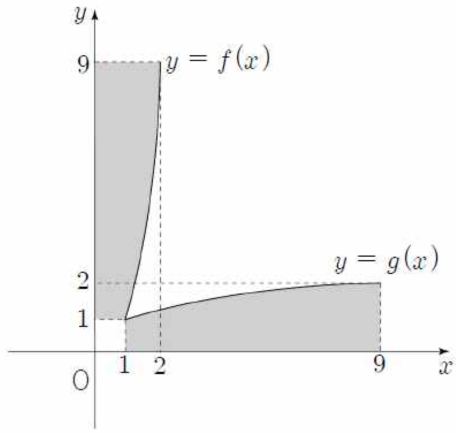
21. 함수 $f(x)=x^3+x-1$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_1^9 g(x)dx$의 값은? [4점]



① $\frac{47}{4}$　　② $\frac{49}{4}$　　③ $\frac{51}{4}$

④ $\frac{53}{4}$　　⑤ $\frac{55}{4}$

21. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



그림에서 어두운 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\begin{aligned}\int_1^9 g(x)dx &= 18-1-\int_1^2 f(x)dx \\ &= 18-1-\int_1^2 (x^3+x-1)dx \\ &= 17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2 \\ &= 17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}\end{aligned}$$

23. 방정식 $x+y+z=20$을 만족시키는 양의 정수 중 짝수인 x, y, z에 대하여 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. [3점]

23. [출제의도] 중복조합의 성질 이해하기
$x=2l$, $y=2m$, $z=2n$ (단, l, m, n은 자연수)라 하면, $l+m+n=10$이 된다.
${}_{3+7-1}C_7 = {}_9C_7 = 36$

26. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}\right)=5$를

만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$의 값을 구하시오. [4점]

26. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n = \sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}$ 이라 하면,

$\lim_{n\to\infty} b_n = 5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(b_n+\sqrt{n})^2-n}{\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{\sqrt{n}}+2\lim_{n\to\infty}b_n = 10$$

28. 양수 x에 대하여 $\log x$의 지표를 $f(x)$라 하자. 정수 부분이 네 자리인 양수 t에 대하여

$$\log t = \frac{1}{4}f(t^2) - \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{t}\right)$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 곱을 A라 할 때, $4\log A$의 값을 구하시오. [4점]

28. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log t = 3+\alpha \ (0 \le \alpha < 1)$

$\log t^2 = 2\log t = 6+2\alpha$

$\log \frac{1}{t} = -3-\alpha$

ⅰ) $\alpha = 0$ 일 때, $\log t = 3$, $t = 10^3$

ⅱ) $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ 일 때,

$3+\alpha = \frac{1}{4}\cdot 6 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = \frac{7}{2} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$

(조건에 맞지 않음)

ⅲ) $\frac{1}{2} \le \alpha < 1$ 일 때,

$3+\alpha = \frac{1}{4}\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot(-4) = \frac{15}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{3}{4}$

$\log t = 3+\frac{3}{4}$, $t = 10^{\frac{15}{4}}$

$A = 10^3 \times 10^{\frac{15}{4}} = 10^{\frac{27}{4}}$

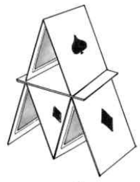
$\therefore 4\log A = 27$

29. 다음은 n층 카드탑에 대한 설명이다.

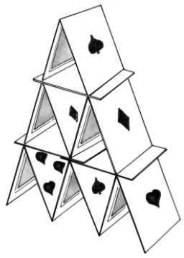
Ⅰ. 1층 카드탑 : 두 장의 카드를 맞대어 세운 것. Ⅱ. 2층 카드탑 : 1층 카드탑 두 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 한 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 1층 카드탑을 쌓은 것. Ⅲ. 3층 카드탑 : 1층 카드탑 세 개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 두 장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 2층 카드탑을 쌓은 것. Ⅳ. n층 카드탑 : 1층 카드탑 n개를 나란히 세우고 그 위에 가로로 $(n-1)$장의 카드를 올려놓은 후 그 위에 $(n-1)$층 카드탑을 쌓은 것.

1층 카드탑

2층 카드탑



3층 카드탑



⋮ ⋮

n층 카드탑을 만드는데 필요한 카드의 개수를 a_n이라 할 때, a_{20}의 값을 구하시오. [3점]

29. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 규칙성 추론하기

$a_{n+1} = a_n + 2(n+1) + n$

$a_{n+1} = a_n + 3n + 2$

수열 $\{a_n\}$의 계차수열의 일반항 $b_n = 3n+2$

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2) = \frac{n(3n+1)}{2}$$

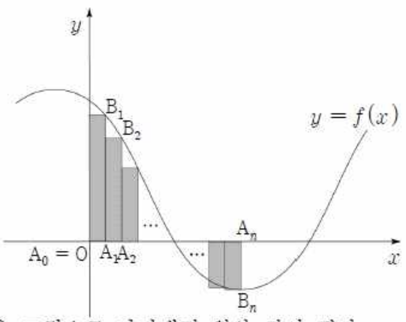
$a_{20} = 610$

30. 좌표평면 위의 두 점 O(0, 0), A(2, 0)이 있다. 자연수 n에 대하여 $\overline{\mathrm{OA}}$를 n등분한 점을 차례로 A_1, A_2, $\cdots$, A_{n-1}이라 하고, 점 O는 A_0, 점 A는 A_n이라 하자. 점 A_k를 지나고 x축과 수직인 직선이 함수 $f(x)=x^3-2x^2-5x+6$의 그래프와 만나는 점을 B_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\ ,\ n)$

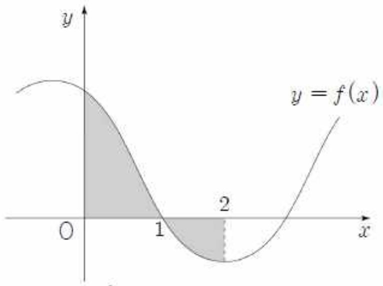
$\overline{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_k}$를 밑변으로 하고, $\overline{\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k}$를 높이로 하는 직사각형 n개의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $2\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.

[4점]

30. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기



S_n을 그림으로 나타내면 위와 같이 된다. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은 아래 그림의 어두운 부분의 넓이와 같으므로,



$$2\lim_{n\to\infty} S_n = 2\int_0^1 (x^3-2x^2-5x+6)dx$$
$$-2\int_1^2 (x^3-2x^2-5x+6)dx = 11$$

[2012.07 종로]

5. 수열 $\{a_n\}$에서 $a_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$이라 할 때, 다음 중 $\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{1+a_k}$을 n의 식으로 나타낸 것은? [3점]

① $\left(\frac{3}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+5$

② $\left(\frac{3}{2}\right)^n+7\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$

③ $\left(\frac{5}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-6$

④ $\left(\frac{5}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n+6$

⑤ $3\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$

5. $a_n=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{1+a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{1+2^k-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^k-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}$$

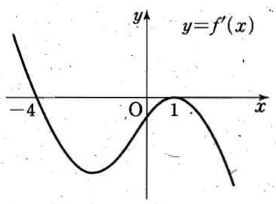
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

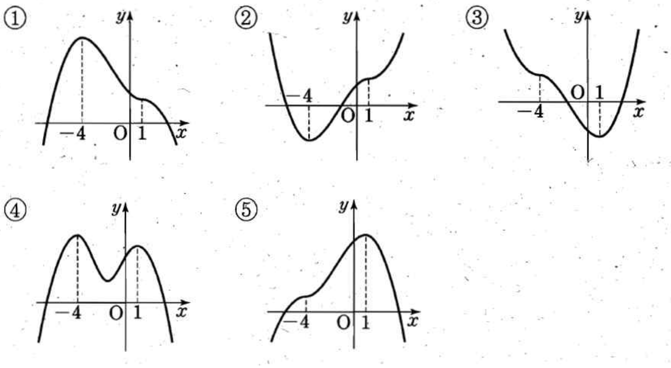
$$=\frac{\frac{3}{2}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}-\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=3\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^n-1\right\}-\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$=3\left(\frac{3}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-4$$

7. 다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은? [3점]





7. $x=-4$에서 극대이고, $x=1$에서 극값을 갖지 않는 것은 ①뿐이다.

8. 상자에 흰 공과 검은 공이 총 30개가 들어 있다. 이 공들은 A, B, C 세 회사에서 만들어진 공인데, A회사에서 만들어진 것은 흰 공이 5개, 검은 공이 5개, B회사에서 만들어진 것은 흰 공이 6개, 검은 공이 4개, C회사에서 만들어진 것은 흰 공이 7개, 검은 공이 3개이다. 이 상자에서 임의로 하나 꺼낸 공이 검은 공일 때, 이 공이 C회사에서 만들어진 공일 확률은? (단, 모든 공의 모양과 크기는 같다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{7}{18}$　⑤ $\frac{1}{2}$

8. 상자에 들어 있는 A, B, C 회사의 검은 공의 개수는 각각 차례대로 5, 4, 3개이므로 꺼낸 공이 검은 공일 때, 이 공이 C회사의 검은 공일 확률은

$$\frac{3}{5+4+3}=\frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

상자에서 임의로 공을 하나 꺼낼 때 검은 공이 나오는 사건을 A, C회사에서 만들어진 공일 사건을 C라 하면

$$\mathrm{P}(C|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap C)}{\mathrm{P}(A)}$$

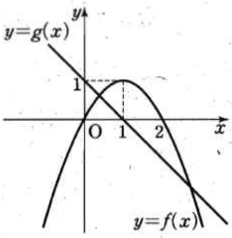
$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}{\frac{1}{3}\times\frac{5}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{10}}=\frac{1}{4}$$

9. 이차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.

집합 S가

$S=\{x\mid 9^{f(x)}-3^{f(x)+g(x)}-6\times 9^{g(x)}>0\}$

일 때, 다음 중 옳은 것은? [4점]



① $\frac{1}{2}\in S$

② $1\in S$

③ $\frac{3}{2}\in S$

④ $2\in S$

⑤ $\frac{5}{2}\in S$

9. $3^{f(x)}=F$, $3^{g(x)}=G$로 놓으면 $F>0$, $G>0$이고 주어진 식을 정리하면

$F^2-FG-6G^2>0$

$(F+2G)(F-3G)>0$

여기서 $F+2G>0$이므로

$F>3G$

$3^{f(x)}>3^{g(x)+1}$

$f(x)>g(x)+1$이므로

$-x(x-2)>-x+1+1$

$x^2-3x+2<0$

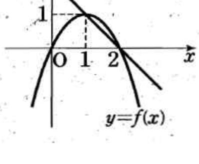
$1<x<2$

$\therefore S=\{x\mid 1<x<2\}$

$\therefore \frac{3}{2}\in S$

[다른 풀이]

$y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)+1$의 그래프보다 위에 있는 것은 $1<x<2$인 경우이다.



10. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\int_n^{n+1}(3x^2-1)dx$일 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{3}{a_n}$의 값은? [3점]

① $\frac{9}{10}$ ② $\frac{10}{11}$ ③ $\frac{11}{12}$

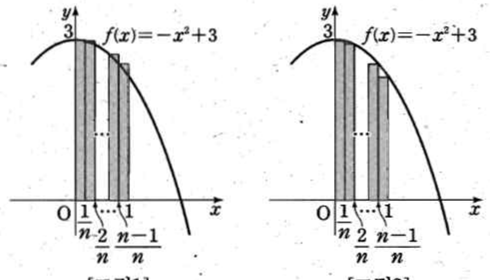
④ $\frac{12}{13}$ ⑤ $\frac{13}{14}$

10. $a_n=[x^3-x]_n^{n+1}=3n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{3}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{10}{11}$$

12. 함수 $f(x)=-x^2+3$에 대하여 정적분 $\int_0^1 f(x)dx$의 근삿값을 구하기 위하여 그림과 같이 구간 [0, 1]을 n등분하였다.



[그림1] [그림2]

[그림1]과 같이 각 구간의 왼쪽 끝의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합을 A, [그림2]와 같이 각 구간의 오른쪽 끝의 함숫값을 높이로 하는 직사각형들의 넓이의 합을 B라 할 때, $|A-B|\le 0.05$를 만족하는 n의 최솟값은? [4점]

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

12. [그림1]과 [그림2]는 [그림1]의 왼쪽 끝 직사각형과 [그림2]의 오른쪽 끝 직사각형을 제외하고는 모두 같은 직사각형들을 가지고 있으므로

$|A-B|=$([그림1]의 왼쪽 끝 직사각형의 넓이)

$-$([그림2]의 오른쪽 끝 직사각형의 넓이)

$$=\frac{1}{n}f(0)-\frac{1}{n}f(1)=\frac{1}{n}$$

따라서, $\frac{1}{n}\le 0.05$에서 $n\ge 20$이므로 n의 최솟값은 20이다.

13. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 $a_i+a_j \ge a_{i+j}$ $(i=1, 2, 3, \cdots, j=1, 2, 3, \cdots)$을 만족할 때, 임의의 자연수 n에 대하여 $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n} \ge a_n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> 〈증명〉
>
> (i) $n=1$일 때 $a_1 \ge a_1$이므로 성립한다.
>
> (ii) $n=1, 2, \cdots, k$(k는 자연수)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자.
>
> $$a_1 \ge a_1$$
> $$a_1+\frac{a_2}{2} \ge a_2$$
> $$\vdots$$
> $$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k} \ge a_k$$
>
> k개의 부등식을 변끼리 더하면
>
> $$ka_1+\left(\boxed{\text{(가)}}\right)\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k} \ge a_1+a_2+\cdots+a_k$$
>
> 양변에 $a_1+a_2+\cdots+a_k$를 더하면
>
> $$\left(\boxed{\text{(나)}}\right)\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)$$
> $$\ge 2(a_1+a_2+\cdots+a_k)$$
> $$=(a_1+a_k)+(a_2+a_{k-1})+\cdots+(a_k+a_1)$$
> $$\ge\left(\boxed{\text{(나)}}-1\right)a_{k+1}\ (\because a_i+a_j \ge a_{i+j})$$
>
> 양변에 a_{k+1}을 더하여 정리하면
>
> $$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1} \ge a_{k+1}$$
>
> 따라서, $n=k+1$일 때도 성립한다.
>
> 그러므로 수학적 귀납법에 의하여 임의의 자연수 n에 대하여
>
> $a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n} \ge a_n$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(6)\times g(9)$의 값은? [3점]

① 49 ② 50 ③ 51 ④ 52 ⑤ 54

13. (i) $n=1$일 때 $a_1 \ge a_1$이므로 성립한다.

(ii) $n=1, 2, \cdots, k$(k는 자연수)일 때 주어진 부등식이 성립한다고 가정하자. 즉,

$$a_1 \ge a_1$$
$$a_1+\frac{a_2}{2} \ge a_2$$
$$\vdots$$
$$a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k} \ge a_k$$

k개의 부등식을 변끼리 더하면

$$ka_1+\left(\boxed{k-1}\right)\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{k} \ge a_1+a_2+\cdots+a_k$$

양변에 $a_1+a_2+\cdots+a_k$를 더하면

$$\left(\boxed{k+1}\right)\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_k}{k}\right)$$
$$\ge 2(a_1+a_2+\cdots+a_k)$$
$$=(a_1+a_k)+(a_2+a_{k-1})+\cdots+(a_k+a_1)$$
$$\ge\left(\boxed{k+1}-1\right)a_{k+1}\ (\because a_i+a_j \ge a_{i+j})$$

양변에 a_{k+1}를 더하여 정리하면

$$a_1+\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{k+1} \ge a_{k+1}$$

따라서, $n=k+1$일 때도 성립한다.

$\therefore f(k)=k-1,\ g(k)=k+1$

$\therefore f(6)\times g(9)=5\times 10=50$

14. 다음은 DNA에 대한 설명이다.

단백질을 구성하는 주요한 성분인 아미노산은 지금까지 발견된 21개 밖에는 더 이상 없다는 학계의 정설을 깨고 22번째의 아미노산이 발견되었다. 아미노산은 1986년에 발견된 21번째의 것이 마지막이며 더 이상의 아미노산은 없는 것으로 학계에서는 믿어져 왔다. 그러나 미국 오하이오 주립대학의 미생물학자 조지프 크리스키 박사는 과학전문지 사이언스 최신호에 발표한 연구보고서에서 22번째의 아미노산을 발견, 이를 '피롤리신(Phyrrolysine)'으로 명명했다고 밝혔다. [2002-05-28 UPI=연합뉴스]

DNA는 아데닌(adenine), 구아닌(guanine), 시토신(cytosine), 티민(thymine) 4가지의 염기가 실처럼 이어진 형태를 가지고 있다. 이들로 구성된 아미노산은 이미 16가지를 초과하는 종류가 발견되었다. 즉, 아미노산의 종류는 염기의 종류보다 훨씬 많다. 따라서 하나의 염기가 하나의 아미노산을 암호화할 수는 없다. 두 개의 염기가 하나의 아미노산을 결정한다고 해도 암호화할 수 있는 최대 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$이기 때문에 16가지의 아미노산밖에는 암호화할 수 없다. 3개의 염기가 하나의 암호로 작용할 때에는 최대 경우의 수가 $4 \times 4 \times 4 = 64$이기 때문에 이미 발견된 아미노산을 충분히 암호화할 수 있다. 위와 같은 추론으로 조지 가모프는 3개의 염기가 하나의 아미노산을 암호화한다고 생각했다. 그 후 '이어진 3개의 DNA 염기가 하나의 아미노산을 결정하는데 DNA를 구성하는 염기들이 그 종류만 같다면 배열에 관계없이 하나의 아미노산을 암호화한다.'는 '3염기설'을 발표하였다.

가모프가 발표한 '3염기설'에 따라 3개의 염기로 암호화할 수 있는 서로 다른 아미노산의 종류의 수는? [3점]

① 4 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 64

14. 이어진 3개의 DNA 염기가 하나의 아미노산을 결정하는 데 DNA를 구성하는 염기들이 그 종류만 같다면 배열에 관계없이 하나의 아미노산을 암호화하므로 아데닌(adenine), 구아닌(guanine), 시토신(cytosine), 티민(thymine) 4가지 중에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 중복조합의 수이다.

$\therefore {}_{4+3-1}C_3 = {}_6C_3 = 20$

15. 두 집합 X, Y가

$$X=\left\{(x, y) \middle| \begin{pmatrix} 2a & -4 \\ 3-a & a^2-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ a\text{는 상수}\right\},$$

$$Y=\left\{(x, y) \middle| y=\frac{k}{x},\ k<0\right\}$$

일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $a=0$일 때 집합 X의 원소는 1개뿐이다.

ㄴ. 집합 X의 원소의 개수가 2이상이 되기 위한 실수 a의 값은 3개 존재한다.

ㄷ. $X \cap Y \neq \varnothing$을 만족하는 a의 값은 -2뿐이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. ㄱ. $a=0$일 때 집합 X의 원소는 다음 연립방정식의 근이다.

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \therefore \text{참}$$

ㄴ. $\begin{pmatrix} 2a & -4 \\ 3-a & a^2-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2a & -4 \\ 3-a & a^2-2a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -4 \\ 3-a & a^2-3a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

집합 X의 원소는 위의 연립방정식의 근이므로 근이 2개 이상 존재하려면 $\begin{pmatrix} a & -4 \\ 3-a & a^2-3a \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$$a(a^2-3a)+4(3-a)=0$$

$$\Longleftrightarrow a^2(a-3)-4(a-3)=0$$

$$\Longleftrightarrow (a^2-4)(a-3)=0$$

$$\Longleftrightarrow (a+2)(a-2)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-2, 2, 3$$

따라서, 집합 X의 원소의 개수가 2이상이 되기 위한 a의 값은 $-2, 2, 3$의 3개이다. $\therefore$ 참

ㄷ. $a=-2$일 때 집합 X는

$$X=\left\{(x, y) \middle| \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}\text{이므로}$$

집합 X는 $X=\left\{(x, y) \middle| y=-\frac{1}{2}x\right\}$이다.

같은 방법으로

$a=2$일 때 집합 X는

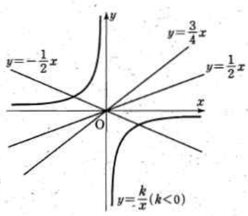
$$X=\left\{(x, y) \middle| y=\frac{1}{2}x\right\}$$

$a=3$일 때 집합 X는

$$X=\left\{(x, y) \middle| y=\frac{3}{4}x\right\}$$

이다.

따라서, $X \cap Y \neq \varnothing$을 만족하는 a의 값은 -2이다.



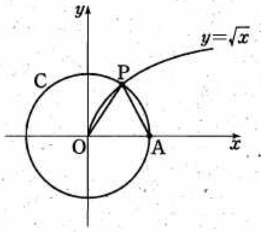
따라서, ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

17. 1에서 20까지의 자연수가 하나씩 적힌 공이 들어 있는 주머니 A와 1에서 12까지의 자연수가 하나씩 적힌 공이 들어 있는 주머니 B가 있다. 두 주머니에서 각각 하나씩 공을 꺼내는 시행을 한다. 주머니 A에서 꺼낸 공에 적힌 수를 a, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적힌 수를 b라 할 때, 3^a+7^b의 일의 자리의 수가 8일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{3}{16}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{5}{16}$

17. $a=1, 2, 3, \cdots, 20$을 차례대로 대입해서 계산해 보면 3^a의 일의 자리수는 3, 9, 7, 1이 5번 반복되므로 3^a의 일의 자리수가 3, 9, 7, 1이 될 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이다.
또한, $b=1, 2, 3, \cdots, 12$를 차례대로 대입해서 계산해 보면 7^b의 일의 자리수는 7, 9, 3, 1이 3번 반복되므로 7^b의 일의 자리수가 7, 9, 3, 1이 될 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이다.
따라서, 3^a+7^b의 일의 자리수가 8이 되는 경우는
3^a의 일의 자리수가 9이고 7^b의 일의 자리수가 9일 때
3^a의 일의 자리수가 7이고 7^b의 일의 자리수가 1일 때
3^a의 일의 자리수가 1이고 7^b의 일의 자리수가 7일 때
의 3가지 경우이므로 구하는 확률은
$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times 3=\frac{3}{16}$

20. 그림과 같이 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 원점이 아닌 점 P에 대하여 원점 O를 중심으로 하고 선분 OP를 반지름으로 하는 원 C가 있다. 원 C와 x축의 양의 부분이 만나는 점을 A라 하고 원 C의 넓이를 S_1, $\triangle$POA의 넓이를 S_2라 하자. 점 P가 원점 O에 한없이 가까이 갈 때, $\dfrac{S_1}{S_2}$의 극한값은? [4점]



① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

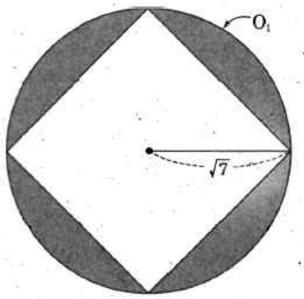
20. P$(t, \sqrt{t})$라 하면 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+t}$이고

$S_1=\pi(t^2+t)$, $S_2=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{t}\times\sqrt{t^2+t}$이므로

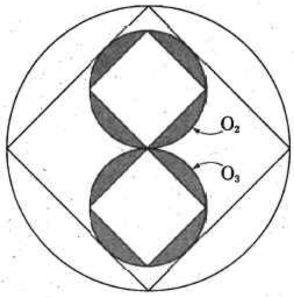
$$\therefore \lim_{t\to+0}\frac{\pi(t^2+t)}{\frac{1}{2}\sqrt{t}\sqrt{t^2+t}}=\lim_{t\to+0}\frac{\pi t(t+1)}{\frac{1}{2}t\sqrt{t+1}}=2\pi$$

21. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원 O_1이 있다. [그림1]과 같이 원 O_1에 내접하는 정사각형을 그리고 원 O_1의 내부에서 정사각형을 제외하여 얻어진 부분의 넓이를 S_1이라 하자. [그림2]와 같이 원 O_1에 내접하는 정사각형 내부에 반지름의 길이가 같은 두 원 O_2, O_3을 내접하여 그리자. 두 원 O_2, O_3에 내접하는 정사각형을 그리고 두 원 O_2, O_3의 내부에서 정사각형을 제외하여 얻어진 부분의 넓이를 S_2이라 하자. 이와 같은 과정을 계속 반복하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n($n=1$, 2, 3, …)이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]

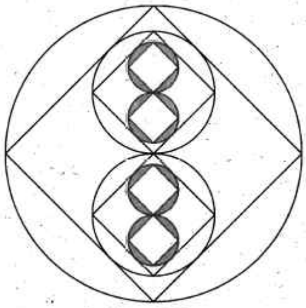
① $(\pi-2)(2+\sqrt{2})$
② $(\pi-2)(3+2\sqrt{2})$
③ $(\pi-2)(5+4\sqrt{2})$
④ $7(\pi-2)(2+\sqrt{2})$
⑤ $7(\pi-2)(4+3\sqrt{2})$



[그림1]

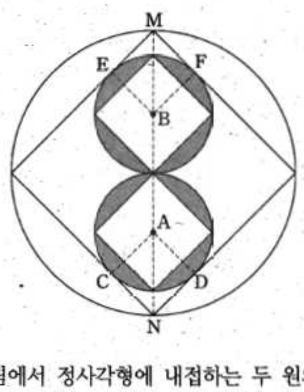


[그림2]


[그림3]

⋮

21.



그림에서 정사각형에 내접하는 두 원의 중심과 접점을 각각 A, B와 C, D, E, F라 하고, 큰 원의 반지름의 길이를 R, 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하자. 그러면 $\overline{AB}=2r$이고 $\overline{AN}=\overline{BM}=\sqrt{2}r$이다.

따라서, 큰 원의 지름의 길이 $\overline{MN}$은

$$\begin{aligned}\overline{MN}&=\overline{AN}+\overline{AB}+\overline{BM}\\&=\sqrt{2}r+2r+\sqrt{2}r\\&=2R\end{aligned}$$

$$R=(\sqrt{2}+1)r$$

$$\therefore \frac{r}{R}=\sqrt{2}-1$$

한편, $S_1=7\pi-14$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$은

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} S_n&=S_1+2(\sqrt{2}-1)^2S_1+2^2(\sqrt{2}-1)^4S_1+\cdots\\&=\frac{S_1}{1-2(\sqrt{2}-1)^2}\\&=\frac{7\pi-14}{1-(6-4\sqrt{2})}\\&=\frac{7\pi-14}{4\sqrt{2}-5}\\&=(\pi-2)(5+4\sqrt{2})\end{aligned}$$

23. 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=2x+1$일 때,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)}{x^2+3x}=\frac{q}{p}$$

이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[3점]

23. $(f\circ g)(x)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1$

$(g\circ f)(x)=2x^2+1$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{(f\circ g)(x)-(g\circ f)(x)}{x^2+3x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+4x}{x^2+3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4}{x+3}=\frac{4}{3}$$

$\therefore p+q=3+4=7$

24. 다항함수 $f(x)=x^3+3x+1$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$의 값을 구하시오. [3점]

24. $\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty} \frac{\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right\}}{\frac{1}{n}}$

$=\lim_{h\to 0} \frac{\{f(1+2h)-f(1-h)\}}{h} \quad \left(\because \frac{1}{n}=h\right)$

$=\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\cdot 2+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right)$

$=3f'(1)$

즉, $f'(x)=3x^2+3x$이므로 $f'(1)=6$이다.

$\therefore$ (주어진 식)$=3f'(1)=18$

25. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x-1)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$일 때, $f(x)$의 x^3의 계수를 구하시오. [3점]

25. $f(x-1)=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{10}$에서 x 대신 $x+1$를 대입하면

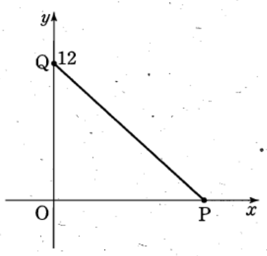
$$f(x)=1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{10}$$

이때 x^3의 계수는 ${}_3C_3+{}_4C_3+\cdots+{}_{10}C_3$이고

${}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_{n+1}C_{r+1}$이므로 x^3의 계수는

$$\begin{aligned}{}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3+{}_8C_3+{}_9C_3+{}_{10}C_3&={}_{11}C_4\\&=330\end{aligned}$$

29. 그림과 같이 좌표평면 위의 x축 위를 움직이는 점 P와 정점 Q(0, 12)가 있다. 시각 t에서 점 P의 x좌표는 t^2+at+2이고 $t=3$일 때의 x좌표의 변화율은 4이다. $t=3$일 때 $\overline{QP}$의 길이의 변화율은 $\frac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [4점]



(그냥 류트로 놓고 디엘디티)

29. $x=t^2+at+2 \Rightarrow \frac{dx}{dt}=2t+a$ ...... ㉠

$t=3$일 때 x좌표의 변화율이 4이므로 ㉠에 $t=3$을 대입하면

$2\times3+a=4 \quad \therefore a=-2$

$\therefore x=t^2-2t+2$ ...... ㉡

시각이 t일 때 $f(t)=\overline{QP}$라 하면

$\{f(t)\}^2=x^2+12^2=(t^2-2t+2)^2+12^2$ ...... ㉢

양변을 t로 미분하면

$f'(t)f(t)+f(t)f'(t)$

$=(2t-2)(t^2-2t+2)+(t^2-2t+2)(2t-2)$

$f(t)f'(t)=(t^2-2t+2)(2t-2)$

$\therefore f'(t)=\frac{(t^2-2t+2)(2t-2)}{f(t)}$ ...... ㉣

㉡, ㉢에서

$t=3$일 때, $f(3)=13$이므로 ㉣에 대입하면

$\therefore f'(3)=\frac{5\times4}{13}=\frac{20}{13}$

$\therefore p+q=13+20=33$

30. 정의역이 $\{x \mid x \geq 0\}$인 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 등식

$$\int f(x)dx = xf(x) + 3x^4 + 4x^2 + C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

가 성립한다. 이때 $\left|\int_0^1 f'(x)dx\right|$의 값을 구하시오. [4점]

30. $\int f(x)dx = xf(x) + 3x^4 + 4x^2 + C$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 12x^3 + 8x$$

$$f'(x) = -12x^2 - 8$$

$$\int_0^1 f'(x)dx = \int_0^1 (-12x^2 - 8)dx$$

$$= [-4x^3 - 8x]_0^1 = -12$$

$$\therefore \left|\int_0^1 f'(x)dx\right| = 12$$

[오답노트 04차 ~]

2012.07 교육청	8 10 11 12 13
	14 15 17 18 19
	20 21 23 26 28 29 30
2012.07 종로	5 7 8 9 10
	12 13 14 15 17
	20 21 23 24 25 29 30