이렇게 공부하라

2013학년도 수능

그랜드 파이널

제작자 : math 신동훈

2012. 12.

* 문제 끝에 작은 숫자 번호를 찾아가시면 해당 문항의 해설이 나옵니다.

> 예시)
>
> 두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은?1) [2점]
>
> ① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

* 네이버 신동훈샘의 수학연구실 http://cafe.naver.com/mathshin 에 오시면 더 좋은 자료를 만나실 수 있습니다.

신동훈
서울대학교 졸업
종로학원 재수종합반
삽자루입시학원
신양재보습학원 (대치, 반포) 수학
진성고등학교(경기 광명) 수리논술 초빙강사

1.

두 행렬 $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은?1) [2점]

① 10 ② 9 ③ 8 ④ 7 ⑤ 6

2.

$\sin\theta=\frac{1}{3}$일 때, $\sin2\theta$의 값은?2) (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이다.) [2점]

① $\frac{7\sqrt{2}}{18}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\frac{5\sqrt{2}}{9}$ ⑤ $\frac{11\sqrt{2}}{18}$

3.

좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}(a+6,\ 4,\ 12)$에 대하여 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표가 $(5,\ 2,\ b)$이다. $a+b$의 값은?3) [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

:: 2011학년도 9월 평가원 ::

좌표공간에서 점$\mathrm{P}(-3,4,5)$를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q 라 하자. 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (a,b,c)라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. 4)[3점]

4.

무리방정식 $x^2-2x+2\sqrt{x^2-2x}=8$의 모든 실근의 곱은?5) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

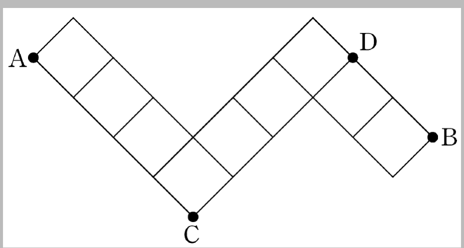
:: 2011학년도 수능기출 ::

무리방정식 $\sqrt{4x^2-5x+7}-4x^2+5x=1$ 의 모든 실근의 곱은? 6) [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{5}{2}$
④ $-\frac{7}{2}$ ⑤ $-\frac{9}{2}$

5.

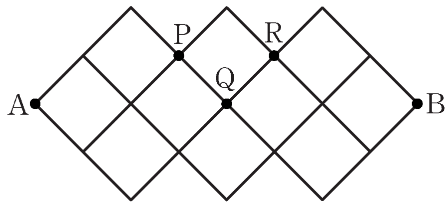
그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 C지점을 지나지 않고, D지점도 지나지 않으면서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?7) [3점]



① 26 ② 24 ③ 22 ④ 20 ⑤ 18

:: EBS 수능완성 ::

그림과 같이 마름모 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 B지점까지 갈 때, 구간 PQ 또는 구간 QR를 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는?8)



① 18 ② 24 ③ 27
④ 30 ⑤ 36

6.

쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점 $(b,\ 1)$에서의 접선이 쌍곡선의 한 점근선과 수직이다. $a+b$의 값은? (단, $a,\ b$는 양수이다.) 9)[3점]

① 68 ② 77 ③ 86
④ 95 ⑤ 104

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

좌표평면에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 점근선에 평행하고 타원 $\frac{x^2}{8a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하는 직선을 l이라 하자. 원점과 직선 l 사이의 거리가 1일 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 값은? 10)[3점]

① 9 ② $\frac{19}{2}$ ③ 10
④ $\frac{21}{2}$ ⑤ 11

7.

화재가 발생한 화재실의 온도는 시간에 따라 변한다. 어떤 화재실의 초기 온도를 T_0(℃), 화재가 발생한지 t분 후의 온도를 T(℃)라고 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$T=T_0+k\log(8t+1)$ (단, k는 상수이다.)

초기 온도가 20℃인 이 화재실에서 화재가 발생한 지 $\frac{9}{8}$분 후의 온도는 365℃이었고, 화재가 발생한 지 a분 후의 온도는 710℃이었다. a의 값은?11)[3점]

① $\frac{99}{8}$ ② $\frac{109}{8}$ ③ $\frac{119}{8}$ ④ $\frac{129}{8}$ ⑤ $\frac{139}{8}$

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

어떤 물질이 녹아있는 용액에 단색광을 투과시킬 때 투과 전 단색광의 세기에 대한 투과 후 단색광의 세기의 비를 그 단색광의 투과도라고 한다. 투과도를 T, 단색광이 투과한 길이를 l, 용액의 농도를 d라 할 때, 다음 관계가 성립한다.

$\log T=-kld$ (단, k는 양의 상수이다.)

이 물질에 대하여 투과길이가 $l_0(l_0>0)$이고 용액의 농도가 $3d_0(d_0>0)$일 때의 투과도를 T_1, 투과길이가 $2l_0$이고 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도를 T_2라 하자. $T_2={T_1}^n$을 만족시키는 n의 값은? 12) [3점]

① 2 ② $\frac{13}{6}$ ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

8.

어느 학교 전체 학생의 60%는 버스로, 나머지 40%는 걸어서 등교하였다. 버스로 등교한 학생의 $\frac{1}{20}$이 지각하였고, 걸어서 등교한 학생의 $\frac{1}{15}$이 지각하였다. 이 학교 전체 학생 중 임의로 선택한 1명의 학생이 지각하였을 때, 이 학생이 버스로 등교하였을 확률은?[13] [3점]

① $\frac{3}{7}$ ② $\frac{9}{20}$ ③ $\frac{9}{19}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{9}{17}$

9.

좌표평면에서 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전하는 회전변환을 f, 직선 $y=x$에 대한 대칭변환을 g라 하자. 합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$에 의하여 직선 $x+2y+5=0$이 직선 $ax+by+5=0$으로 옮겨질 때, $a+2b$의 값은?[15] (단, a, b는 상수이다)[3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

:: 2012학년도 9월 평가원 ::

남학생 수와 여학생 수의 비가 $2:3$인 어느 고등학교에서 전체 학생의 70%가 K자격증을 가지고 있고, 나머지 30%는 가지고 있지 않다. 이 학교의 학생 중에서 임의로 한 명을 선택할 때, 이 학생이 K자격증을 가지고 있는 남학생일 확률이 $\frac{1}{5}$이다. 이 학교의 학생 중에서 임의로 선택한 학생이 K자격증을 가지고 있지 않을 때, 이 학생이 여학생일 확률은? [14] [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

좌표평면에서 일차변환 f를 나타내는 행렬이 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$일 때, f에 의하여 직선 $x+2y=0$이 옮겨지는 직선의 방정식은? [16] [3점]

① $2x+y=0$ ② $2x+3y=0$ ③ $3x+2y=0$
④ $2x+5y=0$ ⑤ $5x+2y=0$

10.

A지점에서 출발하여 거리가 6km 떨어진 B지점까지 이동한 후 같은 길을 따라 A지점으로 돌아오려고 한다. 처음 1km는 일정한 속력으로 걷다가 나머지 5km는 처음 걷는 속력의 2배의 속력으로 이동하고, 돌아올 때는 처음 걷는 속력보다 시속 2km 더 빠르게 이동하려고 한다. 왕복하는 데에 걸리는 총 시간이 2시간 30분 이하가 되도록 할 때, 처음 걷는 속력의 최솟값은? (단, 속력의 단위는 km/시이다.) 17) [3점]

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$
④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

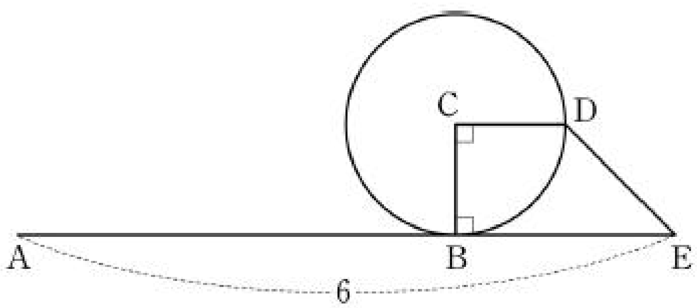
:: EBS 수능완성 ::

A지점에서 B지점까지의 거리는 40km이다. 갑이 A지점에서 출발해서 B지점까지 달리는데 10km까지는 시속 $x$km로 달리다가 나머지 구간은 시속 2km만큼 더 빨리 달렸더니 A지점에서 출발해서 B지점까지 시속 $x$km로 달렸을 때보다 30분 빨리 도착했다. A지점에서 B지점까지 시속 $(x+v)$km로 달렸을 때, 걸린 시간이 3시간 이하가 되기 위한 속력 v의 최솟값은? (단, 각 구간에서의 속력은 일정하다.)18)

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ 4
④ $\frac{13}{3}$ ⑤ $\frac{14}{3}$

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

그림은 지점 A, B, C, D, E를 연결하는 산책로를 나타낸 것이다. 길이가 $6km$인 직선 모양의 산책로 AE와 둘레의 길이가 $2\pi km$인 원 모양의 산책로가 B지점에서 한번 만난다.
갑과 을은 다음과 같이 A지점에서 E지점까지 이동하였다.



갑: 산책로 AB를 속력 $4km$/시, 원 모양의 산책로 한 바퀴를 속력 πkm/시, 직선 모양의 산책로 BE를 속력 $4km$/시로 이동하였다.
을: 직선 모양의 산책로 AB, BC, CD, DE를 따라 속력 $5km$/시로 이동하였다.

갑과 을이 동시에 출발하여 갑이 을보다 2시간 늦게 도착하였을 때, 두 지점 A, B 사이의 거리는?
(단, C는 원의 중심이고, 산책로의 폭은 무시한다.)19) [3점]

① $\frac{15}{4}km$ ② $4km$ ③ $\frac{17}{4}km$ ④ $\frac{9}{2}km$ ⑤ $\frac{19}{4}km$

11.

흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내어, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다르면 1개의 동전을 3번 던지고, 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같으면 1개의 동전을 2번 던진다. 이 시행에서 동전의 앞면이 2번 나올 확률은?20) [3점]

① $\frac{9}{28}$ ② $\frac{19}{56}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{3}{8}$ ⑤ $\frac{11}{28}$

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

A가 동전을 2개 던져서 나온 앞면의 개수만큼 B가 동전을 던진다. B가 던져서 나온 앞면의 개수가 1일 때, A가 던져서 나온 앞면의 개수가 2일 확률은?21) [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

12.

연속함수 $f(x)$가 $f(x)=e^{x^2}+\int_0^1 tf(t)\,dt$를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)\,dx$의 값은?22) [3점]

① $e-2$ ② $\frac{e-1}{2}$ ③ $\frac{e}{2}$

④ $e-1$ ⑤ $\frac{e+1}{2}$

:: EBS 수능완성 ::

연속함수 $f(x)$ 가 $f(x)=e^{2x}-\int_0^1 f(t)\,dt$ 를 만족시킬 때, $2\int_0^1 f(x)\,dx$ 의 값은? (단, e 는 자연로그의 밑이다.)23)

① $\frac{1}{2}(e^2-1)$ ② $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ③ e^2-1

④ e^2 ⑤ e^2+1

13.

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르고 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\mathrm{P}(X \geq 64) = \mathrm{P}(x \leq 56)$

(나) $\mathrm{E}(X^2) = 3616$

$\mathrm{P}(X \leq 68)$의 값을 오른쪽 표를 이용하여 구한 것은?24) [3점]

① 0.9104
② 0.9332
③ 0.9544
④ 0.9772
⑤ 0.9938

x	$\mathrm{P}(m \leq X \leq x)$
$m+1.5\sigma$	0.4332
$m+2\sigma$	0.4772
$m+2.5\sigma$	0.4938

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x) = f(x)$

(나) $\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1}{10}$

$V(10X+3)$의 값을 구하시오.25) [3점]

:: EBS 수능특강 ::

구간 $[0,\ 4]$ 사이의 임의의 값을 취하는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

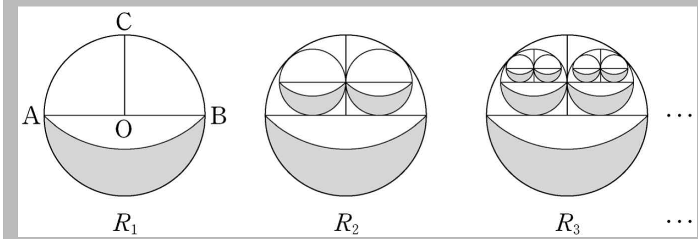
(가) $f(2-x) = f(2+x)$ (나) $\int_0^3 f(x)dx = \frac{3}{4}$

이때, $P(2 \leq X \leq 3)$의 값은?26)

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

14.

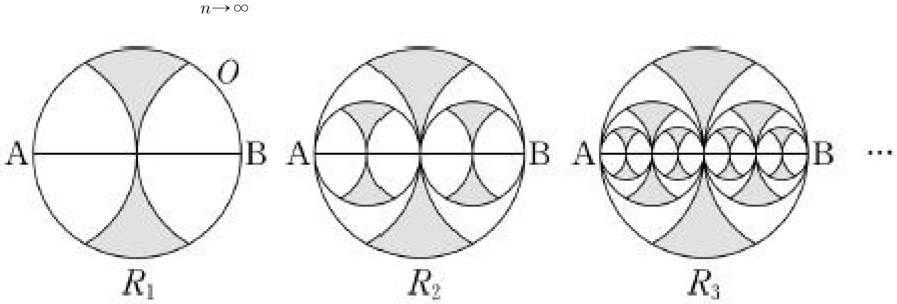
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. 원 O의 중심을 지나고 선분 AB와 수직인 직선이 원과 만나는 2개의 점 중 한 점을 C라하자. 점 C를 중심으로 하고 점 A와 점 B를 지나는 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.그림 R_1에서 색칠된 부분을 포함하지 않은 원 O의 반원을 이등분한 2개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 2개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 2개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에서 새로 생긴 2개의 도형에 색칠된 부분을 포함하지 않은 반원을 각각 이등분한 4개의 사분원에 각각 내접하는 원을 그리고, 이 4개의 원 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 4개의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의값은?[27] [4점]



① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{5+3\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$ ④ $\frac{5+5\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5+6\sqrt{2}}{7}$

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

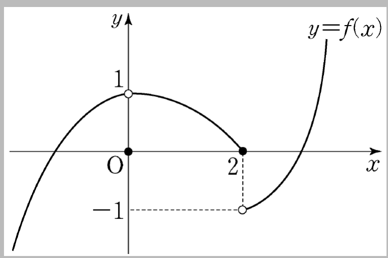
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원 O가 있다. A, B를 각각 중심으로 하고 원 O와 반지름의 길이가 같은 두 원의 외부와 원 O의 내부의 공통부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 AB를 2등분한 선분을 각각 지름으로 하는 두 원을 그리고, 이 두 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 두 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 선분 AB를 4등분한 선분을 각각 지름으로 하는 네 원을 그리고, 이 네 원 안에 각각 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 모양의 네 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 모양의 모든 도형의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?[28] [3점]



① $3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ ② $2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$ ③ $2\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ ④ $3\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $3\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

15.

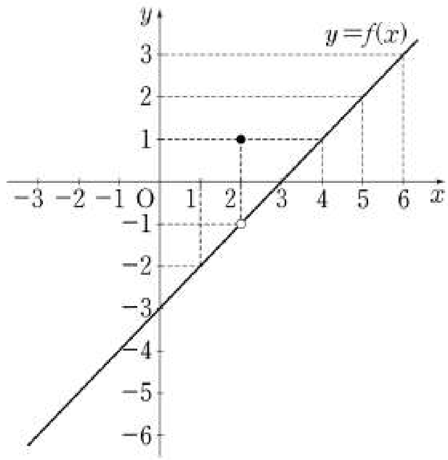
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1이고, $g(0)=3$이다. 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$의 값은?29) [4점]



① 31 ② 30 ③ 29 ④ 28 ⑤ 27

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 합성함수 $(f\circ f)(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 a값의 합은? (단, $0\le a\le 6$ 이다.) 30) [3점]



① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

16.

두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A^2+AB=E,\ AB+BA=2A+E$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)31)[4점]

[보 기]

ㄱ. $A^{-1}=2A+B$

ㄴ. $B=2A+2E$

ㄷ. $(B-E)^2=O$ (단, O는 영행렬이다.)

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가 $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$를 만족시킨다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.) 32) [4점]

ㄱ. $A^{-1}+B^{-1}$의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $A=E$이면 $B=E$이다.

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$이면 $A^2+B^2=E$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 4$이고, $a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ $(n \ge 1)$ 을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

[보 기]

주어진 식에 의하여 $a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k}$ $(n \ge 2)$이다.

따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = \boxed{(가)} + \frac{a_n}{n}$이므로

$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + \boxed{(가)}$이다.

$b_n = \frac{a_n}{n}$이라 하면 $b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{(가)}}{n+1}$ $(n \ge 2)$이고 $b_2 = 3$이므로 $b_n = \boxed{(나)}$ $(n \ge 2)$이다.

그러므로 $a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ n \times \{\boxed{(나)}\} & (n \ge 2) \end{cases}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(4)+g(7)$의 값은?33) [4점]

① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

:: 2012학년도 수능 ::

첫째항이 1 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 라 할 때, $nS_{n+1} = (n+2)S_n + (n+1)^3$ $(n \geq 1)$

이 성립한다. 다음은 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하는 과정의 일부이다.

자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로 $na_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3$ …… ㉠

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3$ …… ㉡

이고, ㉠ 에서 ㉡ 을 뺀 식으로부터 $na_{n+1} = (n+1)a_n + \boxed{(가)}$

를 얻는다. 양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{(가)}}{n(n+1)}$ 이다.

$b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면, $b_{n+1} = b_n + 3 + \boxed{(나)}$ $(n \geq 2)$ 이므로 $b_n = b_2 + \boxed{(다)}$ $(n \geq 3)$ 이다.

⋮

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(3)}{g(3)h(6)}$ 의 값은?34) [4점]

① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

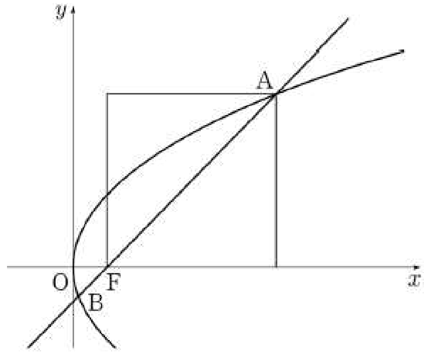
18.

자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은?[35][4점]

① 210 ② 205 ③ 200
④ 195 ⑤ 190

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F인 포물선과 점 F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분 AB의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [36][4점]



:: EBS 수능특강 ::

좌표평면에서 포물선 $y^2=x$의 초점을 F라 하자. 점 F를 지나는 직선이 포물선과 두 점에서 만날 때, 제1사분면에서 만나는 점을 A, 제4사분면에서 만나는 점을 B라 하자. $\angle OFB=\theta$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단, } 0<\theta\le\frac{\pi}{2}\text{이고 } O\text{는 원점이다.}\right)$[37]

보 기

ㄱ. $\left(\overline{AF}+\overline{BF}\right)\cos\theta=\overline{AF}-\overline{BF}$

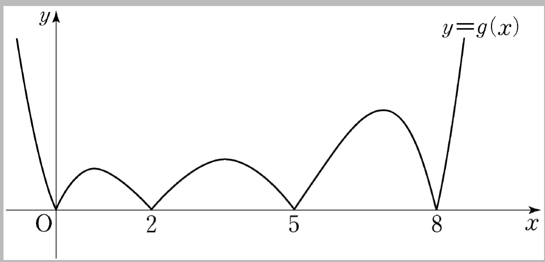
ㄴ. $\frac{1}{\overline{AF}}+\frac{1}{\overline{BF}}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $\overline{AF}\times\overline{BF}\ge\frac{1}{4}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19.

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)>0$을 만족시킨다. 함수 $g(x)$를 $g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|$라 할 때, 함수 $g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?38) [4점]

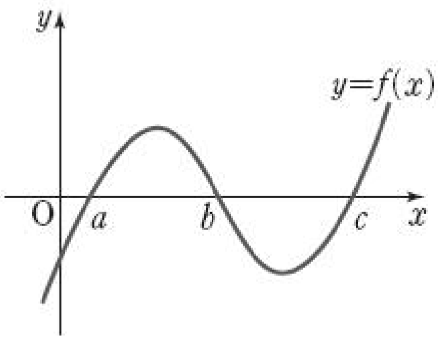
[보 기]

ㄱ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f'(0)<0$
ㄷ. $\int_m^{m+2} f(x)\,dx>0$을 만족시키는 자연수 m의개수는 3이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

:: EBS 수능특강 ::

그림과 같이 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 $x=a,\ x=b,\ x=c$인 점에서 만나고 있다. 함수 $F(x)=\int_b^x f(t)dt$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, $a<b<c$)39)



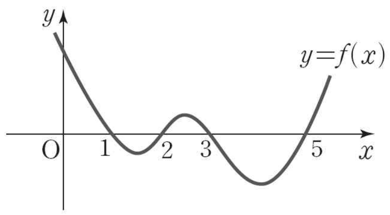
보 기

ㄱ. $F(a)>0$
ㄴ. 함수 $F(x)$는 $x=b$에서 극대이다.
ㄷ. 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

:: EBS 수능특강 ::

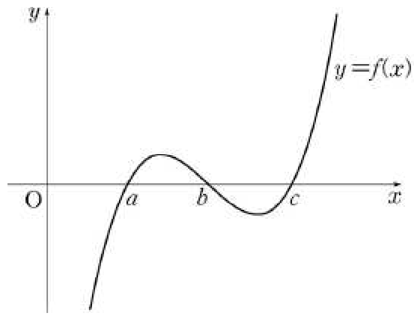
함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 부등식 $\int_{n}^{n+1} f(x)\,dx < 0$을 만족시키는 자연수 n의 개수를 구하여라. (단, $x<1$, $x>5$일 때, $f(x)>0$이다.)[40]



:: 2013학년도 9월 평가원 ::

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(x)$는 $\int_{a}^{b} f(x)dx = 3$, $\int_{a}^{c} f(x)dx = 0$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[41] [3점]



ㄱ. $F(b)=F(a)+3$
ㄴ. 점 $(c, F(c))$는 곡선 $y=F(x)$의 변곡점이다.
ㄷ. $-3<F(a)<0$이면 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20.

좌표공간에서 정사면체 ABCD의 한 면 ABC는 평면 $2x-y+z=4$ 위에 있고, 꼭짓점 D는 평면 $x+y+z=3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 1,\ 3)$일 때, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이는?[42][4점]

① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

:: 2010학년도 수능 ::

좌표공간에서 직선 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=z-1$에 수직이고 점$(1,\ -5,\ 2)$를 지나는 평면의 방정식을 $2x+ay+bz+c=0$이라할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.[43][3점]

:: 2005학년도 수능 ::

점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$을 지나고 직선 $l:\ x-1=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$에 수직인 평면을 α라 하자. 평면 α와 직선 $m:\ x-2=y=\dfrac{z-6}{5}$의 교점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는?[44][3점]

① $\sqrt{11}$ ② $\sqrt{13}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ $\sqrt{19}$

21.

함수 $f(x)=kx^2e^{-x}\ (k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은?[45] [4점]

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

:: 2011학년도 9월 평가원 ::

함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\ \ (a>0)$과 실수 t에 대하여, $x\le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 a의 최댓값은?[46] [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

:: 2013학년도 6월 평가원::

함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$과 실수 m에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge mx) \\ mx & (f(x)<mx) \end{cases}$$

라 하자. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, m의 값은?[47]

① -14 ② -12 ③ -10
④ -8 ⑤ -6

22.

함수 $f(x)=x\ln x+13x$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오.[48][3점]

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분 가능한 함수 $f(x)$가 $f(x^3)=2x^3-x^2+32x$를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.[49][3점]

23.

함수 $f(x)=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\sqrt{3}\sin x$의 최댓값은 a이다. a^2의 값을 구하시오.[50][3점]

:: 2013학년도 6월 평가원 ::

함수 $f(x)=2\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)+3\sin x$의 최댓값은? [51]

① 4 ② $\sqrt{17}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\sqrt{19}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

24.

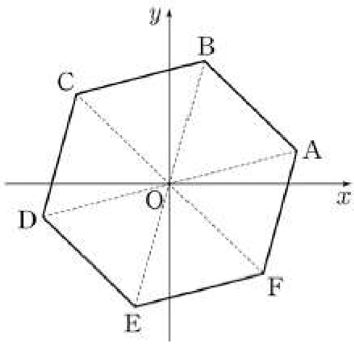
일차변환 $f:(x,\ y)\to(2x-y,\ x-2y)$를 나타내는 행렬을 A라 하자. 행렬 A^4으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 점 $(5,\ -1)$이 옮겨지는 점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.52) [3점]

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

그림과 같이 좌표평면에 정육각형 $ABCDEF$가 있다. 두 일차변환 $f,\ g$를 나타내는 행렬이 각각

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

일 때, 합성변환 $g\circ f$에 의하여 점 A가 옮겨지는 점은?(단, 선분 AD의 중점은 원점 O이다.)53) [3점]



① B ② C ③ D ④ E ⑤ F

25.

표준편차 σ가 알려진 정규분포를 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[100.4,\ 139.6]$이었다. 같은 표본을 이용하여 얻은 모평균에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간에 속하는 자연수의 개수를 구하시오.(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.96)=0.475$, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.58)=0.495$로 계산한다.)54) [3점]

:: 2013학년도 EBS 수능완성 ::

정규분포를 따르는 어느 모집단에서 평균을 추정하려고 한다. 이 모집단에서 크기 16인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 신뢰도 99%로 추정한 신뢰구간이 $[50.42,\ 55.58]$이다. 또, 같은 모집단에서 크기 n인 표본을 임의추출하여 모평균 m을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간이 $[52.76,\ 53.25]$이다. 이때, n의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $\mathrm{P}(0\le \mathrm{Z}\le 1.96)=0.475$, $\mathrm{P}(0\le \mathrm{Z}\le 2.58)=0.495$ 로 계산한다.)55)

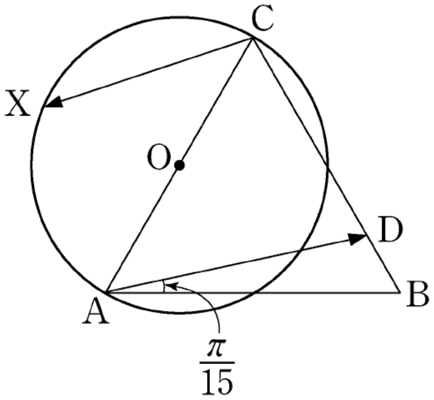
① 256 ② 400 ③ 725
④ 900 ⑤ 1024

26. 내적의 기하학적 의미

한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[56] [4점]

:: 2011학년도 수능기출 ::

그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [57] [4점]

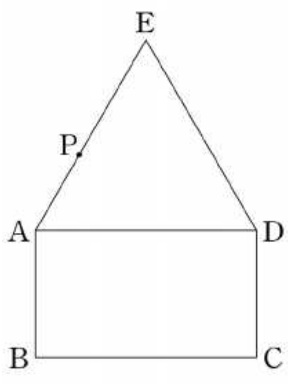


:: EBS 수능특강 ::

좌표공간에서 구 $(x-12)^2+(y-5)^2+(z-10)^2=100$ 이
xy평면과 접하는 점을 A 라 하고, 구 위를 움직이는 점을 P 라 하자. 이 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값을 구하시오. (단, O 는 원점이다.)[58] [4점]

:: 2011학년도 9월 평가원 ::

평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD 가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?59) [4점]



보 기

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

:: 2013학년도 9월 평가원 ::

좌표공간에서 네 점 A_0, A_1, A_2, A_3이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{A_0A_2}|=|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$

(나) $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\left(\overrightarrow{A_0A_k}-\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\right)=\cos\frac{3-k}{3}\pi$

$(k=1,2,3)$

$|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오.60)

27.

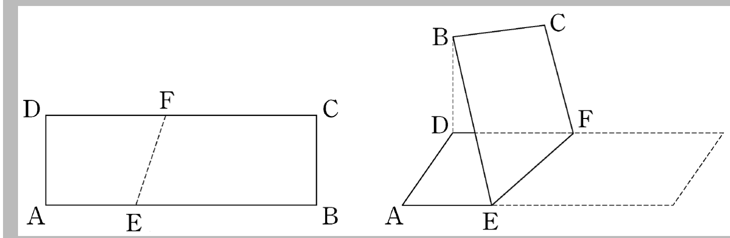
자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 세 점 P_1, P_2, P_3의 좌표는 각각 $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(-1,\ 2)$이다.
(나) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 중점과 선분 $\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}$의 중점은 같다.

예를 들어, 점 P_4의 좌표는 $(1,\ -2)$이다. 점 P_{25}의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.[61)][4점]

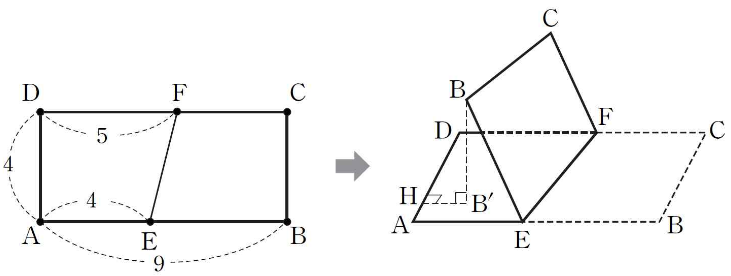
28.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{AD}}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다. $\overline{\mathrm{AE}}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.)[62]



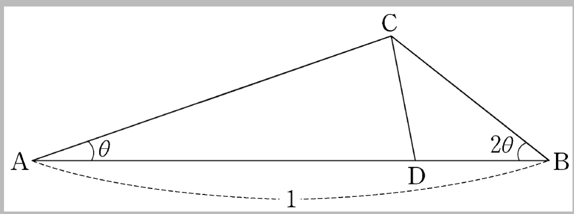
:: EBS 수능완성 ::

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=9$, $\overline{\mathrm{AD}}=4$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위에 $\overline{\mathrm{AE}}=4$인 점 E, 선분 DC 위에 $\overline{\mathrm{DF}}=5$인 점 F를 잡고 두 점 E, F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여 두 반평면 AEFD와 EBCF가 이루는 각의 크기가 60°가 되도록 접었다. 이 접은 도형의 점 B에서 평면 AEFD에 내린 수선의 발을 B′이라 하고, B′에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H라 하자. $17\times\overline{\mathrm{B'H}}$의 값을 구하시오[63]. [4점]



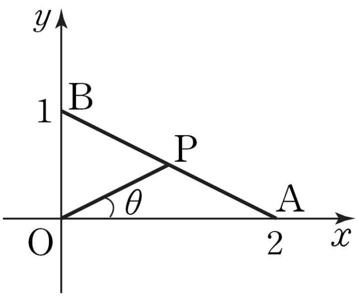
29.

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오.(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)64) [4점]



:: EBS 수능완성 ::

좌표평면에서 원점 O와 두 점 A(2, 0), B(0, 1)이 있다. 선분 AB 위의 점 P에 대하여 $\angle AOP=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{AP}}{\theta}$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$65)



① 2 ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

30.

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 $\left\{(x,\ y)\,|\,2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\right\}$에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다. (나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2,\ a_2 = 4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값을 구하시오.66) [4점]

:: 2013학년도 6월 평가원::

3보다 큰 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 a라 하자.

(가) $a \ge 3$ (나) 두 점 $(2, 0)$, $(a, \log_n a)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$보다 작거나 같다.

예를 들어 $f(5) = 4$이다. $\sum_{n=4}^{30} f(n)$의 값을 구하시오.67)

2013학년도 출제기준표 (2012년 Final 자료였음)

수 1	수 2
로그실생활 문제 적중	방정식 + 부등식 실생활문제 : 긴 문장에서 식 세우기. 적중
무한등비급수의 도형에의 응용 : 활꼴 + 대칭성 적중	변곡점이 접점이 되는 유형
행렬 합답형 : 역행렬의 정의 적중	삼각함수 : 최대,최소 적중
점화식 주어지고 일반항 a_n 구하는 유형 적중	삼각방정식(동심원) : 도형 + 식 세우기
로그함수 그래프와 내분점: ①외분점 ②직각삼각형의 닮음	삼각함수의 극한 : ①접점 또는 지름 해석 ②직각삼각형에서의 삼각비
수열 : 축차대입원리 적용(단답형 대비) 적중	2차함수 도함수 $f'(x)$의 최솟값의 기하학적 의미(21번)
지수+로그함수 Graph의 특성(30번) 적중	역함수의 미분법(21번)
행렬과 그래프(X) 적중	

적분과 통계	기하와 벡터
x축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피	일차변환 2문항 : 도형의 겹쳐진 부분의 넓이 + 옮겨진 직선의 방정식 적중
미적분 합답형 : 적분 가미 + 서로 다른 실근의 개수 적중	벡터 조건에 맞게 그림 그리기
경우의 수 : 같은 것을 포함하는 경우의 순열 적중	타원의 대칭성, 타원과 원, 타원과 쌍곡선의 결합형
원순열(X) 적중	정사영의 넓이의 최댓값 : 언제 최댓값을 갖는지 조건 확정짓기
중복조합	포물선의 초점을 지나는 직선 : ①조화수열 ②포물선의 초점 F = 닮음의 중심 적중
확률과 조합 : 행위가 2개 적중	정사영 : 평면의 평행이동
모평균의 신뢰구간 추정 적중	타원과 쌍곡선의 결합형
표평평균 $\overline{X}$의 분포 : 표준화 + 함수 적중	작은 구의 접평면이 큰 구를 자른 단면 넓이의 최댓값 : 언제 최댓값을 갖는지 조건 먼저 확정짓기.
연속확률분포에서의 평균과 분산: 피적분함수가 기함수 또는 우함수인지 여부	①조건에 맞게 그림 그리기 ②내적의 기하학적 의미 : 정사영시킨 길이의 곱 ③언제 최댓값을 갖는지 조건 먼저 확정짓기 ④그림의 대칭성: 점대칭 적중

2013학년도 수능 분석집 해설

1) 정답 ④

$2A+B=2\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3&3\end{pmatrix}$

따라서 행렬 $2A+B$의 모든 성분의 합은$1+0+3+3=7$

[다른 풀이]

행렬 A의 성분의 합은 2, 행렬 B의 성분의 합은 3.

따라서 $2(2)+3=7$

2) 정답 ②

$\sin\theta=\frac{1}{3}$이므로 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$

3) 정답 ③

$\mathrm{A}(a,\ 1,\ 3)$, $\mathrm{B}(a+b,\ 4,\ 12)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{a+6+2a}{1+2},\ \frac{4+2}{1+2},\ \frac{12+6}{1+2}\right)=(a+2,\ 2,\ 6)=(5,\ 2,\ b)$

$5=a+2$에서 $a=3,\ b=6$

$\therefore\ a+b=3+6=9$

4) 답 10

$\mathrm{P}(-3,4,5)$, $\mathrm{Q}(3,4,5)$이므로 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표를 (a,b,c)라 하면

$a=\frac{6-3}{2+1}=1$

$b=\frac{8+4}{2+1}=4$

$c=\frac{10+5}{2+1}=5$

$\therefore\ a+b+c=1+4+5=10$

5) 정답 ②

$x^2-2x+2\sqrt{x^2-2x}=8$에서 $\sqrt{x^2-2x}=t$라 하면 $t^2+2t-8=0$, $(t+4)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$

다시 환원하면 $\sqrt{x^2-2x}=2$에서 양변 제곱하고 이항하면 $x^2-2x-4=0$

근과 계수와의 관계에서 두 실근의 곱은 -4이다.

6) 정답] ①

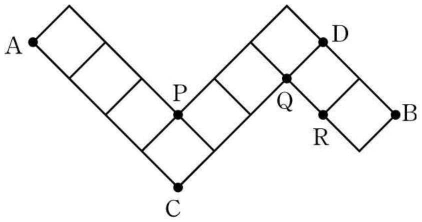
$\sqrt{4x^2-5x+7}=t\,(t\geq0)$ 라고 하면 $4x^2-5x=t^2-7$

$\therefore$(준식) = $t^2-t-6=0$ 에서 $t=3\ \ (\because t\geq0)$

$\therefore 4x^2-5x-2=0$

따라서 모든 실근의 곱은 $-\frac{1}{2}$

7) 정답 ②



위의 그림과 같이 P지점과 Q지점을 잡자.
C지점과 D지점을 모두 지나지 않으면 P지점과 Q지점은 반드시 지난다.
따라서 구하는 경우는 A → P → Q → R → B를 지날 때이므로
경우의 수는 $\frac{4!}{3!}\times\frac{3!}{2!}\times1\times2=4\times3\times1\times2=24$

8) 답 ③

(i) 구간 PQ를 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{2!2!}=18$

(ii) 구간 QR를 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!2!}\times\frac{3!}{2!}=18$

(iii) 구간 PQ와 구간 QR을 모두 거쳐서 최단거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=9$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는$18+18-9=27$

9) 정답 ①

점 $(b,\ 1)$이 쌍곡선 $x^2-4y^2=a$ 위의 점이므로 $b^2-4=a$ …… ㉠이 쌍곡선의 점근선은 $y=\pm\frac{1}{2}x$이고

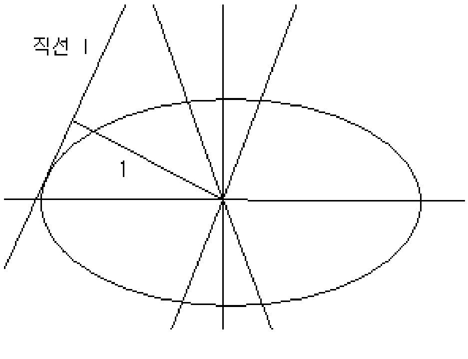
점 $(b,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $bx-4y=a$

즉 $y=\frac{b}{4}x-\frac{a}{4}$이다.

직선 $y=\frac{b}{4}x-\frac{a}{4}$와 직선 $y=-\frac{1}{2}x$가 수직이므로 $\frac{b}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ $\therefore\ b=8$

$b=8$을 ㉠에 대입하면 $a=8^2-4=60$
$\therefore\ a+b=60+8=68$

10) 정답 : ①



쌍곡선과 타원 각각은 중심에 대해 점대칭 관계에 있으므로 쌍곡선의 점근선 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$ 중 기울기 $\dfrac{b}{a}$경우만 고려해도 된다.

타원의 접선 l의 기울기 = $\dfrac{b}{a}$라 하면 타원의 접선의 방정식은 $y=\dfrac{b}{a}x\pm\sqrt{8a^2\dfrac{b^2}{a^2}+b^2}=\dfrac{b}{a}x\pm 3|b|$

$\therefore \dfrac{b}{a}x-y\pm 3|b|=0$ 과 원점 사이의 거리는 1이므로 $1=\dfrac{3|b|}{\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}+1}}$ $\quad\therefore 3|b|=\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}+1}$

$\therefore 9b^2=\dfrac{b^2}{a^2}+1$ $\qquad \therefore 9=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

11) 정답 ①

$T_0=20$이고 $t=\dfrac{9}{8}$일 때 $T=365$이므로 $365=20+k\log\left(8\times\dfrac{9}{8}+1\right)$

$\therefore\ k=365-20=345$

또, $t=a$일 때, $T=710$이므로

$20+345\log(8a+1)=710$, $345\log(8a+1)=690$

$\log(8a+1)=2$, $8a+1=100$

$\therefore\ a=\dfrac{99}{8}$

12) 정답 : ⑤

$\log T_1=-kl_0(3d_0)$ $\qquad \therefore T_1=10^{-3kl_0d_0}$

$\log T_2=-l(2l_0)(4d_0)$ $\qquad \therefore\ T_2=10^{-8kl_0d_0}$

$\therefore\ T_2=T_1^n$ 에서 $10^{-8kl_0d_0}=10^{-3n\cdot kl_0\cdot d_0}$ $\qquad \therefore n=\dfrac{8}{3}$

13) 정답 ⑤

	지각	정상등교
버스$\left(\dfrac{6}{10}\right)$	$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{1}{20}$	$\dfrac{6}{10}\times\dfrac{19}{20}$
도보$\left(\dfrac{4}{10}\right)$	$\dfrac{4}{10}\times\dfrac{1}{15}$	$\dfrac{4}{10}\times\dfrac{14}{15}$

버스로 등교하는 사건을 A, 지각하는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 사건 B가 일어났을 때 사건 A가 일어날 조건부확률이므로

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^c\cap B)}=\frac{\dfrac{6}{10}\times\dfrac{1}{20}}{\dfrac{6}{10}\times\dfrac{1}{20}+\dfrac{4}{10}\times\dfrac{1}{15}}=\frac{\dfrac{3}{100}}{\dfrac{3}{100}+\dfrac{2}{75}}=\frac{\dfrac{3}{100}}{\dfrac{17}{300}}=\frac{9}{17}$$

14) [정답] : ②

	남	여	
자격증(○)	a명	$3.5x-a$	$0.7\times 5x=3.5x$
자격증(×)	$2x-a$	$1.5x-(23x-a)$ $=a-0.5x$	$0.3\times 5x=1.5x$
	$2x$	$3x$	

$\therefore \frac{1}{5}=\frac{a}{5x}$

$\therefore\ \frac{a}{x}=1$

$$\frac{a-0.5x}{1.5x}=\frac{2}{3}\bullet\ \frac{a}{x}-\frac{1}{3}\quad =\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

15) 정답 ⑤

회전변환 f의 행렬을 A, 대칭변환 g의 행렬을 B라 하면

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & -\sin\frac{\pi}{3}\\ \sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$ 이고

합성변환 $g^{-1}\circ f\circ g$의 행렬은 $B^{-1}AB$이다.

$$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad =\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$에서 $x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\ y'=-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y$

$x+2y+5=0$이 $ax'+by'+5=0$으로 옮겨지므로 $a\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)+b\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)+5=0$

$\left(\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)x+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)y+5=0\ \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 $x+2y+5=0$와 같아야 하므로 $\frac{1}{2}a-\frac{\sqrt{3}}{2}b=1,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=2$

연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}+\sqrt{3},\ b=-\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

$\therefore\ a+2b=\frac{5}{2}$

16) 정답 : ⑤

직선 $x+2y=0$ 위의 임의의 한 점을 (x, y) 라하고 일차변환 f 에 의해서 옮겨지는 직선의 점을 (x', y') 라 하자.

$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$

$x=x',\ y=-3x'-y'$를 $x+2y=0$ 에 대입하면 $x'+2(-3x'-y')=0$ $\quad\therefore 5x'+2y'=0$

따라서, 일차변환 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ 에 의해서 직선 $x+2y=0$ 는 직선 $5x+2y=0$로 옮겨 간다.

17) 정답 ③

처음 걷는 속력을 v $(v>0)$라 하면 $\frac{1}{v}+\frac{5}{2v}+\frac{6}{v+2}\leq\frac{5}{2}$

$2(v+2)+5(v+2)+6\cdot 2v\leq 5v(v+2)$

$5v^2-9v-14\geq 0$, $(v+1)(5v-14)\geq 0$

$v\leq -1$, $v\geq\frac{14}{5}$ 에서 $v>0$ 이므로 $v\geq\frac{14}{5}$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{14}{5}$ 이다.

18) [정답] ①

$\frac{10}{x}+\frac{30}{x+2}=\frac{40}{x}-\frac{1}{2}$

$\frac{30}{x+2}-\frac{30}{x}+\frac{1}{2}=0$

양변에 $2x(x+2)$ 를 곱한 후 정리하면 $60x-60(x+2)+x(x+2)=0$

$x^2+2x-120=0$, $(x-10)(x+12)=0$

$\therefore x=10$ 또는 $x=-12$

$x>0$ 이므로 $x=10$

그러므로 A 지점에서 B 지점까지 시속 10km 로 달리면 $\frac{40}{10}=4$ (시간)이 걸린다.

처음부터 시속 $v\text{km}$ 만큼 더 빨리 달렸다면 $\frac{40}{10+v}\leq 3$

$40(10+v)\leq 3(10+v)^2$ (단, $v\neq -10$)

$3v^2+20v-100\geq 0$, $(v+10)(3v-10)\geq 0$

$\therefore v\geq\frac{10}{3}$ 또는 $v<-10$

$v>0$ 이므로 $v\geq\frac{10}{3}$

따라서 속력 v 의 최솟값은 $\frac{10}{3}\text{km}$ 이다.

[참고]

$\frac{40}{10+v}\leq 3$ 에서 $v>0$ 이므로 $10+v>0$

따라서 양변에 $10+v$ 를 곱하면 $40\leq 3(10+v)$, $3v\geq 10$

$\therefore v\geq\frac{10}{3}$

19) 정답 : ③

$\overline{AB}=x$라 하면 $\left(\frac{x}{4}+\frac{2\pi}{\pi}+\frac{6-x}{4}\right)-\left(\frac{x+2+\sqrt{1^2+(5-x)^2}}{5}\right)=2$

$\therefore 11-2x=2\sqrt{1+(5-x)^2}$

$\therefore 4x=17$, $x=\frac{17}{4}$

20) 정답 ①

(ⅰ) 꺼낸 공의 색이 다른 경우

꺼낸 공의 색이 다르고, 1개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2} \times {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12}{21} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{14}$$

(ⅱ) 꺼낸 공의 색이 같은 경우

꺼낸 공의 색이 같고, 1개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2 + {}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{21} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{28}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{14} + \frac{3}{28} = \frac{9}{28}$

21) 정답 : ④

A가 동전을 2개 던져 나온 앞면의 개수만큼 B가 동전을 던지므로 B는 1번 또는 2번 동전을 던질 수 있다.

따라서 $$\frac{{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2}{{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} + {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{3}$$

22) 정답 ④

$f(x) = e^{x^2} + \int_0^1 tf(t)dt$에서 $\int_0^1 tf(t)dt = a$라 하면 $f(x) = e^{x^2} + a$이므로

$$a = \int_0^1 t \cdot f(t)\,dt = \int_0^1 t\left(e^{t^2} + a\right)dt = \int_0^1 \left(t \cdot e^{t^2} + at\right)dt = \left[\frac{1}{2}e^{t^2} + \frac{1}{2}at^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$$

$a = \frac{1}{2}e + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}$

$\therefore\ a = e - 1$

23) [정답] ①

$\int_0^1 f(t)\,dt = a$ (a 는 상수)라 하면 $f(x) = e^{2x} - a$ 이므로

$$a = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(e^{2x} - a\right)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - ax\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right) - a = \frac{1}{2}(e^2 - 1) - a$$

$\therefore\ 2a = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

$\therefore\ 2\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

24) 정답 ④

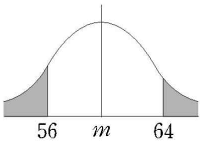
(가)에서 $\mathrm{P}(X \geq 64) = \mathrm{P}(X \leq 56)$이므로 $m = \frac{64 + 56}{2} = 60$

이때, $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로 $\mathrm{V}(X) = 3616 - 60^2 = 16$ $\therefore\ \sigma(X) = 4$

$\therefore\ \mathrm{P}(X \leq 68) = \mathrm{P}\left(Z \leq \dfrac{68-60}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \leq 2)\ = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq\ Z \leq 2) = 0.5 + 0.4772$

$(\because\ \mathrm{P}(0 \leq\ Z \leq 2) = \mathrm{P}(m \leq\ X \leq\ m + 2\sigma)) = 0.9772$

[다른 풀이]

(가)조건에서  그래프의 대칭의 중심은 60이므로 $m = 60$

(나)조건에서 $E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 6^2 + 60^2 = 3616$

$\therefore\ \sigma^2 = 16,\ \sigma = 4$

$\mathrm{P}(X \leq 68) = \mathrm{P}(X \leq\ m + 2\sigma)\ = 0.5 + \mathrm{P}(0 \leq\ X \leq\ m + 2\sigma) = 0.9772$

25) 정답 : 20

$E(X) = \displaystyle\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ 에서 $g(x) = xf(x)$ 라 하면 $g(-x) = -g(x)$ 이므로 $E(x) = 0$

$E(X^2) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx$ 에서 $h(x) = x^2 f(x)$ 라 하면 $h(-x) - h(x)$ 이므로

$E(X^2) = 2\displaystyle\int_{0}^{1} x^2 f(x)dx = \frac{1}{5}$

$\therefore\ V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \dfrac{1}{5}$

$\therefore\ V(10X+3) = 100\,V(X) = 100 \times \dfrac{1}{5} = 20$

26) 답 ③

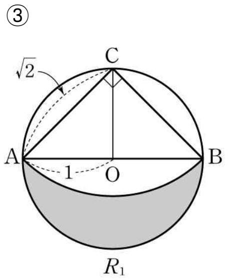
$P(2 \leq X \leq 3) = \displaystyle\int_{2}^{3} f(x)\,dx \quad = \int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx \quad \cdots\cdots$㉠

이때, 조건 (가)에 의하여 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이고 $\displaystyle\int_{0}^{4} f(x)\,dx = 1$ 이므로

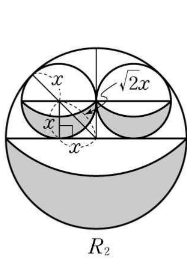
$\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$

따라서 ㉠에서 $P(2 \leq X \leq 3) = \displaystyle\int_{0}^{3} f(x)\,dx - \int_{0}^{2} f(x)\,dx \ = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \ = \frac{1}{4}$

27) 정답 ③



R_1



R_2

R_n 에서 새로 만들어지는 모든  모양의 넓이의 합을 a_n 이라 하면 $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$

a_1 은 반원의 넓이에서 활꼴의 넓이를 빼면 되므로 $a_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \pi - \left\{\dfrac{1}{4}(\sqrt{2})^2\pi - \dfrac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\right\} = 1$

위의 그림과 같이 R_2에서 새로 생긴 원의 반지름의 길이를 x라 하면

$x+\sqrt{2}\,x=1$에서 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ a_2=2\times(\sqrt{2}-1)^2=6-4\sqrt{2}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 공비가 $6-4\sqrt{2}$인 등비수열이다.

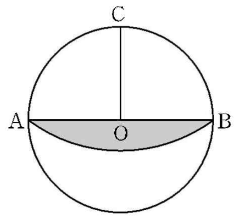
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{1-(6-4\sqrt{2})}=\frac{1}{4\sqrt{2}-5}=\frac{5+4\sqrt{2}}{7}$$

[다른 풀이]

R_n에서 새로 생긴 작은 원의 반지름을 r_n이라 하고

새로 생긴 작은 원의 색칠된 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

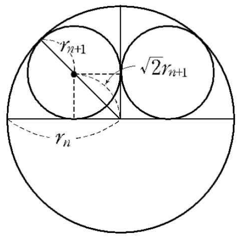
a_1은 반원에서 [그림 1]의 색칠된 부분의 넓이를 빼면 되므로



[그림 1]

$$a_1=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2-\left(\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\right)=1$$

[그림 2]에서 $\sqrt{2}\,r_{n+1}+r_{n+1}=r_n$



[그림 2]

$$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$$

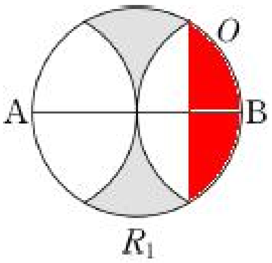
$$\therefore\ \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=(\sqrt{2}-1)^2$$

새로 생기는 작은 원들은 직전 원의 개수의 2배씩 생기므로

$$(\text{공비})=\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^2=2(\sqrt{2}-1)^2$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{r-1}=\frac{1}{1-2(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{4\sqrt{2}+5}{7}$$

28) 정답 : ②



원의 넓이에서 위 색칠한 부분의 넓이의 4배를 뺀다.

$$S_1=\pi\cdot 1^2-4\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

원의 크기는 $\dfrac{1}{2}$배로 축소되고, 개수는 2배로 늘어나므로 무한등비급수의 공비 $r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times 2=\dfrac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to 0}S_n=S_1+S_1r+S_1r^2+\cdots\quad=S_1\times\frac{1}{1-r}=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\times 2=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

29) 정답 ⑤

$g(x)=x^3+ax^2+bx+3$ (a, b는 상수)라 하면 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $f(x)$가 불연속점 $x=0$, $x=-2$에서 연속이면 된다.

(ⅰ) $x=0$일 때 $(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=3$

$\lim_{x\to+0} g(f(x))=\lim_{x\to1-0} g(x)=g(1)$ ($\because$ $g(x)$는 삼차함수이므로 연속함수이다.)

$\lim_{x\to+0} g(f(x))=(g\circ f)(0)$이므로 $g(1)=3$

$1+a+b+3=3$에서 $a+b=-1$ …… ㉠

(ⅱ) $x=2$일 때 $(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(0)=3$

$\lim_{x\to2+0} g(f(x))=\lim_{x\to-1+0} g(x)=g(-1)$

$\lim_{x\to2+0} g(f(x))=(g\circ f)(2)$이므로 $g(-1)=3$

$-1+a-b+3=3$에서 $a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=0$, $b=-1$

$\therefore$ $g(x)=x^3-x+3$

따라서 $g(3)=27-3+3=27$

[다른 풀이]

함수 $f(x)$는 $x\neq0$, $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

따라서 $y=(g\circ f)(x)$는 $x\neq0$, $x\neq2$인 모든 실수에서 연속이다.

결국 $y=(g\circ f)(x)$가 $x\neq0$, $x\neq2$에서 연속인 조건을 구하면 된다.

$g(x)$가 다항함수이므로 $\lim_{x\to0} g(f(x))=\lim_{t\to1} g(t)=g(1)$, $g(f(0))=g(0)=3$에서 $g(1)=3$ …… ㉠

$\lim_{x\to2+0} g(f(x))=\lim_{t\to+0} g(t)=g(0)=3$,

$\lim_{x\to2-0} g(f(x))=\lim_{t\to-1+0} g(t)=g(-1)$

$g(f(2))=g(0)=3$

$\therefore$ $g(-1)=g(0)=3$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $g(0)=g(1)=g(-1)=3$이고, 이는 $g(x)-3$이 서로 다른 세 실근 $x=-1,\ 0,\ 1$을 가진다는 의미이다.

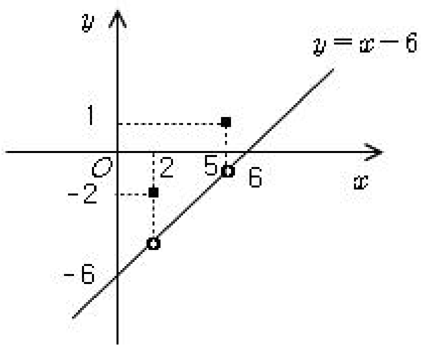
$\therefore$ $g(x)=x(x-1)(x+1)+3$

따라서 $g(3)=3\cdot4\cdot2+3=27$

30) 정답 : ⑤

$f(x)=\begin{cases} x-3 & (x\neq2) \\ 1 & (x=2)\end{cases}$이고, $(f\circ f)(x)=\begin{cases} x-6 & (x\neq2,\ x\neq5) \\ -2 & (x=2) \\ 1 & (x=5)\end{cases}$

이므로 $y=(f\circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$는 $x=2$ 또는 $x=5$에서 불연속이므로 $0 \le a \le 6$에서 모든 a의 값의 합은 $2+5=7$

31) 정답 ③

ㄱ. (참) $2A^2+AB=E$에서 $A(2A+B)=E$

$\therefore\ A^{-1}=2A+B$

ㄴ. (참) $2A^2+AB=E$에서 $AB=E-2A^2$ …… ㉠

$AB+BA=2A+E$에서

㉠을 대입하면 $E-2A^2+BA=2A+E$

$BA=2A^2+2A$

양변의 오른쪽에 A^{-1}를 곱하면 $BAA^{-1}=2A^2A^{-1}+2AA^{-1}$

$\therefore\ B=2A+2E$

[다른 풀이]

$AB+BA=2A+E$ …… ①

$2A^2+AB=E$ …… ②

① − ② 에서 $BA-2A^2=2A,\ (B-2A-2E)A=O$

A^{-1}이 존재하므로 $B-2A-2E=O$

$\therefore\ B=2A+2E$

ㄷ. (거짓) ㄱ, ㄴ에서 $A^{-1}=2A+B$이고, $B=2A+2E$이므로 $A^{-1}=2A+(2A+2E)=4A+2E$

$A(4A+2E)=E$

$4A^2+2A=E$ …… ㉡

$(B-E)^2=(2A+2E-E)^2$ ($\because$ ㄴ)

$\quad=(2A+E)^2=4A^2+4A+E$

$\quad=E+2A+E$ ($\because$ ㉡)

$\quad=2A+2E=B$ ($\because$ ㄴ)

이때, $(B-E)^2=O$라 가정하면 $B=O$이므로 $(O-E)^2=O$, 즉 $E=O$가 되어 모순이다.

$\therefore\ (B-E)^2 \ne O$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

32) 정답 : ③

ㄱ) $\det(A+B)\det(A^{-1}+B^{-1}) \ne 0$ (참)

ㄴ) 주어진 조건에 $A=E$ 를 대입하면 $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=(E+B)(E+B^{-1})=4E$

$\therefore B+B^{-1}=2E$

그러므로 $B=E$라고 단정 지을 수 없다. (거짓)

ㄷ) $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=AB^{-1}+BA^{-1}+2E=4E$

$\therefore\ AB^{-1}+BA^{-1}=2E$

한편 $2AB=E$ 이므로 $B^{-1}=2A,\ A^{-1}=2B$

$AB^{-1}+BA^{-1}=2A^2+2B^2=2E$

$A^2+B^2=E$ (참)

33) 정답 ④

$a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ …… ㉠

$a_n = (n-1) \cdot 2^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k}$ …… ㉡

㉠ − ㉡ 하면 $a_{n+1} - a_n = \boxed{(n+1) \cdot 2^{n-1}} + \frac{a_n}{n}$

$a_{n+1} = \frac{(n+1)a_n}{n} + \boxed{(n+1) \cdot 2^{n-1}}$

$\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 2^{n-1}$

$b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면

$b_{n+1} = b_n + \frac{\boxed{(n+1) \cdot 2^{n-1}}}{n+1}$ $(n \geq 2)$

$b_2 = 3$ 이므로

$b_n = 3 + \sum_{k=1}^{n-2} 2^k = 3 + \frac{2(2^{n-2}-1)}{2-1} = \boxed{2^{n-1}+1}$ $(n \geq 2)$

$\therefore\ a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ n(2^{n-1}+1) & (n \geq 2) \end{cases}$

$\therefore\ f(n) = (n+1) \cdot 2^{n-1}$, $g(n) = 2^{n-1} + 1$

따라서 $f(4) + g(7) = 5 \cdot 2^3 + 2^6 + 1 = 40 + 64 + 1 = 105$

34) ②

자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로 $n a_{n+1} = 2S_n + (n+1)^3$ …… ㉠

이다. 2 이상의 자연수 n 에 대하여 $(n-1)a_n = 2S_{n-1} + n^3$ …… ㉡

이고, ㉠ 에서 ㉡ 을 뺀 식으로부터 $na_{n+1} - (n-1)a_n = 2(S_n - S_{n-1}) + (3n^2 + 3n + 1)$
$= 2(a_n) + (3n^2 + 3n + 1)$

$n a_{n+1} = (n+1) a_n + \boxed{3n^2 + 3n + 1}$ 를 얻는다.

양변을 $n(n+1)$ 로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{\boxed{3n^2 + 3n + 1}}{n(n+1)} = \frac{a_n}{n} + 3 + \frac{1}{n(n+1)}$ 이다.

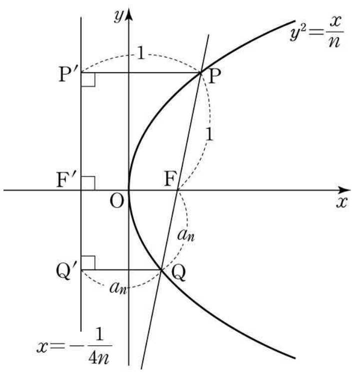
$b_n = \frac{a_n}{n}$ 이라 하면, $b_{n+1} = b_n + 3 + \boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$ $(n \geqq 2)$ 이므로

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_2 + \sum_{k=2}^{n-1}\left(3 + \frac{1}{k(k+1)}\right) \\
&= b_2 + 3(n-2) + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= b_2 + \boxed{3(n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}} \quad (n \geqq 3)
\end{aligned}
$$

따라서 $f(n) = 3n^2 + 3n + 1$, $g(n) = \frac{1}{n(n+1)}$, $h(n) = 3(n-2) + \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ 이므로

$\therefore\ \frac{f(3)}{g(3)h(6)} = \frac{37}{\frac{1}{12} \times \frac{37}{3}} = 36$

35) 정답 ①



포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4n},\ 0\right)$이다.

세 점 P, F, Q에서 준선 $x=-\dfrac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 P′, F′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{1}{2n}$이고,

포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PP'}}=1$, $\overline{\mathrm{QQ'}}=a_n$

$\dfrac{1}{2n}=\dfrac{1\cdot a_n+1\cdot a_n}{1+a_n}$, $\dfrac{1}{2n}=\dfrac{2a_n}{1+a_n}$

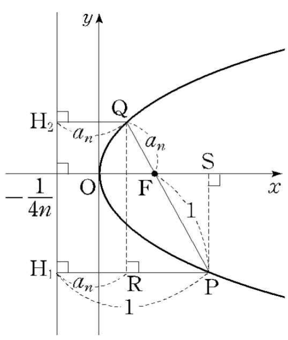
$4na_n=1+a_n$, $a_n(4n-1)=1$

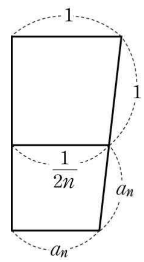
$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$

cf) $4n=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{1}$이므로 $a_n=\dfrac{1}{4n-1}$

[다른 풀이]





P에서 준선에 내린 수선의 발을 H_1

Q에서 준선에 내린 수선의 발을 H_2,

Q에서 PH_1에 내린 수선의 발을 R,

P에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{\mathrm{PF}}=1=\overline{\mathrm{PH}_1}$, $\overline{\mathrm{FS}}=1-\dfrac{1}{2n}$, $\overline{\mathrm{QF}}=a_n=\overline{\mathrm{QH}_2}$

$\triangle\mathrm{PQR}\backsim\triangle\mathrm{FPS}$

$\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{FP}}:\overline{\mathrm{FS}}$이고

$(1+a_n):(1-a_n)=1:\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$

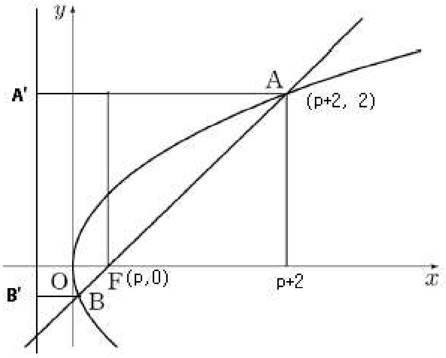
$1-a_n=\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)(1+a_n)=1-\dfrac{1}{2n}+\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)a_n$

$$\frac{1}{2n} = \left(2 - \frac{1}{2n}\right)a_n$$

$$a_n = \frac{1}{4n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n} = \sum_{n=1}^{10} (4n-1) = 4 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - 10 = 220 - 10 = 210$$

36) 정답 : 128



$\overline{AA'} = 2p + 2 = 2\sqrt{2}$ 이므로 $p = \sqrt{2} - 1$

포물선과 초점을 지나는 직선의 성질에 의하여(수능특강 내용)

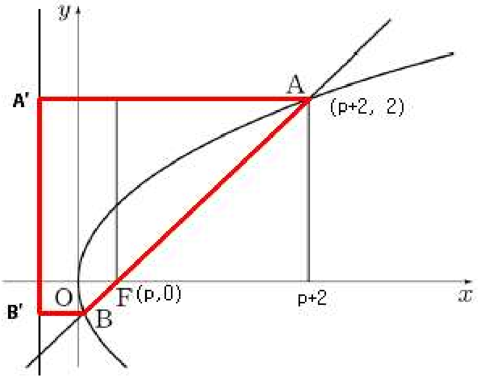
$\frac{1}{\overline{AF}} + \frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{p}$ 이므로 $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\overline{BF}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

$\therefore \overline{BF} = 6\sqrt{2} - 8$

$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 8\sqrt{2} - 8$

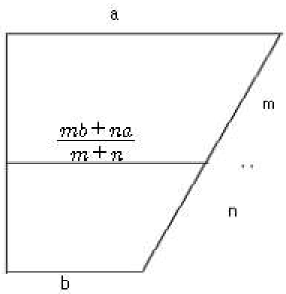
$\therefore a^2 + b^2 = 64 + 64 = 128$

[방법 2]



$\overline{AA'} = 2p + 2 = 2\sqrt{2}$ 이므로 $p = \sqrt{2} - 1$

$\overline{BF} = \overline{BB'} = t$라 하면, 중학과정에서의 조화평균 내용은 다음과 같다.



따라서 $\overline{HF}=2p=\dfrac{2\sqrt{2}\,t+2\sqrt{2}\,t}{2\sqrt{2}+t}=2(\sqrt{2}-1)$

$\therefore\ t=\dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}+1}=-8+6\sqrt{2}$

$\therefore\ \overline{AB}=2\sqrt{2}+t=-8+8\sqrt{2}$

$\therefore\ a^2+b^2=64+64=128$

[방법 3] p를 이용하지 않는 방법

$\overline{AA'}=\overline{AF}=2\sqrt{2}$, $\overline{BB'}=\overline{BF}=t$ 라 하면,

$\overline{AA'}=2+\dfrac{t}{\sqrt{2}}+t=2\sqrt{2}$ 이므로 $t=6\sqrt{2}-8$

$\therefore\ \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{FB}=2\sqrt{2}+t=8\sqrt{2}-8$

$\therefore\ a^2+b^2=64+64=128$

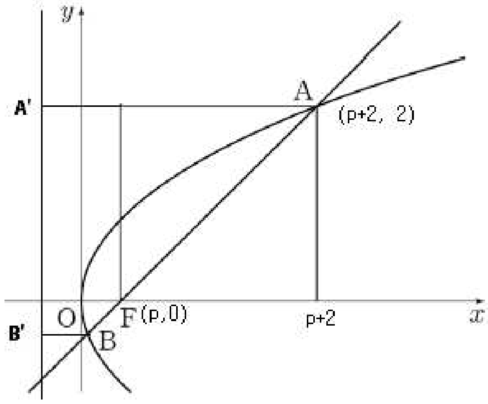
[방법 4] 포물선의 방정식을 이용하는 방법

$y^2=4px$에서 점 $F(p,0)$ 점 $A(p+2,2)$

점 A는 포물선 위의 점이므로 $2^2=4p(p+2)$ $\therefore\ p^2+2p-1=0$ 이므로 $p=-1+\sqrt{2}$

포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=x-p$의 교점 B의 x좌표를 찾자

$(x-p)^2=4px$ 에서 $x^2-6px+p^2=0$ $\therefore\ x=3p-2\sqrt{2}p=(3-2\sqrt{2})p$

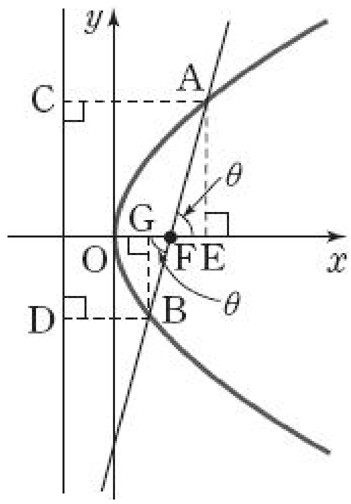


포물선의 정의에 의해 $\therefore\ \overline{AB}=\overline{AA'}+\overline{BB'}=2\sqrt{2}+\{(3-2\sqrt{2})p+p\}=8\sqrt{2}-8$

$\therefore\ a^2+b^2=64+64=128$

37) 답 ⑤

두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하고, x축에 내린 수선의 발을 각각 E, G라 하자.



$\overline{AF}=a$, $\overline{BF}=b$라 하면

ㄱ. $a\cos\theta=\overline{EF}$, $b\cos\theta=\overline{GF}$ 이므로

$(a+b)\cos\theta=\overline{EF}+\overline{GF}=\overline{EG}=\overline{AC}-\overline{BD}=a-b$ (참)

ㄴ. $y^2=4\cdot\dfrac{1}{4}\cdot x$에서 초점의 좌표는 $F\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)$이고 준선의 방정식은

$x=-\dfrac{1}{4}$이다.

$p=\overline{OF}=\dfrac{1}{4}$이라 하면

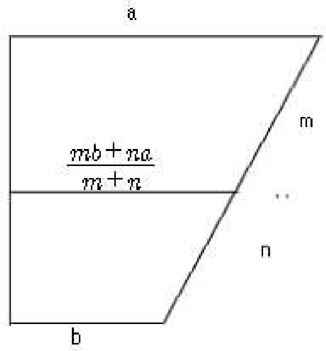
$a=\overline{AC}=2p+a\cos\theta$이므로 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1-\cos\theta}{2p}$

$b=\overline{BD}=2p-b\cos\eta$이므로 $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1+\cos\theta}{2p}$

$\therefore\ \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1-\cos\theta}{2p}+\dfrac{1+\cos\theta}{2p}\quad=\dfrac{2}{2p}=\dfrac{1}{p}=4$(일정) (참)

[별해]

중학과정에서의 조화평균 내용은 다음과 같다.



따라서 $\dfrac{ab+ab}{a+b}=\dfrac{1}{2p}$ 이므로 $\dfrac{1}{\overline{AF}}+\dfrac{1}{\overline{BF}}=\dfrac{1}{p}=4$(일정)

ㄷ. $\overline{AF}\times\overline{BF}=ab=\dfrac{2p}{1-\cos\theta}\times\dfrac{2p}{1+\cos\theta}\quad=\dfrac{4p^2}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{1}{4\sin^2\theta}\geq\dfrac{1}{4}$ (참) $\left(\text{단, 등호는 }\theta=\dfrac{\pi}{2}\text{일 때 성립}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

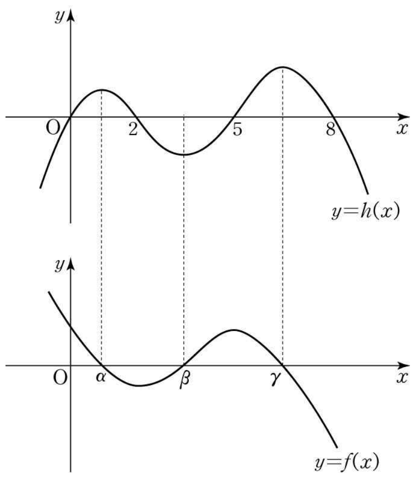
38) 정답 ⑤

$F'(x)=f(x)$라 하면 $\displaystyle\int_0^x f(x)dx=F(x)-F(0)$

$F(x)-F(0)=h(x)$라 하자.

$f(0)>0$이므로 $x=0$의 가까운 오른쪽에서 $\displaystyle\int_0^x f(x)dx>0$

따라서 $y=h(x)$와 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. (참) 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(0,\ 2)$, $(2,\ 5)$, $(5,\ 8)$에서 각각 실근을 갖는다.

ㄴ. (참) $x=0$에서 감소 상태에 있으므로 $f'(0)<0$

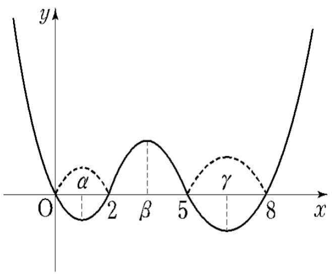
ㄷ. (참) $h(x)=kx(x-2)(x-5)(x-8)\ (k<0)$이라 할때 $\int_{m}^{m+2} f(x)dx=h(m+2)-h(m)$이므로

$m=1$일 때, $h(3)-h(1)=58k<0$
$m=2$일 때, $h(4)-h(2)=32k<0$
$m=3$일 때, $h(5)-h(3)=-30k>0$
$m=4$일 때, $h(6)-h(4)=-80k>0$
$m=5$일 때, $h(7)-h(5)=-70k>0$
$m=6$일 때, $h(8)-h(6)=48k<0$
$m=7$일 때, $h(9)-h(7)=322k<0$
$m\geq 8$일 때, $h(m+2)-h(m)<0$

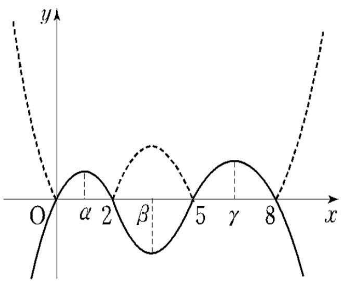
따라서 $\int_{m}^{m+2} f(x)dx>0$을 만족시키는 자연수 m은 3, 4, 5로써 3개이다.

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

[다른 풀이]



[그림 1]



[그림 2]

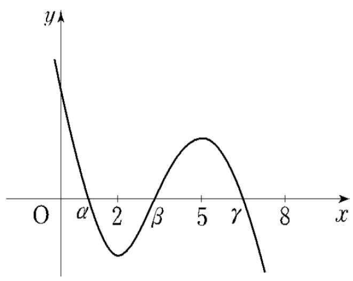
$h(x)=\int_{0}^{x} f(t)\,dt$라 하면 $h(x)$는 사차함수이므로 위 두 그림중 하나이다.

$f(x)=h'(x)$이므로 두 그림 중 $f(0)=h'(0)>0$을 만족하는 경우는 위의 [그림 2]이다.
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽과 같다.

ㄱ. $y=h(x)$는 3개의 극점을 가지는 사차함수이므로 $f(x)=h'(x)=0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f'(0)<0$

ㄷ. $\int_{m}^{m+2} f(x)\,dx=h(m+2)-h(m)$이다.



$h(2)=0=h(0)\quad \therefore\ h(2)-h(0)=0$
$h(3)<0<h(1)\quad \therefore\ h(3)-h(1)<0$
$h(4)<0=h(2)\quad \therefore\ h(4)-h(2)<0$
$h(5)=0>h(3)\quad \therefore\ h(5)-h(3)>0$
$h(6)>0>h(4)\quad \therefore\ h(6)-h(4)>0$
$h(7)>0=h(5)\quad \therefore\ h(7)-h(5)>0$
$h(8)=0<h(6)\quad \therefore\ h(8)-h(6)<0$
$h(9)<0<h(7)\quad \therefore\ h(9)-h(7)<0$
$m\geq 8$이면 $h(m+2)<h(m)$이므로
$h(m+2)>h(m)$을 만족하는 자연수 m은
$m=3,\ 4,\ 5$의 3개이다.

39) 답 ④

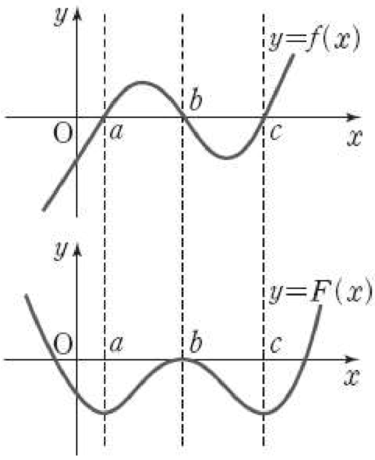
ㄱ. $F(a)=\int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$ 이때, $\int_a^b f(t)dt>0$이므로 $F(a)<0$ (거짓)

ㄴ. $F'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_b^x f(t)\,dt=f(x)$

이때, $F'(b)=f(b)=0$이고 $x=b$의 좌우에서 $F'(x)$, 즉

$f(x)$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀌므로 $F(x)$는 $x=b$에서 극대이다. (참)

ㄷ. $F(b)=\int_b^b f(t)dt=0$이고 $F'(x)=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 $y=F(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



그러므로 방정식 $F(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

40) 답 3

두 구간 $[1,\ 2]$, $[3,\ 5]$에서 $f(x)\le 0$이므로 $\int_n^{n+1} f(x)dx<0$을 만족시키는 자연수 n은 $1,\ 3,\ 4$로 3개다.

41) 정답 : ③

$f(x)=k(x-a)(x-b)(x-c)$, $F(x)=\int f(x)\,dx=\int_a^x f(x)dx+C$ 라 하자.

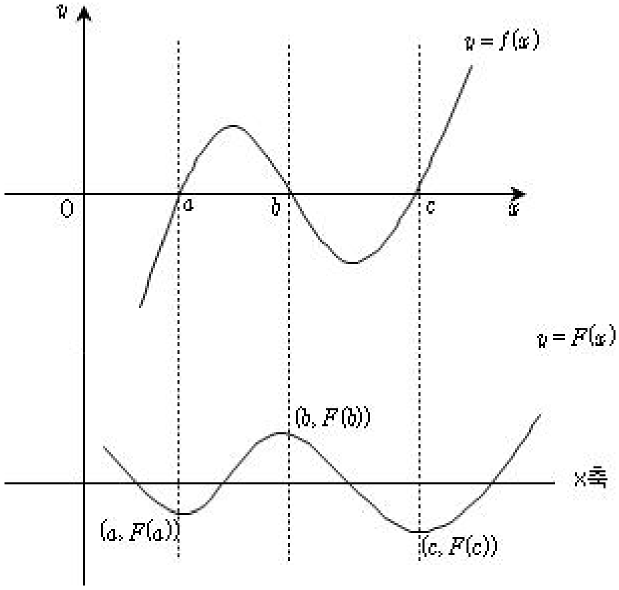
ㄱ) $F(a)=c$, $F(b)=3+c$ 이므로 $F(b)=F(a)+3$ (참)

ㄴ) $F'(x)=f(x)$

그래프 상에서 $x=c$는 방정식 $F''(c)=f'(x)=0$ 의 근이 될 수 없다. (거짓)

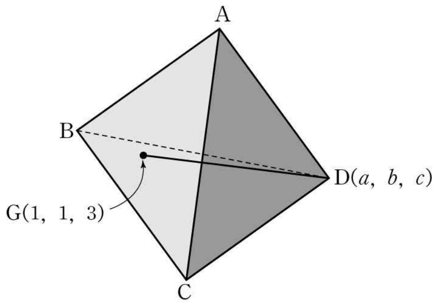
ㄷ)

x		a		b		c	
$F'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$F(x)$	↘		↗		↘		↗



$-3 < F(a) < 0$ 이므로 $0 < F(b) = F(a) + 3 < 3$, $F(a) = c = F(c)$
따라서 중간값 정리에 의해 서로 다른 4개의 실근을 가진다 (참)

42) 정답 ②



점 D의 좌표를 $(a,\ b,\ c)$라 할 때, $\overrightarrow{\mathrm{DG}}$가 평면 $2x - y + z = 4$의 법선벡터가 되므로
$(a-1,\ b-1,\ c-3) = k(2,\ -1,\ 1)$
$\therefore\ a = 2k+1,\ b = -k+1,\ c = k+3$
이때, 점 $\mathrm{D}(a,\ b,\ c)$는 평면 $x+y+z=3$ 위의 점이므로 $(2k+1)+(-k+1)+(k+3)=3$
$2k+5=3 \quad \therefore\ k=-1$
즉, $a=-1,\ b=2,\ c=2$
따라서 $\overline{\mathrm{DG}} = \sqrt{(-1-1)^2+(2-1)^2+(2-3)^2} = \sqrt{6}$
한 변의 길이가 x인 정사면체의 높이가 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$이므로 구하는 정사면체의 한 변의 길이는 $\dfrac{3}{\sqrt{6}} \times \sqrt{6} = 3$

[다른 풀이]
삼각형 ABC의 무게중심 (1, 1, 3)을 G라 하자.
D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은삼각형 ABC의 무게중심 G(1, 1, 3)이므로
$\overrightarrow{\mathrm{DG}} \perp$(평면 ABC)이므로 $\overrightarrow{\mathrm{DG}} // (2,\ -1,\ 1)$
$\therefore\ \mathrm{D}(1+2t,\ 1-t,\ 3+t)$
D가 평면 $x+y+z=3$ 위에 있으므로 $1+2t+1-t+3+t=3 \quad \therefore\ t=-1$
$\therefore\ \mathrm{D}(-1,\ 2,\ 2)$
D에서 평면 ABC까지의 거리는 $\overline{\mathrm{DG}} = \dfrac{|-2-2+2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$
정사면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$\overline{\mathrm{DG}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x=\sqrt{6}$

$\therefore\ x=3$

43) 답 15

주어진 직선의 방향벡터 $\vec{u}=(2,3,1)$이 구하고자 하는 평면의 법선벡터이고 점 $(1,-5,2)$을 지나므로 평면의 방정식은 $2(x-1)+3(y+5)+(z-2)=0$

따라서 $2x+3y+z+11=0$ 이므로 $a=3,\ b=1,\ c=11$

$\therefore\ a+b+c=3+1+11=15$

44) 답 ④

평면 α와 직선 $l:x-1=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-3}{3}$이 수직이므로 평면 α의 법선벡터 $\overrightarrow{h}=(1,\ -2,\ 3)$이고

점 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$을 지나므로 α 의 방정식은 $1(x-1)+(-2)(y-2)+3(z-3)=0$

$\therefore\ x-2y+3z-6=0$

직선 m 위의 임의의 점은 $m:\ x-2=y=\dfrac{z-6}{5}=t$ 라 하면 $(t+2,\ t,\ 5t+6)$

직선 m 위의 점 B가 평면 α 위에 있으므로 $(t+2)-2t+3(5t+6)-6=0, 14t+14=0$ $\therefore\ t=-1$

따라서, $\mathrm{B}(1,\ -1,\ 1)$

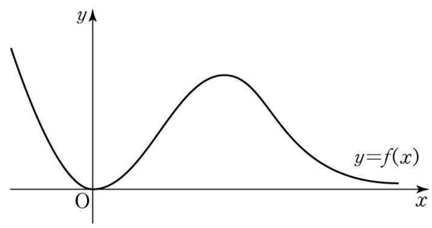
$\therefore\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1-1)^2+(-1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$

45) 정답 ⑤

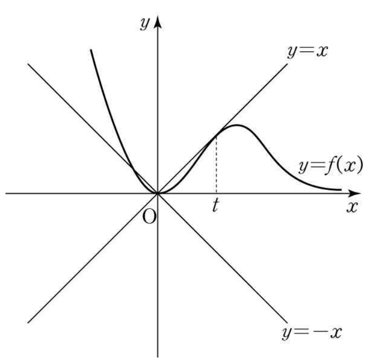
$f(x)=kx^2e^{-x}(k>0)$에서 $f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\dfrac{4k}{e^2}$	$\searrow$



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x,\ y=-x$와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 $kt^2e^{-t}=t$ …… ㉠이고

$x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로 $kt(2-t)e^{-t}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\therefore\ t=1$

$\therefore\ k=e$

따라서 k의 최댓값은 e이다.

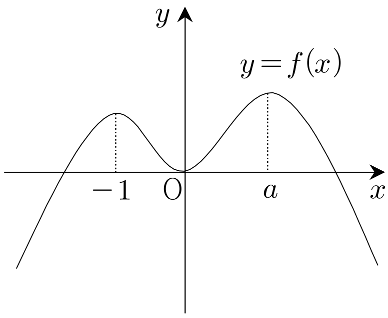
46) 답 ①

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax=-12x\{x^2-(a-1)x-a\}=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1,\ 0,\ a$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.

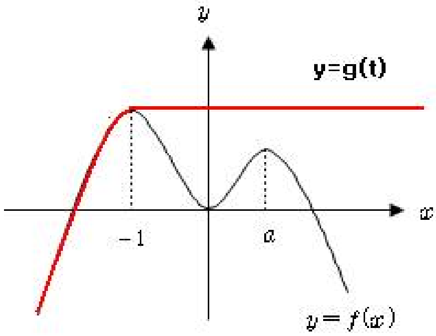


$f(-1)=2a+1$, $f(a)=a^4+2a^3$이고, $f(a)-f(-1)=a^4+2a^3-2a-1=(a+1)^3(a-1)$이므로

$0<a\le 1$이면 $f(a)\le f(-1)$

$a>1$이면 $f(a)>f(-1)$이다.

(ⅰ) $0<a\le 1$인 경우

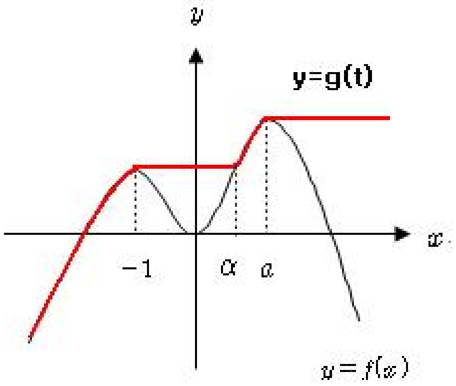


$y=g(t)$의 그래프를 그리면 위와 같다.

$\lim\limits_{t\to -1-0} g'(t)=\lim\limits_{t\to -1+0} g'(t)=0$이므로 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

그러므로 $0<a\le 1$일 때 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

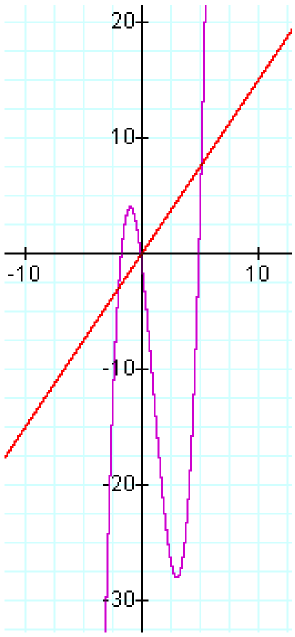
(ⅱ) $a>1$인 경우

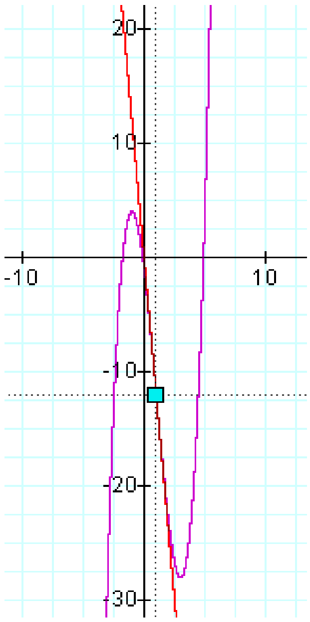


$y=g(t)$의 그래프를 그리면 위와 같다.
이 때 $f(-1)=f(\alpha)$ $(0<\alpha\leqq a)$이라 하면, $y=g(t)$는 $t=\alpha$에서 미분불가능하다.

(i),(ii)에서 함수 $g(t)$가 수 전체의 집합에서 미분가능하기 위한 a의 값의 범위는 $0<a\leqq 1$이므로
구하는 a의 최댓값은 1이다.

47) 정답 : ②
전체 구간에서 $g(x)$가 미분가능하려면 $y=mx$는 삼차함수 $f(x)$의 변곡점을 지나가야 한다.





$f'(x)=3x^2-6x-9,\quad f''(x)=6x-6$ $\therefore$ 변곡점 $(1,-12)$
$m=f'(1)=-12$

[별해]
$f(x)=mx$의 근을 α라 하면 $f(\alpha)=m\alpha$ $\therefore \alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=m\alpha$ $\cdots$①식
$f'(\alpha)=m$ $\therefore 3\alpha^2-6\alpha-9=m$ $\cdots$②식

①식 : $\alpha^3-3\alpha^2-9\alpha-1=3\alpha^3-6\alpha^2-9\alpha$
$\therefore 2\alpha^3-3\alpha^2+1=0$
$(\alpha-1)(2\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha = 1$ $\therefore m = -12$

48) 정답 14

$f(x) = x\ln x + 13x$에서 $f'(x) = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} + 13 = \ln x + 14$

$\therefore\ f'(1) = 14$

49) 정답 : 12

$f'(x^3) \times 3x^2 = 6x^2 - 2x + 32$

$x = 1$대입 $\therefore 3f'(1) = 36$ $\therefore f'(1) = 12$

50) 정답 28

$f(x) = 2\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3}\ \sin x\ = 2\left(\cos x \cdot \cos\dfrac{\pi}{3} + \sin x \cdot \sin\dfrac{\pi}{3}\right) + 2\sqrt{3}\ \sin x$

$= \cos x + \sqrt{3}\ \sin x + 2\sqrt{3}\ \sin x \quad = 3\sqrt{3}\ \sin x + \cos x = \sqrt{28}\ \sin(x + \theta)$

$\left(\text{단, } \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{28}},\ \cos\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$

최댓값 $a = \sqrt{28}$

따라서 $a^2 = 28$

51) 정답 : ④

$f(x) = 2\left(\cos x \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \sin x \dfrac{1}{2}\right) + 3\sin x = 4 \cdot \sin x + \sqrt{3}\ \cos x$

$\therefore$ 최댓값 $= \sqrt{16+3} = \sqrt{19}$

52) 정답 36

$f : (x,\ y) \to (2x - y,\ x - 2y)$에서 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3E$

$A^4 = (3E)^2 = 9E$

$\therefore\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 9E\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ -9 \end{pmatrix}$

$\therefore\ a + b = 45 - 9 = 36$

53) 정답 : ④

일차변환 f에 의하여 원점 대칭, 일차변환 g에 의하여 60° 회전 변환 된다.

$\therefore$ 점 A는 점 E로 옮겨진다.

54) 정답 51

표본평균을 $\overline{X}$라고 하면 모평균에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\left[\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [100.4,\ 139.6]$이므로

$\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=100.4$ …… ㉠

$\overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=139.6$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\overline{X}=240 \quad \therefore\ \overline{X}=120$

$\overline{X}=120$을 ㉡에 대입하면 $1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=19.6$

$\therefore\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=10$

따라서, 신뢰도 99%의 신뢰구간은 $\left[\overline{X}-2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+2.58\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$

$[120-2.58\times 10,\ 120+2.58\times 10]=[94.2,\ 145.8]$

따라서, 신뢰도 99%의 신뢰구간에 속하는 자연수는 95, 96, …, 145이므로 모두 51개다.

55) [정답] ⑤

모집단의 표준편차를 σ 라 하면 표본의 크기가 16 이고, 모평균 m 을 신뢰도 99 % 로 추정한 신뢰구간에서

$$2\times 2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}=55.58-50.42=5.16$$

$\therefore\ \sigma=4$

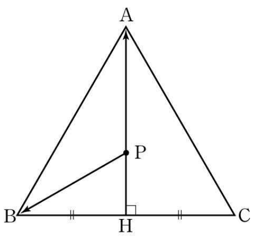
이때, $\sigma=4$ 이므로 표본의 크기가 n 이고, 모평균 m 을 95 % 로 추정한 신뢰구간에서

$$2\times 1.96\times\frac{4}{\sqrt{n}}=53.25-52.76=0.49$$

$\sqrt{n}=32$

$\therefore\ n=1024$

56) 정답 7



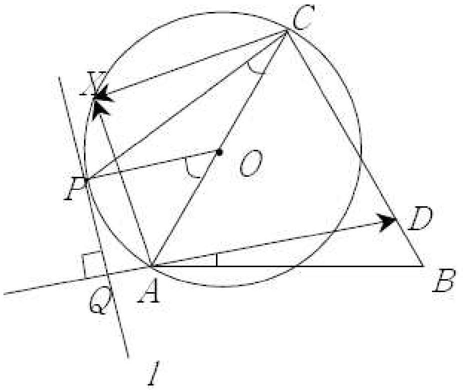
$|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|=\overline{PA}\cdot\overline{PH}$이고 $\overline{PA}+\overline{PH}=\sqrt{3}$이므로 산술-기하평균에 의하여

$\sqrt{3}=\overline{PA}+\overline{PH}\geq 2\sqrt{\overline{PA}\cdot\overline{PH}}$

$\therefore\ \overline{PA}\cdot\overline{PH}\leq\dfrac{3}{4}$

따라서 $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\dfrac{3}{4}$이므로 $p+q=4+3=7$

57)[정답] 17



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC}) \quad =\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ ······㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.

따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta \geq |\overrightarrow{AP}|\cos\theta \quad =-|\overrightarrow{AQ}|$

이 때, $\angle POA=\angle OAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$이므로

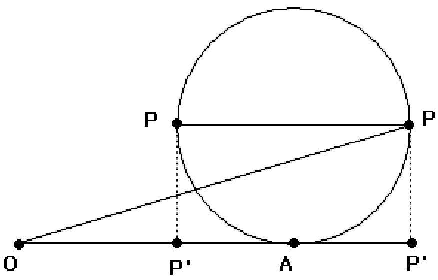
$2\angle ACP=\angle AOP$에서

$\angle ACP=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$

$\therefore p+q=15+2=17$

58) 정답 299

구의 중심 $(12, 5, 10)$에서 xy평면에 수직이면서 원점을 지나는 평면으로 자른 구의 단면과 xy평면과의 관계는 다음 그림과 같다.



이 때, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 값은 결국 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$와 점 P의 xy평면 위로의 수선의 발 P'와 원점 O를 이은 선분인 $|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|$의 곱과 같다.

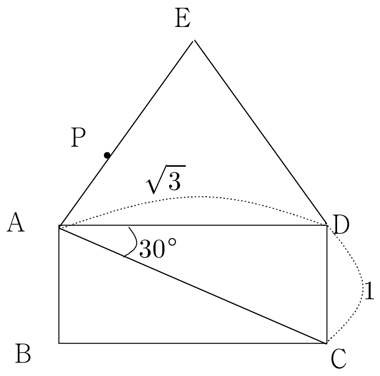
그러므로 $13\cdot(13-10)\leq\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\leq 13\cdot(13+10)$

$\therefore 39\leq\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\leq 299$이므로 내적 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 의 최댓값은 299이다.

59) 답 ⑤

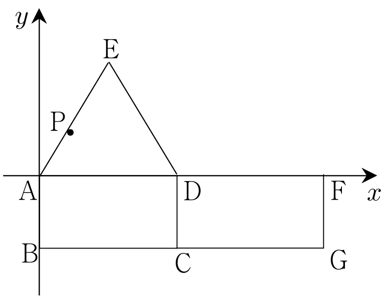
ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$ 이므로 선분 PB 의 길이는 점 P 가 점 A 와 일치할 때 최소이다.
따라서, 최솟값은 $\overline{AB}=1$ 이다. (참)

ㄴ.



$\triangle ACD$ 에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$ 이므로 $\angle CAD=30°$
$\triangle EAD$ 가 정삼각형이므로 $\angle EAD=60°$
$\therefore\ \angle EAC=\angle PAC=90°$
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$
$\therefore\ \overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\bullet(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})=\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\bullet\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{CA}|^2+0\quad=2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A 를 원점, 직선 AD 를 x 축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.

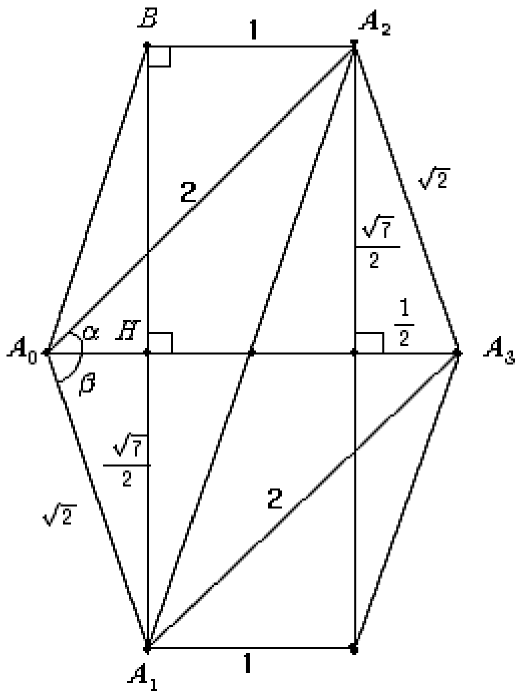


$\overline{AD}=\overline{DF}$ 인 x 축 위의 점을 F 라 하고직사각형 DCGF 를 그리면
$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$
이므로 $|\overrightarrow{GP}|$ 의 최솟값은점 $G(2\sqrt{3},-1)$ 에서 직선 AE 에 이르는 거리와 같다.

직선 AE 의 방정식은 $y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$ 이므로구하는 최솟값은 $\dfrac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{2}$ (참)

따라서, 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

60) 정답 : 8
(나)조건에서 $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_k}-\dfrac{1}{4}|\overrightarrow{A_0A_3}|=\cos\dfrac{3-k}{3}\pi$



$k=3$일 때, $\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2-\frac{1}{4}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2=1$에서 $\frac{1}{4}|\overrightarrow{A_0A_3}|^2=1$이므로 $|\overrightarrow{A_0A_3}|=2$

이 때, 시점 A_o, 선분 A_0A_3를 기준으로 그림 그린다.

$k=2$일 때 $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_2}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$ 에서 $|\overrightarrow{A_0A_3}||\overrightarrow{A_0A_2}|\cos\alpha=3$

이 때, $|\overrightarrow{A_0A_3}|=|\overrightarrow{A_0A_2}|=2$ 이므로 $\cos\alpha=\frac{3}{4}$ ……………… ㉠

따라서 $|\overrightarrow{A_0A_2}|=2$이고, $\overrightarrow{A_0A_2}$를 $\overrightarrow{A_0A_3}$에 정사영시킨 길이가 $\frac{3}{2}$을 만족시키므로 점 A_2의 자취는 원을 이룬다.

$k=1$일 때 $\frac{1}{2}\overrightarrow{A_0A_3}\cdot\overrightarrow{A_0A_1}=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$에서 $|\overrightarrow{A_0A_3}||\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\beta=1$

$|\overrightarrow{A_0A_3}|=2$ 이므로 $|\overrightarrow{A_0A_1}|\cos\beta=\frac{1}{2}=\overline{A_0H}$ ……………… ㉡

따라서 $|\overrightarrow{A_1A_3}|=2$이고, $\overrightarrow{A_0A_1}$를 $\overrightarrow{A_0A_3}$에 정사영시킨 길이가 $\frac{1}{2}$을 만족시키므로 점 A_1의 자취는 원을 이룬다.

$\therefore\ \overline{HA_3}=\frac{3}{2},\ \overline{HA_1}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

마찬가지 방식으로 ㉠식에서 $|\overrightarrow{A_0A_2}|\cos\alpha=\frac{3}{2}$, $\overline{A_2A_3}=\sqrt{2}$

네 점 A_0, A_1, A_2, A_3 한 평면 위에 있을 때 $|\overrightarrow{A_1A_2}|$의 크기가 최대가 된다.
이 때, 점 A_1과 A_2는 선분 A_0A_3의 중점에 대하여 점대칭 관계에 있다.

선분의 평행이동에 의해 직각삼각형 A_1BA_2의 빗변의 길이가

$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|$의 최댓값 M이다.

$M^2 = \overline{A_1B}^2 + \overline{BA_2}^2 = (\sqrt{7})^2 + 1^2 = 8$

[방법 2]

네 점 A_0, A_1, A_2, A_3 이 평행사변형을 이룰 때, 두 대각선은 서로를 이등분하므로

파푸스 중선정리에 의해 $\overline{A_0A_2}^2 + \overline{A_0A_1}^2 = 2\left\{\left(\dfrac{\overline{A_0A_3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\overline{A_1A_2}}{2}\right)^2\right\}$ 이므로

$2^2 + 2 = 2\left\{1 + \left(\dfrac{\overline{A_1A_2}}{2}\right)^2\right\}$ $\therefore \left|\overline{A_1A_2}\right|$의 최댓값 $M = 2\sqrt{2}$ $\therefore M^2 = 8$

61) 정답 23

점 P_n의 x좌표를 나열하면 $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$이므로 점 P_{25}의 x좌표 a는 -1이다.

점 P_n의 y좌표를 나열하면 $0,\ 0,\ 2,\ -2,\ 4,\ -4,\ 6,\ -6,\ \cdots$이므로 홀수번째 항으로 이루어진 수열은

첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열이므로 점 P_{25}의 y좌표 b는 $b = 0 + (13-1)\cdot 2 = 24$

$\therefore\ a + b = 23$

[다른 풀이]

P_n의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 중점과 선분 $\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}$의 중점이 같으므로

$a_n + a_{n+1} = a_{n+2} + a_{n+3}$

$b_n + b_{n+1} = b_{n+1} + b_{n+2}$ …… ㉠

수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = -1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ \cdots$이므로 $a_n = (-1)^n$

또한, 수열 $\{b_n\}$에서 $b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 2$이므로 ㉠에 의하여

$b_4 = -2,\ b_5 = 4,\ b_6 = -4,\ \cdots$

$b_{2n-1} = 2n-2,\ b_{2n} = -2n+2$

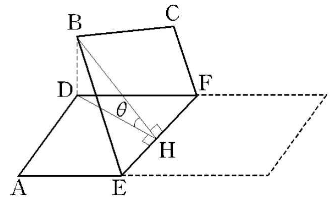
$\therefore\ a_{25} = (-1)^{25} = -1,\ b_{25} = 2\cdot 13 - 2 = 24$

따라서 P_{25}의 좌표는 $(-1,\ 24)$이므로 $a + b = 23$

62) 정답 40

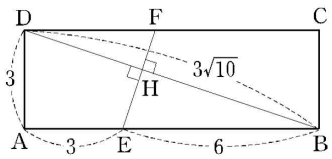
B에서 $\overline{\mathrm{EF}}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{DH}} \perp \overline{\mathrm{EF}}$

두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{\mathrm{EF}}$에 수직인 $\overline{\mathrm{BH}}$와 $\overline{\mathrm{DH}}$가 이루는 각의 크기와 같다.



$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}}$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



$\triangle\mathrm{BDA} \backsim \triangle\mathrm{BEH}$이므로 $\overline{\mathrm{EB}} : \overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{DB}} : \overline{\mathrm{AB}}$

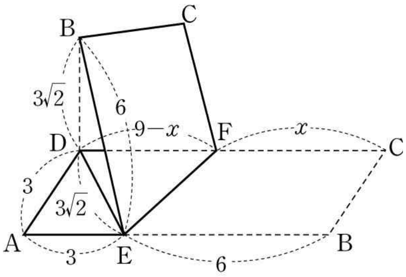
$\overline{\mathrm{HB}} = \dfrac{9\cdot 6}{3\sqrt{10}} = \dfrac{18}{\sqrt{10}}$

$\overline{\mathrm{DH}} = \overline{\mathrm{DB}} - \overline{\mathrm{BH}} = 3\sqrt{10} - \dfrac{18}{\sqrt{10}} = \dfrac{12}{\sqrt{10}}$

$\therefore\ \cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta = 60 \times \dfrac{2}{2} = 40$

[다른 풀이]



$\overline{\mathrm{AE}}=3$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=9-3=6$

$\overline{\mathrm{DE}}=3\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{FC}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{DF}}=9-x$

한편, $\triangle\mathrm{BDF}$, $\triangle\mathrm{BCF}$는 모두 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BF}}^2=(3\sqrt{2})^2+(9-x)^2=x^2+3^2$

$18+81-18x+x^2=x^2+9$

$18x=90 \quad \therefore\ x=5$

$\therefore\ \triangle\mathrm{DEF}=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6,\ \triangle\mathrm{BEF}=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$

이때, $\triangle\mathrm{BEF}$의 평면 ABCD 위로의 정사영이 $\triangle\mathrm{DEF}$이므로 $\cos\theta=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta=60\cdot\dfrac{2}{3}=40$

63) [정답] 33

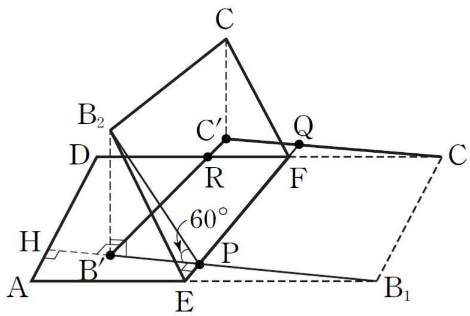
점 A를 원점으로 하고 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 놓으면 $\mathrm{B}(9,\ 0)$, $\mathrm{C}(9,\ 4)$, $\mathrm{D}(0,\ 4)$이고 두 점 $\mathrm{E}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}(5,\ 4)$를 지나는 직선을 l이라 하면 l의 방정식은 $y=4x-16$

직사각형 ABCD에서 점 B를 B_1, 종이를 접었을 때, 점 B가 옮겨진 점을 B_2라 하자.

점 B'은 점 B_1을 지나고 직선 EF에 수직인 직선 위에 있다. 점 B_1을 지나고 직선 EF에 수직인 직선이 직선 EF와 만나는 점을 P라고 하자.

이때, 접힌 도형에서 $\angle\mathrm{B}_2\mathrm{PB}'=60^\circ$ 이므로 $\overline{\mathrm{B}_2\mathrm{P}}:\overline{\mathrm{B}'\mathrm{P}}=2:1$, $\overline{\mathrm{B}_2\mathrm{P}}=\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{P}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{B}'\mathrm{P}}:\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{P}}=1:2$



점 P는 선분 $\mathrm{B}'\mathrm{B}_1$를 $1:2$로 내분하는 점이므로 점 B'의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2a+9}{3},\ \dfrac{2b}{3}\right)$이다.

점 P는 직선 l위에 있고 선분 $B'B_1$은 직선 l과 수직이므로 $\frac{2b}{3}=4\times\frac{2a+9}{3}-16,\ 4a-b=6$ ………㉠

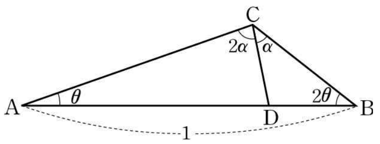
$\frac{b-0}{a-9}=-\frac{1}{4},\ a+4b=9$ ………㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{33}{17},\ b=\frac{30}{17}$

$\overline{B'H}=a=\frac{33}{17}$이므로 $17\times\overline{B'H}=33$

64) 정답 16



$\angle BCD=\alpha$라 하면 사인법칙에서 $\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AD}}{\sin2\alpha},\ \frac{\overline{CD}}{\sin2\theta}=\frac{\overline{BD}}{\sin\alpha}$

$\overline{AD}=\frac{\sin2\alpha}{\sin\theta}\overline{CD},\ \overline{BD}=\frac{\sin\alpha}{\sin2\theta}\overline{CD}$

$\overline{AD}+\overline{BD}=1$이므로 $\overline{CD}=\dfrac{1}{\frac{\sin2\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin2\theta}}$

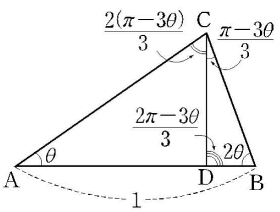
한편, $3\theta+3\alpha=\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}-\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to+0}\frac{\overline{CD}}{\theta}=\lim_{\theta\to+0}\frac{1}{\frac{\sin2\alpha}{\sin\theta}\cdot\theta+\frac{\sin\alpha}{\sin2\theta}\cdot\theta}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin2\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}=a$$

$\therefore\ 27a^2=27\cdot\frac{16}{27}=16$

[다른 풀이]



$\angle BCD=\frac{1}{3}(\angle BCA)=\frac{\pi-3\theta}{3}$

$\triangle ABC$에서 사인법칙에 의해 $\frac{1}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}$

$\triangle BCD$에서 사인법칙에 의해 $\frac{\overline{BC}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}=\frac{\overline{CD}}{\sin2\theta}$

$$\therefore\ \overline{CD}=\frac{\sin2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\overline{BC}=\frac{\sin2\theta}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\theta\right)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$$

$\therefore\ a = \lim_{\theta \to +0} \dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta} \ = \lim_{\theta \to +0} \dfrac{1}{\sin\left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right)} \cdot \dfrac{\sin 2\theta}{\theta} \cdot \dfrac{\sin\theta}{\sin 3\theta} \ = \dfrac{1}{\sin\dfrac{2}{3}\pi} \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}}$

$\therefore\ 27a^2 = 27 \times \dfrac{16}{27} = 16$

65) [정답] ⑤

$\angle \mathrm{OAB} = \alpha$라 하면 $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

삼각형 OAP에서 사인법칙을 적용하면 $\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin\theta} = \dfrac{2}{\sin\{\pi - (\theta + \alpha)\}}$이므로

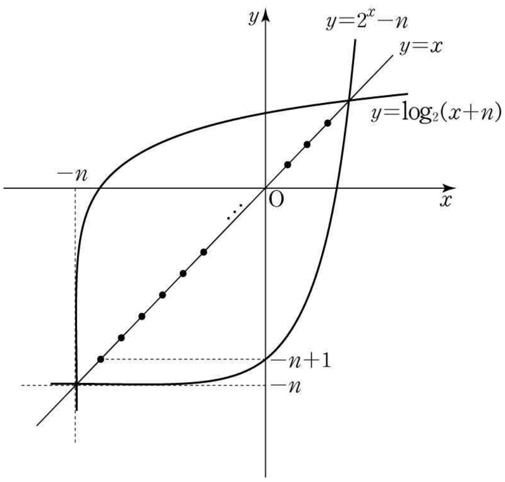
$\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{2\sin\theta}{\sin\{\pi - (\theta+\alpha)\}} = \dfrac{2\sin\theta}{\sin(\theta+\alpha)}$

$\therefore\ \lim_{\theta \to +0} \dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\theta} = \lim_{\theta \to +0} \dfrac{2\sin\theta}{\theta\sin(\theta+\alpha)} \ = \lim_{\theta \to +0} \dfrac{\sin\theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \to +0} \dfrac{2}{\sin(\theta+\alpha)}$

$= 1 \times \dfrac{2}{\sin\alpha} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{5}}} = 2\sqrt{5}$

66) 정답 573

$y = 2^x - n$과 $y = \log_2(x+n)$은 서로 역함수 관계에 있으므로 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.



a_n은 $-n < x$이고 $2^x - n \le x$를 만족시키는 정수 x의 개수이다.
위 부등식을 만족하는 x는 $-n+1,\ -n+2,\ \cdots,\ -1,\ 0$까지의 n개와 $2^x - x \le n$를 만족시키는 자연수 x가 있다.

$2^x - x \le n$를 만족시키는 자연수 x의 개수를 구해보자.

n값	준 식	자연수 x
1	$2^x - x \le 1$	1
2	$2^x - x \le 2$	$1, 2$
3	$2^x - x \le 3$	$1, 2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
30	$2^x - x \le 30$	$1, 2, 3, 4, 5$

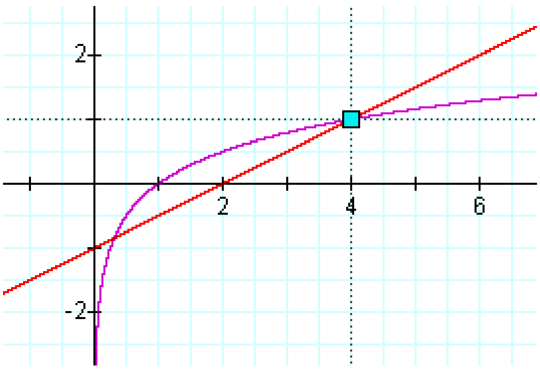
이때, $2^1 - 1 = 1$, $2^2 - 2 = 2$, $2^3 - 3 = 5$, $2^4 - 4 = 12$, $2^5 - 5 = 27$이므로

$\sum_{n=1}^{30} a_n = \sum_{n=1}^{30} k + 30 + 29 + 26 + 19 + 4 = 465 + 108 = 573$

67) 정답 : 86

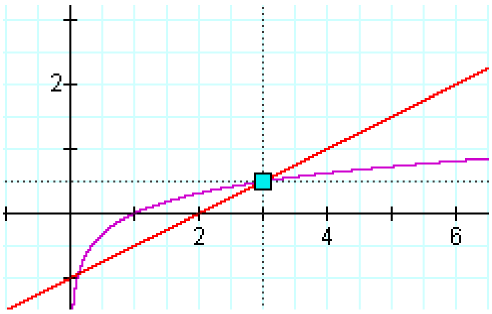
$\frac{\log_n a}{a-2} \le \frac{1}{2}$이므로 $\log_n a \le \frac{a}{2} - 1$

$n = 4$ 이면 $\log_4 a \le \frac{a}{2} - 1$ $\quad a = 4, 5, 6, \cdots$ $\qquad \therefore f(4) = 4$



n이 커지면 $y = \log_n a$와 $y = \frac{a}{2} - 1$의 교점의 x좌표는 점점 작아진다.

$a = 3$일 때의 n의 값을 구해보면, $\log_n 3 \le \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ $\quad \therefore n = 9$ $\qquad \therefore f(9) = 3$



$y = \log_n a$와 $y = \frac{a}{2} - 1$의 교점의 x좌표가 $a = 2$인 경우는 발생하지 않는다.

$\therefore \sum_{n=4}^{30} f(n) = \{f(4) + f(5) + \cdots + f(8)\} + \{f(9) + f(10) + \cdots + f(30)\}$

$= 4 \times 5 + 3 \times 22 = 86$

[출제의도]

① 부등식 $\log_n a \le \frac{a}{2} - 1$의 해는 $a \ge \left\{ \text{방정식} \log_n a = \frac{a}{2} - 1 \text{의 근} \right\}$ 이다.

② a에 관한 방정식 $\log_n a = \frac{a}{2} - 1$의 근은 n에 관한 함수이다. $a = f(n)$

③ 두 함수 $y = \log_n a$, $y = \frac{a}{2} - 1$의 그래프의 교점의 x좌표는 n의 값이 커짐에 따라 점점 작아진다.