우함수와 기함수의 적분 : 기함수의 평행이동

양민석 (Pabloff) / 수학 칼럼

0. 시작하기에 앞서...

본 칼럼은 필자가 수학 문제를 만들려고 끄적이다가 시간이 남아돌아서 쓴 것이며
킬러 출제가능성이 어느 정도 보여서 작성한 글이지 그렇게까지 큰 의미가 있는 내용은 아니기에
'이런 거 알아서 어디다써요?' 같은 질문은 사절합니다.

1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2+x)=f(2-x)$$

이다. $\int_0^4 xf(x)dx=6$일 때, $\int_0^4 f(x)dx$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

읽기 전에 위 문항을 한번 풀어보시고 읽는 걸 권장합니다.

⋮

1. 기본적인 우함수와 기함수의 적분

닫힌구간 $[-a, a]$에서 우함수의 적분 (우함수 → $h(x)=h(-x)$인 함수, y축 대칭)

일반적인 우함수 $h(x)$에 대하여 $x=-t$일 때, $\frac{dt}{dx}=-1$이고

$$\int_{-a}^{a} h(x)dx = \int_{0}^{a} h(x)dx + \int_{-a}^{0} h(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} h(x)dx - \int_{a}^{0} h(-t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} h(x)dx + \int_{0}^{a} h(t)dt$$

$$= 2\int_{0}^{a} h(x)dx$$

닫힌구간 $[-a, a]$에서 기함수의 적분 (기함수 → $h(-x)=-h(x)$인 함수, 원점 대칭)

일반적인 기함수 $h(x)$에 대하여 $x=-t$일 때, $\frac{dt}{dx}=-1$이고

$$\int_{-a}^{a} h(x)dx = \int_{0}^{a} h(x)dx + \int_{-a}^{0} h(x)dx$$

$$= \int_{0}^{a} h(x)dx - \int_{a}^{0} h(-t)dt$$

$$= \int_{0}^{a} h(x)dx - \int_{0}^{a} h(t)dt$$

$$= 0$$

위 내용은 (가), (나)형에 상관없이 정적분 계산에 있어서 꼭 숙지하고 있어야하는 부분이다.
(가)형에서는 '삼각함수의 적분 계산' 부터 '합성함수로 정의된 우함수, 기함수' 까지
다양하게 응용가능하고 (나)형도 '다항함수의 적분 계산' 에서 효율적으로 시간을 줄여줄 수 있다.

기본적인 응용

(가)형의 경우 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx = 0$이나, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2[\sin x]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 2$와 같이

$\sin x$가 기함수, $\cos x$가 우함수인 것을 이용해 계산을 줄일 수 있다.

(나)형의 경우 $\int_{-1}^{1} (3x^3+4x+5)\,dx = \int_{-1}^{1} 5dx = 2\int_{0}^{1} 5dx = 10$와 같이

모든 자연수 n에 대하여 x^{2n-1}은 기함수, x^{2n}는 우함수인 것을 이용해 계산을 줄일 수 있다.

2. 평행이동을 이용한 기함수 적분의 활용

평행이동과 치환적분

일반적인 실수 전체의 집합에서 미분가능한 기함수를 $g(x)$라 하자.

앞의 내용에서 $\int_{-a}^{a} g(x)dx = 0$임을 알 수 있다.

이 때, 적분구간을 $[-a, a]$에서 $[0, 2a]$정도로 바꾸어준다고 하면, 치환적분에 의해

$\int_{0}^{2a} g(x-a)dx = 0$가 되고, 함수 $g(x-a)$는 점 $(a, 0)$에 대칭인 함수이다.

이 글이 말하고자 하는 바가 여기에서부터 시작되는데,

함수 $h(x)$를 처음부터 점 $(a, 0)$에 대칭인 함수로 정의할 때,

$\int_{0}^{2a} h(x)dx = 0$라는 사실을 응용하면 재미있는 식을 도출해 낼 수 있다.

(기함수)$\times$(우함수) = (기함수)

소제목에서 보듯 (기함수)$\times$(우함수) = (기함수)이다.

점 $(a, 0)$에 대칭인 함수 $h(x)$에 대하여 $\int_{0}^{2a} h(x)dx = 0$만으로는 어떻게 문제를 내기 힘들지만,

예를 들어, 직선 $x = a$에 대하여 대칭인 함수 $A(x)$에 대하여

함수 $(x-a)A(x)$가 점 $(a, 0)$에 대칭이라는 점을 이용하면 $\int_{0}^{2a} (x-a)A(x)dx = 0$에서

$\int_{0}^{2a} xA(x)dx = a\int_{0}^{2a} A(x)dx$ 와 같은 식을 얻어낼 수 있다.

$\int_{0}^{2a} xA(x)dx = a\int_{0}^{2a} A(x)dx$를 응용해서 낼 수 있는 문제들은 생각보다 많은데,
이것이 의미하는 바는

<u>함수 $A(x)$가 직선 $x=a$에 대하여 대칭일 때,</u>
<u>$A(x)$와 $xA(x)$ 둘 중 어느 하나만 적분 가능하면 나머지 하나의 적분 값을 알 수 있다는 뜻이다.</u>

좀 더 일반적으로 적분구간을 $[-a, a]$에서 $[-a+b, a+b]$정도로 바꾼다면,
$\int_{-a+b}^{a+b} xA(x)dx = b\int_{-a+b}^{a+b} A(x)dx$로 b를 잘 조절해
전혀 예상치 못한 구간의 적분 값을 물을 수도 있다. (이 때는 대칭이 되는 기준선이 $x=b$)

이 때, 풀이의 방향까지 적분가능한 $A(x)$을 통해 고교과정 내에서 적분불가능한 $xA(x)$의 적분값을 구하는 형식이라면 아마 앵간히 치환적분을 잘 활용한게 아닌 이상 맞추기 어려울 것이다.
(+ $xA(x)$의 형태를 보고 대부분 부분적분을 시도할 것이기에 더더욱 어려울 것이다.)

게다가 (가)형에는 $\sin x$라는 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대칭인 아주 좋은 기본적인 함수 소재가 있다.
($\cos x$도 직선 $x=\pi$에 대칭이다.)

일반적인 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f(\sin x)$ 혹은 $f(\cos x)$와 같은 합성함수를 만들어 놓은 후 함수가 직선에 대칭임을 이용해서 문제를 낼 수도 있다.

1. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2+x)=f(2-x)$$

이다. $\int_{0}^{4} xf(x)dx = 6$일 때, $\int_{0}^{4} f(x)dx$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

맨 처음의 이 문제는 치환적분을 이용해서 풀어도 되고, 칼럼 내용을 이용한다면
$\int_{0}^{4} xf(x)dx = 2\int_{0}^{4} f(x)dx = 6$, $\int_{0}^{4} f(x)dx = 3$ 정도로 해결할 수 있다.

3. 글을 마치며...

수학 문제를 만들던 도중 “평가원에서 많이 다루지 않았던 소재 중에서 어떤 식으로 킬러나 준킬러를 낼 수 있을까?” 고민하다가 떠오른 생각 중 하나를 토대로 칼럼을 작성하게 되었습니다.

사실 글에서 다룬 내용은 위 내용으로 응용할 수 있는 것 중 일부분에 불과하고
생각보다 다양한 짓들을 할 수 있으니 혹시라도 너무 심심한 분들은 시도해보시기 바랍니다.

응용을 하면 할수록 킬러스러운 것들이 많이 나와서 조심스럽게 평가원의 30번 소재....로도 예측정도는 해보지만, 어디까지나 아님 말고 식의 예측이므로 맞을 가능성은 얼마 되지 않습니다.

칼럼 내용에 적혀있는 것 정도만 숙지하신다면 적어도 같은 소재의 문제가 나왔을 때
당황할 일은 없을 것 같으니 칼럼 내에서 필요한 부분 잘 뽑아서 학습하시기 바랍니다.

2021학년도 대학수학능력시험 수학 (가)형 20번 풀이

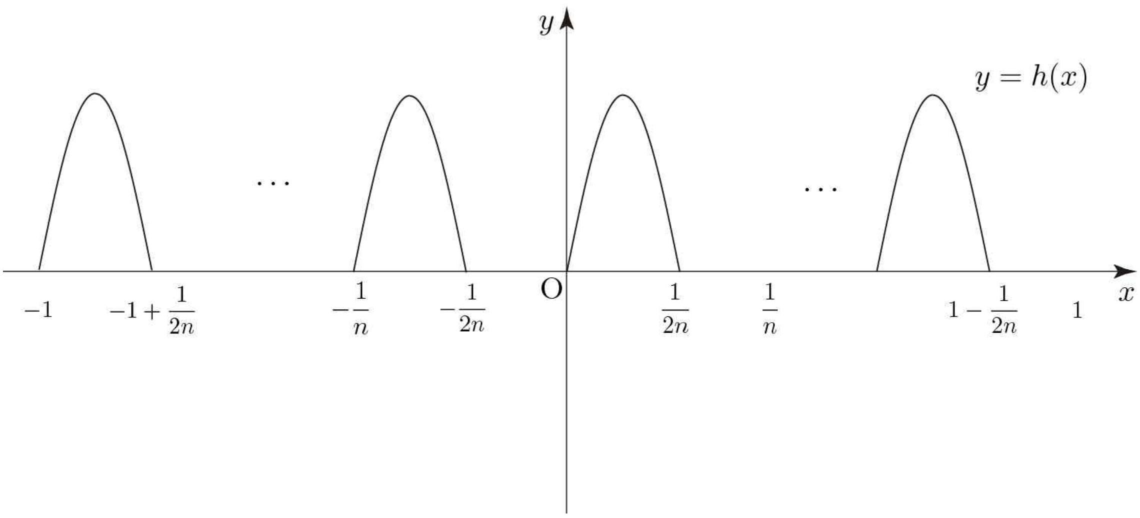
20. 함수 $f(x) = \pi \sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x) = f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 2, \quad \int_{-1}^{1} x\,h(x)\,dx = -\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

먼저, 풀이의 앞부분은 조금 생략하고

다른 풀이들과 같이 $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$에서 알 수 있듯, 함수 $h(x)$의 개형은



와 같다.

이 때, 구간 $\left[1-\frac{1}{2n},\ 1\right]$에서 함수 $g(x)$가 0이므로

이에 따라 우리는

$\int_{-1}^{1} h(x)dx = \int_{-1}^{1-\frac{1}{2n}} h(x)dx = 2$, $\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{-1}^{1-\frac{1}{2n}} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$임을 알 수 있다.

위 칼럼에서 함수 $A(x)$가 $x=b$에 대하여 대칭일 때,

$\int_{-a+b}^{a+b} xA(x)dx = b\int_{-a+b}^{a+b} A(x)dx$라는 식이 성립했으므로 이를 적용해보면

함수 $h(x)$가 $x=-\frac{1}{4n}$에 대칭이므로 위 식에 $a=1-\frac{1}{4n}$, $b=-\frac{1}{4n}$를 대입하면

$\int_{-1}^{1-\frac{1}{2n}} xh(x)dx = \left(-\frac{1}{4n}\right) \times \int_{-1}^{1-\frac{1}{2n}} h(x)dx$임을 알 수 있고

별다른 적분 없이 $-\frac{1}{32} = -\frac{1}{4n} \times 2$에서 $n=16$임을 알 수 있다.