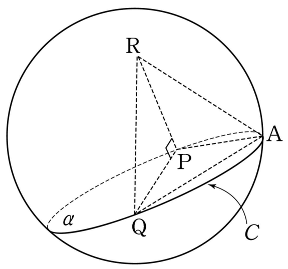
[정답률 48%]

1. 좌표공간에서 xy평면, yz평면, zx평면은 공간을 8개의 부분으로 나눈다. 이 8개의 부분 중에서 구 $(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$ 가 지나는 부분의 개수는?
[4점] [05.11수능-가형10번][1]

① 8 ② 7 ③ 6
④ 5 ⑤ 4

[정답률 11%]

2. 좌표공간에서 구 $S: x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha: y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 A(0, 2, 0)에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{AP}=\overline{AQ}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오.[2] [4점][08년.11수능 - 가형 25번]

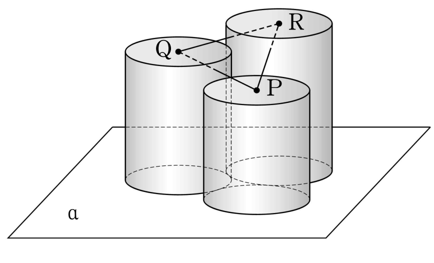


[정답률 15%]

3. 좌표공간에서 x축을 포함하고 xy평면과 이루는 각의 크기가 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$인 평면을 α라 하자. 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy평면 위로의 정사영이 영역 $\{(x, y, 0)\,|\,x+3y-2\le 0\}$에 포함되도록 하는 θ에 대하여 $\cos\theta$의 최댓값을 M이라 하자. $60M^2$의 값을 구하시오. [4점]['10.11수능-가형 25번][3]

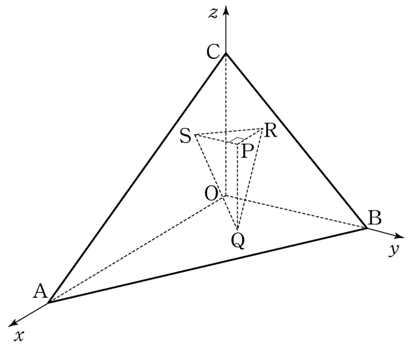
[정답률 20%]

4. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$)[4]
[4점][08년.11수능 - 가형 24번]



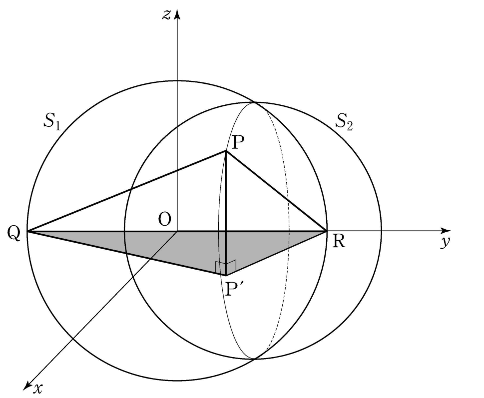
[정답률 20%]

5. 좌표공간에서 평면 $x+2y+2z=54$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(54,0,0)$, $\mathrm{B}(0,27,0)$, $\mathrm{C}(0,0,27)$을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC의 내부에 점 P(x, y, z)가 있다. 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 Q, yz평면 위로의 정사영을 R, zx평면 위로의 정사영을 S라 하자. $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QS}}$일 때, 사면체 QPRS의 부피의 최대값을 구하시오. [4점] [06.11수능-23번]5.



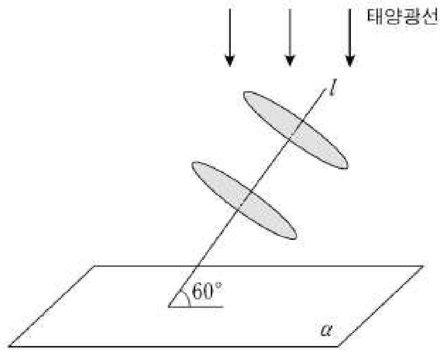
[정답률 24%]

6. 두 구 $x^2+y^2+z^2=81$, $x^2+(y-5)^2+z^2=56$을 각각 S_1, S_2라 하자. 두 구 S_1, S_2가 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하고, 점 P의 xy평면 위로의 정사영을 P′이라 하자. 구 S_1과 y축이 만나는 점을 각각 Q, R라 할 때, 사면체 PQP′R의 부피의 최대값을 구하시오. [4점] [05.11수능-가형21번]6.



[정답률 48%]

7. 그림과 같이 중심 사이의 거리가 $\sqrt{3}$이고 반지름의 길이가 1인 두 원판과 평면 α가 있다. 각 원판의 중심을 지나는 직선 l은 두 원판의 면과 각각 수직이고, 평면 α와 이루는 각의 크기가 60°이다. 태양광선이 그림과 같이 평면 α에 수직인 방향으로 비출 때, 두 원판에 의해 평면 α에 생기는 그림자의 넓이는? (단, 원판의 두께는 무시한다.) 7. [4 점][10년 11월 수능가형-11번]



① $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{8}$ ② $\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{1}{8}$

④ $\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{3}{4}$

[정답률 41%]

8. 좌표공간에서 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 삼각형 ABC의 넓이는 6이다.
(나) 삼각형 ABC의 yz평면 위로의 정사영의 넓이는 3이다.

삼각형 ABC의 평면 $x-2y+2z=1$ 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? 8.
[4점][2011년 11월 수능가형-21번]

① $2\sqrt{6}+1$ ② $2\sqrt{2}+3$ ③ $3\sqrt{5}-1$

④ $2\sqrt{5}+1$ ⑤ $3\sqrt{6}-2$

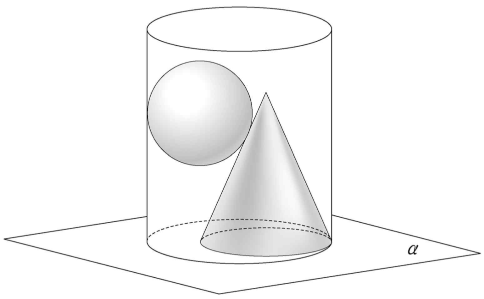
[정답률 24%]

9. 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α 위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다.
(나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A', B'일 때, $\angle A'OB' = 180^\circ$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다. $100p$의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A'은 일치한다.)

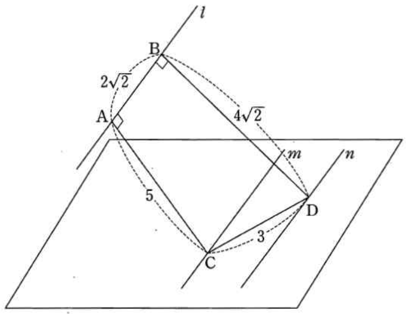
9. [4점][2011년 11월 수능가형-29번]



[정답률 15%]

10. 같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$, $\overline{CD} = 3$
(나) $\overline{AC} \perp l$, $\overline{AC} = 5$
(다) $\overline{BD} \perp l$, $\overline{BD} = 4\sqrt{2}$



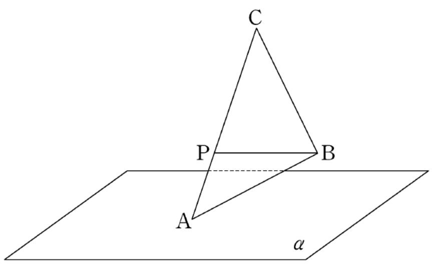
두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

[4점][2010년 9월 평가원 가형-25번]10.

[정답률 30%]

11. 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 $1, 3$인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{BP} = 4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.11.

[4점][2011년 9월 평가원 가형-29번]



[정답률 44%]

12. 좌표공간에서 정사면체 ABCD의 한 면 ABC는 평면 $2x-y+z=4$ 위에 있고, 꼭짓점 D는 평면 $x+y+z=3$ 위에 있다. 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1,\ 1,\ 3)$일 때, 정사면체 ABCD의 한 모서리의 길이는?[12]

[4점][2012년 11월 수능 가형 20번]

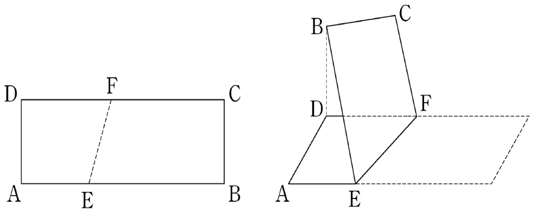
① $2\sqrt{2}$ ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $3\sqrt{2}$

[정답률 37%]

12.그림과 같이 $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. 선분 AB 위의 점 E와 선분 DC 위의 점 F를 연결하는 선을 접는 선으로 하여, 점 B의 평면 AEFD 위로의 정사영이 점 D가 되도록 종이를 접었다.

$\overline{AE}=3$일 때, 두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각의 크기가 θ이다. $60\cos\theta$의 값을 구하시오.[13]

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이고, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점][2012년 11월 수능가형-28번]



1. 정답 ③

(풀이) 좌표공간은 xy평면, yz 평면, zx평면에 의해 다음과 같이 8개의 영역으로 나누어진다.

① $x>0$, $y>0$, $z>0$인 영역,
② $x>0$, $y>0$, $z<0$인 영역,
③ $x>0$, $y<0$, $z>0$인 영역,
④ $x>0$, $y<0$, $z<0$인 영역,
⑤ $x<0$, $y>0$, $z>0$인 영역,
⑥ $x<0$, $y>0$, $z<0$인 영역,
⑦ $x<0$, $y<0$, $z>0$인 영역,
⑧ $x<0$, $y<0$, $z<0$인 영역,

한편, 주어진 구

$C:(x+2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=24$

의 중심은 $(-2,3,4)$이므로 구 C의 중심은 ⑤의 영역에 있다. 따라서 구 C는 ⑤의 영역을 지난다.

또, 구의 반지름의 길이 r는 $r=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$이고, $|-2|<r$, $3<r$, $4<r$이므로 구 C는 yz 평면, zx평면, xy평면에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 따라서 구 C는 ①, ⑦, ⑥의 영역을 지난다.

한편, $\sqrt{(-2)^2+3^2}<r$이므로 구 C는 z축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ③의 영역을 지난다.

또, $\sqrt{(-2)^2+4^2}<r$이므로 구 C는 y축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 ②의 영역을 지난다.

하지만, $\sqrt{3^2+4^2}>r$이므로 구 C는 x축과 만나지 않는다.

따라서 ⑧의 영역을 지나지 않는다.

또, $\sqrt{(-2)^2+3^2+4^2}>r$이므로 원점의 구 C의 외부에 있다.

따라서 ④의 영역을 지나지 않는다.

따라서 구 C가 지나는 영역은 ①, ②, ③, ⑤, ⑥, ⑦의 6개이다.

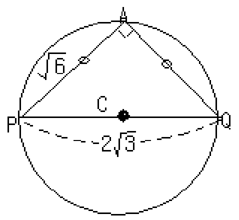
2. 구 S의 중심 (0, 0, 0)과 평면 α 사이의 거리 d는

$$d=\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}}=1$$

이므로 구 S와 평면 α가 만나서 생기는 원 C의 반지름의 길이 r는

$$r=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

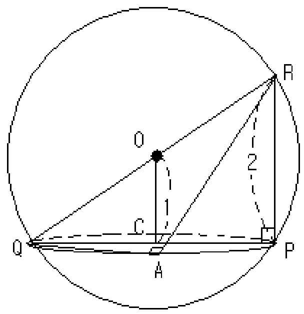
이다. 원 C 위의 세 점 A, P, Q의 위치관계는 다음과 같다.



또한, 다음 그림에서

$$\overline{PR}=2\overline{OC}=2$$

이고 선분 QR는 구 S의 지름임을 알 수 있다.



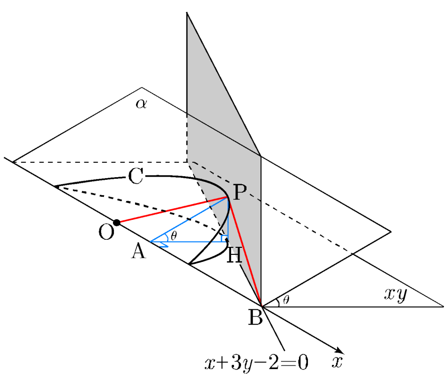
이때 점 A는 구 위의 점이므로 삼각형 ARQ는 ∠A=90° 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \ \overline{AR}=\sqrt{\overline{QR}^2-\overline{QA}^2}$$
$$=\sqrt{16-6}=\sqrt{10}$$
$$\therefore \ s=\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{AR}$$
$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\sqrt{10}=\sqrt{15}$$
$$\therefore \ s^2=15$$

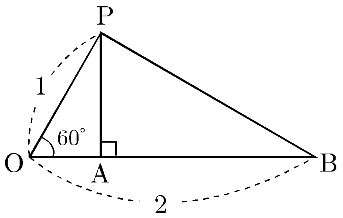
답 15

3. [09년 수능]

α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형은 원점 O를 중심으로 하는 원이 된다. 이 원을 C라 하자.

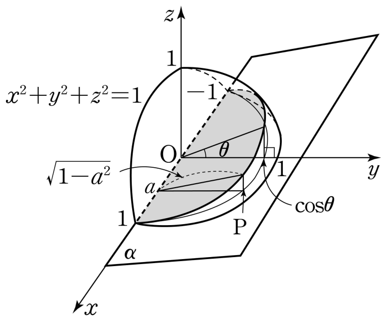


θ가 최대가 될 때는 원 C와 평면 $x+3y-2=0$가 접할 때이다.
이때, 접점을 P라 하고 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 x축에 내린 수선의 발을 A라 하면 삼수선의 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{PA}}\perp\overline{\mathrm{AH}}$이 성립한다. $\therefore \angle\mathrm{PAH}=\theta$
평면 $x+3y-2=0$이 x축과 만나는 점 $(2,0,0)$을 B라 할 때, 직선 PB는 원 C의 평면 $x+3y-2=0$에서의 접선이 된다.
$\therefore \overline{\mathrm{OP}}\perp\overline{\mathrm{PB}}$

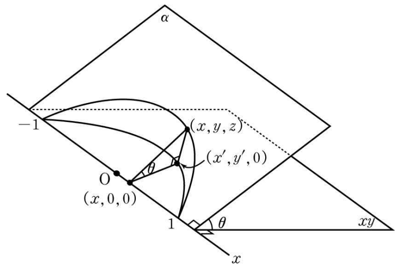


이때, $\overline{\mathrm{OP}}=1$, $\overline{\mathrm{OB}}=2$이므로 $\angle\mathrm{POA}=60^\circ$
$\therefore \overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$
점 H는 직선 $x+3y-2=0$위의 점이고 점 H의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 점 H의 y좌표는 $\frac{1}{2}$이다. 즉,
$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}$ 따라서 $\cos\theta$의 최대값은 $\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{PA}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\therefore 60M^2=60\times\frac{1}{3}=20$
답 20

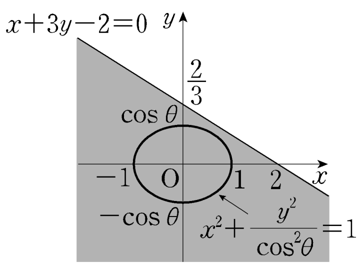
[다른풀이]



그림에서 평면 α가 구 $x^2+y^2+z^2=1$과 만나서 생기는 도형의 xy 평면 위로의 정사영 위의 임의의 한 점의 좌표를
$\mathrm{P}(a,\ \sqrt{1-a^2}\cos\theta,\ 0)$이라 하면
$a+3\sqrt{1-a^2}\cos\theta-2\leq 0$이어야 하므로
$3\sqrt{1-a^2}\cos\theta\leq 2-a$
양변을 제곱하여 정리하면
$(1+9\cos^2\theta)a^2-4a+4-9\cos^2\theta\geq 0$
$-1\leq a\leq 1$에서 항상 성립해야 하므로 방정식
$(1+9\cos^2\theta)a^2-4a+4-9\cos^2\theta=0$
의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4-(1+9\cos^2\theta)(4-9\cos^2\theta)\leq 0$
$81\cos^4\theta-27\cos^2\theta\leq 0$
$\therefore \cos^2\theta\leq\frac{1}{3}$ $\quad\therefore 60M^2=60\cdot\frac{1}{3}=20$
[다른풀이]



위의 그림과 같이 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=1$이 만나서 생기는 도형 위의 점을 $(x,\ y,\ z)$라 하고, 이 점의 xy평면 위로의 정사영의 좌표를 $(x',\ y',\ 0)$이라 하면 $x'=x$, $y'=\sqrt{y^2+z^2}\cos\theta$가 성립한다. 즉, $x^2=(x')^2$, $y^2+z^2=\frac{(y')^2}{\cos^2\theta}$이므로
$1=x^2+y^2+z^2=(x')^2+\frac{(y')^2}{\cos^2\theta}$
따라서 xy평면 위로의 정사영은 $x^2+\frac{y^2}{\cos^2\theta}=1$인 타원이 된다.
한편, 구한 정사영이 주어진 영역에 포함되려면 다음 그림과 같이 직선 $x+3y-2=0$과 접하거나 만나지 않아야 한다.



따라서 $x^2+\frac{y^2}{\cos^2\theta}=1$과 $x+3y-2=0$을 연립한 이차방정식
$\left(9+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)y^2-12y+3=0$의 판별식이 $D\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4}=36-3\left(9+\frac{1}{\cos^2\theta}\right)\le 0$

$\cos^2\theta \le \frac{1}{3}$

$\therefore 0\le\cos\theta\le\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad\therefore M=\frac{1}{\sqrt{3}}$

따라서 $M^2=\frac{1}{3}$ 이므로 $60M^2=20$이다.

[다른풀이]

기울기가 $-\frac{1}{3}$인 타원의 접선의 방정식 중 y절편이 양수인 것의 방정식은

$y=-\frac{1}{3}x+\sqrt{1^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta}$

이 접선이 직선 $x+3y-2=0$즉,

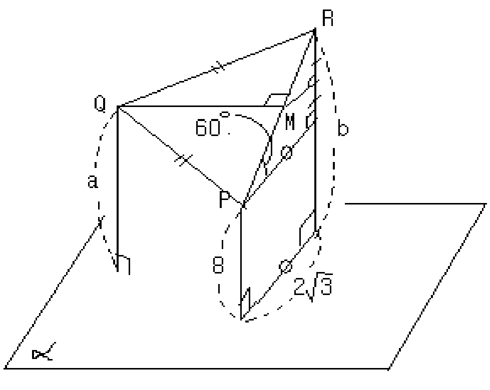
$y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$아래쪽에 위치해야하므로

$\sqrt{\frac{1}{9}+\cos^2\theta}\le\frac{2}{3}$

$\cos^2\theta\le\frac{1}{3}$, $M^2=\frac{1}{3}$

$\therefore 60M^2=60\times\frac{1}{3}=20$

4. 세 원기둥의 밑면의 반지름의 길이가 모두 같으므로 삼각형 QRP가 이등변삼각형이려면 세 원기둥의 높이가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이루어야 하고, 이때 $\overline{QP}=\overline{QR}$ 이다.



또 선분 PR의 중점을 M이라 하면 점 Q를 지나고 평면 α와 평행한 평면 β와 평면 QPR의 교선은 선분 QM이다.

이때 $\overline{QM}\perp\overline{PR}$이므로 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기는 선분 PR와 평면 α가 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 선분 PR의 평면 α 위로의 정사영의 길이는 두 원기둥의 반지름의 길이의 합과 같으므로

$\overline{PR}\times\cos 60^\circ=2\sqrt{3}$ $\therefore$ $\overline{PR}=4\sqrt{3}$

따라서 위의 그림에서 점 P와 점 R의 평면 α로부터의 거리의 차는 $\overline{PR}\sin 60^\circ=6$

따라서 세 원기둥의 높이는 각각

8, 8+3, 8+6 이다.

$\therefore$ $a=11$, $b=14$ $\therefore$ $a+b=25$

답 25

5. 정답 216

(풀이) 사면체 PQRS의 부피는

$V=\frac{1}{3}\times\triangle\mathrm{PRS}\times\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times y\times x\right)\times z$

한편, $\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{QS}}$이므로, $x^2+z^2=y^2+z^2$

$\therefore$ $x=y$

$\therefore$ $V=\frac{1}{6}x^2z=\frac{1}{12}x^2(54-3x)$

$(\because x+2y+2z=54)$

$=\frac{1}{4}x^2(18-x)$

$V'=\frac{3}{4}x(12-x)=0$에서

$x=12$일 때, 극대이자 최대가 된다.

따라서, 부피의 최대값은 $\frac{1}{4}\times 12^2\times 6=216$

6. 정답 84

(풀이) $x^2+y^2+z^2=81$ …㉠

$x^2+(y-5)^2+z^2=56$ … ㉡

에서 ㉠ - ㉡을 계산하여 정리하면 $y=5$

따라서 두 구가 만나는 원은 평면 $y=5$ 위에 있다. 구의 방정식 ㉠에 $y=5$를 대입하면

$x^2+z^2=56$ …㉢

따라서 두 구가 만나서 생기는 원의 방정식은

$x^2+z^2=56$, $y=5$

이 원 위의 점 $\mathrm{P}(x,0,z)$의 xy평면 위로의 정사영은 $\mathrm{P}'(x,5,0)$이고, 두 점 Q, R의 좌표는 각각 (0, 9, 0), (0, -9, 0)이므로 삼각형 QP'R의 넓이 S는 $S=\frac{1}{2}\cdot\overline{QR}\cdot|x|=9|x|$

이 때, 사면체 PQP'R의 높이는 $|z|$이므로 이 사면체의 부피 V는 $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot|z|=3|xz|$

그런데, 산술평균과 기하평균의 대소 관계에 의해

$x^2+z^2=56\ge 2\sqrt{x^2z^2}=2|xz|$

이므로 $|xz|\le 28$

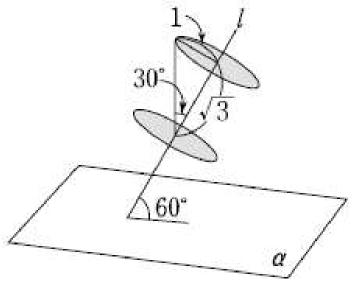
$\therefore \quad V = 3|xz| \leq 3 \cdot 28 = 84$

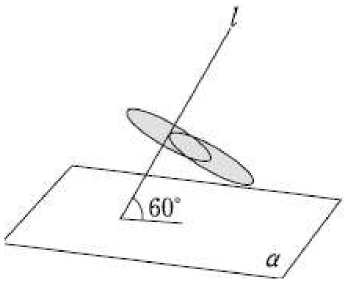
따라서 구하는 사면체의 부피의 최대값은 84이다.

7. [정답] ⑤

[해설]

그림의 원판을 태양광선 방향으로 평행이동하여 만나게 하면 윗 원판이 아래 원판의 중심을 지난다.





겹친 원판의 넓이 S는 아래 그림의 빗금친 부분의 넓이를 S_1이라 하면

$S = 2 \times \pi \times 1^2 - 2S_1$이다.

S_1은 중심각이 $\frac{2}{3}\pi$인 활꼴이므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 1^2 \times \sin\frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore S = 2\pi - \frac{2}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

그런데 구하는 그림자의 넓이 S'은 평면과 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$인 정사영이므로

$$S' = \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \cos\frac{\pi}{6}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$$

8. 삼각형 ABC를 포함하는 평면을 α라고 하고, α의 단위벡터인 법선벡터를

$\overrightarrow{v_\alpha} = (a,\ b,\ c)$라 하자.

또, α와 yz평면이 이루는 예각을 θ라 하면 $\cos\theta = \frac{1}{2}$이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$이 된다.

즉, $\frac{1}{2} = \frac{(a,\ b,\ c) \cdot (1,\ 0,\ 0)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$이 되어 $a = \frac{1}{2}$가 된다.

$b^2 + c^2 = \frac{1}{4}$가 되어야하므로 $b = \frac{1}{2}cost$, $c = \frac{1}{2}sint$로 놓고 풀어도 된다.

이제 평면 α와 평면 $x-2y-2z=1$이 이루는 각을 ρ라 하고 $\cos\rho$를 구해보자.

$$\cos\rho = \left| \frac{\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}cost,\ \frac{\sqrt{3}}{2}sint\right) \cdot (1,\ -2,\ 2)}{3} \right|$$

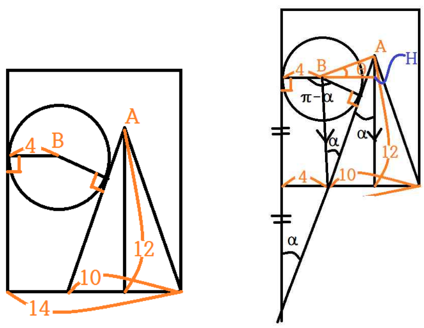
$$= \frac{1}{3}\left| \frac{1}{2} - \sqrt{3}\,cost + \sqrt{3}\,sint \right|$$

$$= \frac{1}{3}\left| \frac{1}{2} - \sqrt{6}\,cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

정사영의 넓이는 $6\cos\rho$이므로 $\cos\rho$가 최대일 때 정사영의 넓이도 최대가 된다.

그리고 그 최댓값은 $\frac{1}{3}\left(\sqrt{6} + \frac{1}{2}\right)$이므로 답은 ① $2\sqrt{6}+1$이 된다.

9.



단순히 단면을 그려 얻을 수 있는 정보는 이정도 이다. 이제 보조선을 그어보자. 여러 보조선을 그어 선분 BH와 AH의 길이를 구하면 $\tan\theta$는 저절로 나오게 된다.

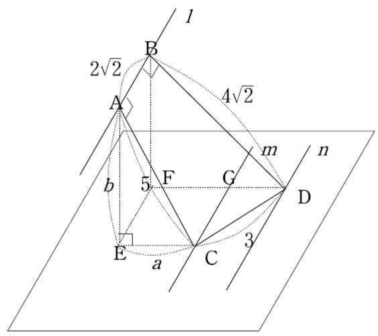
$$AH = 12 - \frac{4}{\sin\alpha} = 12 - \frac{52}{5} = \frac{8}{5},$$

$BH = 14 - (4+5) = 5 \qquad \therefore \tan\theta = \frac{AH}{BH} = \frac{8}{25} = p,$

$100p = 32$

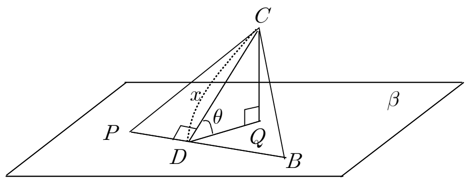
10. 정답 30

두 직선 m, n을 포함하는 평면을 α라 하자.
$l /\!/ m,\ l /\!/ n$이므로 $l /\!/ \alpha$이다.



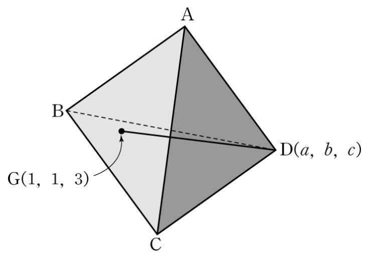
직선 l 위의 두 점 A, B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하고, 선분 FD와 직선 m의 교점을 G라 하자.
$\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \overline{\mathrm{EF}}$, $\overline{\mathrm{EF}} /\!/ \overline{\mathrm{CG}}$ 이고,
$\overline{\mathrm{EF}} = \overline{\mathrm{CG}} = 2\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 DGC에서
$\overline{\mathrm{GD}} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$
직각삼각형 ABD에서
$\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{10}$
삼각형 ACD에서
$\cos(\angle \mathrm{ACD}) = \dfrac{5^2 + 3^2 - (2\sqrt{10})^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\dfrac{1}{5}$
이므로 $\sin(\angle \mathrm{ACD}) = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{5}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{6}}{5}$
따라서 삼각형 ACD의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \dfrac{2\sqrt{6}}{5} = 3\sqrt{6}$ 이다.
$\overline{\mathrm{EC}} = a$, $\overline{\mathrm{AE}} = \overline{\mathrm{BF}} = b$라 하면
$\overline{\mathrm{FD}} = a + 1$ 이고,
삼각형 AEC에서 $a^2 + b^2 = 25$ $\cdots$ ㉠
삼각형 BFD에서 $(a+1)^2 + b^2 = 32$ $\cdots$ ㉡
㉡−㉠에서 $2a + 1 = 7$, $a = 3$
삼각형 ACD의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형 ECD이고, 삼각형 ECD의 넓이는
$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{EC}} \times \overline{\mathrm{CG}} = \dfrac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
따라서 $3\sqrt{6} \times \cos\theta = 3\sqrt{2}$ 에서
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad \therefore\ \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1$
$= 3 - 1 = 2$ $\quad \therefore\ 15\tan^2\theta = 30$

11. 정답 45
점 P가 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점이고, 점 C에서 평면 α에 이르는 거리가 3이므로 점 P에서 평면 α에 이르는 거리는 1이다. 따라서, 직선 PB는 평면 α와 평행하다.
삼각형 ABC와 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.
평면 α에 평행하고 직선 PB를 포함하는 평면을 β라고 하면 삼각형 PBC와 평면 β가 이루는 각의 크기도 θ이다.



점 C에서 직선 PB에 내린 수선의 발을 D라 하고, 점 C에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q라 하자.
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{DQ} \perp \overline{PB}$이므로
$\angle CDQ = \theta$이다.
$\overline{CQ} = 3 - 1 = 2$이므로 $\overline{CD} = x$라 하면 $\sin\theta = \dfrac{2}{x}$이다.
삼각형 ABC의 넓이가 9이므로
삼각형 PBC의 넓이는 $9 \times \dfrac{2}{3} = 6$
따라서, $\dfrac{1}{2} \times \overline{PB} \times x = 6$에서
$\dfrac{1}{2} \times 4 \times x = 6$, $x = 3$ $\quad \therefore\ \sin\theta = \dfrac{2}{3}$
$\therefore\ \cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$
따라서, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이 S는 $S = 9\cos\theta = 9 \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 3\sqrt{5}$
$\therefore\ S^2 = 45$

12. 정답 ②



점 D의 좌표를 (a, b, c)라 할 때,
$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$가 평면 $2x - y + z = 4$의 법선벡터가 되므로
$(a-1,\ b-1,\ c-3) = k(2,\ -1,\ 1)$
$\therefore\ a = 2k+1,\ b = -k+1,\ c = k+3$
이때, 점 D(a, b, c)는 평면 $x + y + z = 3$ 위의 점이므로 $(2k+1) + (-k+1) + (k+3) = 3$
$2k + 5 = 3$ $\quad \therefore\ k = -1$ 즉, $a = -1,\ b = 2,\ c = 2$
따라서 $\overline{\mathrm{DG}} = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{6}$

한 변의 길이가 x인 정사면체의 높이가 $\frac{\sqrt{6}}{3}x$이로, 구하는 정사면체의 한 변의 길이는

$$\frac{3}{\sqrt{6}}\times\sqrt{6}=3$$

[다른 풀이]

삼각형 ABC의 무게중심 (1, 1, 3)을 G라 하자.

D에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은

삼각형 ABC의 무게중심 G(1, 1, 3)이므로

$\overrightarrow{DG}\perp$(평면 ABC)이므로 $\overrightarrow{DG}//(2,\ -1,\ 1)$

$\therefore\ D(1+2t,\ 1-t,\ 3+t)$

D가 평면 $x+y+z=3$ 위에 있으므로

$1+2t+1-t+3+t=3\quad\therefore\ t=-1$

$\therefore\ D(-1,\ 2,\ 2)$

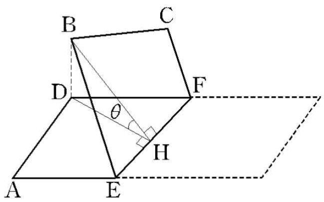
D에서 평면 ABC까지의 거리는

$\overline{DG}=\dfrac{|-2-2+2-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

정사면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$\overline{DG}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x=\sqrt{6}\qquad\therefore\ x=3$

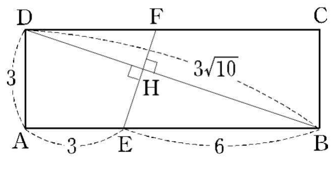
13. 정답 40



B에서 $\overline{EF}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼수선의 정리에 의해 $\overline{DH}\perp\overline{EF}$

두 평면 AEFD와 EFCB가 이루는 각 θ는 두 평면의 교선 $\overline{EF}$에 수직인 $\overline{BH}$와 $\overline{DH}$가 이루는 각의 크기와 같다. $\cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}$

이제 종이를 다시 펼치면 그림과 같다.



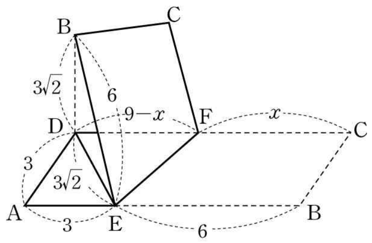
$\triangle BDA\backsim\triangle BEH$이므로

$\overline{EB}:\overline{HB}=\overline{DB}:\overline{AB}$ 에서 $\overline{HB}=\dfrac{9\cdot 6}{3\sqrt{10}}=\dfrac{18}{\sqrt{10}}$

$\overline{DH}=\overline{DB}-\overline{BH}=3\sqrt{10}-\dfrac{18}{\sqrt{10}}=\dfrac{12}{\sqrt{10}}$

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{DH}}{\overline{BH}}=\dfrac{2}{3}\quad\therefore\ 60\cos\theta=60\times\dfrac{2}{2}=40$

[다른 풀이]



$\overline{AE}=3$이므로 $\overline{BE}=9-3=6$

$\overline{DE}=3\sqrt{2}$이므로 $\overline{BD}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

$\overline{FC}=x$라 하면 $\overline{DF}=9-x$

한편, $\triangle BDF$, $\triangle BCF$는 모두 직각삼각형이므로

$\overline{BF}^{\,2}=(3\sqrt{2})^2+(9-x)^2=x^2+3^2$

$18+81-18x+x^2=x^2+9$

$18x=90\quad\therefore\ x=5$

$\therefore\ \triangle DEF=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6,\ \triangle BEF=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$

이때, $\triangle BEF$의 평면 ABCD 위로의 정사영이

$\triangle DEF$ 이므로 $\cos\theta=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 60\cos\theta=60\cdot\dfrac{2}{3}=40$