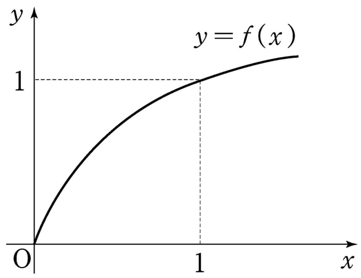
[정답률 26%]

1. 다음은 연속함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



구간 $[0,1]$에서 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가 존재하고 연속일 때, 극한값

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$ 와 같은 값을 갖는 것은? [4점] [04.11수능-가형10번][1]

① $\int_0^1 g(x)\,dx$ ② $\int_0^1 xg(x)\,dx$

③ $\int_0^1 f(x)\,dx$ ④ $\int_0^1 xf(x)\,dx$

⑤ $\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx$

[정답률 30%]

2. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 골라라.

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면
$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} \leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

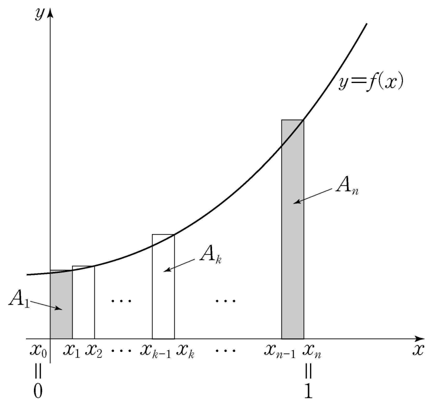
ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

[4점][10.9 평가원-가형 11번][2]

[정답률 28%]

3. 함수 $f(x)=x^2+ax+b$ ($a\geq 0$, $b>0$)가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $0=x_0$, x_1, x_2, $\cdots$, x_{n-1}, $x_n=1$

이라 하자. 폐구간 $[x_{k-1}, x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. ($k=1$, 2, $\cdots$, n)



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.

[4점][10.11수능-가형 21번][3]

[정답률 40%]

4. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x-1$이 있다. 실수 t ($t\geq -1$)에 대하여 $-1\leq x\leq t$에서 $|f(x)|$의 최댓값을 $g(t)$라고 하자.

$\int_{-1}^{1} g(t)dt=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [10.11수능-가형 24번][4]

1. 정답 ③

(풀이) $\sum_{k=1}^{n}\left\{g\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}\frac{k}{n}$

$=\left\{g\left(\frac{1}{n}\right)-g(0)\right\}\frac{1}{n}+\left\{g\left(\frac{2}{n}\right)-g\left(\frac{1}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}+\left\{g\left(\frac{3}{n}\right)-g\left(\frac{2}{n}\right)\right\}\frac{3}{n}$

$+\dots+\left\{g\left(\frac{n}{n}\right)-g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{n}{n}$

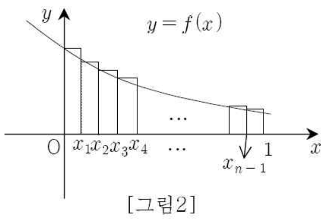
$=g(1)-\left\{g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+\dots+g\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$

$=1-\sum_{k=0}^{n-1}g\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}$

$\therefore$ (주어진 식) $=1-\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

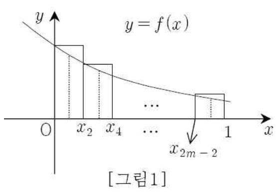
2. ㄱ.(거짓) $f(x)$가 감소함수이면

$\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m}$ 은 [그림1]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.



[그림2]

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은 [그림2]의 직사각형들의 넓이의 합을 나타낸다.



[그림1]

ㄴ.(참) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}$ 에서

$\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$ 은 [그림1]에서 점선의 길이를

$\frac{1}{n}$은 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 길이를 나타내므로

주어진 무한급수를 정적분으로 나태내면

$\int_0^1 f(x)dx$이다.

ㄷ.(거짓)ㄱ의 [그림2]에서 $\int_0^1 f(x)dx$는 곡선

$y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=0,\ x=1$로

둘러싸인 부분의 넓이이고, $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$ 은

직사각형들의 넓이의 합 (넓이의 합의 극한을 구하는 것이 아니다.)을 나타내므로

$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}>\int_0^1 f(x)dx$

3. [09년 수능]

폐구간 $[0,\ 1]$을 n등분하므로 $x_k=\frac{k}{n}$

$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$이다.

$A_k=\frac{1}{n}\cdot f(x_k)=\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$A_1+A_n=\frac{1}{n}\{f(x_1)+f(x_n)\}$

$=\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{a}{n}+b+1+a+b\right\}$

그런데 $A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}=\frac{1}{n}\left(7+\frac{1}{n^2}\right)$이므로

$\therefore\ a=0,\ b=3\quad \therefore\ f(x)=x^2+3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

$=8\int_0^1 xf(x)\,dx\ =8\int_0^1 x(x^2+3)dx$

$=8\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1\ =8\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)=14$

답 14

4. [09년 수능]

$f(x)=x^3-3x-1$에서 $f'(x)=3x^2-3$

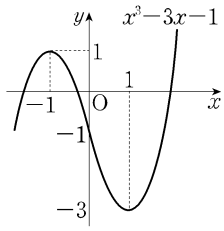
$f'(x)=0$에서 $x=\pm1$이므로

함수 $y=f(x)$는

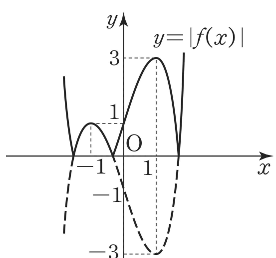
$x=-1$에서 극댓값 $f(-1)=1$을

$x=1$에서 극솟값 $f(1)=-3$을 갖는다.

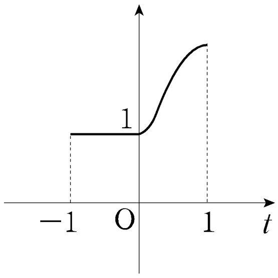
따라서 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y=|f(x)|$의 그래프는 다음과 같다.



$\therefore\ g(t)=\begin{cases}1 & (-1\leq t\leq 0)\\ -f(t) & (0\leq t\leq 1)\end{cases}$



$$\therefore \int_{-1}^{1} g(t)dt = \int_{-1}^{0} 1dt + \int_{0}^{1} -f(t)dt$$

$$= 1 + \int_{0}^{1} (-t^3 + 3t + 1)dt$$

$$= 1 + \left[-\frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^2 + t \right]_0^1$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{13}{4}$$

$\therefore \; p + q = 4 + 13 = 17$

답 17