2021 우주설 파이널 3주차

도형 44제

집으로 돌아가는 길에
지는 햇살에 마음을 맡기고
나는 너의 일을 떠올리며 수많은 생각에 슬퍼진다.

우리는 단지 내일의 일도 지금은 알 수가 없으니까
그저 너의 등을 감싸 안으며
다 잘될 거라고 말할 수밖에.

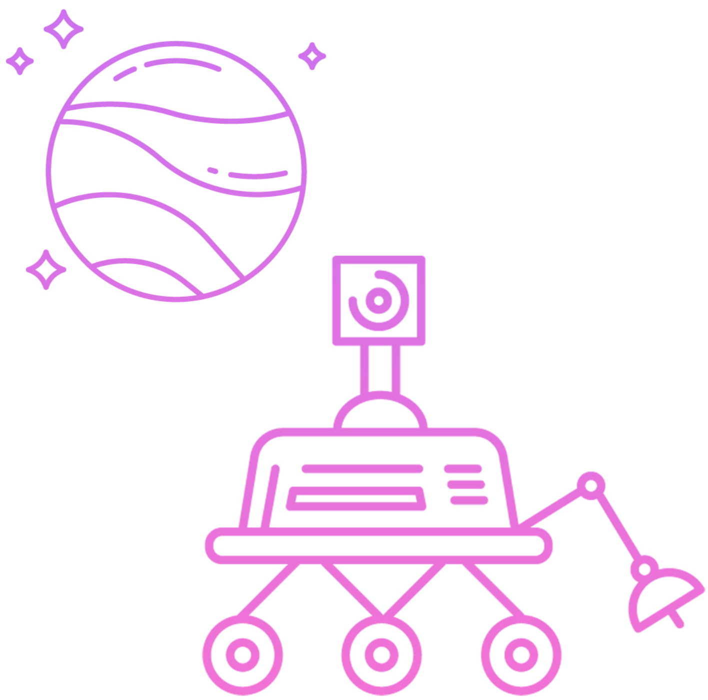
가장 간절하게 바라던 일이
이뤄지기를 난 기도해 본다.

김윤아(자우림), Going Home

우주설

2021 수능대비

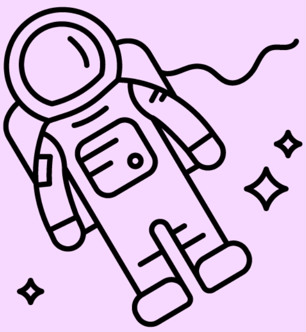
수학 워크북



2021 수능대비

우주설 Final 3주차

(1) 도형 44제

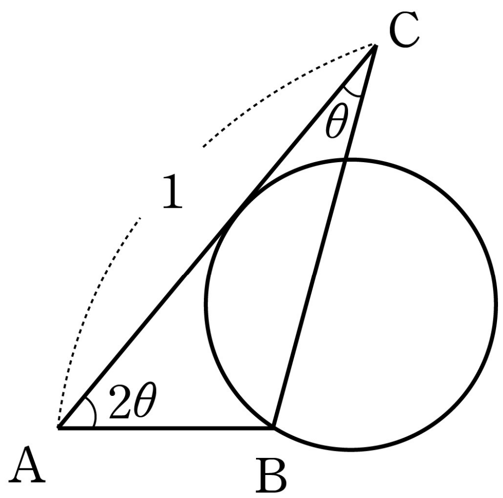


Theme 01
삼각함수의 극한 도형 (001~028)

001

★ ★ ★

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=1$, $\angle\mathrm{A}=2\theta$, $\angle\mathrm{C}=\theta$인 삼각형 ABC에 대하여 점 B를 지나고 선분 AC에 접하는 원들의 집합 S가 있다.

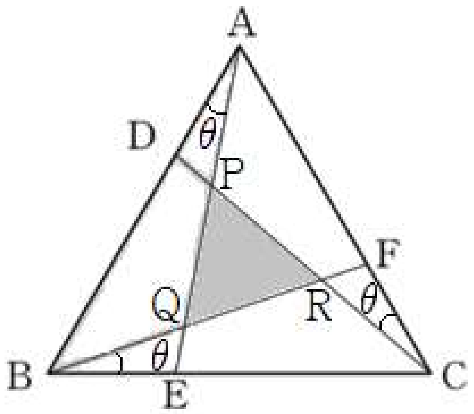


집합 S에 포함된 원들의 반지름 중 최댓값을 $R(\theta)$, 최솟값을 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}r(\theta)R(\theta)=k$이다. $180k$의 값을 구하시오.

002

★ ★ ★
[수능특강 24page, Level2 변형]

그림과 같이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정삼각형 ABC에서 변 $\mathrm{AB}, \mathrm{BC}, \mathrm{CA}$위에 점 $\mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}$를 $\angle \mathrm{ACD} = \angle \mathrm{BAE} = \angle \mathrm{CBF} = \theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AE, CD의 교점을 P, 두 선분 AE, BF의 교점을 Q, 두 선분 BF, CD의 교점을 R라 하자. 삼각형 PQR의 넓이가 $S(\theta)$일 때, $\displaystyle\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)^2}$의 값은?

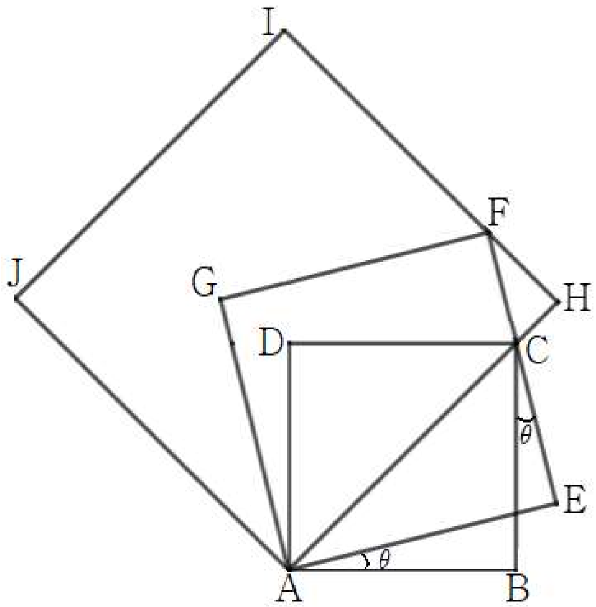


① 1 ② $\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{3}$ ⑤ 9

003

★☆

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD와 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{BCE}=\theta$인 점 E에 대하여 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{AE}}$인 정사각형 AEFG를 잡는다. 점 $\mathrm{A},\mathrm{C},\mathrm{F}$를 지나는 정사각형 AHIJ에 대하여 선분 FI의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, 상수 a,b에 대하여 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{a-f(\theta)}{\theta^2}=b$이다. ab의 값은?

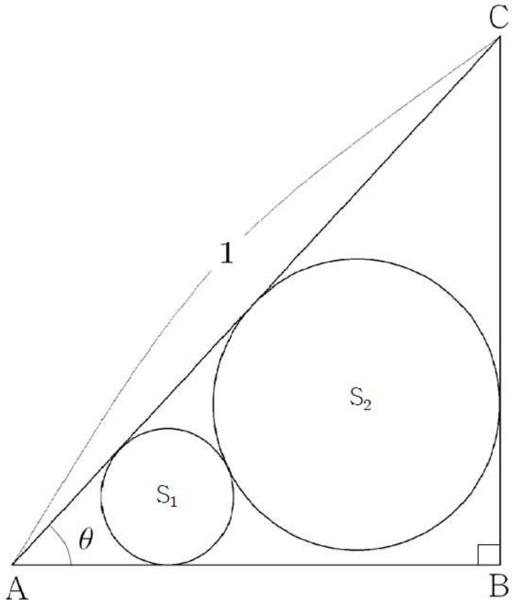


① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

004

★ ★ ☆

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=1$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 선분 AB, AC에 동시에 접하는 원 S_1과 두 선분 AC, BC에 동시에 접하는 원 S_2가 서로 외접해 있다. $\angle\mathrm{BAC}=\theta$일 때, S_1의 반지름 $r_1(\theta)$을 S_2의 반지름 $r_2(\theta)$라 하자. $r_1(\theta)=4r(\theta)$, $r_2(\theta)=9r(\theta)$을 만족시키는 $r(\theta)$에 대하여 $\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}$의 값은?

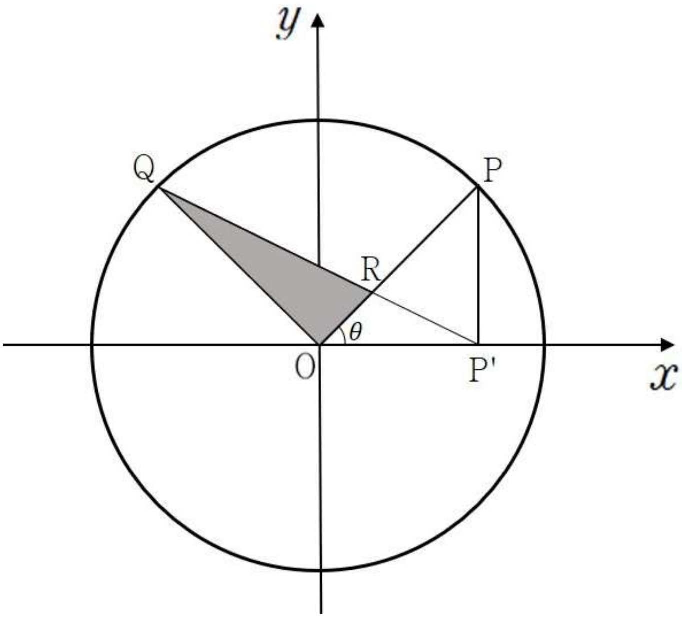


① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

005

★★☆

좌표평면 위에 원점O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있는 점P에서 x축에 내린 수선의 발을 점 P', 점 P를 y축에 대하여 대칭 시킨 원 위에 점을 점Q라하고, 선분OP와 선분$\mathrm{P}'\mathrm{Q}$의 교점을 점R이라고 하자. $\angle \mathrm{POP}' = \theta$일 때, 삼각형ORQ의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.



$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

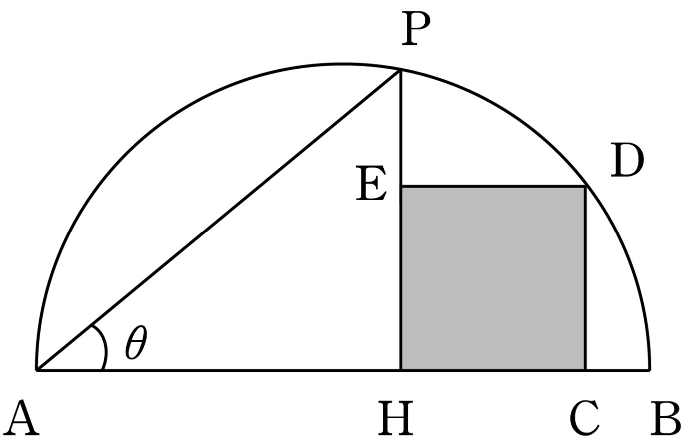
① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

006

★ ★ ★

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 갖는 반원이 있다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$가 되도록 하는 부채꼴 위에 점 P에 대하여 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 양변이 선분 PH 위에 점 E, 선분 HB 위에 점C, 호 PB 위에 점 D에 대하여 사각형 CDEH가 정사각형일 때, 사각형 CDEH의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$의 값은?

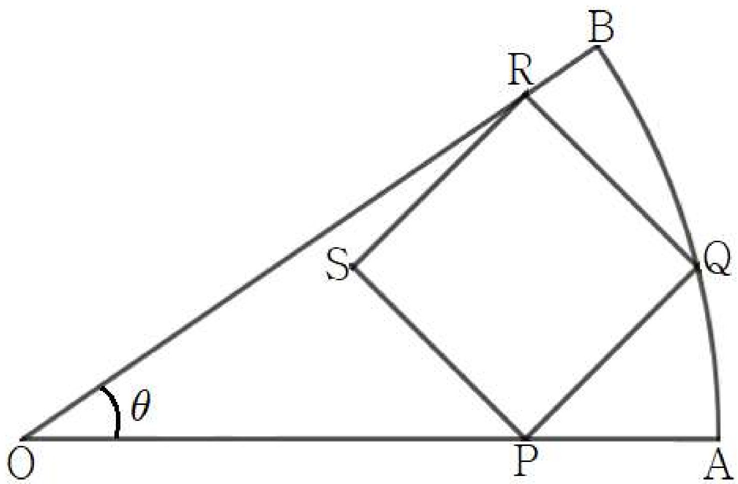


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

007

★★☆

그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB에 대하여 꼭짓점 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$이 각각 선분 OA, 호 AB, 선분 OB 위에 있고 $\angle\mathrm{OPS} = \angle\mathrm{APQ}$인 정사각형 PQRS의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^n} = m$일 때, $m+n$의 값은? (단, n은 자연수이고 m은 0이 아닌 상수이다.)

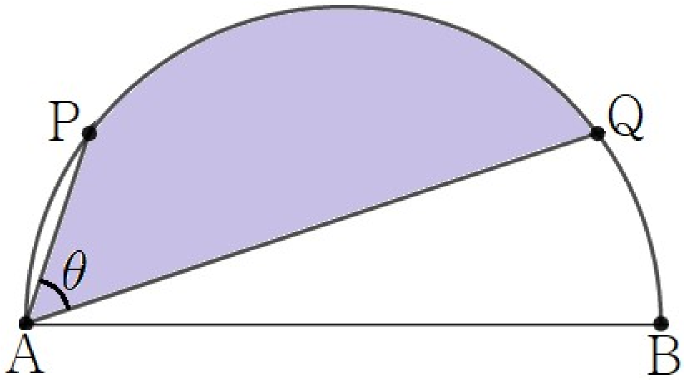


① $\dfrac{3}{2}$　② 2　③ $\dfrac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\dfrac{7}{2}$

008

★★☆

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}+\angle \mathrm{QAB}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{PAQ}=\theta$일 때, 선분 AQ, AP와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 $S(\theta)$이다. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은?



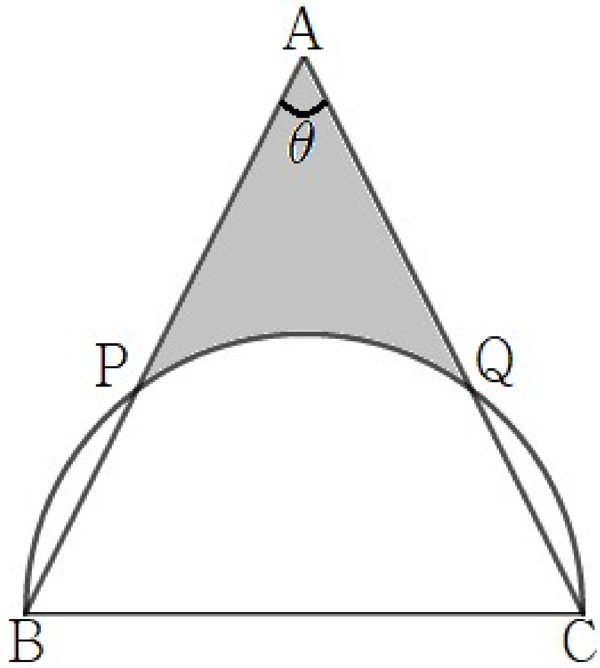
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

009

★★☆

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$인 이등변 삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 지름으로 갖는 반원이 있다. 선분 AB오 AC가 각각 반원과 만나는 점 P, Q에 대하여 $\angle PAQ=\theta$일 때, 선분 AP, AQ와 호 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} + \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$의 값은?

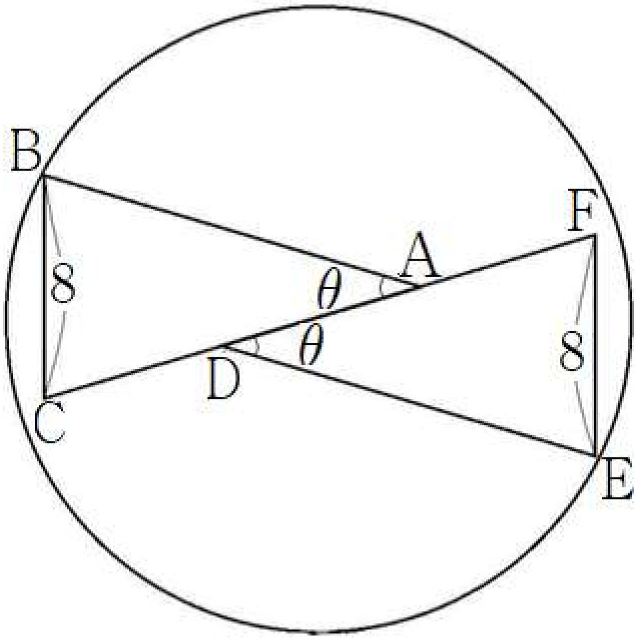


① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

010

★★☆

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=8$인 이등변 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{EF}}=8$이고 삼각형 ABC에 합동인 삼각형 DEF가 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{DA}}=\overline{\mathrm{AF}}$가 되도록 변의 일부를 공유하고 있다. $\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{EDF}=\theta$일 때, 선분 BE를 지름으로 하는 원의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \theta^2 \times S(\theta)+\lim_{\theta \to \pi-} S(\theta)$의 값은?

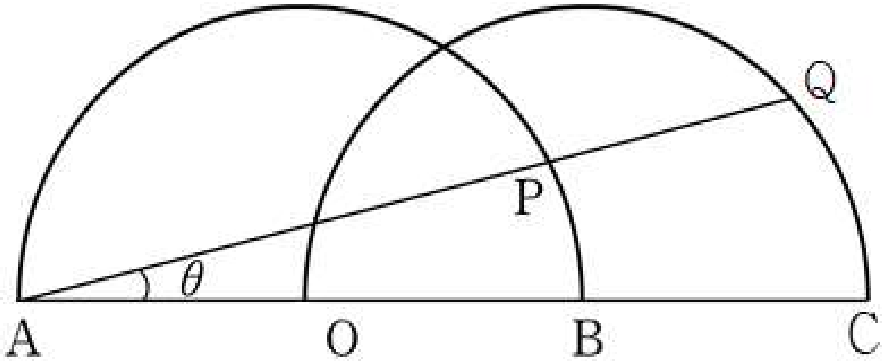


① 45π　② 53π　③ 61π　④ 69π　⑤ 77π

011

★ ★ ☆

그림과 같이 중심이 O이고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 S_1에 대하여 점 B를 중심으로 하고 직선 AB위에 점 O, C를 지름의 양 끝 으로 하는 반원을 S_2라 하자. 호 AB위에 점 P에 대하여 직선 PA가 반원 S_2와 만나는 두 점 중 S_1의 외부에 있는 점을 Q라 하고, $\angle \mathrm{PAB} = \theta$라 일때, 선분 AQ의 길이를 $l(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \dfrac{3 - l(\theta)}{\theta^2}$의 값은? (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{6}$) [4점]

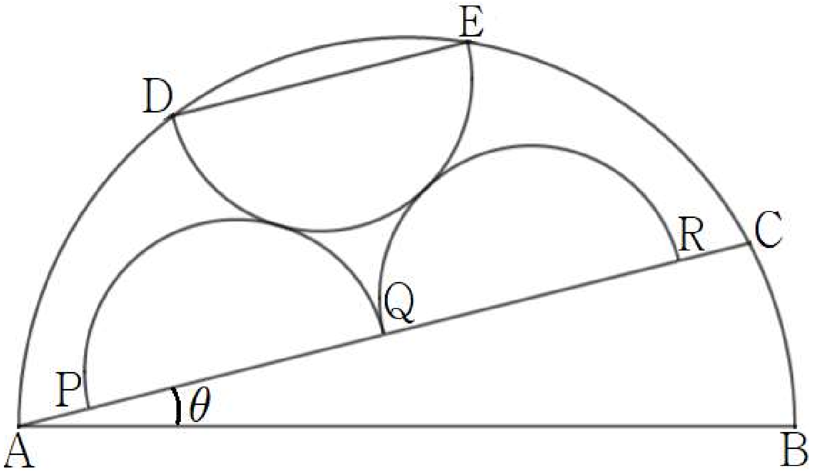


① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

012

★ ★ ★

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. $\angle \mathrm{BAC}=\theta$가 되도록 호 AB위에 점 C를 잡는다. 선분 AC 위에 점 $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}$에 대하여 선분 PQ, QR을 지름으로 하는 반원을 각각 C_1, C_2라 하고, 호 AC위에 점 D, E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 반원을 C_3라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{DE}}$이고, 세 반원 C_1, C_2, C_3가 서로 외접할 때, 반원 C_1의 반지름은 $r(\theta)$이다. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}-} \dfrac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}$의 값은 k이다. $120k^2$의 값을 구하시오. [4점]

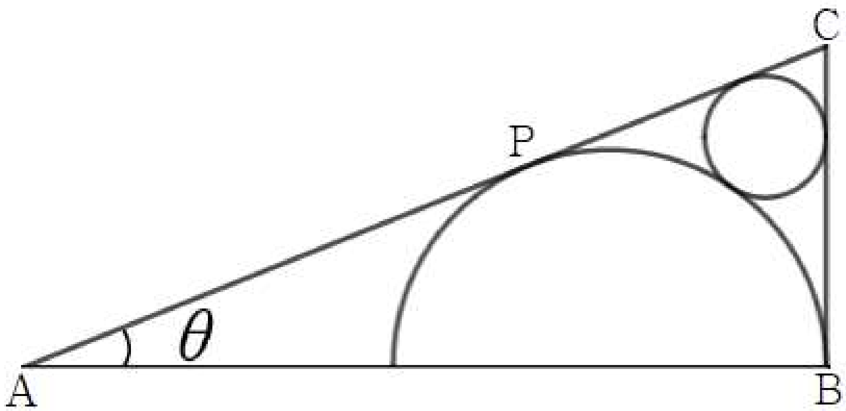


013

★★☆

R과 r을 각각 구하지 말고 $\frac{r}{R}$을 한 번에 구해보자.

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$이고, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC에 대하여 $\angle \mathrm{BAC}=\theta$일 때, 점 B, P에서 직선 AC, BC와 접하고 중심이 선분 AB위에 있는 반원 O_1이 있다. 반원 O_1와 직선 AC, BC에 동시에 접하는 원 O_2에 대하여 반원 O_1과 원 O_2의 반지름을 각각 $R(\theta), r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{R(\theta)}$의 값은?



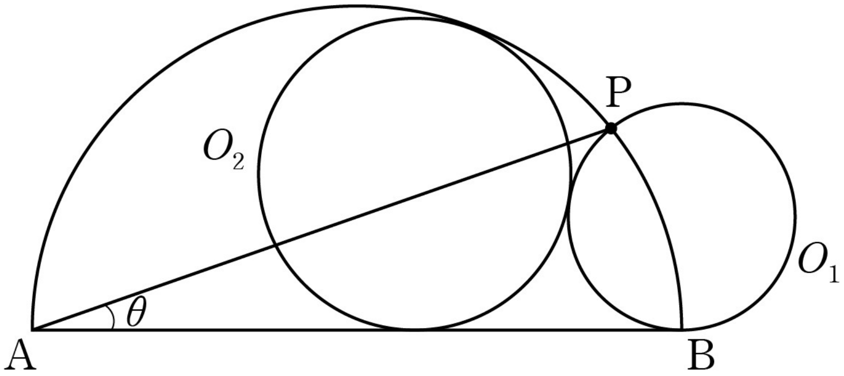
① $5-3\sqrt{2}$
② $4-2\sqrt{2}$
③ $3-2\sqrt{2}$
④ $2-\sqrt{2}$
⑤ $1+\sqrt{2}$

014

★ ★ ★ ★

f와 g를 각각 구하지 말고 한 번에 구해보자.

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB을 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P에 대하여 점 B에서 직선 AB와 접하고 점 P를 지나는 원 O_1과 원 O_1에 외접하고 호 AP, 직선 AB, 동시에 접하는 원 O_2가 있다. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$일 때, O_1의 반지름을 $f(\theta)$ O_2의 반지름을 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은? [4점]

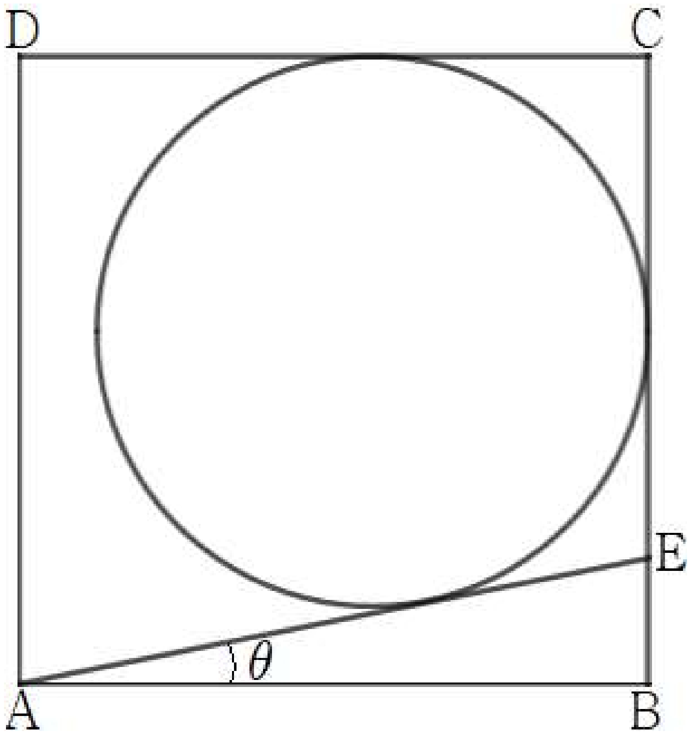


① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

015

★★★☆

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에 대하여 $\angle \mathrm{BAE} = \theta$가 되도록 선분 BC 위에 점 E를 잡고 선분 AE, 선분 CD, 선분 CD에 동시에 접하는 원을 C라고 하자. 원 C의 반지름이 $r(\theta)$일 때, $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$의 값은?

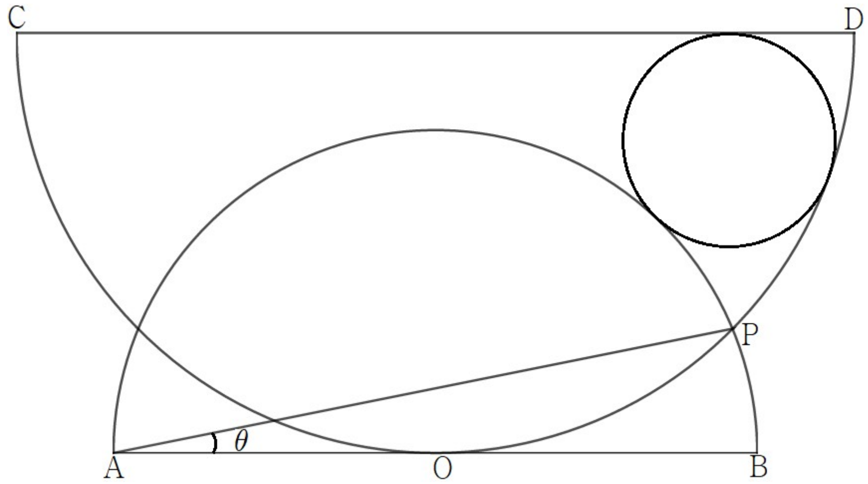


① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

016

★ ★ ★ ★

그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C_1이 있다. 호 AB위에 점 P에 대하여 P를 지나고 O에서 선분 AB와 접하며 선분 AB와 평행한 선분 CD를 지름으로 하는 반원을 C_2라 하자. $\angle \mathrm{PAB} = \theta$일 때, 반원 C_2의 반지름의 길이는 $f(\theta)$이고, 선분 CD와 호 AP, DP에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이는 $g(\theta)$이다. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은?

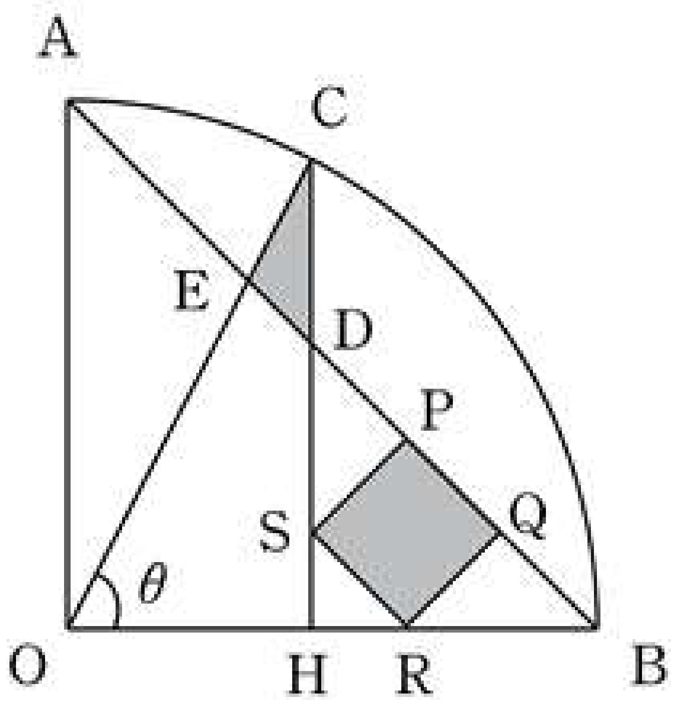


① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

017

★★★☆

그림과 같이 $\angle \mathrm{AOB}=\frac{\pi}{2}$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB가 있다. 호 AB위에 $\angle \mathrm{COB}=\theta$인 점 C에 대하여 선분 OB에 내린 수선의 발 H를 잡고 선분 CH와 선분 AB의 교점을 D라 하고 선분 OC와 선분 AB의 교점을 E라 하자. 삼각형 CED의 넓이를 $f(\theta)$, 한 변이 선분 BD위에 있고 삼각형 DHB에 내접하는 정사각형 PQRS의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$ 의 값은?



① $\frac{1}{18}$　② $\frac{1}{9}$　③ $\frac{1}{6}$　④ $\frac{2}{9}$　⑤ $\frac{5}{18}$

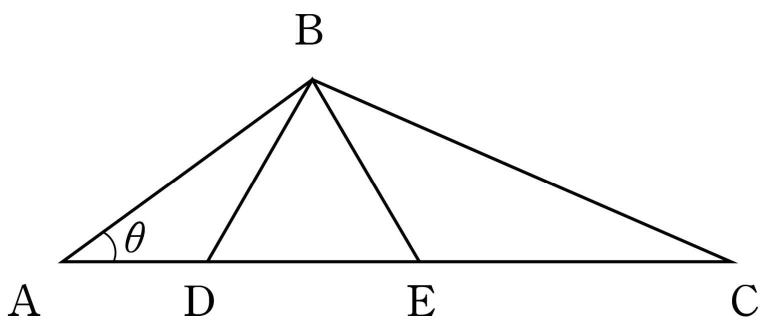
018

★★

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle \mathrm{ABC}=\frac{2}{3}\pi$인 삼각형 ABC에서 삼각형 BDE가 정삼각형이 되도록 선분AC위에 점 D, E를 잡는다.

$\angle \mathrm{A}=\theta$일 때, 삼각형 ABD의 넓이를 $S_1(\theta)$, 삼각형 BDE의 넓이를 $S_2(\theta)$, 삼각형 BEC의 넓이를 $S_3(\theta)$라 하자.

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \frac{S_3(\theta)}{S_1(\theta)} \times \frac{1}{S_2(\theta)}$의 값은?

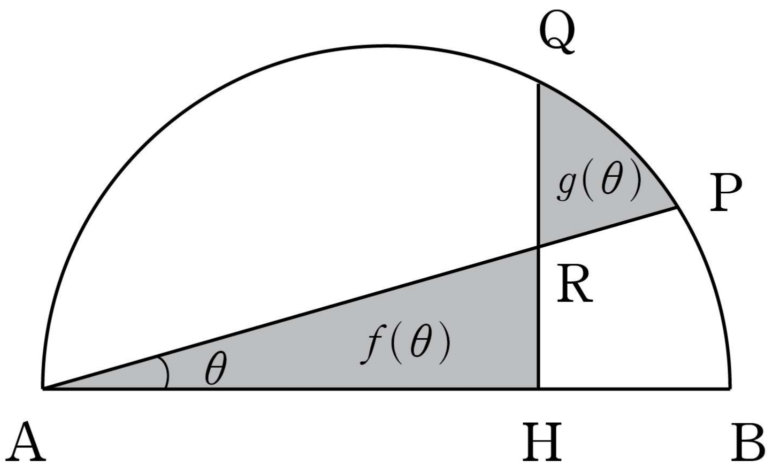


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$　② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　③ $\sqrt{3}$　④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

019

★ ★ ☆

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. $\angle\mathrm{PAB}=\theta$가 되도록 하는 호 AB 위에 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$가 되도록 호 AP위에 점 Q를 잡는다. 점 Q에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 QH와 선분 AP의 교점을 R이라 하자. 삼각형 AHR의 넓이를 $f(\theta)$, 선분 QR, 선분 RP, 호 QP로 둘러싸인 도형의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}$의 값은?

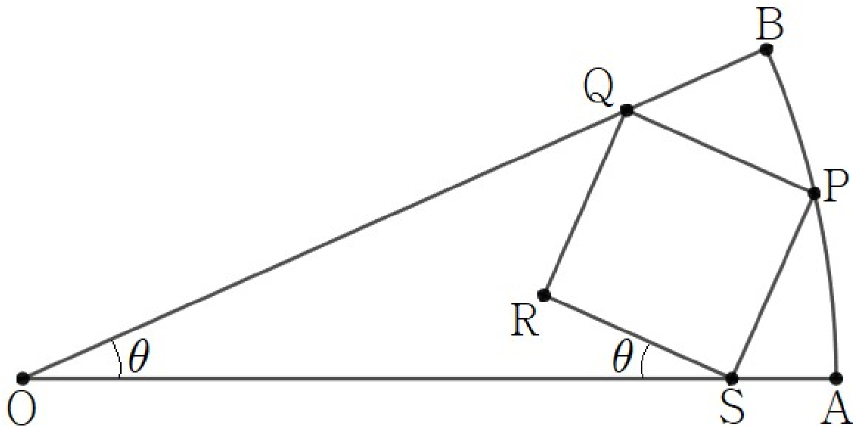


① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

020

★★★☆

그림과 같이 점 O를 중심으로 하는 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 θ인 부채꼴 OAB가 있다. $\angle \mathrm{RSO}=\theta$이고 점 P, Q, S가 각각 호 AB, 선분 OB, 선분 OA 위에 있는 정사각형 PQRS의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은?

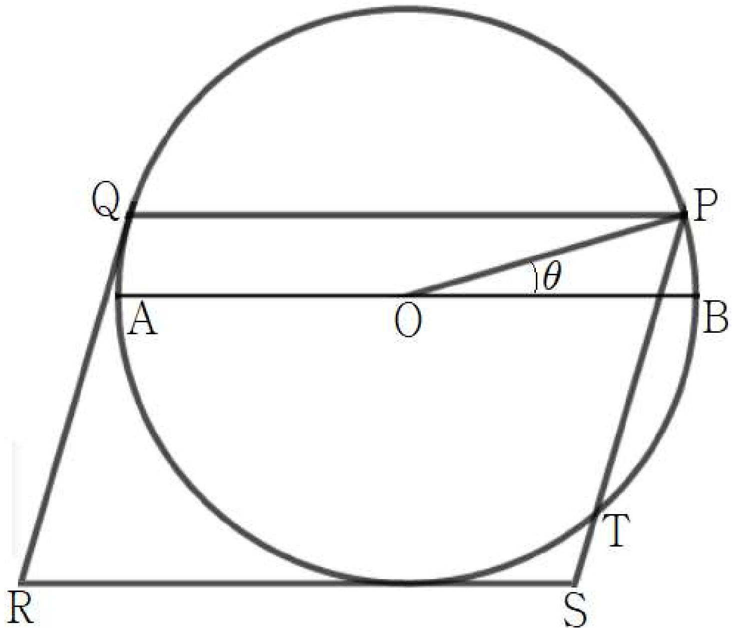


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

021

★ ★ ★ ★ ☆

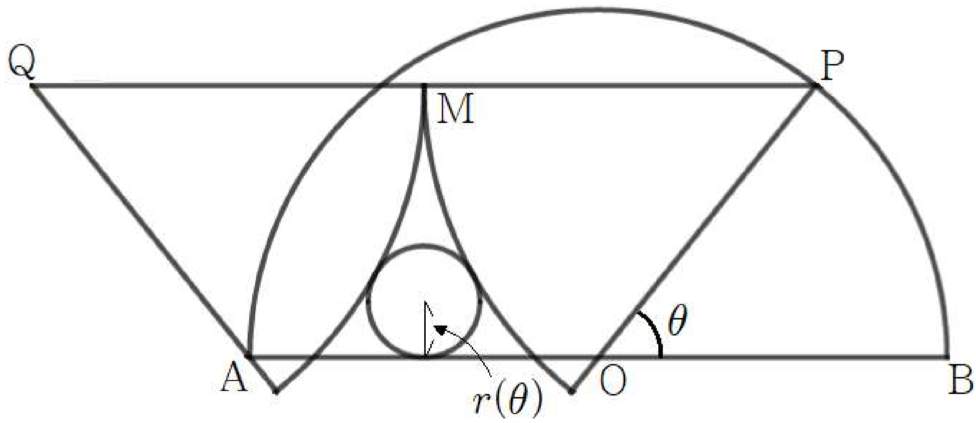
그림과 같이 점 O를 중심으로 하고 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 원이 있다. 호 AB 위에 점 P에 대하여 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 원과 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q에서의 접선 위에 점 R과 직선 QR과 평행하고 점 P를 지나는 직선 위의 점 S를 직선 RS가 원에 접하고 사각형 PQRS가 평행사변형이 되도록 잡는다. $\angle \mathrm{POB} = \theta$일 때, 직선 PS가 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점 T에 대하여 선분 ST의 길이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{6}-} \frac{f(\theta)}{\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)^2}$의 값을 k라 할 때, $4k^2$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$)



022

★ ★ ★ ☆

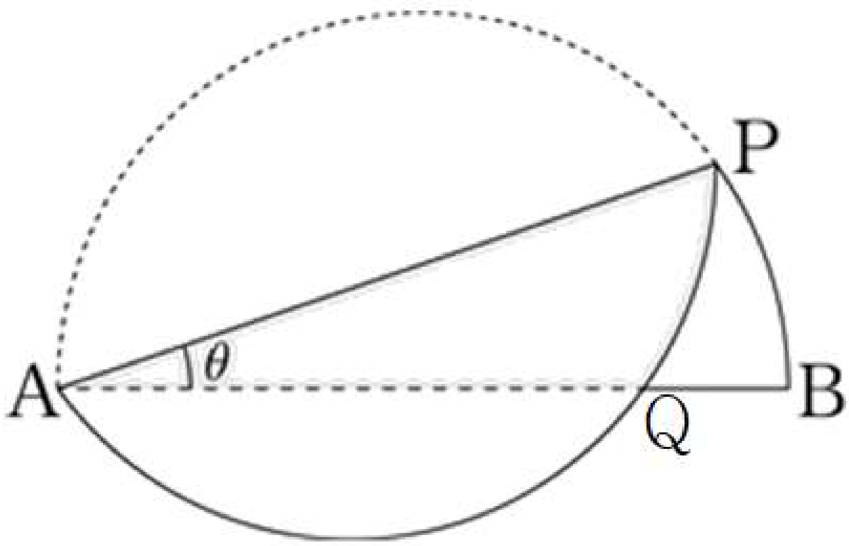
길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심 O에 대하여 $\angle \mathrm{POB}=\theta$가 되도록 호 AB위에 점 P를 잡고, 사각형 AOPQ가 선분 AO와 선분 PQ가 평행인 등변사다리꼴이 되도록 반원 밖에 점 Q를 잡는다. 선분 PQ의 중점 M에 대하여 점 P, Q를 각각 중심으로 하고 점 M을 지나는 두 부채꼴과 선분 AB에 동시에 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{\theta^2} = k$이다. $60k$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$)



023

★★☆

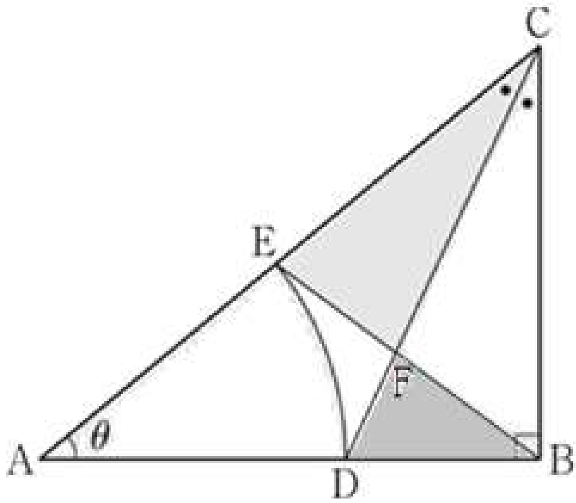
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AP를 접는 선으로 하여 반원을 접었을 때, 호 AP와 선분 AB가 만나는 점 Q에 대하여 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$일 때, 선분 BQ의 길이를 $f(\theta)$, 선분 PQ의 길이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times g(\theta)}{f(\theta)}=a$ 일 때, $60a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$) [4점]



024

★ ★ ☆

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 예각 C를 이등분하는 직선과 선분 AB의 교점을 D, 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}}$인 원과 선분 AC의 교점을 E, 선분 BE와 선분 CD의 교점을 F라 하자. $\angle \mathrm{A}=\theta$일 때, 삼각형 CEF의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFB의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)

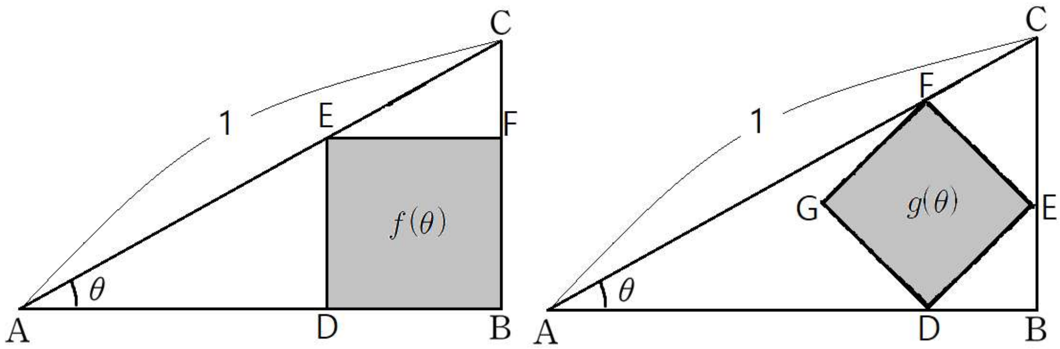


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

025

★ ★ ☆

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=1$이고 $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 $\angle\mathrm{BAC}=\theta$일 때, 점 D, E가 각각 두 선분 AB, AC 위에 있는 정사각형 DEFB의 넓이를 $f(\theta)$, D, F가 각각 두 선분 AB, AC위에 있고, $\angle\mathrm{ADF}=\frac{\pi}{2}$인 정사각형 DEFG의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. 자연수 n에 대하여 $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^n}=k$일 때, nk의 값은? (단, $k\neq 0$)

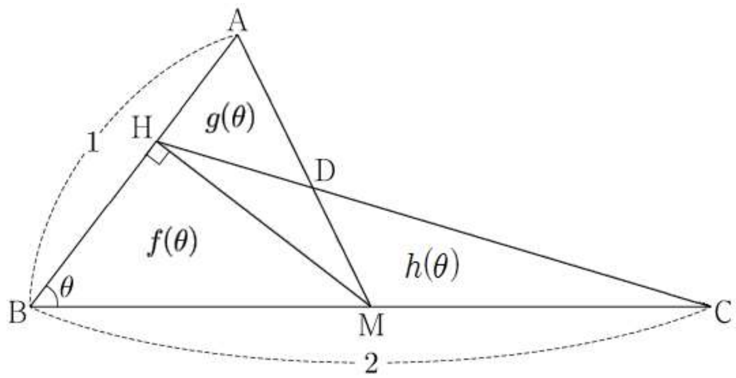


① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

026

★ ★ ★

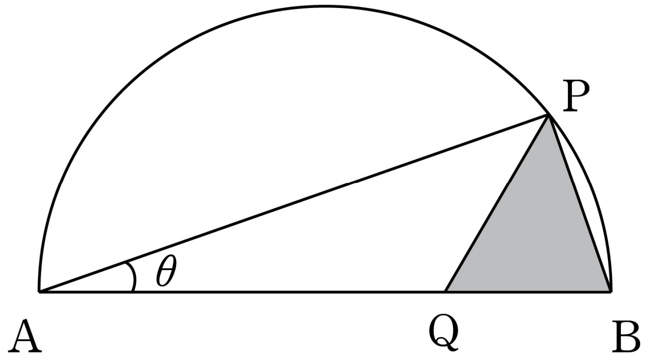
그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 HC가 선분 AM과 만나는 점을 D라 하자. $\angle ABC=\theta$라 할 때, 삼각형 BMH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 ADH의 넓이를 $g(\theta)$, 삼각형 CDM의 넓이를 $h(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)+g(\theta)-h(\theta)}{\theta^3}=a$ 일 때, $80a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



027

★★☆

그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 갖는 반원이 있다. $\angle \mathrm{PAB}=\theta$가 되도록 하는 부채꼴 위의 점 P에 대하여 $\angle \mathrm{PQB}=\frac{\pi}{3}$가 되도록 선분 AB위에 점 Q를 잡는다. 삼각형 PQB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$의 값은? [4점]

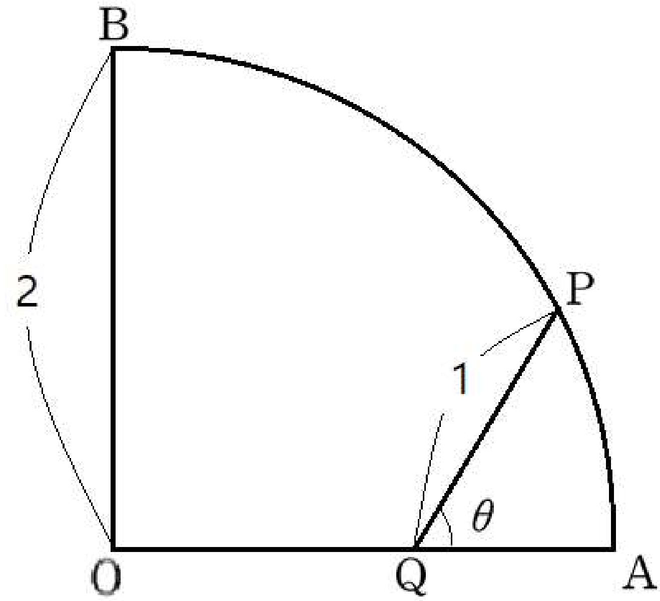


① $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

028

★★☆

그림과 같이 반지름의 길이가 2인 부채꼴의 호위에 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=1$ $\angle \mathrm{PQA}=\theta$가 되도록 선분 OA 위에 점 Q를 잡는다. 선분 OQ의 길이를 $l(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{l(\theta)-1}{\theta^2}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

Theme 02

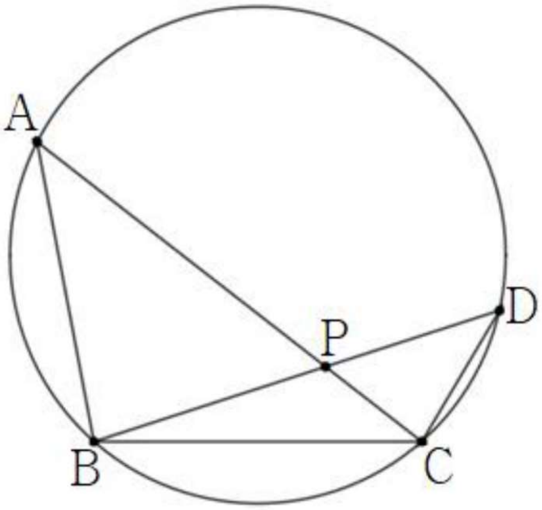
사인법칙과 코사인법칙 (029~034)

029

그림과 같이 $\overline{AB}=10$인 삼각형 ABC가 원에 내접하고 있다. 이 원 위에 점 D를 $\overline{CD}=5$가 되도록 잡고 선분 AC와 선분 BD의 교점을 P라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\cos(\angle BAC)=\dfrac{3}{4}$이다.
>
> (나) 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 BCD의 넓이를 S_2라 할 때, $S_1-S_2=\dfrac{45\sqrt{7}}{4}$이다.

선분 BC의 길이를 k라 할 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

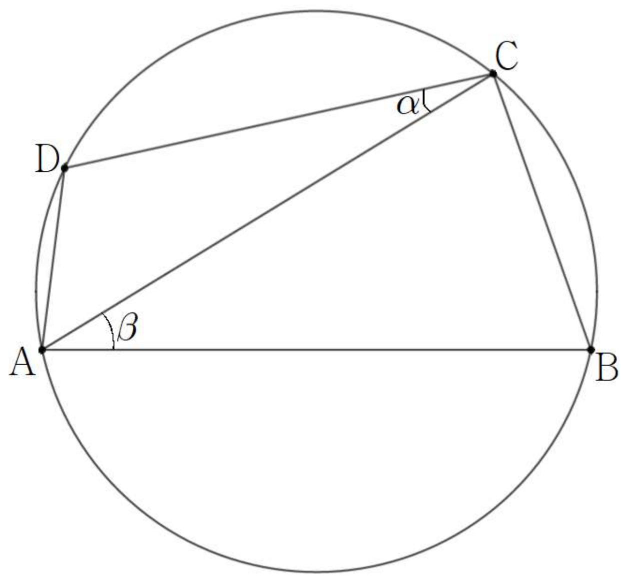


030

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 $\angle\mathrm{ACD}=\alpha$, $\angle\mathrm{BAC}=\beta$ 라 할 때 다음 조건을 만족시킨다.

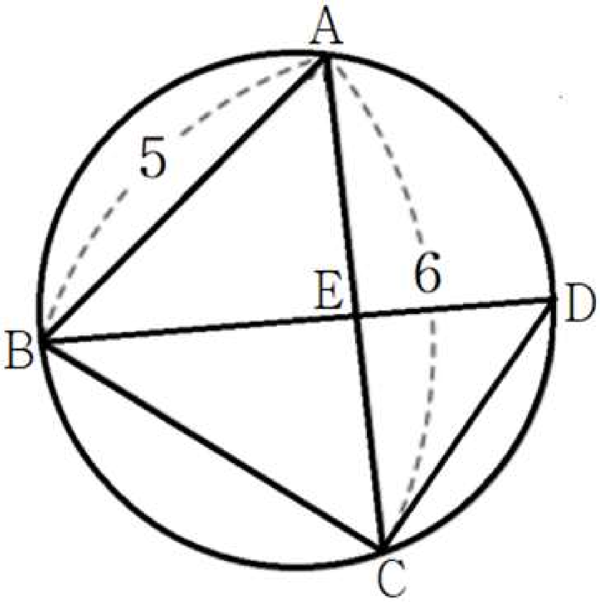
(가) 사각형 ABCD의 넓이는 삼각형 ACD 넓이의 3배이다. (나) $8\sin\alpha=5\sin\beta$이다. (다) $\overline{\mathrm{CD}}=6$이다.

$\cos(\angle\mathrm{ABC})=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$일 때, $\left(\overline{\mathrm{AC}}\right)^2=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



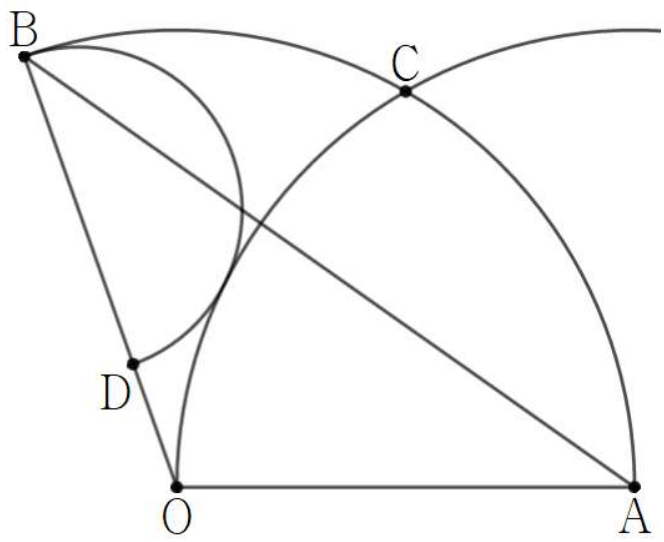
031

그림과 같이 원에 내접하는 삼각형 ABC와 선분 BD가 원의 중심을 지나며 원에 내접하는 삼각형 BCD 가 있다. 선분 AC 와 선분 BD가 만나는 점을 E라고 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=6$, $\cos\mathrm{A}=\dfrac{3}{5}$이다. 이때, 삼각형 ABE의 넓이를 S_1, 삼각형 ECD의 넓이를 S_2라 할 때, $8(S_1-S_2)$의 값을 구하시오.



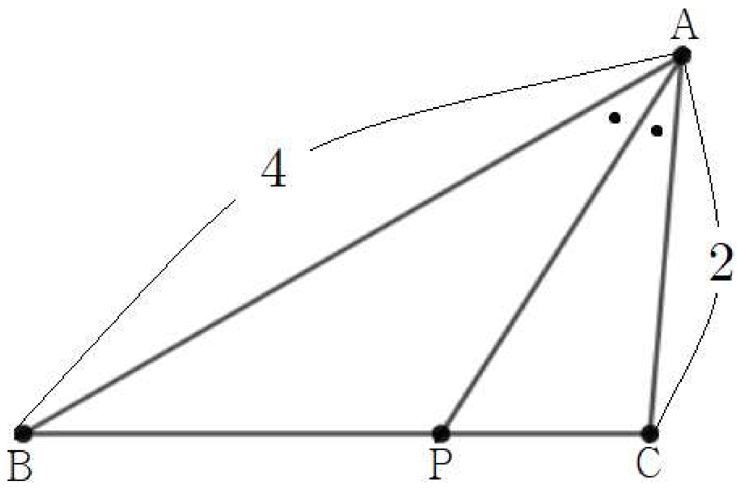
032

그림과 같이 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB의 호 AB와 점 A를 중심으로 하고 점 O를 지나는 원의 일부가 만나는 점을 C라 하자. 선분 BO위의 어떤 점 D에 대하여 점 B, D를 지름의 양 끝으로 하는 반원이 부채꼴 AOB의 내부에서 호 CO와 외접하고 있다. 삼각형 AOB의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$일 때, 선분 BD의 길이는 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



033

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=2$인 삼각형 ABC가 있다. 각 BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하고, 선분 AP의 길이를 k라 할 때, $\cos(\angle \mathrm{BAP})=mk$이다. $120m$의 값을 구하시오.



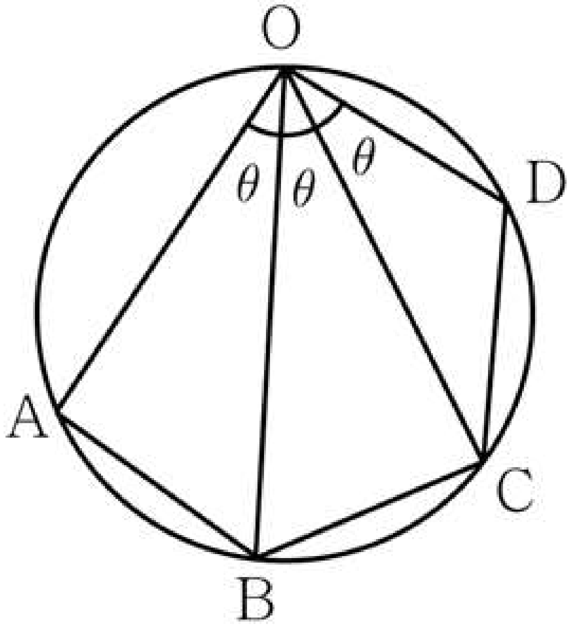
034

그림과 같이 원 위의 서로 다른 점 $\mathrm{O}, \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{BOC} = \angle \mathrm{COD} = \theta$

(나) 세 삼각형 COD, 삼각형 BOC, 삼각형 AOB의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3라 하면, $S_1 : S_2 : S_3 = 2 : 4 : 3$이다.

$\cos^2\theta = \dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인자연수이다.)



Theme 03

무한등비급수 (035~039)

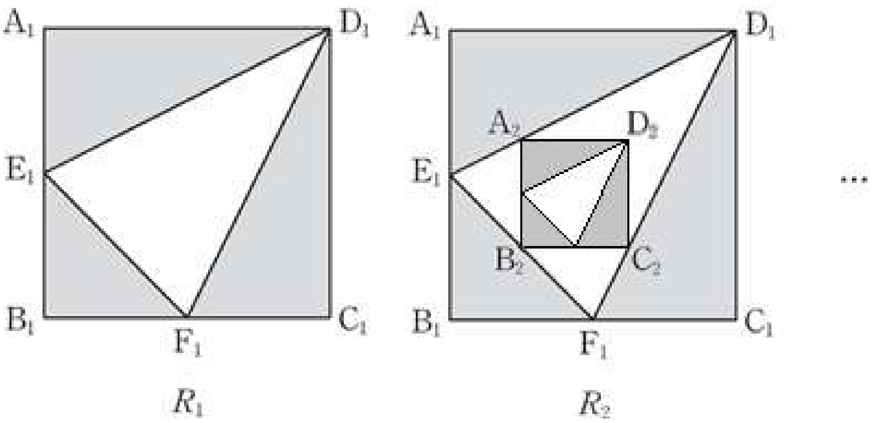
035

그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 에서 선분 $\mathrm{A_1B_1}$ 과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 의 중점을 각각 $\mathrm{E_1}$, $\mathrm{F_1}$ 이라 하자.

정사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$ 의 내부와 삼각형 $\mathrm{E_1F_1D_1}$ 의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 선분 $\mathrm{D_1E_1}$ 위의 점 $\mathrm{A_2}$, 선분 $\mathrm{E_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{B_2}$, 선분 $\mathrm{D_1F_1}$ 위의 점 $\mathrm{C_2}$ 에 대하여 선분 $\mathrm{A_1D_1}$ 과 선분 $\mathrm{A_2D_2}$ 가 평행하도록 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 를 그리고, 정사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$ 에 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

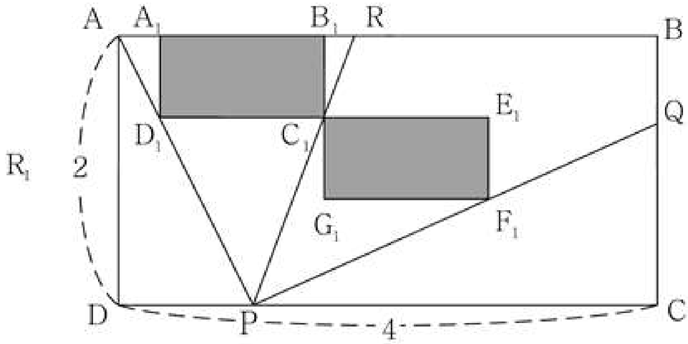
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

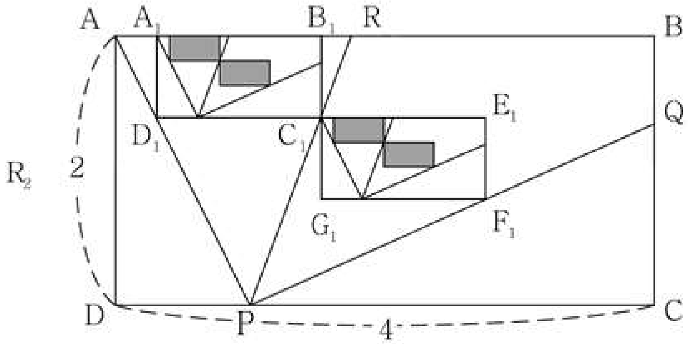


036

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$인 직사각형 ABCD이 있다. 선분 CD의 $3:1$의 내분점을 P라 하고 P에 대하여 $\angle APQ=\dfrac{\pi}{2}$가 되도록 하는 선분 BC위의 점을 Q라 하고, 각 APQ를 이등분 하는 직선이 선분 AB와 만나는 점을 R이라 하자. 선분 AR위에 점 A_1, B_1과 선분 PR위의 점 C_1, 선분 PA위의 점 D_1을 $\overline{A_1B_1}:\overline{B_1C_1}=2:1$이 되도록 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$을 잡고, 선분 PQ위의 점 F_1에 대하여 점 B_1, C_1, G_1이 한 직선상에 있고 $\overline{C_1E_1}:\overline{E_1F_1}=2:1$이 되도록 직사각형 $C_1E_1F_1G_1$을 잡는다. 이때, 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$와 직사각형 $C_1E_1F_1G_1$를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 직사각형 $C_1E_1F_1G_1$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 만들어지는 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때,

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?





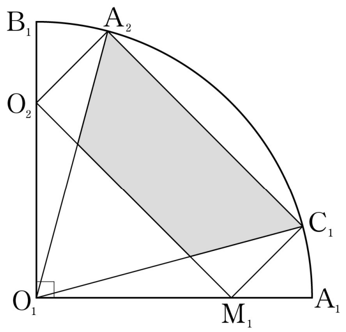
⋮ ⋮

① $\dfrac{396}{239}$ ② $\dfrac{398}{239}$ ③ $\dfrac{400}{239}$ ④ $\dfrac{402}{239}$ ⑤ $\dfrac{404}{239}$

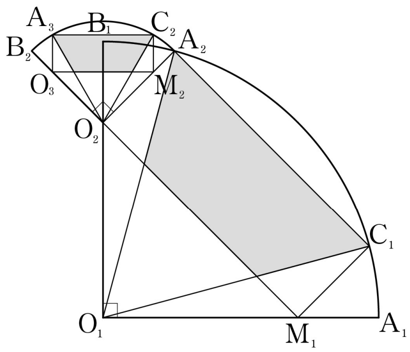
037

그림과 같이 중심이 $\mathrm{O_1}$, 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가 $90°$인 부채꼴 $\mathrm{O_1A_1B_1}$에서 삼각형 $\mathrm{O_1A_2C_1}$의 넓이가 $\dfrac{\sqrt{55}}{4}$이고 $\overline{\mathrm{B_1A_2}}=\overline{\mathrm{A_1C_1}}$이 되도록 호 $\mathrm{A_1B_1}$위의 점 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{C_1}$을 잡고, 선분 $\mathrm{O_1A_1}$위의 점 $\mathrm{M_1}$, 선분 $\mathrm{O_1B_1}$위의 점$\mathrm{O_2}$를 사각형 $\mathrm{O_2M_1C_1A_2}$이 직사각형이 되도록 그린다. 직사각형 $\mathrm{O_2M_1C_1A_2}$와 삼각형 $\mathrm{O_1C_1A_2}$의 내부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

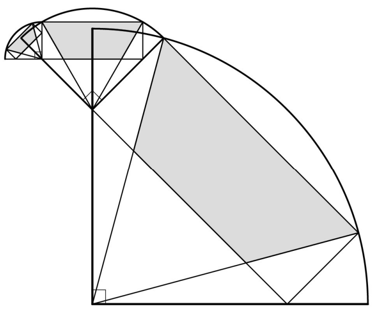
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2



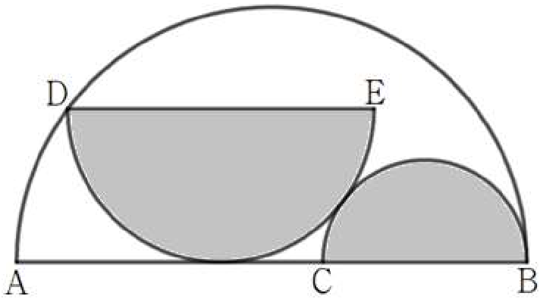
R_3

⋯

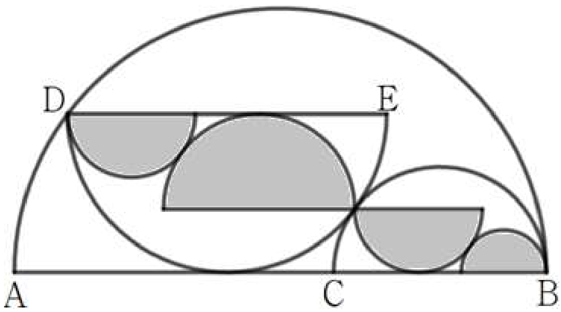
⋯

038

그림과 같이 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB위의 점 C에 대하여 선분 BC를 지름으로 하는 반원을 그리고 호 AB위의 점 D와 반원 내부의 점 E에 대하여 선분 AB와 평행하고 $3\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{DE}}$를 만족시키는 선분 DE를 지름으로 하는 반원을 선분 AB와 호 BC에 동시에 접하도록 그린다. 이렇게 새로 그려진 2개의 반원의 내부를 색칠한 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 새로 그려진 두 반원에 같은 방법으로 새로 그려진 2^2개의 반원의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2이라 하고, 이와 같은 과정을 계속하여 n번째에 색칠된 2^n개의 반원의 내부를 색칠한 그림 R_n에 색칠된 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



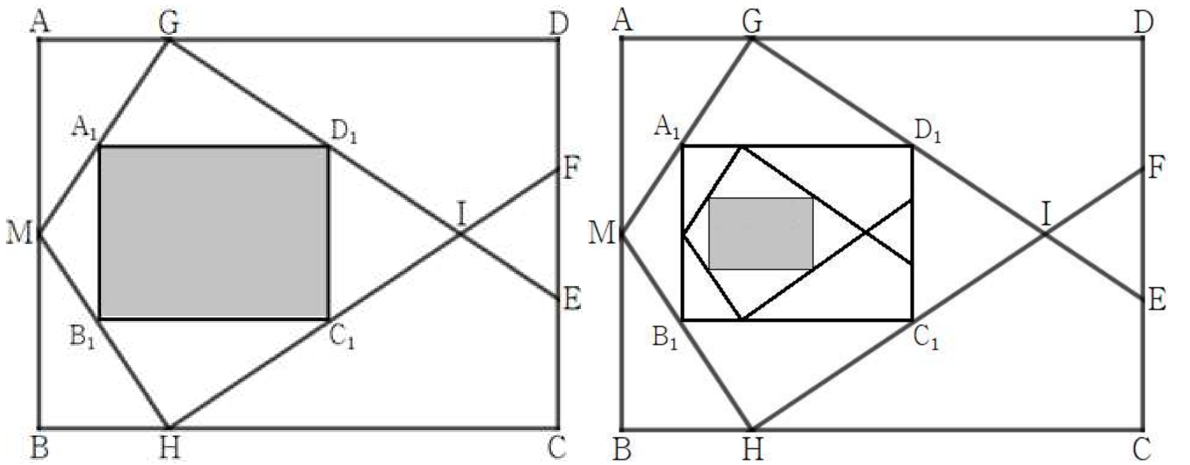
R_2

① $\frac{325}{24}\pi$　② $\frac{55}{4}\pi$　③ $\frac{335}{24}\pi$

④ $\frac{85}{6}\pi$　⑤ $\frac{115}{8}\pi$

039

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 AB의 중점을 M라 하고, 선분 CD를 삼등분 하는 점들 중 C에 가까운 순서대로 E, F라 하자. 선분 AD위의 점 G와 선분 BC위의 점 H를 $\angle\mathrm{MGE}=\angle\mathrm{MHF}=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 선분 GE와 선분 HF의 교점을 I라 하자. 선분 MG, MH, HI, GI위의 네 점 $\mathrm{A_1}, \mathrm{B_1}, \mathrm{C_1}, \mathrm{D_1}$을 사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$이 선분 $\mathrm{A_1B_1}$와 선분 AB가 평행하고 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}:\overline{\mathrm{B_1C_1}}=3:4$인 직사각형이 되도록 잡을 때, 사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$의 넓이를 S_1이라하자. 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에 대하여 같은 시행을 하여 얻은 사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$의 넓이를 S_2라 하자. 이와 같은 시행을 반복하여 얻은 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은? (단, $\angle\mathrm{AMG}=\angle\mathrm{BMH}<\frac{\pi}{4}$)



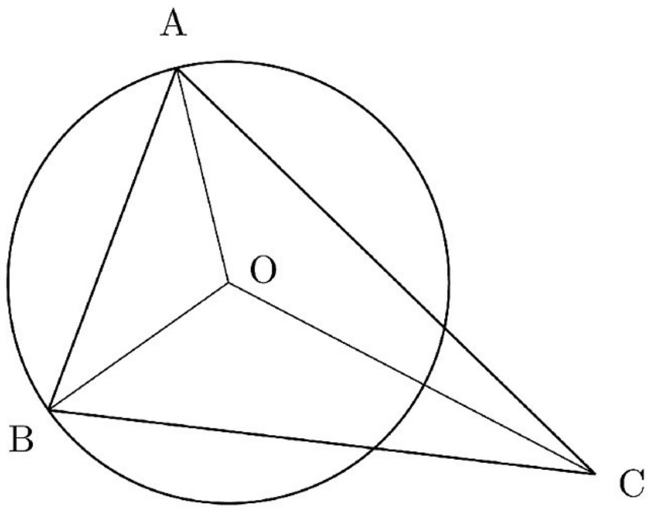
① $\frac{169}{56}$　② $\frac{85}{28}$　③ $\frac{171}{56}$　④ $\frac{43}{14}$　⑤ $\frac{173}{56}$

Theme 04

삼각함수 덧셈정리 (040~041)

040

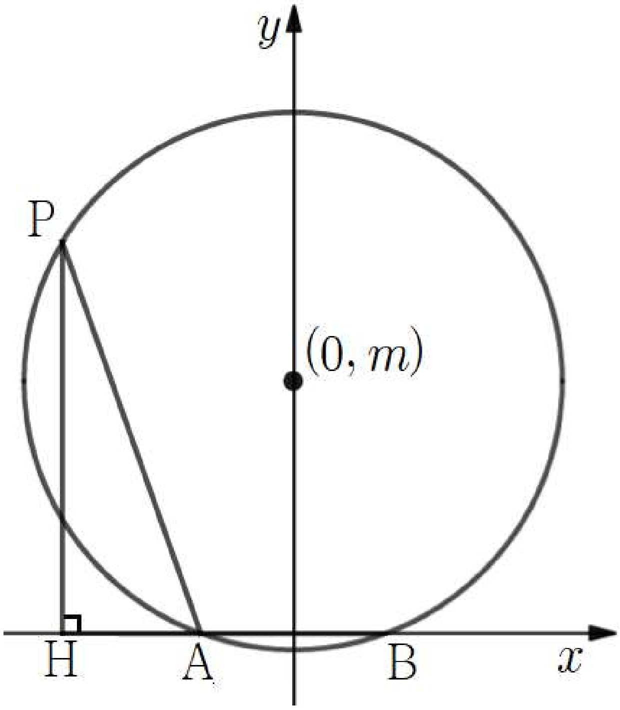
그림과 같이 중심이 원점인 원과 원 위의 두 점 A, B 원 밖의 점 C가 있다. 점 $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$를 원점과 이어 삼각형 ABC를 3개의 삼각형으로 나누었을 때, $\sin(\angle \mathrm{AOB})=\dfrac{24}{25}$이고, $\dfrac{\triangle \mathrm{OAC}}{\triangle \mathrm{OBC}}=\dfrac{2}{3}$일 때, $\tan(\angle \mathrm{BOC})$의 값은? $\left(단, \dfrac{\pi}{2}< \angle \mathrm{AOB}\right)$



① $-\dfrac{67}{29}$ ② $-\dfrac{72}{29}$ ③ $-\dfrac{77}{29}$ ④ $-\dfrac{82}{29}$ ⑤ -3

041

그림과 같이 y축 위의 점 $(0, m)$을 중심으로 하고 x축 위의 점 A, B를 지나는 원이 있다.
제 2사분면에 있는 원 위에 점 P와 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H에 대하여 다음조건을 만족시킨다.



(가) $\overline{\mathrm{AB}}=4$
(나) $\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA}}+2$

$\tan(\angle \mathrm{PAH})=2\sqrt{2}$일 때, m의 값은?

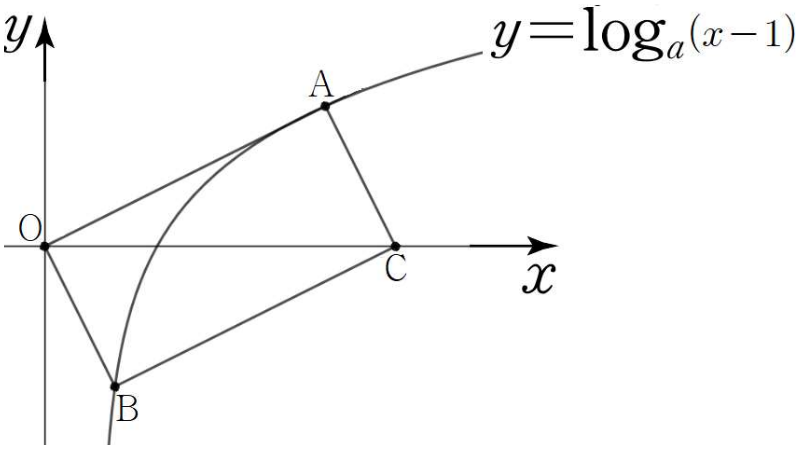
① $\frac{15\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{31\sqrt{2}}{8}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $\frac{33\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\frac{17\sqrt{2}}{4}$

Theme 05

삼각함수 덧셈정리 (042~044)

042

$a>1$ 인 실수 a 에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=\log_a(x-1)$ 위의 점 A, B와 x축 위의 점 C, 원점 O를 각각 꼭짓점으로 하는 사각형 OACB가 있다. 사각형 OACB가 변 OA의 길이가 변 OB의 길이의 2배인 직사각형 일 때, $\log_2 a$의 값은? (단, A의 x좌표는 B의 x좌표 보다 크다.)



① $\frac{7}{10}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{4}{5}$　④ $\frac{17}{20}$　⑤ $\frac{9}{10}$

043

좌표평면에서 지수함수 $y=a^x$의 그래프와 직선 $y=x$는 두 점 $\mathrm{P}(a_1,a_1)$, $\mathrm{Q}(a_2,a_2)$에서 만나고, 지수함수 $y=b^x$의 그래프와 직선 $y=2x$는 두 점 $\mathrm{R}(b_1,2b_1)$, $\mathrm{S}(b_2,2b_2)$에서 만난다. <보기>에서 옳은 것을 있는 대로 고른 것은? (단, $a_1<a_2, b_1<b_2$)

<보 기>

ㄱ. $a=b$이면, $a_1>b_1$이다.

ㄴ. $b=a^2$일 때, $a_1b_2=a_2b_1$이다.

ㄷ. 원점 O에 대하여 $b>a^2$일 때 $\angle\mathrm{OPR}>\dfrac{\pi}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

044

양의 상수 m에 대하여 좌표평면위의 직선 $y=mx$가 $y=4^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 A, $y=2^{x}$의 그래프와 만나는 두 점 중 x좌표의 값이 작은 것을 B라 하자. 점 A를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=2^{x}$의 그래프와 만나는 점을 C, 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선이 $y=4^{-x}$의 그래프와 만나는 점을 D라 하자. 사각형 ABDC가 평행사변형일 때, $\log_2 m$의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② 1 ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{7}{4}$

MEMO(메모)

우주설 수학

Naver ID, 우주설 (포만한)
ORBI ID, 우주설 (오르비)