2014학년도 대학수학능력시험 예비 시행 문제지

수학 영역(B형) 홀수형 5 지선다형

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$에 대하여 역행렬 A^{-1}의 모든 성분의 합은? 1)

[2점] [2014학년도 예비평가]

① 2　② 1　③ 0　④ -1　⑤ -2

2. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{2x}+a}{x} & (x \neq 0) \\ b & (x=0) \end{cases}$$

이 $x=0$에서 연속이 되도록 두 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은? 2)

[2점] [2014학년도 예비평가]

① 1　② $e-1$　③ 2　④ e　⑤ 3

3. 좌표공간에서 두 점 $P(6,7,a)$, $Q(4,b,9)$를 이은 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표가 $(2,5,14)$일 때, $a+b$의 값은? 3)

[2점] [2014학년도 예비평가]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

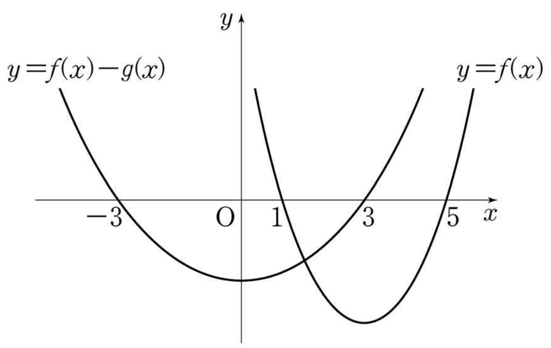
4. 두 사건 A, B가 서로 독립이고 $P(A^c)=\frac{3}{4}$, $P(A\cup B^c)=\frac{3}{10}$일 때, $P(B)$의 값은? (단, A^c은 A의 여사건 이다.) 4)

[3점] [2014학년도 예비평가]

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{4}{5}$ ④ $\frac{13}{15}$ ⑤ $\frac{14}{15}$

5. 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 부등식 $\frac{g(x)}{f(x)}\geq 1$을 만족시키는 정수 x의 개수는? 5)

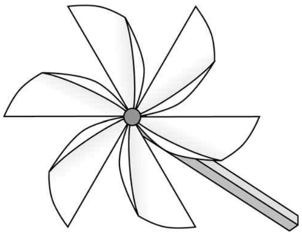
[3점] [2014학년도 예비평가]



① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

6. 빨간색과 파란색을 포함한 서로 다른 6가지의 색을 모두 사용하여, 날개가 6개인 바람개비의 각 날개에 색칠하려고 한다. 빨간색과 파란색을 서로 맞은편의 날개에 칠하는 경우의 수는? (단, 각 날개에는 한 가지 색만 칠하고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) 6)

[3점] [2014학년도 예비평가]



① 12 ② 18 ③ 24 ④ 30 ⑤ 36

7. 두 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각

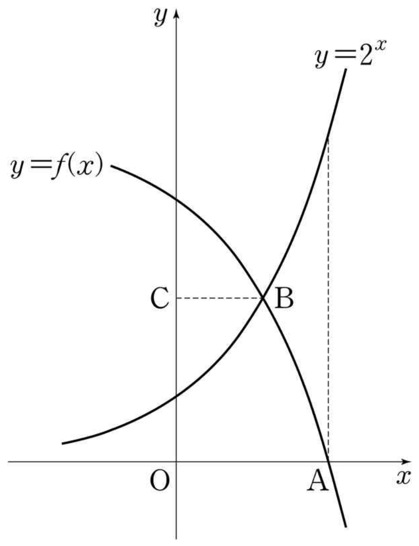
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

이다. 원 $(x-2)^2+(y+3)^2=5^2$이 합성변환 $f\circ g$에 의하여 옮겨진 도형이 y축과 만나는 두 점의 좌표를 각각 $(0, a)$, $(0, b)$라 할 때, $a+b$의 값은? 7)

[3점] [2014학년도 예비평가]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

[8~9] 곡선 $y=-2^x$을 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선을 $y=f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A라 할 때, 8번과 9번의 두 물음에 답하시오.(단, $m>2$이다.)



8. 곡선 $y=2^x$이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 B, 점 B에서 y축에 내린 수선의 발을 C라 하자. $\overline{OA}=2\overline{BC}$일 때, m의 값은? 8)

[3점] [2014학년도 예비평가]

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

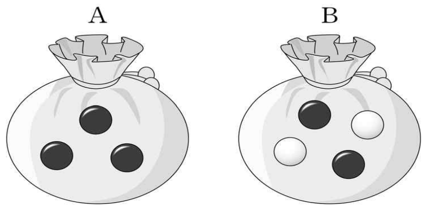
9. $m=5$일 때, 점 A를 지나고 y축과 평행한 직선, 곡선 $y=2^x$, x축, y축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는? 9)

[3점] [2014학년도 예비평가]

① $\frac{12}{\ln 2}\pi$ ② $\frac{14}{\ln 2}\pi$ ③ $\frac{16}{\ln 2}\pi$ ④ $\frac{18}{\ln 2}\pi$ ⑤ $\frac{20}{\ln 2}\pi$

10. 주머니 A에는 검은 구슬 3개가 들어 있고, 주머니 B에는 검은 구슬 2개와 흰 구슬 2개가 들어 있다. 두 주머니 A, B중 임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은 색일 때, 선택된 주머니가 B이었을 확률은? [10)]

[3점] [2014학년도 예비평가]



① $\frac{5}{14}$　② $\frac{2}{7}$　③ $\frac{3}{14}$　④ $\frac{1}{7}$　⑤ $\frac{1}{14}$

11. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 $A^2 = 3A$를 만족시킨다.

다음은 모든 자연수 n에 대하여 행렬 $(A-E)^n$을

$$(A-E)^n = a_n A + (-1)^n E$$

와 같이 나타낼 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이다.)

자연수 n에 대하여 $(A-E)^{n+1} = \{a_n A + (-1)^n E\}(A-E)$ $= a_n A^2 - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E$ 이고, $A^2 = 3A$이므로 $(A-E)^{n+1} = (2a_n + \boxed{\text{(가)}})A + (-1)^{n+1}E$ 이다. 그러므로 $a_{n+1} = 2a_n + \boxed{\text{(가)}}$ …… ㉠ 이다. 따라서 2이상인 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n)$ 이다. 또한 $a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n + a_{n+1} = \boxed{\text{(나)}}$ …… ㉡이다. ㉠과 ㉡에 의해 $3a_n + (-1)^n = \boxed{\text{(나)}}$ 이다. 따라서 $a_n = \dfrac{\boxed{\text{(나)}} + (-1)^{n+1}}{3}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, $f(9) \times g(5)$의 값은? [11)]

[3점] [2014학년도 예비평가]

① -32　② -16　③ 8　④ 16　⑤ 32

12. 두 함수 $f(x)=x^2+2x-1$, $g(x)=\sin x-\cos x$에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? 12)

[3점] [2014학년도 예비평가]

① $\sqrt{2}-1$ ② $\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}-1$ ④ $\sqrt{2}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+1$

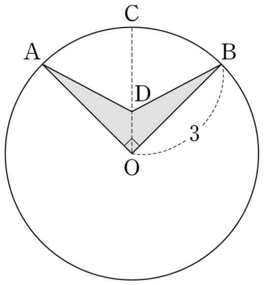
13. 기울기가 m인 두 직선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 y절편은 각각 $2, 0$이다. 무리방정식 $\sqrt{f(x)}=g(x)$의 실근은 α이고, 무리방정식 $\sqrt{f\left(\frac{x}{2}\right)}=g(x-\alpha)$의 실근은 2일 때, $m+\alpha$의 값은? 13)

[3점] [2014학년도 예비평가]

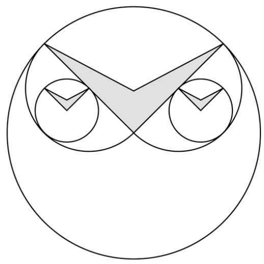
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

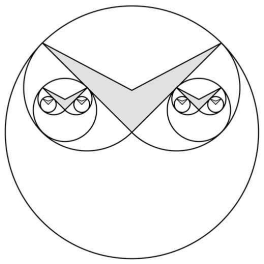
14. 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 있다. 그림과 같이 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$인 원 위의 두 점을 A, B라 하고, 호 AC와 호 BC의 길이가 같은 점을 C라 하자. 선분 OC를 $1:2$로 내분하는 점을 D라 하고, 네 선분 OA, AD, DB, BO로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 반지름 OA, OB를 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 두 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 두 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에서 그린 두 내접원의 4개의 반지름을 각각 지름으로 하는 4개의 반원을 그리고, 4개의 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 각각 그린다. 4개의 내접원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 4개의 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모든 모양의 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은? 14)

[4점] [2014학년도 예비평가]



R_1


R_2


R_3

......

① $\frac{11\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{12\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{13\sqrt{2}}{7}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{7}$

15. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 = A - E,\ (AB)^2 = E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) 15)

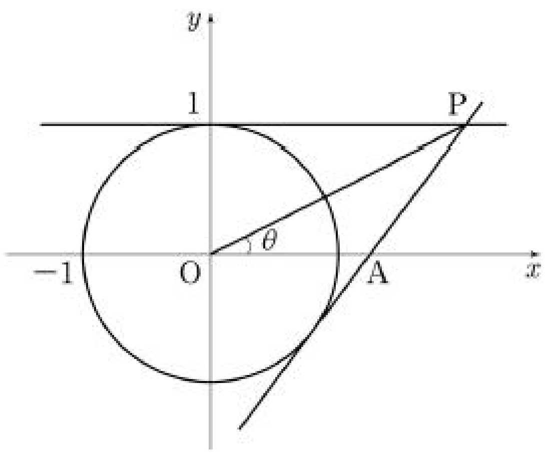
[4점] [2014학년도 예비평가]

ㄱ. A와 B는 모두 역행렬을 가진다.
ㄴ. $BAB = -A^2$
ㄷ. $B^2AB^2 = A^2 + B^2$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 그림과 같이 직선 $y=1$위의 점 P에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선이 x축과 만나는 점을 A라 하고, $\angle AOP = \theta$라 하자. $\overline{OA} = \frac{5}{4}$일 때, $\tan 3\theta$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$이다.) 16)

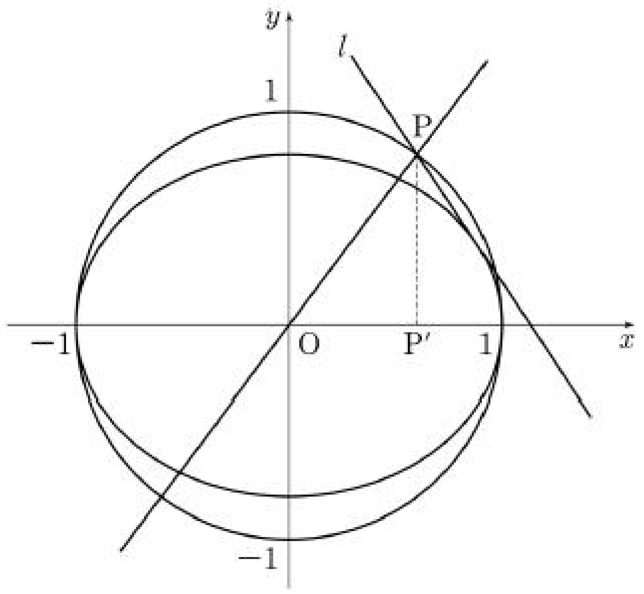
[4점] [2014학년도 예비평가]



① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

17. 그림과 같이 좌표평면에서 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 P'이라 하자. 점 P'을 초점으로 하고, x축 위에 있는 원의 지름을 장축으로 하는 타원에 대하여 점 P에서 타원에 그은 접선 l의 기울기가 $-\frac{3}{2}$일 때, 직선 OP의 기울기는? 17)

[4점] [2014학년도 예비평가]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{17}{12}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

18. $x > 0$에서 함수 $f(x)$가 미분가능하고 $2x \le f(x) \le 3x$이다. $f(1)=2$이고 $f(2)=6$일 때, $f'(1)+f'(2)$의 값은? 18)

[4점] [2014학년도 예비평가]

① 8 ② 7 ③ 6 ④ 5 ⑤ 4

19. 어느 지역 학생 중에서 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생의 비율이 36%라고 한다. 이 지역에서 학생 100명을 임의추출할 때, 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생이 42명 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? 19)

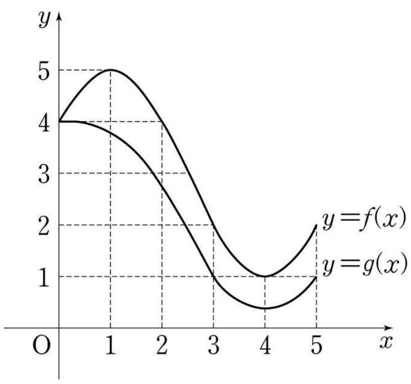
[4점] [2014학년도 예비평가]

z	$P(0 \le Z \le z)$
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

① 0.6056 ② 0.8276 ③ 0.8944 ④ 0.9332 ⑤ 0.9599

20. 열린 구간 $(0, 5)$에서 미분가능한 두 함수 $f(x), g(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? 20)

[4점] [2014학년도 예비평가]



ㄱ. $h(3) = 4$
ㄴ. $h'(2) \ge 0$
ㄷ. 함수 $h(x)$는 구간 $(3, 4)$에서 감소한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때 $f(x)=\dfrac{(x^2-1)^2}{x^4+1}$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2)=f(x)$이다.

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [21)]

[4점] [2014학년도 예비평가]

ㄱ. $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 4\int_{0}^{1} f(x)dx$
ㄴ. $1 < x < 2$일 때 $f'(x) > 0$이다.
ㄷ. $\int_{1}^{3} x\lvert f'(x)\rvert dx = 4$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 첫째항이 -6이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 30일 때, n의 값을 구하시오. [22)]

[3점] [2014학년도 예비평가]

23. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, a)$, $B(a, 2)$에 대하여 $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AB} = 14$일 때, 양수 a의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [23)]

[3점] [2014학년도 예비평가]

24. 일차변환 f에 의하여 점 $(1, 0)$은 자기 자신으로 옮겨지고, 점 $(1, 1)$은 점 $(-1, -1)$로 옮겨진다. 일차변환 f에 의하여 점 $(3, -4)$가 점 (a, b)로 옮겨질 때, $a+b$의 값을 구하시오. 24)

[3점] [2014학년도 예비평가]

25. 통신이론에서 신호의 주파수 대역폭이 $B(Hz)$이고 신호잡음전력비가 x일 때, 전송할 수 있는 신호의 최대 전송 속도 $C(bps)$는 다음과 같이 계산된다고 한다.

$$C = B \times \log_2(1+x)$$

신호의 주파수 대역폭이 일정할 때, 신호잡음전력비를 a에서 $33a$로 높였더니 신호의 최대 전송 속도가 2배가 되었다. 양수 a의 값을 구하시오. (단, 신호잡음전력비는 잡음전력에 대한 신호전력의 비이다.) 25)

[3점] [2014학년도 예비평가]

26. 닫힌 구간 $[-1, 3]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} a(1-x^2) & (-1 \le x < 0) \\ a\left(1-\dfrac{x}{3}\right) & (0 \le x \le 3) \end{cases}$$

일 때, $P(-1 \le X \le 0)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 26)

[4점] [2014학년도 예비평가]

27. 포물선 $y^2 = 4px$ $(p > 0)$의 초점을 F, 포물선의 준선이 x축과 만나는 점을 A라 하자. 포물선 위의 점 B에 대하여 $\overline{AB} = 7$이고 $\overline{BF} = 5$가 되도록 하는 p의 값이 a 또는 b 일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오. (단, $a \neq b$이다.) 27)

[4점] [2014학년도 예비평가]

28. 좌표공간에서 세 직선

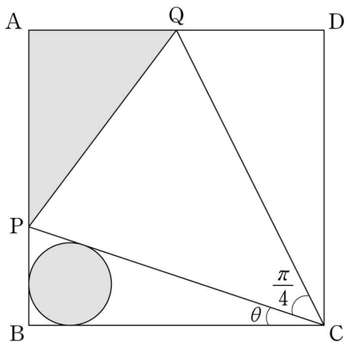
$$x = -y = \frac{z}{2},\ x = y = \frac{z}{2a},\ x = -\frac{y}{2} = \frac{z}{a}$$

가 같은 평면 위에 있을 때, $20a$의 값을 구하시오. (단, $a \neq 0$이다.) 28)

[4점] [2014학년도 예비평가]

29. 한 변의 길이가 1인 정사각형 $ABCD$의 변 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle BCP = \theta$라 하고, 변 AD 위의 점 Q를 $\angle PCQ = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡는다. 삼각형 APQ의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 BCP의 내접원의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\pi$ 이다. $10p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 29)

[4점] [2014학년도 예비평가]

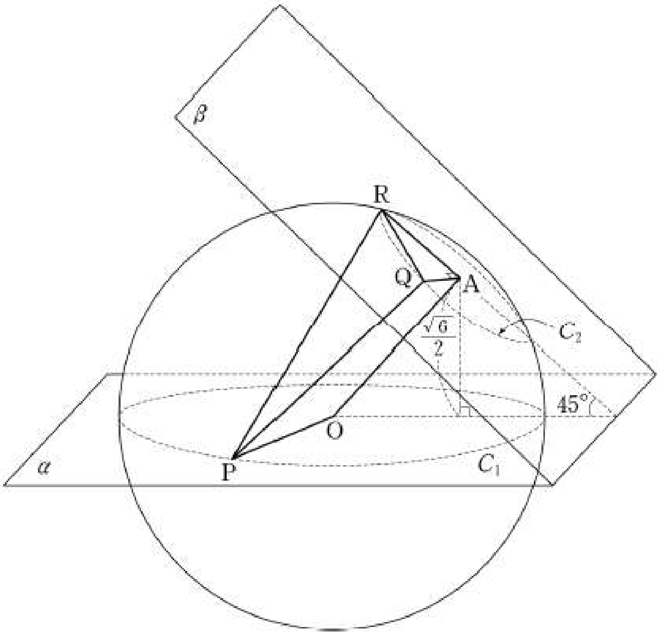


30. 반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 p, 원 C_2 위에 두 점 Q, R를 잡는다.

(가) $\angle QAR = 90^\circ$
(나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

평면 PQR와 평면 $AQPO$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) 30)

[4점] [2014학년도 예비평가]



1) 정답 : ②

$A=\begin{pmatrix}1&1\\4&5\end{pmatrix}$에서 $A^{-1}=\frac{1}{5-4}\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}$

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}5&-1\\-4&1\end{pmatrix}$

그러므로 A^{-1}의 모든 성분의 합은 1이다

2) 정답 : ①

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=\lim_{x\to0}f(x)$이다.

$\therefore b=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+a}{x}$

$x\to0$일 때, (분모) $\to0$ 이므로 (분자) $\to0$ 이어야한다.

$\therefore 0=1+a \quad \therefore a=-1$

$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2\right)=1\times2=2$

$\therefore b=2$

따라서 $a+b=(-1)+2=1$

3) 정답 : ⑤

두 점 $P(6,7,a)$, $Q(4,b,9)$를 이은 선분 PQ를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는 $\left(\frac{8-6}{2-1},\frac{2b-7}{2-1},\frac{18-a}{2-1}\right)$ 이므로 $(2,2b-7,18-a)=(2,5,14)$ 이다.

$\therefore 2b-7=5$, $18-a=14$

$\therefore a=4$, $b=6$ 이므로 $a+b=10$

4) 정답 : ⑤

$P(A^c)=\frac{3}{4}$에서 $P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

또, 두 사건 A,B가 서로 독립이므로 A와 B^c도 서로 독립이다.

$\therefore P(A\cap B^c)=P(A)\cdot P(B^c)$

한편, $P(A\cup B^c)=P(A)+P(B^c)-P(A\cap B^c)=P(A)+P(B^c)-P(A)\cdot P(B^c)$이므로₩

$\frac{3}{10}=\frac{1}{4}+P(B^c)-\frac{1}{4}P(B^c)$이다.

$\frac{3}{4}P(B^c)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

$P(B^c)=\frac{1}{15}$

$\therefore P(B)=1-P(B^c)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

5) 정답 : ②

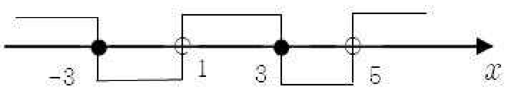
$f(x)=a(x-1)(x-5)$ $(a>0)$,

$f(x)-g(x)=b(x-3)(x+3)$ (단, $b>0$)이라 놓으면 $\dfrac{g(x)}{f(x)}-1 \geq 0$, $\dfrac{g(x)-f(x)}{f(x)} \geq 0$ 에서 $\dfrac{-b(x-3)(x+3)}{a(x-1)(x-5)} \geq 0$

$\therefore \dfrac{(x-3)(x+3)}{(x-1)(x-5)} \leq 0$

양변에 분모의 제곱을 곱하면

$(x-1)(x-5)(x-3)(x+3) \leq 0$ (단, $x \neq 1$, $x \neq 5$)



따라서 $-3 \leq x < 1$ 또는 $3 \leq x < 5$

$\therefore$ 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 3, 4$로 6개이다.

[다른 풀이]

$\dfrac{g(x)}{f(x)} \geq 1$에서 $\dfrac{g(x)}{f(x)}-1 \geq 0$, $\dfrac{g(x)-f(x)}{f(x)} \geq 0$

양변에 $\{f(x)\}^2$를 곱하면 $f(x)\{g(x)-f(x)\} \geq 0$ (단, $f(x) \neq 0$)

ⅰ) $f(x) > 0$이고 $g(x)-f(x) \geq 0$일 때, 즉, $f(x) > 0$이고 $f(x)-g(x) \leq 0$인 경우

$\{x|x > 5 \text{ 또는 } x < 1\} \cap \{x|-3 \leq x \leq 3\}$ 이므로 $\{x|-3 \leq x < 1\}$

$\therefore$ 정수 x는 $-3, -2, -1, 0$이므로 4개다.

ⅱ) $f(x) < 0$이고 $g(x)-f(x) \leq 0$일 때, 즉, $f(x) < 0$이고 $f(x)-g(x) \geq 0$인 경우

$\{x|1 < x < 5\} \cap \{x|x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 3\}$ 이므로 $\{x|3 \leq x < 5\}$

$\therefore$ 정수 x는 $3, 4$이므로 2개이다.

그러므로 ⅰ), ⅱ)에 의해 $\dfrac{g(x)}{f(x)} \geq 1$을 만족시키는 정수 x의 개수는 6이다.

6) 정답 : ③

6개의 날개 중 한 곳에 빨간색이 칠해지면 파란색은 맞은편의 날개에 칠해지므로 빨간색과 파란색을 같은 색으로 취급하면 서로 다른 5개의 색을 원형으로 배열하는 원순열의 수와 같다.

$\therefore (5-1)! = 4! = 24$

(다른 풀이)

6개의 날개 중 한 곳에 빨간색이 칠해지면 파란색은 맞은편의 날개에 칠해지므로 나머지 4개의 날개에 4가지의 색을 칠하는 방법의 수는 $4! = 24$이다.

7) 정답 : ④

합성변환 $f \circ g$를 나타내는 행렬이 AB이므로 $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

점 (x, y)가 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$에 의해 $(x', y') = (y, 3x)$

으로 옮겨지므로 $x = \dfrac{1}{3}y'$, $y = x'$

$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$ 에 대입하여 $\left(\dfrac{1}{3}y' - 2\right)^2 + (x'+3)^2 = 5^2$ 에 $x' = 0$ 을 넣으면

$\left(\frac{1}{3}y'-2\right)^2=16$ 이므로 $y'=18$ 또는 -6

$\therefore\ a+b=12$

8) 정답 : ②

$y=f(x)$는 $y=-2^x$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 곡선이므로 $y=-2^x+m$

$\therefore f(x)=-2^x+m$

$y=f(x)$가 x축과 만나는 점 A의 x좌표는 $0=-2^x+m$에서 $2^x=m$, $x=\log_2 m$

따라서 점 A의 좌표는 $A(\log_2 m, 0)$

또, 점 B는 $y=2^x$과 $y=-2^x+m$의 교점이므로 $2^x=-2^x+m$에서 $2\cdot 2^x=m$, $2^x=\frac{m}{2}$

$\therefore x=\log_2\frac{m}{2}$

따라서 점 B의 좌표는 $B\left(\log_2\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right)$

$\overline{OA}=2\overline{BC}$에서 $\log_2 m=2\log_2\frac{m}{2}$, $\log_2 m=\log_2\left(\frac{m}{2}\right)^2$

$\therefore m=\frac{m^2}{4}$, $m^2-4m=0$

$\therefore m=4$ $(\because m>2)$

9) 정답 : ①

$m=5$일 때, $y=-2^x+5$에서 점 A의 좌표는 $A(\log_2 5, 0)$이므로 구하는 회전체의 부피를 V라 하면

$$V=\pi\int_0^{\log_2 5}(2^x)^2dx=\pi\int_0^{\log_2 5}4^x dx=\frac{\pi}{\ln 4}\left[4^x\right]_0^{\log_2 5}=\frac{\pi}{\ln 4}\left(4^{\log_2 5}-1\right)$$

$$=\frac{\pi}{\ln 4}\left(2^{\log_2 5^2}-1\right)=\frac{\pi}{2\ln 2}(25-1)=\frac{12}{\ln 2}\pi$$

10) 정답 : ④

임의로 선택한 하나의 주머니에서 동시에 꺼낸 2 개의 구슬이 모두 검은 색일 확률 $\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{7}{12}$,

B 주머니에서 꺼낸 2 개의 구슬이 모두 검은 색일 확률

$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{12}$ 이므로 구하는 조건부 확률은 $\frac{1}{7}$ 이다.

11) 정답 : ①

자연수 n 에 대하여

$(A-E)^{n+1}=\left\{a_nA+(-1)^nE\right\}(A-E)$

$=a_nA^2-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E$

$=3a_nA-a_nA+(-1)^nA+(-1)^{n+1}E$ $(\because\ A^2=3A)$

$=\left(2a_n+\boxed{(-1)^n}\right)A+(-1)^{n+1}E$

$=a_{n+1}A+(-1)^{n+1}E$

이다. 그러므로 $a_{n+1}=2a_n+\boxed{(-1)^n}$ …… ㉠

이다. 따라서 2 이상인 자연수 n 에 대하여

$a_n+a_{n+1}=2(a_{n-1}+a_n)$ 이다.

또한 $a_1+a_2=1+1=2$ 이므로 $\{a_n+a_{n+1}\}$ 은 초항이 2, 공비가 2 인 등비수열이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n+a_{n+1}=\boxed{2^n}$ …… ㉡

이다. ㉠ 과 ㉡ 에 의해 $3a_n+(-1)^n=\boxed{2^n}$

이다. 따라서 $a_n=\dfrac{\boxed{2^n}+(-1)^{n+1}}{3}$ 이다.

12) 정답 : ③

합성한 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ 이므로 $f(x)=(x+1)^2-2$ $(-\sqrt{2}\leqq x\leqq\sqrt{2})$ 에서

최댓값은 $2\sqrt{2}+1$, 최솟값은 -2 $\therefore\ 2\sqrt{2}-1$

13) 정답 : ①

$f(x)=mx+2$, $g(x)=mx$ 이고 $\sqrt{f(x)}=g(x)$ 의 실근은 α 에서

$\sqrt{m\alpha+2}=m\alpha$, $(m\alpha-2)(m\alpha+1)=0$

$(m\alpha\geqq 0)$

$\therefore\ m\alpha=2$ …… ㉠

$\sqrt{f\left(\dfrac{x}{2}\right)}=g(x-\alpha)$ 의 실근은 2 에서 $\sqrt{m+2}=2m-m\alpha$, ㉠을 대입하면

$\sqrt{m+2}=2m-2$, $(4m-1)(m-2)=0$ $(m\geqq 1)$

$\therefore\ m=2$ $\therefore\ \alpha=1$ $\therefore\ m+\alpha=3$

14) 정답 : ②

각 단계에서 만들어지는 도형의 넓이는 등비수열을 이루므로 공비와 첫째항을 구하여 무한등비급수의 합을 구할 수 있다.

R_1에서 두 반지름을 각각 지름으로 하는 두 반원을 그리고, 두 반원 안에 지름의 길이가 최대인 내접원을 그린 후, 두 내접원 안에 두  모양의 도형을 그리고 칠한 것이 R_2이다. 그러므로 R_2에서 만들어지는 내접원의 반지름은 R_1의 반지름의 $\dfrac{1}{4}$이다.

또 R_1에서는  모양의 도형이 하나이지만 R_2에서는 2개의 도형이므로 공비는 $2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{8}$이다.

첫째항은 점 D가 선분 OC를 $1:2$로 내분하는 점이므로 $\overline{OD}=\dfrac{1}{3}\times 3=1$

각 AOB를 이등분한 각이 COB이므로 $\angle COB=\dfrac{\pi}{4}$

그러므로 첫째항은 $2\times\left(\dfrac{1}{2}\times 1\times 3\times\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{1}{8}}=\dfrac{12\sqrt{2}}{7}$

15) 정답 : ⑤

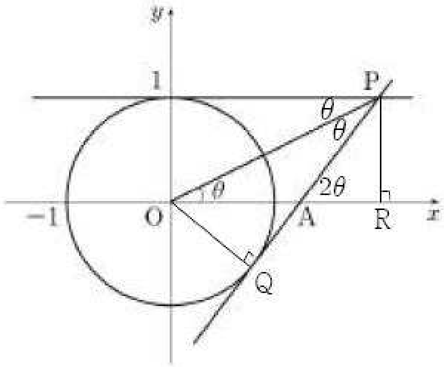
ㄱ. (참) $(AB)^2=E$이므로 $ABAB=E$이므로 $A^{-1}=BAB$이고 $B^{-1}=ABA$이다.

ㄴ. (참) $A^2=A-E$에서 $E=A-A^2=A(E-A)$이다. 즉, $A^{-1}=E-A$
그러므로 $BAB=E-A=-(A-E)=-A^2$

ㄷ. (참) $B^2AB^2=B(BAB)B=B(E-A)B=B^2-BAB=B^2-(-A^2)=A^2+B^2$
따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

16) 정답 : ④

직선과 원의 접점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자.



$\triangle OQA$에서 $\overline{AQ}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1^2}=\frac{3}{4}$이고 $\triangle AOQ\equiv\triangle APR$이므로 $\overline{AR}=\frac{3}{4}$이다.

이때, $\tan\theta$는 직선 OP의 기울기이므로 $\tan\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{OR}}=\frac{1}{\frac{5}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}$이다.

$\tan2\theta$는 직선 AP의 기울기이므로 $\tan2\theta=\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$ $(\because \angle PAR=2\theta)$

$$\tan3\theta=\frac{\tan\theta+\tan2\theta}{1-\tan\theta\cdot\tan2\theta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}}=\frac{11}{2}$$

17) 정답 : ③

점 P 의 좌표를 $\left(c,\sqrt{1-c^2}\right)$라 하면, 타원의 초점의 좌표는 $P'(c,0)$이고, 타원의 장축의 길이가 2이므로

타원의 방정식은 $x^2+\frac{y^2}{1-c^2}=1$

기울기가 $-\frac{3}{2}$이고 그림과 같은 타원의 접선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}x+\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+1-c^2}$ …… ㉠

점 $P\left(c,\sqrt{1-c^2}\right)$는 ㉠ 위의 점이므로 $\sqrt{1-c^2}=-\frac{3}{2}c+\sqrt{\frac{13}{4}-c^2}$ …… ㉡

위의 식을 정리하면 $25c^4-34c^2+9=0$

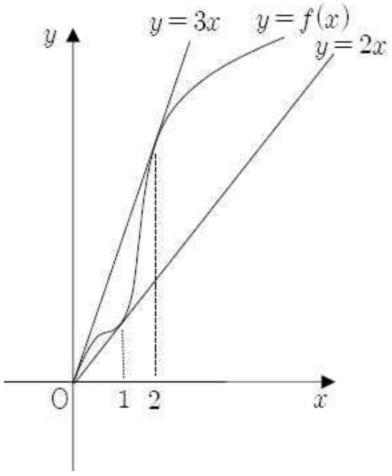
$\therefore c=\pm\dfrac{3}{5}$ 또는 $c=\pm 1$

$0<c<1$이므로 점 $P\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$

따라서 직선 OP 의 기울기는 $\dfrac{4}{3}$

18) 정답 : ④

조건에서 함수 $f(x)$가 $x>0$에서 미분가능하고 $f(1)=2$이고 $f(2)=6$이므로 함수 $f(x)$는 점 $(1,2)$와 $(2,6)$을 지나고 조건에서 $2x\le f(x)\le 3x$이므로 그림과 같이 함수 $f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=2x$와 $y=3x$사이에 있다.



함수 $f(x)$가 점 $(1,2)$를 지나며 직선 $y=2x$에 접하므로 $f'(1)=2$이고,
함수 $f(x)$가 점 $(2,6)$를 지나며 직선 $y=3x$에 접하므로 $f'(2)=3$이다.
따라서 $f'(1)+f'(2)=5$

19) 정답 : ③

어느 지역 학생 중에서 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생의 비율이 36%일 때, 임의추출한 100명의 학생 중 일주일 동안 7시간 이상 독서를 한 학생의 비율을 $\hat{p}$라 하면

$E(\hat{p})=0.36$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\dfrac{pq}{n}}=\sqrt{\dfrac{0.36\times0.64}{100}}=\dfrac{0.6\times0.8}{10}=0.048$

$n=100$은 충분히 큰 수이므로 $\hat{p}$은 정규분포 $N(0.36,0.048^2)$을 따른다.

$P(\hat{p}\le 0.42)=P\left(Z\le\dfrac{0.42-0.36}{0.048}\right)=P(Z\le 1.25)=0.5+P(0\le Z\le 1.25)=0.8944$

20) 정답 : ⑤

ㄱ. (거짓) $h(3)=f(g(3))=f(1)=5$
ㄴ. (참) $h'(2)=(f\circ g)'(2)=f'(g(2))g'(2)$
$f'(g(2))\le 0$이고 $g'(2)\le 0$이므로$h'(2)\ge 0$

ㄷ. (참) $h'(x)=(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$에 대하여 열린 구간 $(3,4)$에서 $f'(g(x))>0$이고
$g'(x)<0$이므로 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)<0$이다.
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

21) ⑤

ㄱ. (참) 최소의 주기가 2 이므로

$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$ …… ㉠

$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{1}^{2} f(x)\,dx$ …… ㉡

$f(x)$ 가 우함수이므로 $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

따라서 ㉠과 ㉡은 같다.

$\therefore \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 4\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

ㄴ. (참) $f'(x) = \dfrac{4x(x^2-1)(x^4+1)-(x^2-1)^2 \cdot 4x^3}{(x^4+1)^2} = \dfrac{4x(x^4-1)}{(x^4+1)^2}$

최소의 주기가 2 이므로 $1 < x < 2$ 에서 $f'(x)$ 는 $-1 < x < 0$ 에서 $f'(x)$ 와 같고

이때 $f'(x) > 0$

ㄷ. (참) $0 < x < 1$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로

$\int_{1}^{3} x\,|f'(x)|\,dx = \int_{1}^{2} xf'(x)\,dx - \int_{2}^{3} xf'(x)\,dx$

$= \left[xf(x)\right]_1^2 - \int_{1}^{2} f(x)\,dx - \left[xf(x)\right]_2^3 + \int_{2}^{3} f(x)\,dx$

$= 2f(2) - f(1) - \int_{-1}^{0} f(x)\,dx - 3f(3) + 2f(2) + \int_{0}^{1} f(x)\,dx$

$= 4f(2) - 4f(1) = 4f(0) - 4f(-1) = 4f(0) = 4$

[별해]

$\int_{1}^{3} x\,|f'(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} (t+2)|f'(t+2)|\,dt$

$= \int_{-1}^{1} t|f'(t+2)|\,dt + 2\int_{-1}^{1} |f'(t+2)|\,dt$

$= \int_{-1}^{1} t|f'(t)|\,dt + 2\int_{-1}^{1} |f'(t)|\,dt$ $(\because f'(t+2) = f'(t))$ …㉠

그런데 $y = t|f'(t)|$ 는 원점대칭이므로 $\int_{-1}^{1} t|f'(t)|\,dt = 0$

따라서 $\because f(x) = f(-x)$, $f'(x) = -f'(-x)$이므로

㉠식은 $2\int_{-1}^{1} |f'(t)|\,dt = 4\int_{-1}^{0} f'(t)\,dt = 4\left[f(t)\right]_{-1}^{0} = 4f(0) = 4$

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

22) 정답 : 10

첫째항이 -6, 공차가 2인 등차수열이고 첫째항부터 제 n항까지의 합이 30이므로

$\dfrac{n\{2 \cdot (-6) + (n-1) \cdot 2\}}{2} = 30$

$n^2-7n-30=0$
$(n-10)(n+3)=0$
$\therefore n=10 \quad (\because n>0)$

23) 정답 : 5
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ 이므로 $\overrightarrow{AB}=(a,2)-(1,a)=(a-1,2-a)$ 이다.
$\overrightarrow{OB}\bullet\overrightarrow{AB}=a(a-1)+2(2-a)=14$ 이므로
$a^2-3a-10=0$ 에서 $(a-5)(a+2)=0$
$\therefore a=5 \quad (\because a>0)$

24) 정답 : 15
일차변환 f를 나타내는 행렬을 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$이므로
$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$이다. $\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$이므로 점 $(3,-4)$가 이동한 점은 $(a,b)=(11,4)$이다.
$\therefore a+b=15$

25) 정답 : 31
$C=B\times\log_2(1+a)$ …… ㉠
$2C=B\times\log_2(1+33a)$ …… ㉡
㉠ 을 ㉡ 에 대입하면 $2\log_2(1+a)=\log_2(1+33a)$
$(1+a)^2=(1+33a)$, $a(a-31)=0$ $\quad\therefore$ 양수 $a=31$

26) 정답 : 17
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[-1,3]$에서 정의된 확률밀도함수이므로 $\int_{-1}^{3}f(x)dx=1$이다.

$$\int_{-1}^{3}f(x)dx=\int_{-1}^{0}a(1-x^2)dx+\int_{0}^{3}a\left(1-\frac{x}{3}\right)dx$$

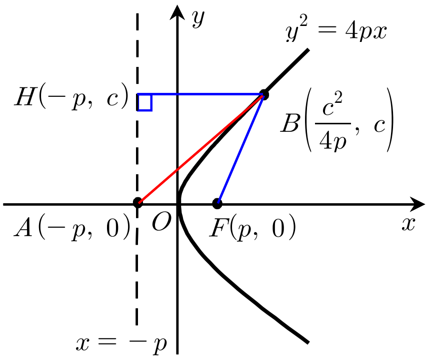
$$=a\left\{\left[x-\frac{1}{3}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x-\frac{1}{6}x^2\right]_{0}^{3}\right\}=\frac{13}{6}a=1$$

$$\therefore a=\frac{6}{13}$$

$$P(-1\le X\le 0)=\int_{-1}^{0}\frac{6}{13}(1-x^2)dx=\frac{6}{13}\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{0}=\frac{4}{13}$$

$\therefore p+q=17$

27) 정답 : 13
주어진 포물선은 아래와 같다.



포물선의 정의에 의해 $\overline{BF}=\overline{BH}$

$\frac{c^2}{4p}+p=5$ …… ㉠

$\triangle ABH$ 에서 $\overline{AH}=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}=c$ 를

㉠ 에 대입하면 $p^2-5p+6=0$ $\quad\therefore\ p=2$ 또는 3

$\therefore\ a^2+b^2=13$

28) 정답 : 30

세 직선의 방향벡터가 모두 평면의 법선벡터와 수직이므로 내적의 값은 0 이어야 한다.

$\vec{h}=(p,\ q,\ r)$ 이라 하고 내적을 계산하면

$p-q+2r=0$ …… ㉠

$p+q+2ar=0$ …… ㉡

$p-2q+ar=0$ …… ㉢

㉡-㉠에서 $2q+2ar-2r=0$ …… ㉣

㉡-㉢에서 $3q+ar=0$ …… ㉤

㉣$\times 3$-㉤$\times 2$에서 $4ar-6r=0,\ r(2a-3)=0$

$r=0$ 이면 $p=q=0$ 이므로 평면이 존재하지 않는다.

$\therefore\ a=\frac{3}{2}\qquad\therefore\ 20a=30$

29) 정답 : 41

$\overline{PC}=\frac{1}{\cos\theta},\ \overline{PB}=\tan\theta$이므로

$\triangle PBC=\frac{1}{2}\tan\theta=\frac{1}{2}r+\frac{1}{2}r\times\tan\theta+\frac{1}{2}r\times\frac{1}{\cos\theta}$이다.

따라서 $r=\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}$

$\therefore g(\theta)=\pi\times\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}\right)^2$

$\angle QCD=\frac{\pi}{4}-\theta$이므로 $\overline{AQ}=1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times(1-\tan\theta)\times\left\{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$

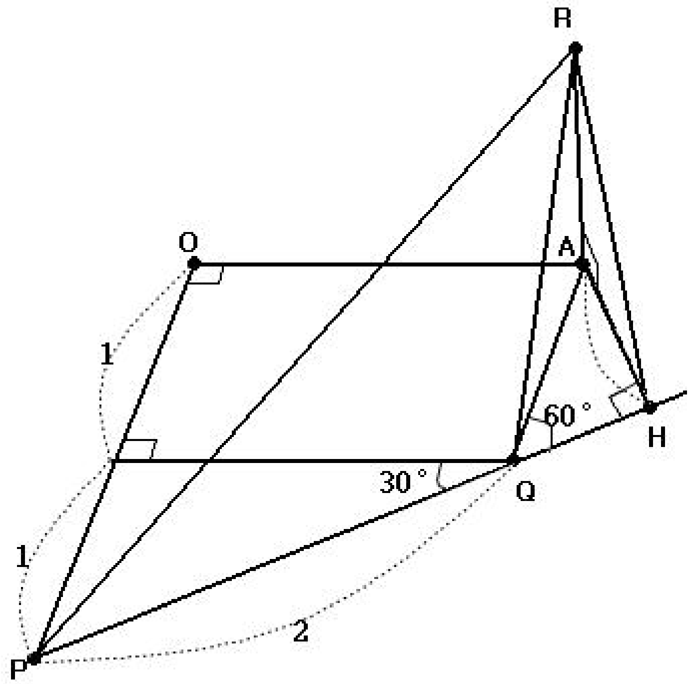
$\therefore f(\theta)=\frac{1}{2}\times(1-\tan\theta)\times\left\{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\pi\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta+1}\right)^2}{\theta\times\dfrac{1}{2}\cdot(1-\tan\theta)\cdot\left\{1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\dfrac{1}{4}\pi\sin^2\theta}{\dfrac{1}{2}\theta\left\{1-\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\frac{\dfrac{1}{2}\pi\sin\theta}{1-\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\dfrac{1}{2}\pi\sin\theta}{\dfrac{2\tan\theta}{1+\tan\theta}}=\frac{1}{4}\pi$$

$\frac{q}{p}\pi=\frac{1}{4}\pi$ 이므로 $\therefore\ 10p+q=41$

30) 정답 : 10



두 평면 PQR와 $AQPO$의 교선은 $\overline{PQ}$ 이다. 점 A에서 이 교선의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면, 직선 $PQH\perp\overline{AH}$, 직선 $PQH\perp\overline{RA}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여 직선 $PQH\perp\overline{RH}$ 이다.

따라서 평면 PQR와 평면 $AQPO$가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos\theta=\dfrac{\overline{HA}}{\overline{RH}}$

$\overline{OA}=\sqrt{3}$ 이므로 $\triangle OAR$에서 $\overline{AR}=\sqrt{2^2-3}=1=\overline{AQ}$

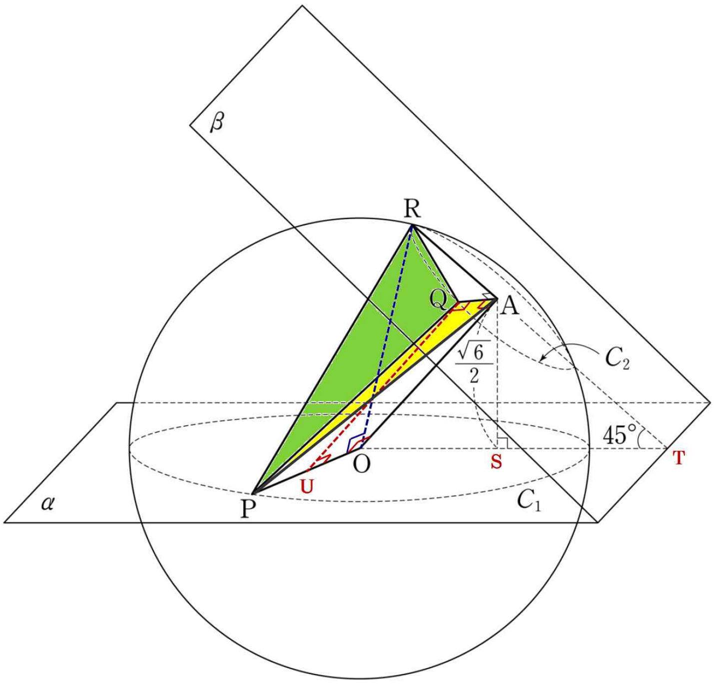
$\overline{AQ}//\overline{OP},\ \overline{OA}\perp\overline{OP}$ 이고 $\overline{AQ}=1,\ \overline{OP}=2$ 이므로 $\overline{PQ}=\sqrt{1+3}=2$

따라서 $\angle QPO=60^\circ,\ \angle HQA=60^\circ$ 이고, $\overline{AH}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \overline{AR}=1,\ \overline{RH}=\sqrt{\dfrac{3}{4}+1}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$$\therefore\ \cos\theta = \frac{\overline{HA}}{\overline{RH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\quad \cos^2\theta = \frac{3}{7}$$

$\therefore\ p+q=10$

[별해]



$\triangle PQR$을 평면 $AQPO$에 정사영한 도형은 $\triangle PQA$이므로 $\cos\theta = \dfrac{\triangle PQA\text{의 넓이}}{\triangle PQR\text{의 넓이}}$

A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 S라 하면, $\overline{OA}^2 = \overline{OS}^2 + \overline{AS}^2 = 3$에서 $\overline{OA} = \sqrt{3}$
점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 U라 두면,
$\overline{PQ}^2 = \overline{PU}^2 + \overline{UQ}^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$에서 $\overline{PQ} = 2$

$\overline{OP} \perp \triangle OAR$이므로 $\overline{OP} \perp \overline{OR}$
$\triangle POR$에서 $\overline{PR}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{OR}^2 = 8$이므로 $\overline{PR} = 2\sqrt{2}$

이때, $\angle PQR = \theta$라 두면 코사인법칙에 의해
$\cos\theta = \dfrac{2+4-8}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$이므로 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$이다.

$\triangle PQR = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

$\triangle PQR$을 평면 $AQPO$로 정사영한 도형은 $\triangle PQA$이고, $\triangle PQA = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

따라서 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$, $\cos^2\theta = \dfrac{3}{7}$
$\therefore p+q=10$