2021학년도 대학수학능력시험 모의평가 1회

수학 영역(가형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ⑤ (출제자 : 20 김태희)

[출제의도] 간단한 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

$\sin\frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) [정답] ⑤ (출제자 : 20 김유진)

[출제의도] 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

[해설]

$$\lim_{n\to INF}\frac{2^{3n+1}-5^{n-1}}{5^n+2^{3n-2}} = \lim_{n\to INF}\frac{2\times 8^n - \frac{1}{5}\times 5^n}{5^n+\frac{1}{4}\times 8^n}$$

$$= \lim_{n\to INF}\frac{2-\frac{1}{5}\times\left(\frac{5}{8}\right)^n}{\left(\frac{5}{8}\right)^n+\frac{1}{4}} = 8$$

3) [정답] ④ (출제자 : 19 백수정)

[출제의도] 간단한 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$라 하면

$a_n = 2r^{n-1}$이므로

$a_2\times a_3 = a_5$에서 $2r\times 2r^2 = 2r^4$이고,

$4r^3 = 2r^4$이다.

$r>0$이므로 $r=2$이다.

따라서 $a_6 = 2r^5 = 64$이다.

4) [정답] ③ (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 독립인 두 사건의 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

사건 A와 B가 독립이므로 사건 A^C와 B도 서로 독립이다.

따라서 $\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고, $\mathrm{P}(A^C\cap B) = \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$이다.

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$= \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$,

$(1-\mathrm{P}(A))\mathrm{P}(B) = \frac{1}{6}$ 이고 $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{3}$이므로 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{4}$이다.

5) [정답] ② (출제자 : 20 이선우)

[출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 로그함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

[해설]

ⅰ) $0<a<1$인 경우

$y=\log_a x$는 감소함수이므로 $x=\frac{1}{4}$에서 최댓값을 가진다.

$\log_a\frac{1}{4} = 2$이므로 $a^2 = \frac{1}{4}$이고 $0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{2}$이다.

ⅱ) $a>1$인 경우

$y=\log_a x$는 증가함수이므로 $x=16$에서 최댓값을 가진다.

$\log_a 16 = 2$이므로 $a^2=16$이고 $a>1$이므로 $a=4$이다.

따라서 ⅰ)과 ⅱ)에서 가능한 a값의 합은 $\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$이다.

6) [정답] ② (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 같은 것을 포함하는 순열을 이용해 주어진 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]

1은 서로 이웃해야 하므로 1, 1을 한 묶음으로 생각해서 A라 하자.
0은 서로 이웃하지 않아야 하므로 0을 제외한 나머지 문자들을 먼저 배열하자.

ⅰ) A, 2, 2를 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$가지이다.

0이 서로 이웃하지 않으려면 양 끝이나 이미 배열된 A, 2, 2 사이에 0이 배열되면 된다.

ⅱ) 0이 서로 이웃하지 않도록 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$가지이다.

ⅰ), ⅱ)에서 구하고자 하는 경우의 수는 $3\times 4=12$이다.

7) [정답] ① (출제자 : 20 송문주)

[출제의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

[해설]

점 $(0,\,k)$는 곡선 $y^2\sin x + x^2 + 3y = 6$ 위의 점이므로

$3k=6$에서 $k=2$이다.

$y^2\sin x + x^2 + 3y = 6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2y\sin x\frac{dy}{dx}+y^2\cos x+2x+3\frac{dy}{dx}=0$ 이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2\cos x-2x}{2y\sin x+3}$ (단, $2y\sin x+3\neq 0$)이다.

따라서 곡선 $y^2\sin x+x^2+3y=6$ 위의 점 $(0,\ 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$m=\frac{-4-0}{0+3}=-\frac{4}{3}$ 이다.

따라서 $k+3m=2+3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=2-4=-2$ 이다.

8) [정답] ③ (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 로그의 성질을 이용해 미지수의 값을 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 OAB 의 넓이가 x 축에 의해 이등분되려면 선분 AB 의 중점이 x 축 위에 있어야 한다.

그러므로 $\log_2 2a+\log_4\frac{1}{a}=0$ 이어야 한다.

$\log_2 2a+\log_4\frac{1}{a}=\log_4 4a^2+\log_4\frac{1}{a}=\log_4 4a=0$

따라서 $4a=1$, 즉 $a=\frac{1}{4}$ 이다.

9) [정답] ⑤ (출제자 : 20 최인환)

[출제의도] 속도와 거리관계를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

시각 $t=1$ 에서 시각 $t=k\,(k\geq 0)$ 까지 점 P 의 움직인 거리는

$$\int_1^k\left|\frac{2t-2}{t^2-2t+2}\right|dt=\left[\ln(t^2-2t+2)\right]_1^k$$

$$=\ln(k^2-2k+2)\text{ 이다.}$$

이때, 움직인 거리가 $\ln 5$ 가 되어야 하므로

$\ln(k^2-2k+2)=\ln 5$ 이고 이는 $k^2-2k+2=5$ 이다.

$k=3$ 또는 -1 이지만 $k>1$ 이므로 $k=3$ 이다.

10) [정답] ③ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 표본평균을 이용하여 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

[해설]

모표준편차가 σ 이고, 표본의 크기 $n=36$ 이므로

표본평균 $\overline{x}=52$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 $95\,\%$ 의 신뢰구간은

$52-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\leq m\leq 52+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$ 이다.

즉 $52+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=57.88$ 이므로

$1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=5.88$, $\sigma=18$ 이다.

한편, $\alpha=52-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}=52-1.96\times\frac{18}{\sqrt{36}}=46.12$ 이다.

따라서 정답은 $\alpha-\sigma=46.12-18=28.12$ 이다.

11) [정답] ④ (출제자 : 20 김동해)

[출제의도] 정적분과 급수의 관계를 이용할 수 있는가?

[해설]

$x_k=\frac{k}{2n}$ 이므로 S_k 는 밑변의 길이가 $\frac{1}{2n}$ 이고

높이가 $f\left(\frac{k}{2n}\right)$ 인 직사각형의 넓이이므로

$\lim\limits_{n\to INF}\sum\limits_{k=1}^{n}S_k=\lim\limits_{n\to INF}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{k}{2n}\right)$ 이다.

이때 $\lim\limits_{n\to INF}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{k}{2n}\right)$ 에서 $x=\frac{k}{2n}$ 로 놓으면

$dx=\frac{1}{2n}$ 이고 정적분의 아래 끝은 $\lim\limits_{n\to INF}\frac{1}{2n}=0$

정적분의 위 끝은 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to INF}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{2n}\times f\left(\frac{k}{2n}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}xe^x\,dx$

$$=\left[(x-1)e^x\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{1}{2}\sqrt{e}\text{ 이다.}$$

12) [정답] ④ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 주어진 상황에 대한 수학적 확률을 구할 수 있는가?

[해설]

조건 (나)에서 $2b-1=a+c$ 이므로 $a+c$ 의 값은 홀수이다.

그런데 조건 (가)에서 $a+b+c$ 의 값이 짝수이므로 b 는 홀수이다.

$1\leq a<b<c\leq 9$ 이므로 b 는 1 이나 9 가 될 수 없다.

따라서 b 는 3, 5, 7 이 가능하다.

i) $b=3$ 일 경우

$a+c=5$ 이면서 $1\leq a<3<c\leq 9$ 를 만족시키는

순서쌍 $(a,\ c)$ 는 $(1,\ 4)$ 로 1 개 존재한다.

ii) $b=5$ 일 경우

$a+c=9$ 이면서 $1\leq a<5<c\leq 9$ 를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ c)$ 는

$(1,\ 8)$, $(2,\ 7)$, $(3,\ 6)$ 으로 3 개 존재한다.

iii) $b=7$ 일 경우

$a+c=13$ 이면서 $1\leq a<7<c\leq 9$ 를 만족시키는

순서쌍 $(a,\ c)$ 는 $(4,\ 9)$, $(5,\ 8)$ 로 2 개 존재한다.

따라서 뽑은 3 개의 수들이 조건 (가)와 (나)를 만족시키는

경우의 수는 6 이다.

한편, 9 장의 카드 중 3 장을 동시에 뽑는 경우의 수는 ${}_9C_3=84$ 이다.

따라서 뽑은 3 개의 수들이 조건 (가)와 (나)를 만족시킬 확률은

$\frac{6}{84}=\frac{1}{14}$ 이다.

13) [정답] ① (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 지수함수와 로그함수의 대칭성을 활용하여 간단한 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

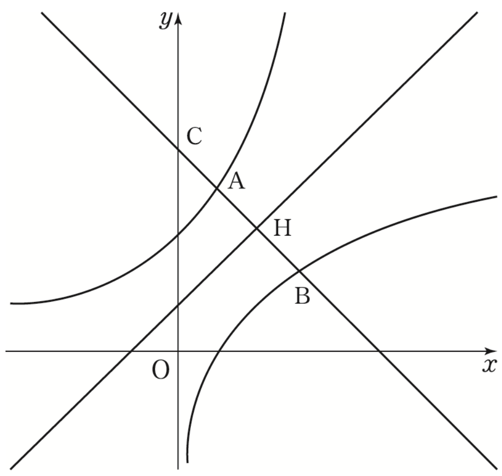
두 곡선 $y=a^x+1$, $y=\log_a(x-1)$ 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, 각각의 그래프를 x 축 방향으로 -1 씩 평행이동 시켜 보면

두 곡선 $y=a^{x+1}+1$ 와 $y=\log_a x$ 는 직선 $y=x+1$ 에 대하여

대칭임을 알 수 있다.

따라서 문제의 상황을 그려보면 아래 그림과 같다.



두 직선 $y=x+1$과 $y=-x+5$의 교점을 H라 하면 $\mathrm{H}(2,3)$이고, 문제의 조건에 의해 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{CA}}=2\overline{\mathrm{AH}}$이므로 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AH}}$이다.
즉, 점 A는 선분 CH의 중점이다. 따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(1,4)$이고,
점 A는 $y=a^{x+1}+1$ 위의 점이므로 대입하면 $a^2=3$이다.
$a>1$이므로 $a=\sqrt{3}$이다.

14) [정답] ③ (출제자 : 19 황주영)
[출제의도] 낯선 수열의 규칙을 파악하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\sin\left(a_n+\dfrac{n}{2}\right)\pi$이므로,
$a_2=\sin\left(a_1+\dfrac{1}{2}\right)\pi$이다. a_1은 정수이므로 a_2의 값으로 가능한 것은 1 또는 -1이고, 두 경우 모두 주어진 관계식에 대입해보면
$a_3=0$, $a_4=-1$이다.
그 이후의 항은

$n=4k$일 때,
$a_{4k+1}=\sin\left(a_{4k}+\dfrac{4k}{2}\right)\pi=\sin(a_{4k})\pi$이고

$n=4k+1$일 때,
$a_{4k+2}=\sin\left(a_{4k+1}+\dfrac{4k+1}{2}\right)\pi=\cos(a_{4k+1})\pi$이고

$n=4k+2$일 때,
$a_{4k+3}=\sin\left(a_{4k+2}+\dfrac{4k+2}{2}\right)\pi=-\sin(a_{4k+2})\pi$이고

$n=4k+3$일 때,
$a_{4k+4}=\sin\left(a_{4k+3}+\dfrac{4k+3}{2}\right)\pi=-\cos(a_{4k+3})\pi$이다.
즉, 위의 관계식에 의하여 $a_5=0$, $a_6=1$, $a_7=0$, $a_8=-1$이고,
그 이후로 수열 $\{a_n\}$의 항은 $0,1,0,-1$이 반복된다.

$$\sum_{n=1}^{100}|a_n|=|a_1|+1+1+24\times(1+0+1+0)=50+|a_1|$$
의 값이 최소가 되도록 하는 정수 a_1의 값은 0이다.
따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}|a_n|$의 최솟값은 50이다.

15) [정답] ① (출제자 : 19 윤황규)
[출제의도] 독립시행의 확률을 구하고 이항분포를 통해 평균을 구할 수 있는가?

[해설]
ⅰ) 1단계에서 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼내는 경우
1단계에서 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}$이다.
이때 2단계에서 1개의 공을 꺼내야 한다.

ⅰ-1)
2단계에서 흰 구슬 1개를 꺼낼 확률은 $\dfrac{3}{4}$이다.
3단계에서 주머니에는 흰 구슬 2개와 검은 구슬 1개가 남아 있으므로
3단계에서 흰 구슬을 2개 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}$이다.
따라서 이 경우 구하는 확률은 $\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}$이다.

ⅰ-2)
2단계에서 검은 구슬 1개를 꺼낼 확률은 $\dfrac{1}{4}$이다.
3단계에서 주머니에는 흰 구슬 3개가 남아 있으므로 3단계에서 흰 구슬 2개를 꺼낼 확률은 1이다.
따라서 이 경우 구하는 확률은 $\dfrac{1}{4}\times1=\dfrac{1}{4}$이다.
ⅰ)에서 3단계에 흰 구슬이 2개가 나올 확률은
$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$이다.

ⅱ) 1단계에서 흰 구슬 2개를 꺼내는 경우
1단계에서 흰 구슬 2개를 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$이다.
이때 2단계에서 2개의 구슬을 꺼내야 한다.

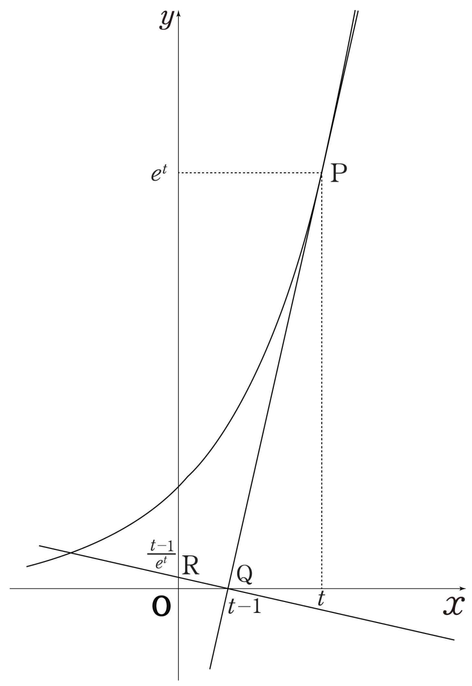
ⅱ-1)
2단계에서 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개를 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}$이고
이 경우 3단계에서 주머니에는 흰 구슬 2개가 남아 있으므로 3단계에서 흰 구슬 2개를 꺼낼 확률은 1이다.
따라서 이 경우 구하는 확률은 $\dfrac{1}{2}\times1=\dfrac{1}{2}$이다.

ⅱ-2)
2단계에서 흰 구슬 2개를 꺼낼 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}$이다.
이 경우 3단계에서 주머니에는 흰 구슬 1개, 검은 구슬 1개가 남아 있으므로 3단계에서 흰 구슬 2개를 꺼낼 수 없다.
ⅱ)에서 3단계에서 흰 구슬 2개가 나올 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}\times\left(\dfrac{1}{2}+0\right)=\dfrac{1}{4}$이다.
ⅰ), ⅱ)에 의해 3단계에서 흰 구슬 2개가 나올 확률은 $\dfrac{1}{2}$이므로
이와 같은 시행을 120번 반복하므로 3단계에서
흰 구슬이 2개가 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면
확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(120,\dfrac{1}{2}\right)$을 따르므로
$\mathrm{E}(X)=120\times\dfrac{1}{2}=60$이다.

16) [정답] ③ (출제자 : 19 정지혁)

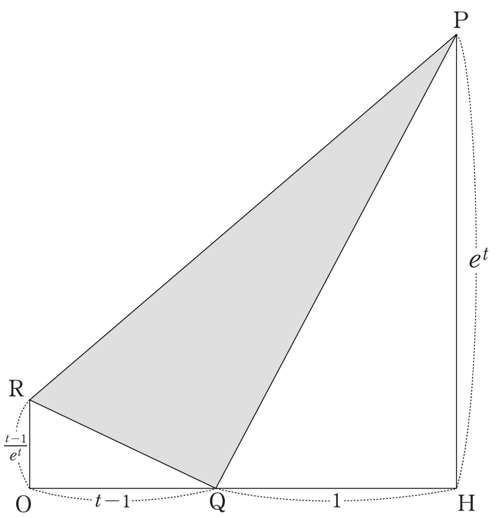
[출제의도] 접선의 방정식을 이용해 도형의 넓이를 구하고 지수함수의 극한을 구할 수 있는가?

[해설]
주어진 상황을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 P 에서 그은 접선의 방정식은 $y=e^t(x-t)+e^t$ 이다.
이 직선이 점 $(t-1,\, 0)$ 을 지나므로 점 Q 의 x 좌표는 $t-1$ 이다.

한편, 직선 PQ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{e^t}$ 이므로 직선 QR 의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{e^t}(x-t+1)$ 이다. 이 직선이 점 $\left(0,\, \dfrac{t-1}{e^t}\right)$ 을 지나므로 점 R 의 y 좌표는 $\dfrac{t-1}{e^t}$ 이다.

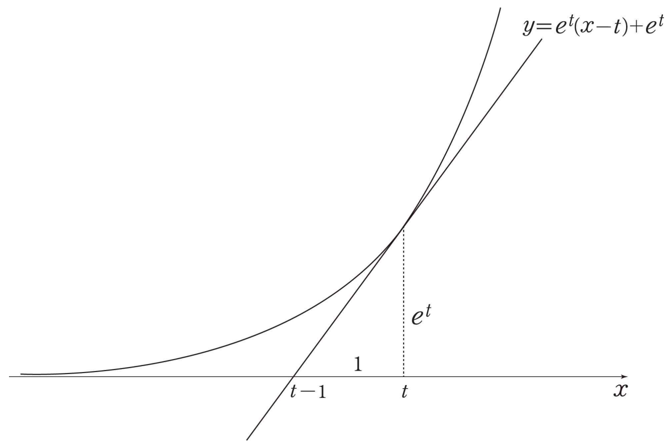


점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하자.
삼각형 PQR 의 넓이는 사다리꼴 PHOR 의 넓이에서
삼각형 QOR 의 넓이와 삼각형 PHQ 의 넓이를 뺀 값과 같다.

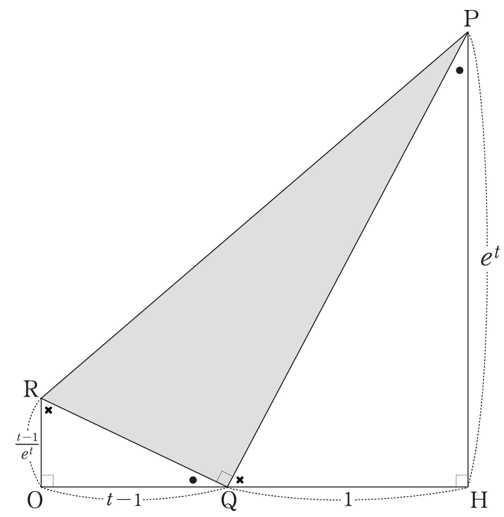
사다리꼴 PHOR 의 넓이는 $\dfrac{t}{2}\left(\dfrac{t-1}{e^t}+e^t\right)=\left(\dfrac{t^2-t}{e^t}+te^t\right)$ 이고
삼각형 QOR 의 넓이는 $\dfrac{(t-1)^2}{2e^t}$,
삼각형 PHQ 의 넓이는 $\dfrac{e^t}{2}$ 이다.

따라서 $S(t)=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{t^2-t}{e^t}+te^t-\dfrac{(t-1)^2}{e^t}-e^t\right\}$
$=\dfrac{1}{2}\left\{(t-1)e^t+\dfrac{t-1}{e^t}\right\}$
이므로 $\displaystyle\lim_{t\to 1+}\frac{S(t)}{t-1}=\frac{e}{2}+\frac{1}{2e}$ 이다.

[참고]
i) 곡선 $y=e^x$ 에서 $x=t$ 에서의 접선은 x 절편이 $t-1$ 이다.
그 이유는 곡선 $y=e^x$ 의 접선의 기울기는 그 점의 y 좌표와 같기 때문이다.



ii) 문제에서 빼게 되는 두 삼각형은 서로 닮음이다.
두 각의 크기가 같기 때문이다. 이를 이용해 왼쪽 삼각형의 길이와 넓이를 조금 더 쉽게 구할 수도 있다.



17) [정답] ② (출제자 : 19 정지혁)
[출제의도] 중복조합을 이용하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

[해설]

(가) : ${}_{k}\mathrm{C}_2$
(나) : ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$
(다) : 330

$y+2z+2w=2k+1$ 에서 두 수 $2z$, $2w$ 은 짝수이고, $2k+1$ 은 홀수이다.
따라서 y 도 홀수이다.
$y=2y'+1$, $z=z'+1$, $w=w'+1$ 라 하자.
(단, y', z', w' 는 0 이상의 정수이다.)
이를 대입하면, $(2y'+1)+(2z'+2)+(2w'+2)=2k+1$ 에서
$y'+z'+w'=k-2$ 이다.

$y'+z'+w'=k-2$ 을 만족시키는 0 이상의 정수 y', z', w' 의 순서쌍 (y', z', w') 의 개수는 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_{k-2}={}_k\mathrm{C}_{k-2}={}_k\mathrm{C}_2}$ 이다.

따라서 (가)에 들어갈 알맞은 식은 $\boxed{{}_k\mathrm{C}_2}$ 이다.

$y+2z+2w=2n$ 에서 세 수 $2z$, $2w$, $2n$ 은 모두 짝수이므로 y 는 짝수이다. $y=2y'+2$, $z=z'+1$, $w=w'+1$ 라 하자.
(단, y', z', w' 는 0 이상의 정수이다.)
이를 대입하면, $(2y'+2)+(2z'+2)+(2w'+2)=2n$ 에서
$y'+z'+w'=n-3$ 이다.

$y'+z'+w'=n-3$ 을 만족시키는 0 이상의 정수 y', z', w' 의 순서쌍 (y', z', w') 의 개수는 $\boxed{{}_3\mathrm{H}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_2}$ 이다.

따라서 (나)에 들어갈 알맞은 식은 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_2}$ 이다.

$\displaystyle\sum_{n=6}^{13} a_n$ 의 값을 구하기 위해 파스칼의 삼각형,
${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_r+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ 임을 이용하자.

$$\sum_{k=3}^{6} {}_{k-1}\mathrm{C}_2={}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2$$
$$={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_3=20,$$

$$\sum_{k=3}^{6}\boxed{\text{(가)}}=\sum_{k=3}^{6}{}_k\mathrm{C}_2$$
$$={}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2$$
$$={}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2-1$$
$$={}_7\mathrm{C}_3-1=34,$$

$$\sum_{n=6}^{13}\boxed{\text{(나)}}=\sum_{n=6}^{13}{}_{n-1}\mathrm{C}_2$$
$$={}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_2$$
$$={}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{12}\mathrm{C}_2-10$$
$$={}_{13}\mathrm{C}_3-10=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}-10=276 \text{ 이다.}$$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=6}^{13}a_n=20+34+276=\boxed{330}$ 이다.

$f(9)={}_9\mathrm{C}_2=36$, $g(6)={}_5\mathrm{C}_2=10$, $r=330$ 이므로
$f(9)+g(6)+r=376$ 이다.

18) [정답] ⑤ (출제자 : 20 이도윤)

[출제의도] 주어진 조건을 통해 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

$\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_{n+1}-a_n=d$, $a_{n+1}=a_n+d$ 이다.

이를 (가)에 대입하면 $b_n=\dfrac{(a_n+d)^2-k}{a_n}$,

$b_n=\dfrac{{a_n}^2+2da_n+d^2-k}{a_n}$ 이다.

그런데 b_n 은 등차수열이므로 n 에 관한 일차식이다.

따라서 $d^2-k=0$, $d^2=k$ ⋯ ㉠ 이고

$b_n=\dfrac{{a_n}^2+2da_n}{a_n}=a_n+2d$, $a_n-b_n=-2d$ 이다.

이를 (나)의 첫 번째 식에 대입하고 계산하면

$4\times\dfrac{-2d}{2}=k$, $k=-4d$ ⋯ ㉡이다.

㉠과 ㉡을 연립하면 $d^2+4d=0$, $d=0$ 또는 $d=-4$ 이다.

그런데 $d=0$ 일 경우 $k=0$ 이 되고,

(나)의 두 번째 식에서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{4}a_n=0$ 이 되는데, $\{a_n\}$ 의 공차가 0 이므로 $\{a_n\}$ 의 모든 항도 0 이 되어야 한다.

이러면 모든 항이 0 이 아니라는 조건과 모순이므로 $d\neq0$ 이다.

따라서 $d=-4$ 이고, $k=16$ 이다.

$a_n=-4n+c$ (단, c 는 상수)라 하고 (나)의 두 번째 식을 계산하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{4}(-4n+c)=-4\times\frac{4\times5}{2}+4c=k=16$

$-40+4c=16$, $c=14$ 이다,

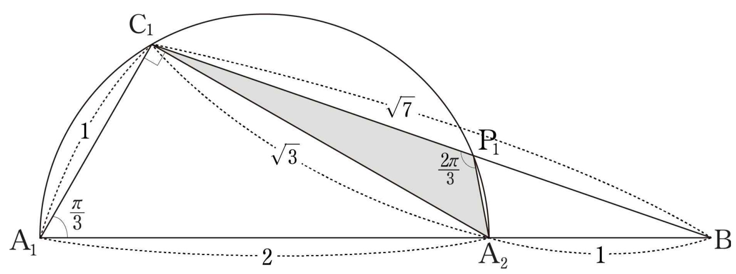
따라서 $a_n=-4n+14$, $b_n=-4n+6$ 이다.

$a_4=-2$, $b_4=-10$ 이므로 $\dfrac{b_4}{a_4}=5$ 이다.

19) [정답] ① (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 도형의 성질과 삼각함수를 이용하여 주어진 상황을 이해하고 등비급수를 이용하여 넓이의 합을 구할 수 있는가?

[해설]



코사인 법칙을 사용하여 변 BC_1 의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{BC}_1}^2=1^2+3^2-2\times1\times3\times\cos\dfrac{\pi}{3}=1+9-3=7$ 에서

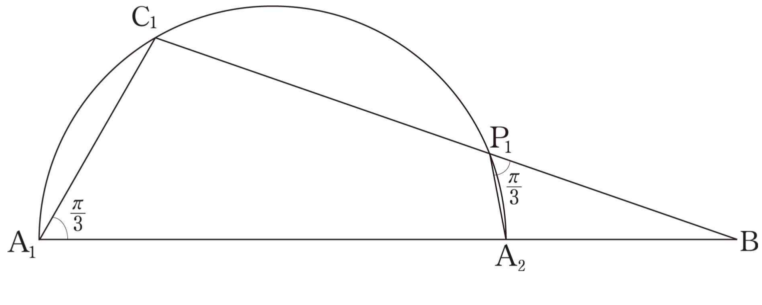
$\overline{\mathrm{BC}_1}=\sqrt{7}$ 이다.

점 A_2 가 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{B}$ 를 $2:1$ 로 내분하므로 $\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=2$, $\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}}=1$ 이다.

이때, $\angle\mathrm{A}_2\mathrm{A}_1\mathrm{C}=\dfrac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1$ 은 $\angle\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1\mathrm{A}_1=\dfrac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다. 따라서 선분 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ 은 삼각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{C}_1$ 의 외접원의 지름이다.

이때, 사각형 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1$ 은 원에 내접하는 사각형이므로

마주 보는 두 각의 크기의 합은 π 이다. 따라서 $\angle\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1=\dfrac{2}{3}\pi$ 이다.



$\angle\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1=\dfrac{2}{3}\pi$ 이므로 $\angle\mathrm{BP}_1\mathrm{A}_2=\dfrac{\pi}{3}$ 이다. 두 삼각형 $\mathrm{BA}_2\mathrm{P}_1$ 과 $\mathrm{BC}_1\mathrm{A}_1$ 은 서로 두 각이 같으므로 닮음인 삼각형이다.

닮음비를 이용하여 두 선분 $\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1$, $\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1$ 의 길이를 구할 수 있다.

$3:1:\sqrt{7}=\overline{\mathrm{BP}_1}:\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1}:1$ 에서 $\overline{\mathrm{BP}_1}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$,

$\overline{\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ 이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{A}_2\mathrm{P}_1\mathrm{C}_1$ 의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2}{3}\pi\times\dfrac{4\sqrt{7}}{7}\times\dfrac{\sqrt{7}}{7}=\dfrac{\sqrt{3}}{7}$ 이다.

그림 R_2 에서 그려지는 삼각형과 그림 R_1 에서 그려지는 삼각형 한 변의 길이의 비를 구하면 $\overline{\mathrm{BA}_2}:\overline{\mathrm{BA}_1}=1:3$ 이다.
따라서 그림 R_2 에서 그려지는 도형의 길이는
그림 R_1 에서 그려지는 도형의 길이의 $\dfrac{1}{3}$ 배이므로
색칠되는 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{9}$ 배이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 은 공비가 $\dfrac{1}{9}$ 인 등비수열의 급수이므로

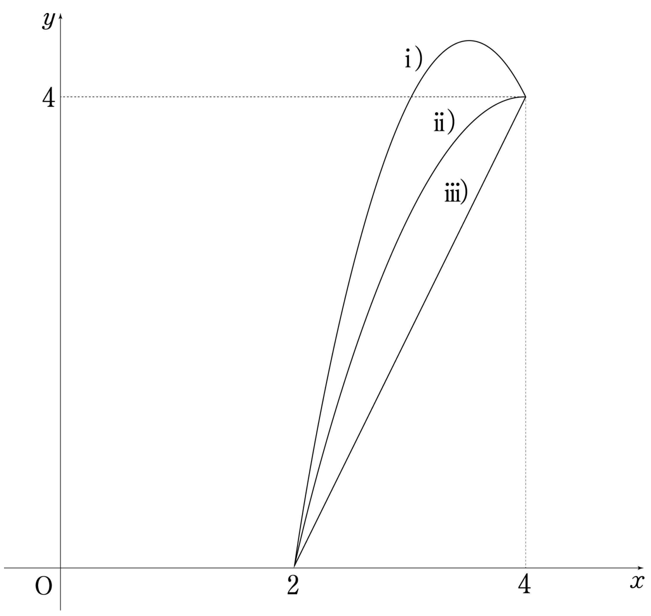
$\lim\limits_{n\to INF}S_n=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{7}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{9\sqrt{3}}{56}$ 이다.

20) [정답] ⑤ (출제자 : 20 김동연)

[출제의도] 함수의 개형을 추론하고 이에 따른 경우를 비교하여 정적분의 최댓값을 구할 수 있는가?

[해설]
ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x)\le 0$ 이므로
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형은 위로 볼록하거나 직선이다.
$h(t)$ 는 점 $(g(t),\ f(g(t)))$ 에서 접선의 x 절편이므로
$0\le t<4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형이 위로 볼록할 때는
$h'(t)<0$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형이 직선일 때는
$h'(t)=0$ 이다.
따라서 $0\le t<4$ 일 때, $h'(t)\le 0$ 이다. (참)

ㄴ. $f''(x)\le 0$ 이고, $f(2)=0$, $f(4)=4$ 이므로
닫힌구간 $[2,4]$ 에서 함수 $f(x)$ 는
ⅰ) $g(4)\ne 4$ 인 경우 ·· ㉠
ⅱ) 그래프의 개형이 곡선이며 $g(4)=4$ 인 경우 ···· ㉡
ⅲ) 그래프의 개형이 직선이며 $g(4)=4$ 인 경우 ···· ㉢
3 가지로 구분할 수 있다.



ⅰ-1) ㉠ 에서 $g(4)=a$ 라고 하자.
a 는 $2<a<4$ 인 상수이다.
이때 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 값은 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=4$, x 축, y 축으로 둘러싸인 영역의 넓이이다.
따라서 $\int_0^4 g(t)\,dt=4a-\int_2^a f(t)\,dt$ 이다.
즉, ㉠에서 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 값이 최대일 때는
$\int_2^a f(t)\,dt$ 의 값이 최소일 때와 동일하다.
함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형이 위로 볼록하거나 직선이므로
$\int_2^a f(t)\,dt$ 의 값이 최소일 때는 함수 $f(x)$ 의 그래프의 개형이 직선일 때이다.
따라서 $\int_2^a f(t)\,dt$ 의 최솟값을 구하면 $\dfrac{1}{2}\times 4\times(a-2)=2a-4$ 이므로
㉠에서 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 최댓값은
$\int_0^4 g(t)\,dt=4a-(2a-4)=2a+4$ 이다.

ⅱ-1) $g(4)=4$ 일 때 $\int_0^4 g(t)\,dt=16-\int_2^4 f(t)\,dt$ 이다.
즉, $g(4)=4$ 이라면 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 값이 최대일 때는
$\int_2^4 f(t)\,dt$ 의 값이 최소일 때와 동일하다.
위와 마찬가지로 $\int_2^a f(t)\,dt$ 의 값이 최소일 때는
그래프의 개형이 직선일 때이다.
따라서 $\int_2^4 f(t)\,dt$ 의 최솟값을 구하면 $\dfrac{1}{2}\times 4\times 2=4$ 이므로
㉡과 ㉢의 경우에서 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 최댓값은
$\int_0^4 g(t)\,dt=16-4=12$ 이다.

ⅰ-1), ⅱ-1)에서 구한 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 최댓값을 비교해 보면,
$2<a<4$ 이므로 $2a+4<12$ 이다.
따라서 $\int_0^4 g(t)\,dt$ 의 최댓값은 12 이다. (참)

ㄷ. 점 $(g(t),\ f(g(t)))$ 에서 접선의 방정식을 구해보면,
$y=f'(g(t))(x-g(t))+f(g(t))$ 이다.
$f(g(t))=t$ 이므로 $h(t)=g(t)-\dfrac{t}{f'(g(t))}$ 이다.
$f(g(t))=t$ 의 양변을 t 에 대해 미분하면,
$f'(g(t))g'(t)=1$, $f'(g(t))=\dfrac{1}{g'(t)}$ 이다.
따라서 $h(t)=g(t)-tg'(t)$ 이다.

$$\begin{aligned}\int_0^4 h(t)\,dt&=\int_0^4 g(t)\,dt-\int_0^4 tg'(t)\,dt\\&=\int_0^4 g(t)\,dt-[tg(t)]_0^4+\int_0^4 g(t)\,dt\\&=2\int_0^4 g(t)\,dt-[tg(t)]_0^4\end{aligned}$$

ⅰ-2) ㉠에서 $g(4)=a$ 라고 하자.
a 는 $2<a<4$ 인 상수이므로
$\int_0^4 h(t)\,dt=2\int_0^4 g(t)\,dt-4a$ 이다.

임의의 상수 a에 대하여 $2\int_0^4 g(t)\,dt-4a$의 값이 최대일 때는
$2\int_0^4 g(t)\,dt$, 즉 $\int_0^4 g(t)\,dt$의 값이 최대일 때와 동일하다.
위에서 구한 것처럼 ㉠에서 $\int_0^4 g(t)\,dt$의 최댓값은 $2a+4$이다.
따라서 $\int_0^4 h(t)\,dt$의 최댓값은 $2\times(2a+4)-4a=8$이다.

ii−2) ㉡과 ㉢ 에서는 모두 $g(4)=4$이므로
$[tg(t)]_0^4$의 값은 16이다. 따라서 ㉡과 ㉢ 에서
$\int_0^4 h(t)\,dt$의 값이 최대가 될 때는
$\int_0^4 g(t)\,dt$의 값이 최대가 될 때이다.
위에서 구한 것처럼 $g(4)=4$일 때 $\int_0^4 g(t)\,dt$의 최댓값은 12이다.
따라서 $\int_0^4 h(t)\,dt$의 최댓값은 $2\times 12-16=8$이다.

i−2), ii−2)에서 구한 $\int_0^4 h(t)\,dt$의 최댓값이 8로 같다.
따라서 $\int_0^4 h(t)\,dt$의 최댓값은 8이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[별해]
ㄷ. $f(2)=0$이므로 함수 h의 정의에 의해 $h(0)=2$이다.
이때 ㄱ에서 $h'(t)\le 0$이므로 $t>0$에서 $h(t)\le 2$이다.
($h(t)$가 2보다 큰 값을 가지면 함수 h의 기울기가 증가하는 구간이 생긴다.)
따라서 $\int_0^4 h(t)\,dt$의 값이 최대가 되게 하는 h함수의 식은
$h(t)=2$이므로 $\int_0^4 h(t)\,dt$의 최댓값은 8이다.

21) [정답] ④ (출제자 : 19 정재훈)
[출제의도] 치환적분을 활용하여 주어진 함수를 해석할 수 있는가?

[해설]
$f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 연속이다.
따라서 (가)에 의해
$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\int_0^x f(-t)\,dt=0$이다.
또한 (나)에서
$\int_n^{n+1} f(-x)\,dx=\int_0^{n+1} f(-x)\,dx-\int_0^n f(-x)\,dx$이므로
(가)에 의해
$\int_n^{n+1} f(-x)\,dx=f(n+1)-f(n)=2\ \cdots$ ㉠

한편 (가)에서 양변을 미분하면
$x>0$에서 $f'(x)=f(-x)$이고 $f(0)=0$이므로
함수 $g(x)=\int_0^x f(t)f(-t)\,dt$는 $x>0$일 때
$g(x)=\int_0^x f(t)f'(t)dt=\left[\frac{\{f(t)\}^2}{2}\right]_0^x=\frac{\{f(x)\}^2}{2}$이다.

반면 $x<0$일 땐 $-x>0$이므로 $f'(-x)=f(x)$이다.
그러므로 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)f(-t)\,dt$는 $x<0$일 때
$g(x)=\int_0^x f(t)f(-t)\,dt=\int_0^x f'(-t)f(-t)\,dt$
$f(-t)=s$로 치환하면
$f(0)=0$이므로 $g(x)=-\int_0^{f(-x)} s\,ds=-\frac{\{f(-x)\}^2}{2}$이다.
따라서 $x<0$일 때, $g(x)=-g(-x)$이다. ⋯ ㉮

$g(2)=g(6)$일 때 $\frac{\{f(2)\}^2}{2}=\frac{\{f(6)\}^2}{2}$이다.
이때, ㉠에 의해
$f(6)-f(2)=f(6)-f(5)+f(5)-\cdots-f(3)+f(3)-f(2)$
$=2\times 4=8$
즉, $f(6)=f(2)+8$이므로 $-f(2)=f(6)$이고
$f(6)=4$이다.

위와 같은 방법으로 $f(12)-f(6)=2\times 6=12$
$g(12)+g(-6)=g(12)-g(6)=\frac{1}{2}(\{f(12)\}^2-\{f(6)\}^2)$
$=\frac{1}{2}(f(12)+f(6))(f(12)-f(6))$
$=\frac{1}{2}(16+4)\times 12=120$

[㉮에 대한 별해]
$g(-x)=\int_0^{-x} f(t)f(-t)\,dt=\int_0^x -f(-s)f(s)\,ds=-g(x)$로
유도할 수도 있다.

22) [정답] 24 (출제자 : 19 강종우)
[출제의도] 간단한 중복조합과 조합의 계산을 할 수 있는가?

[해설]
${}_4H_3+{}_4C_3={}_{4+3-1}C_3+{}_4C_3={}_6C_3+{}_4C_3=20+4=24$

23) [정답] 7 (출제자 : 19 황주영)
[출제의도] 급수의 수렴 조건을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}3^n a_n$이 수렴하므로, $\lim_{n\to INF}3^n a_n=0$이다.
따라서
$\lim_{n\to INF}\frac{8\times a_n+7\times 3^{-n}}{2\times a_n+3^{-n}}=\lim_{n\to INF}\frac{8\times 3^n\times a_n+7}{2\times 3^n\times a_n+1}=7$이다.

24) [정답] 2 (출제자 : 19 장지원)
[출제의도] 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]
$\tan x$와 $\sec x$의 값이 정의되기 위해서는 $\cos x\ne 0$이어야 하므로,
주어진 식의 양변에 $\cos x$를 곱할 수 있다.

$2\sin^2 x-2+\cos x=0$에서 $\sin^2 x=1-\cos^2 x$를 이용하여

식을 정리하면 $2\cos^2 x - \cos x = \cos x(2\cos x - 1) = 0$ 이다.

이때 $\cos x \neq 0$ 이므로,
주어진 범위 $0 \le x \le 2\pi$ 에서 $2\cos x - 1 = 0$ 을 만족시키는
x 의 값은 $\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5\pi}{3}$ 이다.
따라서 방정식 $2\sin^2 x - 2 + \cos x = 0$ 의 모든 실근의 합은 2π 이므로 $a = 2$ 이다.

25) [정답] 9 (출제자 : 19 박석준)
[출제의도] 주어진 조건을 만족하는 확률을 조건부 확률을 통해 올바르게 구할 수 있는가?

[해설]
두 개의 주사위를 동시에 던져 나온 두 눈의 수의 차를 k 라 하자.
가능한 k 의 값의 범위는 0 부터 5 이고, k 가 3 이상일 때의 확률을 물어보았으므로 $3 \le k \le 5$ 에서의 확률을 구하도록 하자.

$k = 3$ 일 때
가능한 주사위의 눈의 순서쌍은
$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 2)$ 총 6 가지다.
따라서 $k = 3$ 일 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ 이다.

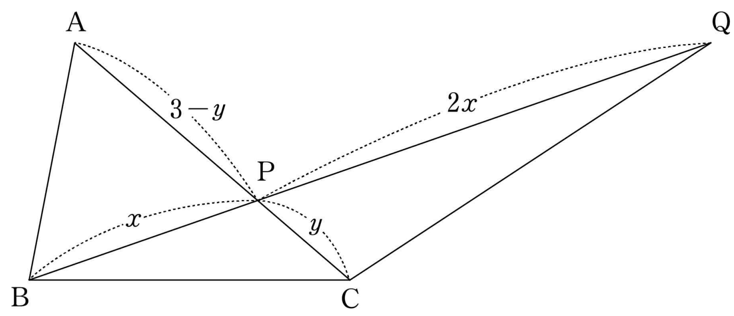
$k = 4$ 일 때
가능한 주사위의 눈의 순서쌍은 $(1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)$
총 4 가지이다. 따라서 $k = 4$ 일 확률은 $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ 이다.

$k = 5$ 일 때
가능한 주사위의 눈의 순서쌍은 $(1, 6), (6, 1)$ 총 2 가지이다.
따라서 $k = 5$ 일 확률은 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ 이다.

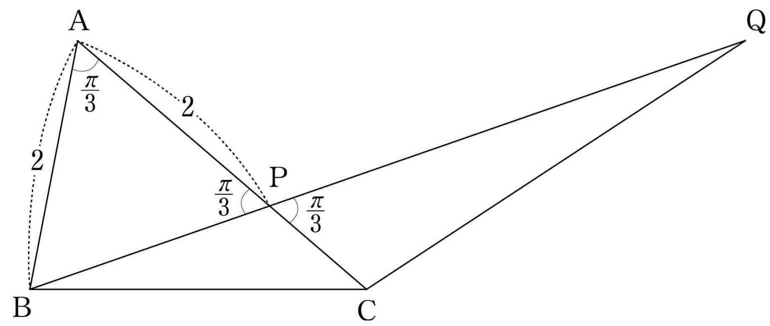
k 개의 동전을 동시에 던져서 나온 앞면과 뒷면의 개수가 같기 위해서는 $k = 2t$ (단, t 는 자연수)이어야 한다. 따라서 가능한 k 의 값은 4 뿐이다.
4 개의 동전을 동시에 던졌을 때 조건을 만족시키기 위해서는
앞면과 뒷면이 모두 2 번이 나와야 하고,
이때의 확률은 ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ 이다.
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{9} \times \frac{3}{8}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}} = \frac{1}{8}$ 이므로 답은 9 이다.

26) [정답] 25 (출제자 : 20 정원철)
[출제의도] 코사인법칙과 사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]
코사인법칙에 의해
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\frac{\pi}{3}$$
$$= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2}$$
$= 4 + 9 - 6 = 7$ 이므로 $\overline{BC} = \sqrt{7}$ 이다.



$\overline{BP} = x$, $\overline{PQ} = 2x$ 라 하고
$\overline{PC} = y$, $\angle APB = \angle QPC = \alpha$ 라 하면
삼각형 ABP 의 넓이와 삼각형 CPQ 의 넓이가 같아서
$\frac{1}{2} \times x \times (3 - y) \times \sin\alpha = \frac{1}{2} \times 2x \times y \times \sin\alpha$ 이므로 $y = 1$ 이다.



$\overline{AP} = 3 - y = 3 - 1 = 2 = \overline{AB}$ 이고 $\angle APB = \angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 이므로
삼각형 ABP 는 정삼각형이다.
따라서 $\angle APB$ 와 $\angle BAC$ 는 맞꼭지각이다.

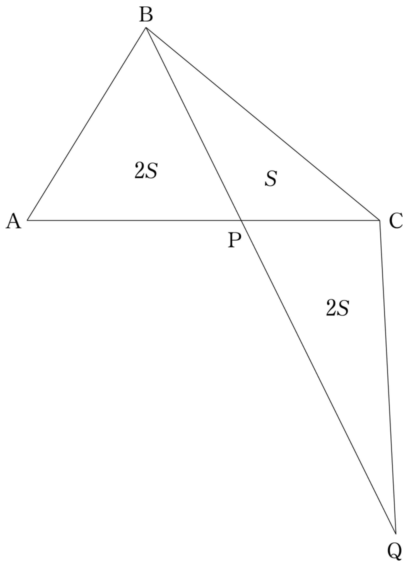
따라서 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{PQ} = 2\overline{BP} = 4$ 이므로 코사인법칙에 의해
$$\overline{CQ}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \times \overline{CP} \times \overline{PQ} \times \cos\alpha$$
$$= 1 + 16 - 2 \times 1 \times 4 \times \frac{1}{2}$$
$= 13$ 이므로 $\overline{CQ} = \sqrt{13}$ 이다.

사인법칙에 의해 $\dfrac{4}{\sin(\angle PCQ)} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ 이므로

$\sin^2(\angle PCQ) = \left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2 = \dfrac{12}{13}$ 이다.

따라서 $p = 13$, $q = 12$ 이므로 $p + q = 25$ 이다.

[별해]



삼각형 BPC 의 넓이를 S 라 하면 $\overline{BP}:\overline{PQ}=1:2$ 이므로
삼각형 CPQ 의 넓이는 $2S$ 이다.
또한, 두 삼각형 CPQ , ABP 의 넓이가 같으므로
삼각형 ABP 의 넓이도 $2S$ 이다.

이때, 두 삼각형 ABP , BPC 의 넓이의 비가 $2:1$ 이므로
$\overline{AP}:\overline{PC}=2:1$ 이다. 따라서 $\overline{AP}=2$ 이므로 삼각형 APB 는
정삼각형이고 $S=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

$\angle CPQ=\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$ 이고
$\overline{PQ}=2\overline{BP}=4$, $\overline{PC}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=1$ 이므로
$\overline{CQ}^2=\overline{PC}^2+\overline{PQ}^2-2\overline{PC}\times\overline{PQ}\times\cos(\angle CPQ)$
$=4^2+1^2-2\times4\times1\times\dfrac{1}{2}=13$ 이다.
따라서 $\overline{CQ}=\sqrt{13}$ 이다.

삼각형 CPQ 의 넓이는
$2S=\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{CQ}\times\sin(\angle PCQ)$
$=\dfrac{1}{2}\times1\times\sqrt{13}\times\sin(\angle PCQ)$ 이므로
$\sin^2(\angle PCQ)=\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\right)^2=\dfrac{12}{13}$ 이다.

따라서 $p=13$, $q=12$ 이므로 $p+q=25$ 이다.

27) [정답] 20 (출제자 : 19 황주영)

[출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

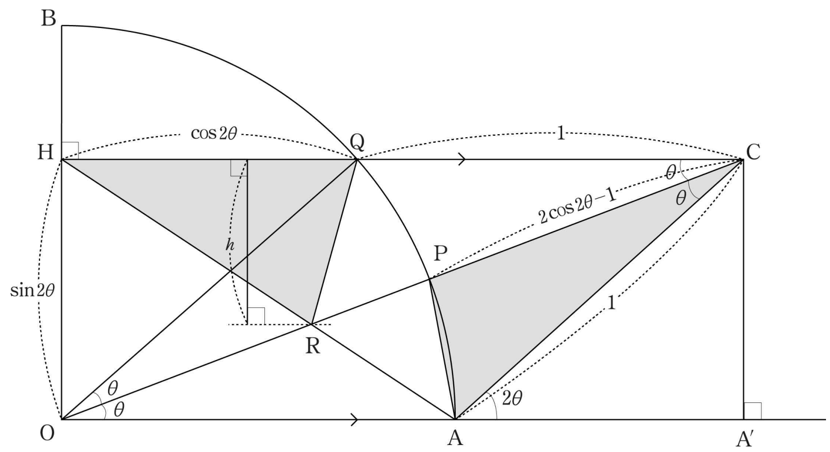
(가) 조건에서 양변에 $x=1$ 을 대입하면 $f(1)=0$ 이고, $x>0$ 에서
$\displaystyle\int_1^x g(t)\,dt=\frac{f(x)}{x}$ 이다.
따라서 $g(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'$ 이고 $\dfrac{d\ln(x^2+1)}{dx}=\dfrac{2x}{x^2+1}$ 이므로
$\displaystyle\int_1^2 g(x)\ln(x^2+1)\,dx$ 를 부분적분하면

$$\int_1^2 g(x)\ln(x^2+1)\,dx=\left[\frac{\ln(1+x^2)f(x)}{x}\right]_1^2-2\int_1^2\frac{f(x)}{1+x^2}\,dx=10\ln5$$
이므로, $f(2)=40$ 이다.
(가) 조건에 의해, $f(2)=2\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx$ 이므로,
$\displaystyle\int_1^2 g(x)\,dx=20$ 이다.

28) [정답] 80 (출제자 : 19 정지혁)

[출제의도] 도형의 넓이를 삼각함수를 이용하여 나타내고
극한값을 구할 수 있는가?

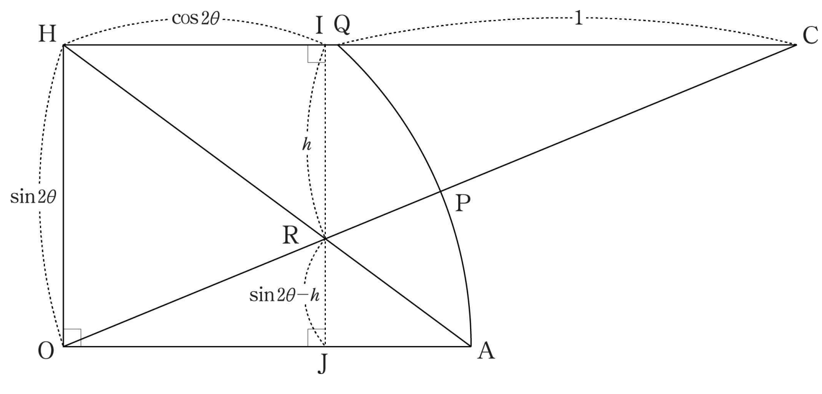
[해설]



두 직선 OA , QC 는 각각 직선 OB 에 수직이므로 서로 평행하다.
따라서 엇각에 의해 $\angle AOC=\angle OCQ=\theta$ 이다.
또, $\overline{OQ}=\overline{OA}=\overline{AC}=1$ 이다.

삼각형 AOC 는 $\overline{OA}=\overline{AC}=1$ 인 이등변삼각형이다.
따라서 $\angle ACO=\theta$ 이다.
점 C 에서 직선 OA 에 내린 수선의 발을 A′ 라 하면 $\angle A'AC=2\theta$ 이다.
이때 두 삼각형 AA′C , QHO 는 $\overline{OH}=\overline{CA'}$, $\overline{OQ}=\overline{CA}$ 이므로,
빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 같은 직각삼각형이다.
따라서 RHS 합동이다.
$\angle HQO=2\theta$ 이므로 엇각에 의해 $\angle QOA=2\theta$ 이고,
$\angle COQ=\theta$ 이다.
이때, $\angle QOC=\angle QCO=\theta$ 이므로 삼각형 QOC 는 이등변삼각형이다.
따라서 $\overline{QC}=1$ 이다.

직각삼각형 OQH 에서 $\angle OQH=2\theta$ 이므로 $\overline{QH}=\cos2\theta$ 이다.
삼각형 HQR 의 높이를 구하면 $f(\theta)$ 를 구할 수 있다.
두 삼각형 OAR , CHR 가 서로 닮음임을 이용하자.



점 R 에서 선분 CH 에 내린 수선의 발을 I ,

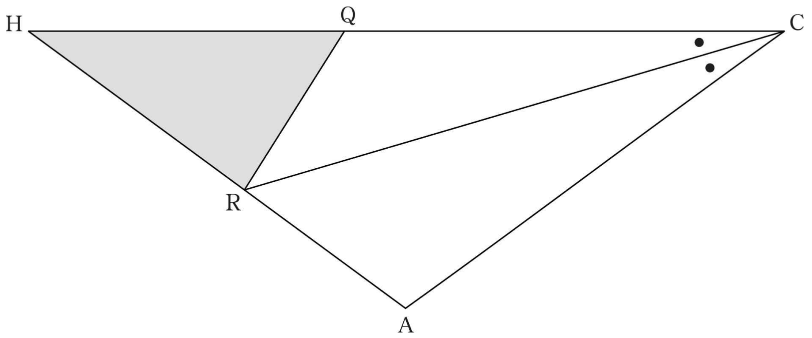
선분 OA 에 내린 수선의 발을 J 라 하자.
$\overline{\mathrm{IJ}} = \overline{\mathrm{OH}} = \sin 2\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{IR}} = \mathrm{h}$ 라 하면 $\overline{\mathrm{RJ}} = \sin 2\theta - h$ 이다.
두 삼각형 OAR , CHR 에서
$\overline{\mathrm{HC}} : \overline{\mathrm{IR}} = \overline{\mathrm{OA}} : \overline{\mathrm{RJ}} = \cos 2\theta + 1 : h = 1 : \sin 2\theta - h$ 이므로
$h = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{\cos 2\theta + 2} \times \sin 2\theta$ 이다.
따라서 $f(\theta) = \dfrac{\sin 2\theta}{2} \times \dfrac{\cos 2\theta + 1}{\cos 2\theta + 2} \times \cos 2\theta$ 이다.

한편, $\overline{\mathrm{OC}} = 2\cos\theta$, $\overline{\mathrm{OP}} = 1$ 이므로 $\overline{\mathrm{PC}} = 2\cos\theta - 1$ 이다.
$\overline{\mathrm{AC}} = 1$ 에서 $g(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin\theta(2\cos\theta - 1)$ 이다.

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\cos 2\theta + 1}{\cos 2\theta + 2} \times \lim_{\theta \to 0+} \frac{\cos 2\theta}{2\cos\theta - 1} = \frac{4}{3}$$

$a = \dfrac{4}{3}$ 이므로 $60a = 80$ 이다.

[별해]
… 높이가 같은 삼각형에서 밑변의 길이의 비와 각의 이등분선의 성질을 이용하여도 $f(\theta)$ 를 구할 수 있다.



$$f(\theta) = (\text{삼각형AQH의 넓이}) \times \frac{\overline{\mathrm{HR}}}{\overline{\mathrm{AH}}} \times \frac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{CH}}}$$

먼저, $(\text{삼각형AQH의 넓이}) = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \times 1 \times (1 + \cos 2\theta)$ 이다.
그런데, 직선 CR 은 ∠ACH 의 이등분선이므로
$\dfrac{\overline{\mathrm{HR}}}{\overline{\mathrm{AH}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{CH}}}{\overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{CH}}} = \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2 + \cos 2\theta}$ 이다.
또, $\dfrac{\overline{\mathrm{QH}}}{\overline{\mathrm{CH}}} = \dfrac{\cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}$ 이다.
따라서 $f(\theta) = \dfrac{1}{2}\sin 2\theta \times \cos 2\theta \times \dfrac{1 + \cos 2\theta}{2 + \cos 2\theta}$ 이다.

29) [정답] 364 (출제자 : 19 박석준)

[출제의도] 주어진 상황을 올바르게 이해하고 중복조합을 활용하여 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

[해설]
공이 들어가지 않은 빈 칸의 개수를 k 라 할 때,
가능한 k 의 값에 따라 경우의 수를 구해보도록 하자.
총 7 개의 공을 4 칸에 모두 넣어야 하고,
각 칸에는 최대 3 개의 공이 들어갈 수 있으므로,
가능한 k 의 값은 0 또는 1 이다.

ⅰ) $k = 0$ 일 때

파란 공이 들어갈 수 있는 개수의 순서쌍을 기준으로
나머지 경우를 구하도록 하자.
파란 공이 들어갈 수 있는 경우에서의 가능한 개수의 순서쌍은
$(1, 1, 1)$, $(2, 1)$, (3) 이다.

ⅰ-1) 파란 공이 $(1, 1, 1)$ 개로 들어갈 때 파란 공이 들어갈 3 칸을
정해주는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$ 이다.
파란 공이 들어가지 않는 칸에 넣는 빨간 공의 개수를 x_1
나머지 3 칸에 넣는 빨간 공의 개수를 각각 x_2, x_3, x_4 라 하면,
경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ $(x_1 > 0,\ x_2, x_3, x_4 \le 2)$을
만족하는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 경우의 수와 같다.
$x_1 = 1$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3 - 3 = 7$,
$x_1 = 2$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$,
$x_1 = 3$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$ 이므로
이를 모두 더해준 경우의 수는 16 이다.

총 경우의 수는 $4 \times 16 = 64$ 이다.

ⅰ-2) 파란 공이 $(2, 1)$ 개로 들어갈 때 순서를 고려하여
파란 공이 들어갈 2 칸을 정해주는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2 = 12$ 이다.
파란 공이 2 개 들어간 칸에 넣을 빨간 공의 개수를 x_1 ,
파란 공이 1 개 들어간 칸에 넣을 빨간 공의 개수를 x_2 ,
나머지 두 칸에 들어갈 빨간 공의 개수를 각각 x_3 , x_4 라 하면
경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4$ $(x_1 \le 1,\ x_2 \le 2,\ x_3, x_4 > 0)$을
만족하는 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 경우의 수와 같다.
$x_1 = 0$, $x_2 = 0$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2 = 3$,
$x_1 = 0$, $x_2 = 1$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_1 = 2$,
$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_0 = 1$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 0$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_1 = 2$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 1$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_0 = 1$,
$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ 일 때는 x_3 . x_4 가 모두 양수가 될 수 없으므로
경우의 수는 0 이고, 이를 모두 더해준 경우의 수는 9 이다.

총 경우의 수는 $12 \times 9 = 108$ 이다.

ⅰ-3) 파란 공이 (3) 개로 들어갈 때 파란 공이 들어갈 1 칸을
정해주는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 이다.
나머지 3 칸에 넣는 빨간 공의 개수를 각각 x_1, x_2 , x_3 이라 하면,
경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $(x_1, x_2, x_3 > 0)$을 만족하는
순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 경우의 수와 같다.
이때의 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$ 이다.
총 경우의 수는 $3 \times 4 = 12$ 이다.

따라서 $k = 0$ 일 때의 총 경우의 수는 $64 + 108 + 12 = 184$ 이다.

ⅱ) $k = 1$ 일 때

하나의 빈 칸을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 이다.

ⅱ-1) 파란 공이 $(1, 1, 1)$ 개로 들어갈 때 파란 공이 들어갈 3 칸을
정해주는 경우의 수는 1 이다.
파란 공이 들어가는 3 칸에 넣는 빨간 공의 개수를
각각 x_1, x_2 , x_3 이라 하면,
경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ $(x_1, x_2, x_3 \le 2)$을 만족하는
순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 경우의 수와 같다.

$x_1 = 0$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_4 - 4 = 1$,
$x_1 = 1$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3 - 2 = 2$,
$x_1 = 2$ 일 때 해당 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2 = 3$ 이므로
이를 모두 더해준 경우의 수는 6 이다.

총 경우의 수는 $4 \times 6 = 24$ 이다.

ii-2) 파란 공이 (2, 1) 개로 들어갈 때 순서를 고려하여
파란 공이 들어갈 2 칸을 정해주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2 = 6$ 이다.
파란 공이 2 개 들어간 칸에 넣을 빨간 공의 개수를 x_1,
파란 공이 1 개 들어간 칸에 넣을 빨간 공의 개수를 x_2,
나머지 한 칸에 들어갈 빨간 공의 개수를 x_3 이라 한다면
경우의 수는 $x_1 + x_2 + x_3 = 4\,(x_1 \leq 1,\ x_2 \leq 2,\ x_3 > 0\,)$을 만족하는
순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 경우의 수와 같다.
해당 경우의 수를 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 으로 나타내 본다면
$(0, 1, 3)$, $(0, 2, 2)$, $(1, 0, 3)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ 이므로
이를 모두 더해준 경우의 수는 5 이다.

총 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$ 이다.

ii-3) 파란 공이 (3) 개로 들어갈 때 파란 공이 들어갈 1 칸을
정해주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$ 이다.
나머지 2 칸에 넣는 빨간 공의 개수를 각각 x_1, x_2 라 하면,
경우의 수는 $x_1 + x_2 = 4\,(x_1, x_2 > 0\,)$을 만족하는
순서쌍 (x_1, x_2) 의 경우의 수와 같다.
이를 계산해주면 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2 = 3$ 이다.

총 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$ 이다.

따라서 $k = 1$ 일 때의 경우의 수를 구해주면 $4 \times (6 + 30 + 9) = 180$ 이다.

그러므로 구하는 총 경우의 수는 $184 + 180 = 364$ 이다.

[별해]

빨간 공이 각 칸에 순서대로 a, b, c, d 개 들어가고,
파란 공은 각 칸에 순서대로 a', b', c', d' 개가 들어간다고 하자.
$(a, b, c, d, a', b', c', d' \geq 0\,)$
$a + b + c + d = 4$, $a' + b' + c' + d' = 3$ 을 만족해야 하므로
공이 모두 사물함에 들어가는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_4 \times {}_4\mathrm{H}_3 = 700$ 이다.

전체 경우의 수에서 해당 사건에 모순되는 경우를 빼주도록 하자.
각 칸에는 4 개 이상의 공이 들어갈 수 없으므로, 4 개 이상의 공이
들어가는 경우의 수를 구해주어 빼주면 된다.
공은 총 7 개이므로, 4 개 이상의 공이 들어가는 칸은 0 개 또는 1 개다.
여사건을 이용할 것이므로, 4 개 이상의 공이 1 칸에 들어가는
경우의 수를 구해야 한다.

우선, 4 개 이상의 공이 들어갈 한 칸을 구해주는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1 = 4$ 이다.
이 칸에 들어가는 빨간 공의 개수를 a, 파란 공의 개수를 a' 라 하자.

i) $a + a' = 4$ 일 때
$(b + b') + (c + c') + (d + d') = 3$ 이므로 a 와 a' 의 값을 기준으로
가능한 값을 구해주면 된다.

i-1) $a = 4$, $a' = 0$ 일 때
$b' + c' + d' = 3$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3 = 10$ 이다.

i-2) $a = 3$, $a' = 1$ 일 때
$b + c + d = 1$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$,
$b' + c' + d' = 2$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$ 이다.

i-3) $a = 2$, $a' = 2$ 일 때
$b + c + d = 2$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$,
$b' + c' + d' = 1$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$ 이다.

i-4) $a = 1$, $a' = 3$ 일 때
$b + c + d = 3$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3 = 10$ 이다.

따라서 총 경우의 수는 $10 + 18 + 18 + 10 = 56$ 이다.

ii) $a + a' = 5$ 일 때

ii-1) $a = 4$, $a' = 1$ 일 때
$b' + c' + d' = 2$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$ 이다.

ii-2) $a = 3$, $a' = 2$ 일 때
$b + c + d = 1$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$,
$b' + c' + d' = 1$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$ 이다.

ii-3) $a = 2$, $a' = 3$ 일 때
$b + c + d = 2$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2 = 6$ 이다.

따라서 총 경우의 수는 $6 + 9 + 6 = 21$ 이다.

iii) $a + a' = 6$ 일 때

iii-1) $a = 4$, $a' = 2$ 일 때
$b' + c' + d' = 1$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$ 이다.

iii-2) $a = 3$, $a' = 3$ 일 때
$b + c + d = 1$ 이므로 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = 3$ 이다.

따라서 총 경우의 수는 $3 + 3 = 6$ 이다.

iv) $a + a' = 7$ 일 때

이 경우에는 한 칸에 모든 공이 들어가므로 총 경우의 수는 1 이다.

이를 모두 더해준 경우의 수는 84 이다.
즉, 한 칸에 4 개 이상의 공이 들어가는 경우의 수는 $4 \times 84 = 336$ 이다.

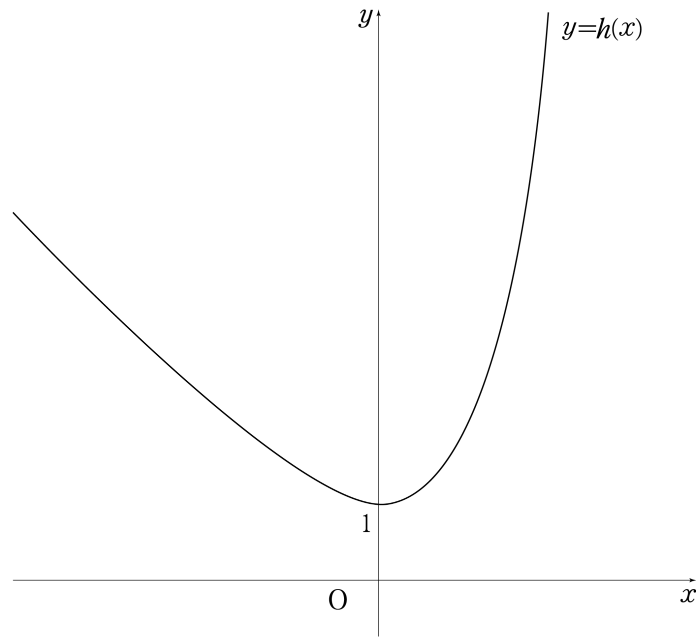
따라서 답은 $700 - 4 \times 84 = 364$ 이다.

30) [정답] 155 (출제자 : 19 장지원)
[출제의도] 합성함수가 극값을 가지는 조건을 해석할 수 있는가?

[해설]

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=0$, $f'(1)=0$이므로
상수 a에 대하여 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$라 할 수 있다.

함수 $h(x)=e^x-x$에 대하여
방정식 $h'(x)=e^x-1=0$는 $x=0$만을 실근으로 가지고
$\lim_{x\to\infty}h(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$ 이므로
함수 $h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(x)$에 대하여 $g(x)=h(f(x))$이고,
함수 $i(x)$를 $i(x)=f(g(x))$라 하자.
위에서 얻은 함수 $h(x)$의 그래프를 이용하여
주어진 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$를 a의 범위에 따라 조사하자.

ⅰ) $a=1$인 경우
$f(x)=(x-1)^3$이고 $f(0)=-1$이다.
위에서 얻은 함수 $h(x)$의 그래프를 이용하여
함수 $g(x)=h(f(x))$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$h(f(x))$	↘	1	↗

이때 함수 $i(x)=f(g(x))$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	1	↗
$f(g(x))$	↘	0	↗

즉 함수 $i(x)$는 $x=1$에서만 극솟값을 갖는다.
이는 함수 $i(x)$가 $x=-1$에서만 극댓값을 갖는다는 조건에 모순이다.

ⅱ) $a>1$인 경우
$f(x)=(x-1)^2(x-a)$이고 상수 b $(b<a)$에 대하여
$f'(x)=3(x-1)(x-b)$라 하자. (단, $b\neq 1$이다.)

방정식 $g'(x)=f'(x)h'(f(x))=0$을 만족시키는 x의 값은
방정식 $f'(x)=0$ 또는 $e^{f(x)}-1=0$ (즉 $f(x)=0$)을 만족시킨다.
따라서 $x=1$, $x=b$, $x=a$일 때를 중심으로
두 함수 $f'(x)$와 $h'(f(x))$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	b	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0		$+$	
$f(x)$	$-$	0	$-$	$f(b)$	$+$	0	$+$
$h'(f(x))$	$-$	0		$-$		0	$+$

따라서 $g'(x)=f(x)h'(f(x))$와 함수 $g(x)$의 최솟값이 1임을
이용해 함수 $g(x)=h(f(x))$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	b	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	1	↗	$g(b)$	↘	1	↗

함수 $i(x)=f(g(x))$에 대하여 $i'(x)=g'(x)f'(g(x))$이므로
함수 $i(x)$가 극값을 갖도록 하는 x의 값은
방정식 $g'(x)=0$ 또는 $f'(g(x))=0$
(즉, $g(x)=1$ 또는 $g(x)=b$)를 만족시킨다.

방정식 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 1 또는 b 또는 a이고
방정식 $g(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 1 또는 a이다.
$x=1$, $x=b$, $x=a$일 때 함수 $i(x)$가 극값을 갖는지 조사하자.

$x\to1+$ 일 때 $g(x)\to1+$ 이므로 $f(x)\to0-$ 이고,
$x\to1-$ 일 때 $g(x)\to1+$ 이므로 $f(x)\to0-$ 이다.
따라서 함수 $i(x)$는 $x=1$에서 극댓값 0을 가진다.

$x\to a+$ 일 때 $g(x)\to1+$ 이므로 $f(x)\to0-$ 이고,
$x\to a-$ 일 때 $g(x)\to1+$ 이므로 $f(x)\to0-$ 이다.
따라서 함수 $i(x)$는 $x=a$에서 극댓값 0을 가진다.
이는 함수 $i(x)$가 $x=f(0)$에서만 극댓값을 갖는다는 조건에 모순이다.

ⅲ) $a<1$인 경우
$f(x)=(x-1)^2(x-a)$이고 상수 c $(c>a)$에 대하여
$f'(x)=3(x-1)(x-c)$라 하자. (단, $c\neq1$이다.)

위의 ⅰ)와 같은 방식으로
함수 $g(x)=h(f(x))$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	c	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	1	↗	$g(c)$	↘	1	↗

함수 $i(x)=f(g(x))$에 대하여 $i'(x)=g'(x)f'(g(x))$이므로
함수 $i(x)$가 극값을 갖도록 하는 x의 값은
방정식 $g'(x)=0$ 또는 $g(x)=1$ 또는 $g(x)=c$를 만족시킨다.

방정식 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 a 또는 c 또는 1이고
방정식 $g(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 a 또는 1이다.
위의 ⅰ)와 같은 방식으로 함수 $i(x)$는 $x=a$와 $x=1$에서 극솟값을,
$x=c$에서 극댓값을 가진다는 것을 알 수 있다.

이때 함수 $g(x)$가 $x=a$, $x=1$에서 최솟값 1을 가지고 $c<1$이므로
곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=c$가 만나는 점은 존재하지 않는다.
따라서 방정식 $g(x)=c$의 실근은 존재하지 않으므로
함수 $i(x)$는 $x=c$에서만 극댓값을 가진다.

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$에서 $f(0)=-a$이므로 $c=-a$이다.
$f'(x)=2(x-1)(x-a)+(x-1)^2$
$\quad=(x-1)(3x-2a-1)$이므로 $c=\dfrac{2a+1}{3}$ 이다.

위의 $c = -a$ 와 $c = \frac{2a+1}{3}$ 에서

$a = -\frac{1}{5}$, $c = \frac{1}{5}$ 이다.

따라서 $f(x) = (x-1)^2\left(x+\frac{1}{5}\right)$ 이므로

$f(6) = (6-1)^2\left(6+\frac{1}{5}\right) = 25\left(6+\frac{1}{5}\right) = 150+5 = 155$ 이다.