[정답률 28%]

1. 다항함수 $f(x)$가

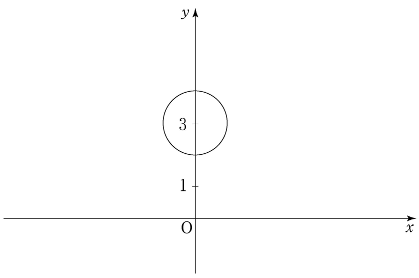
$$\lim_{x\to+0}\frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right)-1}{x^3+x}=5,\quad \lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2+x-2}=\frac{1}{3}$$ 을 만족

시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

[3점][08년. 6 평가원 - 가형 19번][1]

[정답률 41%]

2. 좌표평면에서 중심이 $(0,3)$이고 반지름의 길이가 1인 원을 C라 하자. 양수 r에 대하여 $f(r)$를 반지름의 길이가 r인 원 중에서, 원 C와 한 점에서 만나고 동시에 x축에 접하는 원의 개수라 하자. <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점] [06.11수능-가형9번][2]



<보 기>

ㄱ. $f(2)=3$

ㄴ. $\lim_{r\to1+0} f(r)=f(1)$

ㄷ. 구간 $(0,4)$에서 함수 $f(r)$의 불연속점은 2개이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 47%]

3. 폐구간 $[0,5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

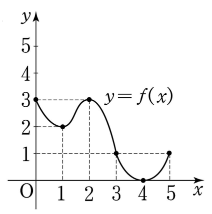
$$g(x)=\begin{cases}\{f(x)\}^2 & (0\le x\le 3)\\ (f\circ f)(x) & (3<x\le 5)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0,5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=f(x)$의 그래프로 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[3]

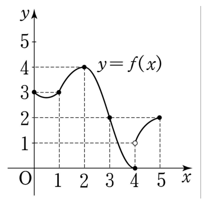
[4점][08년.11수능 - 가형 9번]

<보 기>

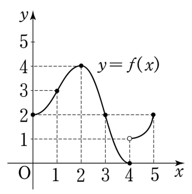
ㄱ



ㄴ.



ㄷ.



① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

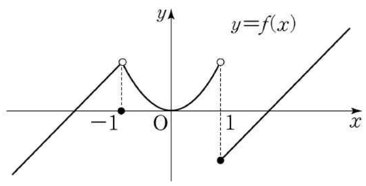
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률 50%]

4. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x<-1) \\ 0 & (x=-1) \\ x^2 & (-1<x<1) \\ x-2 & (x\ge 1)\end{cases}$

에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은 ?[4].

[3 점][10년 11월 수능 가형 -8번]



[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x)+f(-x)\}=0$

ㄴ. 함수 $f(x)-|f(x)|$ 가 불연속인 점은 1 개 다.

ㄷ. 함수 $f(x)f(x-a)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이 되는 상수 a 는 없다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

[정답률 49%]

5. 실수 a에 대하여 집합

$\{x\,|\,ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x$는 실수$\}$

의 원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

[3점]['10.11수능-가형 8번][5].

<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

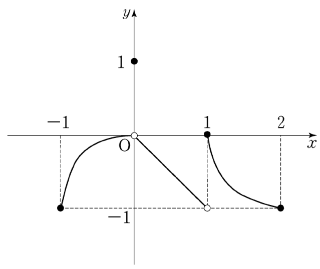
ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a)\ne \lim_{a\to c-0} f(a)$인 실수 c는 2개이다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[정답률 37%]

6.폐구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



폐구간 $[-1,\ 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$ $h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점][09.6 평가원-가형 10번][6].

[보 기]

ㄱ. $\lim_{x\to 1} h(x)$는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h\circ g)(x)$는 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=(g\circ h)(0)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[정답률 46%]

7.최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}$, $h(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & (x\ne 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

[4점][09년. 6 평가원 - 가형 23번] [7].

1. 정답 10

$\lim_{x \to +0} \dfrac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = 5$에서 $x \to +0$일 때

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

따라서 $f(x)$는 삼차함수이면서 삼차항의 계수는 1이다. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$라 놓으면

$$\lim_{x \to +0} \frac{x^3 f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{x^3 + x} = \lim_{x \to +0} \frac{ax + bx^2 + cx^3}{x^3 + x}$$

$$= \lim_{x \to +0} \frac{cx^2 + bx + a}{x^2 + 1} = a = 5$$

또한 $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \dfrac{1}{3}$에서 $x \to 1$일 때

(분모) → 0이므로 (분자) → 0이다.

따라서 $f(1) = 0$이므로 $1 + 5 + b + c = 0$에서 $c = -b - 6$이다.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 5x^2 + bx - (b+6)}{x^2 + x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\{x^2 + 6x + (b+6)\}}{(x-1)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 6x + (b+6)}{x+2} = \frac{b+13}{3} = \frac{1}{3}$$

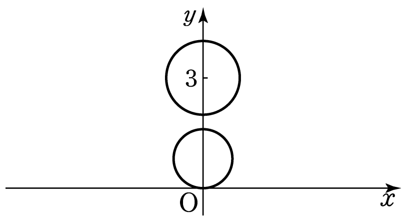
$\therefore\ b = -12 \quad \therefore\ c = 12 - 6 = 6$

$\therefore\ f(x) = x^3 + 5x^2 - 12x + 6$

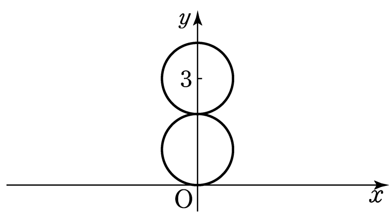
$\therefore\ f(2) = 8 + 20 - 24 + 6 = 10$

2. 정답 ④

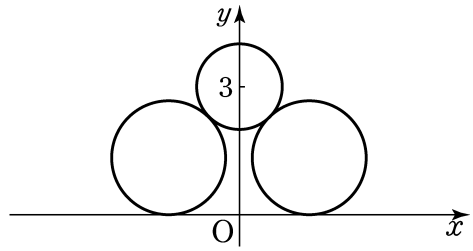
(풀이) i) $0 < r < 1 \Rightarrow f(r) = 0$



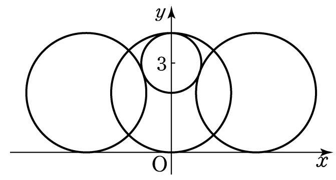
ii) $r = 1 \Rightarrow f(r) = 1$



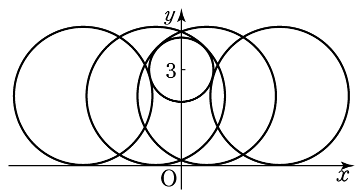
iii) $1 < r < 2 \Rightarrow f(r) = 2$



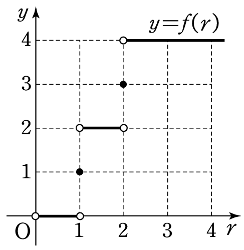
iv) $r = 2 \Rightarrow f(r) = 3$



iv) $r > 2 \Rightarrow f(r) = 4$



$$f(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 2 & (1 < r < 2) \\ 3 & (r = 2) \\ 4 & (r > 2) \end{cases}$$



그래프에서

ㄱ. $f(2) = 3$ ㄴ. $\lim_{r \to 1+0} f(r) = 2 \neq f(1) = 1$

ㄷ. 그래프에서, 구간 (0, 4)에서 불연속점은 2개($r = 1$, 2일 때)

3. ㄱ. $f(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$, $(f \circ f)(x)$는 모두 폐구간 [0,5]에서 연속이다. 따라서 함수 $g(x)$가 $x = 3$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 [0, 5]에서 연속이다.

$$\lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3-0} \{f(x)\}^2 = 1^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 3+0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to 1-0} f(t) = 2$$

$$\therefore\ \lim_{x \to 3-0} g(x) \neq \lim_{x \to 3+0} g(x)$$

따라서 함수 $g(x)$는 $x = 3$에서 불연속이므로 폐구간 [0, 5]에서 연속이 아니다.

ㄴ. $f(x)$는 폐구간 [0, 3]에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 [0, 3]에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x \neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f \circ f)(x)$는 $x \neq 4$이고 $f(x) \neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3-0} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$

$\lim_{x \to 3+0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to 2-0} f(t) = 4$

$g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4$

$\therefore \lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} g(x) = g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x \to 4-0} g(x) = \lim_{x \to 4-0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to +0} f(t) = 3$

$\lim_{x \to 4+0} g(x) = \lim_{x \to 4+0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to 1+0} f(t) = 3$

$g(4) = f(f(4)) = f(0) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 4-0} g(x) = \lim_{x \to 4+0} g(x) = g(4)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이므로 함수 $\{f(x)\}^2$는 폐구간 $[0,\ 3]$에서 연속이다.

한편, 함수 $f(x)$는 $x \neq 4$인 모든 x에서 연속이므로 합성함수 $(f \circ f)(x)$는 $x \neq 4$이고 $f(x) \neq 4$인 x에서 연속이다.

따라서 함수 $g(x)$가 $x=3$에서 연속이고 $x=4$에서 연속이면 $g(x)$는 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이다.

(i) $x=3$에서의 연속성

$\lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3-0} \{f(x)\}^2 = 2^2 = 4$

$\lim_{x \to 3+0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to 2-0} f(t) = 4$

$g(3) = \{f(3)\}^2 = 2^2 = 4$

$\therefore \lim_{x \to 3-0} g(x) = \lim_{x \to 3+0} g(x) = g(3)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다.

(ii) $x=4$에서의 연속성

$\lim_{x \to 4-0} g(x) = \lim_{x \to 4-0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to +0} f(t) = 2$

$\lim_{x \to 4+0} g(x) = \lim_{x \to 4+0} (f \circ f)(x) = \lim_{t \to 1+0} f(t) = 3$

$\therefore \lim_{x \to 4-0} g(x) \neq \lim_{x \to 4+0} g(x)$

따라서 함수 $g(x)$는 $x=4$에서 불연속이므로 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 아니다.

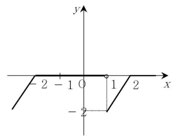
이상에서 함수 $g(x)$가 폐구간 $[0,\ 5]$에서 연속이 되도록 하는 함수 $f(x)$의 그래프는 ㄴ이다. 답 ②

4. [정답] ② [해설]

ㄱ. $\lim_{x \to 1+0} \{f(x) + f(-x)\} = -1 + 1 = 0$ ∴ 참

ㄴ. $g(x) = f(x) - |f(x)|$라고 하면

$$g(x) = \begin{cases} 2x+4 & (x \leq -2) \\ 0 & (-2 < x < 1) \\ 2x-4 & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (x \geq 2) \end{cases}$$



따라서 $g(x) = f(x) - |f(x)|$는 $x=1$에서만 불연속이다. ∴ 참

ㄷ. $a=-1$일 때,

$f(x)f(x-a) = f(x)f(x+1)$은 실수 전체에서 연속이다. ∴ 거짓

5. [09년 수능]

실수 a에 대하여 주어진 집합의 원소의 개수는 방정식 $ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0$의 실근의 개수와 같다.

i) $a=0$일 때,

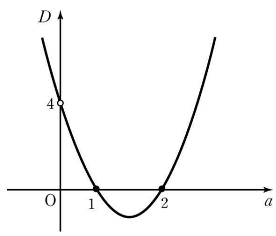
주어진 방정식은 $-4x+2=0$이므로 $x = \frac{1}{2}$

$\therefore f(0) = 1$

ii) $a \neq 0$일 때,

이차방정식 $ax^2 + 2(a-2)x - (a-2) = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (a-2)^2 + a(a-2) = 2(a-1)(a-2)$

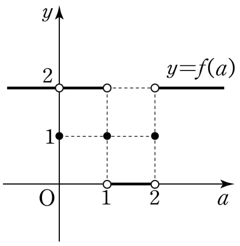


즉, 이 이차방정식은 $a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 갖고, $1<a<2$일 때 실근을 갖지 않고, $a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$f(1) = f(2) = 1$, $1<a<2$일 때 $f(a) = 0$,

$a<0$ 또는 $0<a<1$ 또는 $a>2$일 때 $f(a) = 2$

i), ii)에 의해서 $y = f(a)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=2$ 이고 $f(0)=1$ 이므로 $\lim_{a\to 0} f(a)\neq f(0)$
(거짓)

ㄴ. $\lim_{a\to c+0} f(a)\neq \lim_{a\to c-0} f(a)$ 인 실수 c는 즉, 함수 $f(a)$의 $a=c$에서의 좌극한과 우극한의 값이 서로 다르도록 하는 c는 1, 2의 2개다. (참)

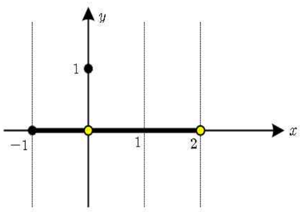
ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 $a=0$, 1, 2일 때로 3개다. (참)

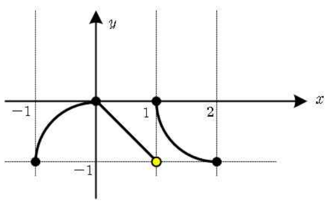
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ④

6. 정답 ①

주어진 구간에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 간단히 하면 $x=0$이면 $f(x)=1>0$

$x\neq 0$이면 $f(x)\leq 0$이므로





$$g(x)=\begin{cases}1 & (x=0)\\ 0 & (x\neq 0)\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}0 & (x=0)\\ f(x) & (x\neq 0)\end{cases}$$

ㄱ. $\lim_{x\to 1+0} h(x)=0$, $\lim_{x\to 1-0} h(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to 1} h(x)$를 존재하지 않는다. (거짓)

ㄴ. 주어진 구간내의 임의의 실수 a에 대하여

$\lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=0$이다.

$(\because \lim_{x\to a} g(x)=0,\ \lim_{x\to 0} h(x)=0)$

$$(h\circ g)(a)=\begin{cases}h(0)=0 & (a\neq 0)\ (\because g(a)=0)\\ h(1)=0 & (a=0)\ (\because g(a)=1)\end{cases}$$

$\therefore \lim_{x\to a}(h\circ g)(x)=(h\circ g)(a)$

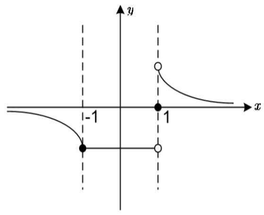
주어진 구간에서 연속이다. (참)

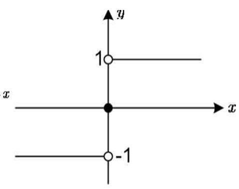
ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g\circ h)(x)=0$ $(g\circ h)(0)=g(0)=1$

$\therefore$ $x=0$에서 불연속 (거짓)

7. 정답 90

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (x>1)\\ 0 & (x=1)\\ -1 & (-1<x<1)\\ -1 & (x=1)\\ \frac{1}{x} & (x<-1)\end{cases},\quad h(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$$





$y=f(x)\cdot g(x)$ 가 연속이므로

$f(1)\cdot g(1)=0$, $\lim_{x\to 1+0} f(x)g(x)=f(1)=0$

$y=f(x)\cdot h(x)$ 가 연속이므로

$f(0)\cdot h(0)=0$, $\lim_{x\to +0} f(x)h(x)=f(0)=0$

$\therefore$ $f(x)=x\cdot(x-1)$

$\therefore$ $f(10)=90$