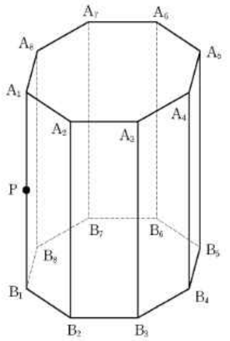
[정답률 21%]

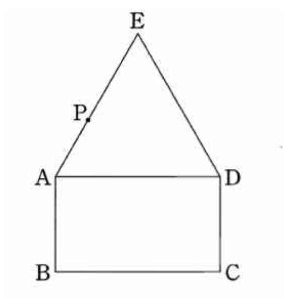
1. 다음 그림은 밑면이 정팔각형인 팔각기둥이다. $\overline{A_1A_3}=3\sqrt{2}$ 이고, 점 P가 모서리 A_1B_1 의 중점일 때, 벡터 $\sum_{i=1}^{8}\left(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_1}\right)$의 크기를 구하시오.[1]

[4점][09.9 평가원-가형20]



[정답률 38%]

2. 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE 위를 움직일 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[2]



ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.
ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.
ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[4점][10.9 평가원-가형14]

[정답률 23%]

3. 구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=-1$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. x축을 포함하는 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=4$가 만나서 생기는 원이 C와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α의 한 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$라 하자. a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점] [05.11수능-가형24번][3]

[정답률 24%]

4. 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 두 초점을 F, F′이라 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$을 만족시킬 때, 선분 PF의 길이는 k이다. $5k$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[3점] [06.11수능-가형20번][4]

[정답률 37%]

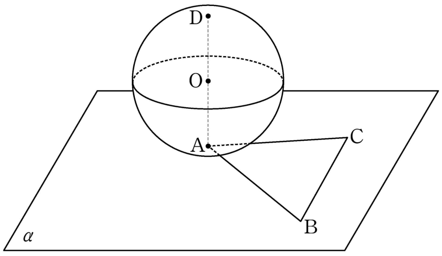
5. 좌표공간의 점 A(3, 6, 0)에서 평면 $\sqrt{3}y-z=0$에 내린 수선의 발을 B라 할 때, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)

[4점] [06.11수능-가형21번][5]

[정답률 33%]

6. 그림과 같이 평면 α 위에 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC가 있고, 반지름의 길이가 2인 구 S는 점 A에서 평면 α에 접한다. 구 S 위의 점 D에 대하여 선분 AD가 구 S의 중심 O를 지날 때, $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$의 값을 구하시오.

[4점] [06.11수능-가형24번][6]



[정답률 43%]

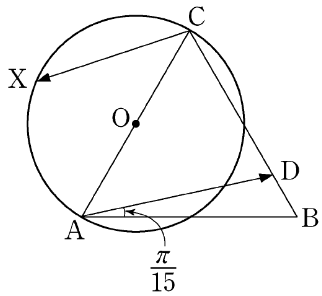
7. 좌표공간의 점 A(3, 3, 3)과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)[7]

[4점][08년.11수능 - 가형 22번]

[정답률 14%]

8. 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC위의 점 D를 $\angle DAB=\frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP=\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.[8] (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4 점][2010년 11월 수능가형-22번]



[정답률 7%]

9. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=50$이 두 평면 α : $x+y+2z=15$, β : $x-y-4\sqrt{3}z=25$ 와 만나서 생기는 원을 각각 C_1, C_2라 하자. 원 C_1 위의 점 P와 원 C_2 위의 점 Q에 대하여 $\overline{PQ}^2$의 최솟값을 구하시오.

[4 점][09년 9월 평가원-23번][9]

1. 정팔각형의 성질을 이용하여 대각선의 교점을 O라면 삼각형 OA_1A_3는 직각삼각형이 되고 $\overline{A_1O}=3$이다.

$\overline{A_iB_i}$의 중점을 P_i라 하면 $\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i}=2\overrightarrow{PP_i}$이다.

$\therefore \sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{PA_i}+\overrightarrow{PB_i})=2\sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{P_1P_i}$

$=2\sum_{i=1}^{8}(\overrightarrow{OP_i}-\overrightarrow{OP_1}) \qquad (\because \sum_{i=1}^{8}\overrightarrow{OP_i}=0)$

$=-2(8\overrightarrow{OP_1})=-2(8\overrightarrow{OA_1})$

따라서 크기는 48이다.

2. 정답 ⑤

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|=|\overrightarrow{PB}|=\overline{PB}$이므로

선분 PB의 길이는 점 P가 점 A와 일치할 때 최소이다.

따라서 최솟값은 $\overline{AB}=1$이다. (참)

ㄴ. $\triangle$ACD에서 $\overline{AD}=\sqrt{3}$, $\overline{DC}=1$이므로

$\angle CAD=30°$

$\triangle$EAD가 정삼각형이므로

$\angle EAD=60°$

$\therefore \angle EAC=\angle PAC=90°$

$\therefore \overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{AP}$

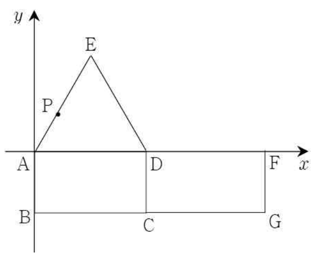
$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CA}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP})$

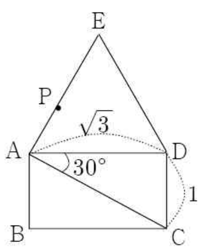
$=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{CA}|^2+0$

$=2^2=4$ (참)

ㄷ. 점 A를 원점, 직선 AD를 x축으로 하는 좌표평면에 주어진 도형을 나타내면 그림과 같다.





$\overline{AD}=\overline{DF}$인 x축 위의 점을 F라 하고 직사각형 DCGF를 그리면

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{GP}$

이므로 $|\overrightarrow{GP}|$의 최솟값은

점 $G(2\sqrt{3},-1)$에서 직선 AE에 이르는 거리와 같다.

직선 AE의 방정식은

$y=\sqrt{3}x$ 즉, $\sqrt{3}x-y=0$이므로

구하는 최솟값은

$\dfrac{|\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-(-1)|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\dfrac{7}{2}$ (참)

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

3. 정답 27

(풀이) 구의 방정식 $x^2+y^2+z^2=4$에 $z=-1$을 대입하면 $x^2+y^2=3$이므로 원 C는 중심이 (0, 0, -1), 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이고 평면 $z=-1$에 놓인 원이다. 이 때, x축을 포함하고 이 원과 오직 한 점에서 만나는 평면 α는 두 점 O(0, 0, 0), A(0, $\sqrt{3}$, -1) (또는 B(0, $-\sqrt{3}$, 0))을 지나야 한다.

따라서 평면 α는 x축과 직선 OA (또는 OB)를 포함한다. 이 때, x축의 방향벡터는 $\vec{x}=(1,0,0)$이고 직선 OA의 방향벡터 (또는 직선 OB의 방향벡터)는 $\vec{a}=(0,\sqrt{3},-1)$ (또는 $\vec{b}=(0,-\sqrt{3},-1)$)

이므로 평면 α의 법선벡터 $\vec{n}$은 벡터 $\vec{x}$와 벡터 $\vec{a}$ (또는 $\vec{b}$)와 각각 수직이어야 한다.

그런데 한 법선벡터가 $\vec{n}=(a,3,b)$이므로

$\vec{n}\cdot\vec{x}=(a,3,b)\cdot(1,0,0)=0$에서 $a=0$이고,

$\vec{n}\cdot\vec{a}=(a,3,b)\cdot(0,\sqrt{3},-1)=0$에서

$3\sqrt{3}-b=0 \quad \therefore \quad b=3\sqrt{3} \quad \therefore \quad a^2+b^2=0+27=27$

참고)

$\vec{n}\cdot\vec{b}=(a,3,b)\cdot(0,-\sqrt{3},-1)=0$일 경우에도

$3\sqrt{3}+b=0$이므로 $b=-3\sqrt{3}$이다.

$\therefore \quad a^2+b^2=0+27=27$

4. 정답 15

(풀이) $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=1$에서, $\overline{FP}$의 중점을

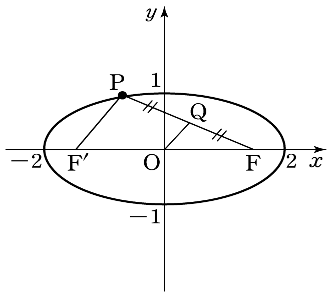
Q라고 하면 $\left|\dfrac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}}{2}\right|=|\overrightarrow{OQ}|=\dfrac{1}{2}$

한편, $\overrightarrow{F'P}\,//\,\overrightarrow{OQ}$이므로

$|\overrightarrow{F'P}|=\overline{PF'}=1$이다.

$\overline{PF'}+\overline{PF}=4$이므로, $\overline{PF}=k=3$

$\therefore \; 5k=15$



5. 정답 18

(풀이) $\overrightarrow{AB} /\!/ \vec{h} = (0,\ \sqrt{3},\ -1)$에서

$\overrightarrow{AB} = (0,\ \sqrt{3}\,t,\ -t)$라 하면

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (3, 6+\sqrt{3}\,t,\ -t)$이고,

B는 평면 위의 점이므로

$\sqrt{3}(6+\sqrt{3}\,t)-(-t)=0$에서 $t=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \overrightarrow{OB} = \left(3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 9+9=18$

6. 정답 43

(풀이) A를 원점, $\overline{AB}$가 x축, α를 xy평면, $\overline{AD}$를 z축으로 하는 좌표축을 도입하면 A$(0,\ 0,\ 0)$, B$(3,\ 0,\ 0)$, C$\left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\sqrt{3},\ 0\right)$, D$(0,\ 0,\ 4)$

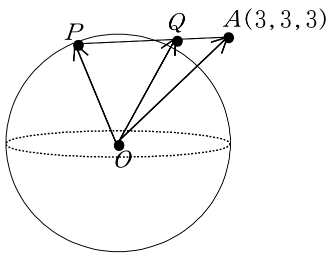
$\therefore\ |\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|^2$

$= \left|(3,\ 0,\ 0)+\left(\frac{3}{2}\ \cdot\ \frac{3}{2}\sqrt{3},-4\right)\right|^2$

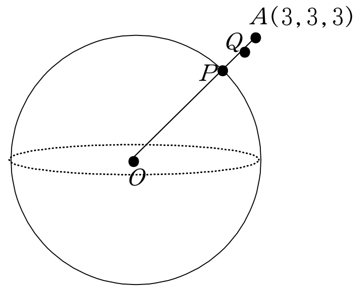
$=\left|\left(-\frac{9}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2},\ -4\right)\right|^2$

$=\frac{81}{4}+\frac{27}{4}+16=27+16=43$

7. 선분 AP를 $1:2$로 내분하는 점을 Q라고 할 때, $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}$ 이다.



$|\overrightarrow{OP}|=3$, $|\overrightarrow{OA}|=3\sqrt{3}$로 일정하므로 $|\overrightarrow{OQ}|$의 값이 최대가 되는 것은 두 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OA}$의 방향이 같을 때이다.



$\overline{PQ}=\frac{2}{3}\overline{PA}=\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-3)=2\sqrt{3}-2$

이므로

$|\overrightarrow{OQ}|=3+(2\sqrt{3}-2)=1+2\sqrt{3}$

$\therefore\ a=1,\ b=2$

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

답 30

[다른 풀이]

점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면

$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}(3,3,3)+\frac{1}{3}(x,y,z)$

$=\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)$ 이므로

$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$

$=\left|\frac{1}{3}(x+6,\ y+6,\ z+6)\right|$

$=\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$

$\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$는 구면 위의 점 $P(x, y, z)$와 점 $Q(-6,-6,-6)$ 사이의 거리이므로 $\overline{PQ}$의 최댓값은

$\overline{OQ}+3=\sqrt{6^2+6^2+6^2}+3=6\sqrt{3}+3$

이다.

따라서, $\frac{1}{3}\sqrt{(x+6)^2+(y+6)^2+(z+6)^2}$의 최댓값은

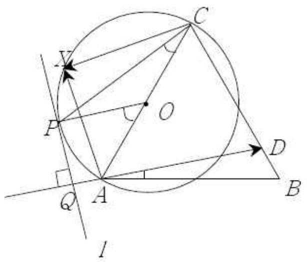
$\frac{1}{3}(6\sqrt{3}+3)=2\sqrt{3}+1$

이므로 $a=1,\ b=2$이다.

$\therefore\ 10(a+b)=10(1+2)=30$

8. [정답] 17

[해설]



$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ …… ㉠

세 점 A, C, D는 고정된 점이므로 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$는 상수이다.

따라서, ㉠에서 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되려면 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}$의 값이 최소가 되어야 한다.

두 벡터 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AX}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AX}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AX}|\cos\theta$이고, $|\overrightarrow{AD}|$의 값은 상수이므로

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta$의 값이 최소이어야 한다.

그림과 같이 직선 AD와 수직인 직선이 원과 접할 때의 접점을 P라 하면

$|\overrightarrow{AX}|\cos\theta\ge|\overrightarrow{AP}|\cos\theta=-|\overrightarrow{AQ}|$

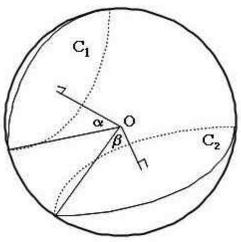
이 때, $\angle POA=\angle OAD=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{15}=\frac{4}{15}\pi$이므로

$2\angle ACP=\angle AOP$에서

$\angle ACP=\frac{1}{2}\times\frac{4}{15}\pi=\frac{2}{15}\pi$

$\therefore p+q=15+2=17$

9. 정답 40



원 C_1과 중심에서 원 C_1에 그은 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 평면 α의 법선 벡터가 이루는 각을 α라 하면

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6}$

원 C_2과 중심에서 원 C_2에 그은 벡터 $\overrightarrow{OQ}$와 평면 β의 법선 벡터가 이루는 각을 β라 하면

$\cos\beta=\frac{1}{2}$ $\therefore\ \beta=\frac{\pi}{3}$ $\therefore\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

평면 α의 법선 벡터와 평면 β의 법선 벡터가 이루는 각 θ는 $\cos\theta=\frac{4}{5}$

따라서 최단거리를 나타내는 벡터 $\overrightarrow{OP}$와 벡터 $\overrightarrow{OQ}$가 이루는 각은 $\cos(\theta-\frac{\pi}{2})=\frac{3}{5}$이다.

$\overline{PQ}^2=|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2=(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})$

를 정리하면 최솟값은 40이다.

(제이코사인 법칙도 사용 가능하다.)