[정답률 48%]

1. 최고차항의 계수가 1이 아닌 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오.[4점][10. 6월 평가원 가형-23번][1]

(가) $\lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2 - f(x^2)}{x^3 f(x)} = 4$

(나) $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{x} = 4$

[정답률 45%]

2. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고, $f'(2)=-3$, $f'(4)=6$일 때, $\lim_{x \to -2} \frac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$의 값은? [3점][10. 6월 평가원 가형-6번][2]

① -8 ② -4 ③ 4 ④ 8 ⑤ 12

[정답률 43%]

3. 좌표평면 위에 점 $A(0, 2)$가 있다. $0<t<2$일 때, 원점 O와 직선 $y=2$위의 점 $P(t, 2)$를 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교점을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 서로소인 자연수이다.)

[3점][10. 6월 평가원 가형-20번][3]

[정답률 10%]

4. 다음 조건을 만족시키는 모든 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합을 구하시오.

[4점][09. 9월 평가원 가형-24번][4]

(가) $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이다.

(나) 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, f(2))$에서 직선 $y=2$에 접한다.

(다) $f'(0)=0$

[정답률 14%]

5.사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오.

[4점][09. 6월 평가원 가형-24번][5]

(가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.

(나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a$ $(a>2)$에서만 미분가능하지 않다.

[정답률 4%]

6. 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를 $S=\{a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 미분가능하지 않다.$\}$ 라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오.[6]

[4 점][2010년 11월 수능가형-24번]

[정답률 29%]

7. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\,(0 \leqq t \leqq 5)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 다음과 같다.

$$v(t) = \begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$ 인 실수 x 에 대하여 점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리, 시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리, 시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리중에서 최소인 값을 $f(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [7] [4점][10년 11월 수능가형-17번]

[보 기]

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

1. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\{f(x)\}^2-f(x^2)}{x^3f(x)}=4$

$f(x)$의 차수를 n차라 하면 분모는 $n+3$차
분자는 $2n$차 이므로 $\therefore n+3=2n$ $\quad\therefore n=3$
$\therefore f(x)$는 3차이고 최고차항의 계수를 a라 하면
$\dfrac{a^2-a}{a}=4$ $\quad\therefore\ a^2-5a=0$ $\quad\therefore\ a=5$

$\lim_{x\to0}\dfrac{f'(x)}{x}=4$

분모→0, 분자→0이므로 $\lim_{x\to0}f'(x)=0$

$\therefore\ f'(0)=0$ $\quad\therefore\ f(x)=5x^3+bx^2+cx+d$

$\to\ f'(x)=15x^2+2bx+c$

$f'(0)=0$ 이므로 $c=0$

$\therefore f(x)=5x^3+bx^2+d$

$\lim_{x\to0}\dfrac{15x^2+2bx}{x}=\lim_{x\to0}(15x+2b)=4$

$\therefore 2b=4$ $\quad\therefore b=2$ $\qquad\therefore f'(x)=15x^2+4x$

$\therefore\ f'(1)=15+4=19$ $\qquad$ 답 : 19

2. (정답) ①

$\lim_{x\to-2}\dfrac{f(x^2)-f(4)}{f(x)-f(-2)}$

$=\lim_{x\to-2}\dfrac{x+2}{f(x)-f(-2)}\cdot\dfrac{f(x^2)-f(4)}{x^2-4}\cdot(x-2)$

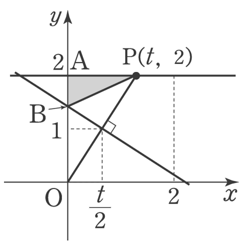
$=\dfrac{1}{f'(-2)}\cdot\lim_{t\to4}\dfrac{f(t)-f(4)}{t-4}\cdot(-4)$

$=\dfrac{1}{f'(-2)}\cdot f'(4)\cdot(-4)$

$=\dfrac{1}{3}\times6\times(-4)$ ($\because\ f'(-2)=-f'(2)$) $=-8$

3. (정답) 11

선분OP의 중점의 좌표는 $\left(\dfrac{t}{2},\ 1\right)$이고, 기울기는 $\dfrac{2}{t}$이므로 선분 OP의 수직이등분선은



$y-1=-\dfrac{t}{2}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$

$y=-\dfrac{t}{2}x+\dfrac{t^2}{4}+1$ $\qquad\therefore\ B\left(0,\ \dfrac{t^2}{4}+1\right)$

$f(t)=\dfrac{1}{2}\times t\times\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)=-\dfrac{t^3}{8}+\dfrac{t}{2}$

$f'(t)=-\dfrac{3}{8}t^2+\dfrac{1}{2}=0$에서

$t^2=\dfrac{4}{3}$ $\qquad\therefore\ t=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because\ 0<t<2$)

따라서, $f(t)$의 최댓값은

$f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)=-\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{24\sqrt{3}}{27}\right)+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$

$\therefore\ a+b=9+2=11$

4. 정답 13

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ $\quad\cdots\cdots$ (a)

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ $\quad\cdots\cdots$ (b)

주어진 조건이 $f'(0)=0,\ f'(2)=0,\ f(2)=2$ 이므로
(b)식에 적용해보면 $c=0$, $b=-3a-8$
이를 (a)에 적용해보면 $d=4a+18$
이들을 (a)에 대입하여 a대하여 정리해보면

$f(x)=x^4+ax^3+(-3a-8)x^2+(4a+18)$

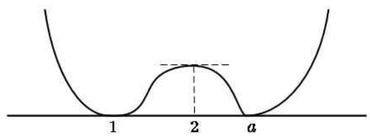
$=(x^4-8x^2+18)+a(x^3-3x^2+4)$

$=(x^4-8x^2+18)+a(x-1)(x-2)^2$

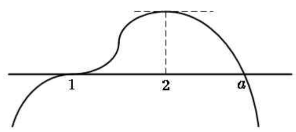
따라서 $f(x)$는 a값에 상관없이 $x=1,\ x=2$을 지난다. 따라서 점의 좌표는 $f(1)=11,\ f(2)=2$이다.
$f(1)+f(2)=13$

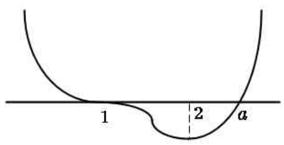
5. 정답 12

$g(x)=f(x)-f(1)$ 이라 하면 $g(1)=g'(1)=0,\ g'(2)=0$
$y=|g(x)|$ 는 $x=1$ 에서 극값을 갖는다.
따라서 (나)의 조건에 맞도록 $y=|g(x)|$ 의 그래프를 그려 보면 아래그림과 같다.



$y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지 경우에 해당한다.



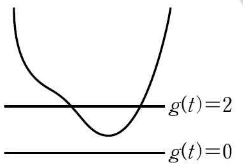


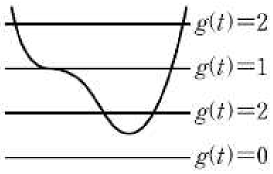
$\therefore\ g'(x)=a(x-1)^2(x-2)=f'(x)$ $(a\neq0)$

$\dfrac{f'(5)}{f'(3)}=\dfrac{48a}{4a}=12$

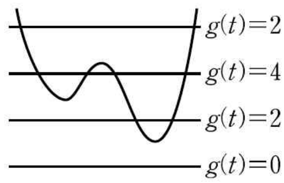
6. [정답] 147

만약 $y=f(x)$의 그래프가 극점을 하나만 가진다면, $g(t)$가 불연속인 점은 하나이거나 셋이다.





따라서 $y=f(x)$의 그래프는 두 개의 극솟점과 하나의 극댓점을 가진다. 또한 $y=f(x)$의 그래프가 두 개의 극솟값을 가지면, $g(t)$가 불연속인 점은 3개다.



따라서 $y=f(x)$의 그래프의 두 개의 극솟점의 극솟값은 같다.

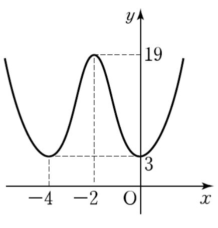
$f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+k$이고, 극솟값이 3이어야 하므로 $k=3$

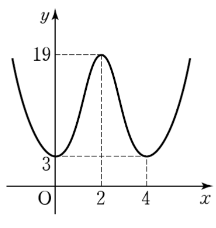
$f(x)=3$의 한 근이 0 이므로

$f(x)=x^2(x-\alpha)^2+3$

$f'(x)=2x(x-\alpha)^2+2x^2(x-\alpha)=2x(x-\alpha)(2x-\alpha)=0$에서 (극댓값)$=f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\alpha^4}{16}+3=19$ $\therefore \alpha=\pm 4$

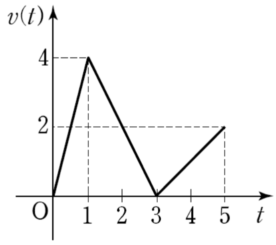
그런데, $\alpha=-4$이면 $f'(3)>0$이므로 $\alpha=4$





$f(x)=x^2(x-4)^2+3$, $f(-2)=4\times 36+3=147$

7. [정답] ①



시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리를 l_1

시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리를 l_2

시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리를 l_3 이라 하자.

ㄱ. $x=1$ 인 경우

$l_1=2$, $l_2=4$, $l_3=2$ 이므로 $f(1)=2$ $\therefore$ 참

ㄴ. $x=2$ 인 경우

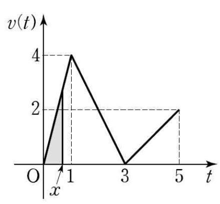
$l_1=5$, $l_2=\frac{3}{2}$, $l_3=\frac{3}{2}$ 이므로 $f(2)=\frac{3}{2}$

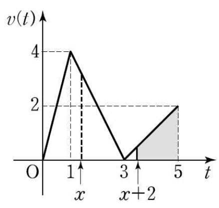
따라서 $f(2)-f(1)=\frac{3}{2}-2=-\frac{1}{2}$

$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(-2t+6)dt=3$

$\therefore f(2)-f(1)\neq\int_1^2 v(t)dt$ $\therefore$ 거짓

ㄷ. h가 충분히 작은 양수일 때 그림에서 보는 것처럼





$1-h<x<1$ 에서

$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot 4x=2x^2 \rightarrow f'(x)=4x \xrightarrow{x\rightarrow 1-0} 4$

$1<x<1+h$ 에서

$f(x)=2-\frac{1}{2}((x+2)-3)^2 \rightarrow f'(x)=-x+1 \xrightarrow{x\rightarrow 1+0} 0$

따라서 $f'(x)$ 의 $x=1$ 에서의 좌우 미분계수가 다르므로 미분불능 $\therefore$ 거짓