

[박하나/한성은 모의고사]

| 대학수학능력시험 수학(가형) 연습 (2/4) |

| 한성은

이투스앤써, 일산 종로, 일산 클라비스, 5A ACADEMY

잡혀 있는 모의고사 제작 일정이 살짝 걱정됐는데,
6월을 보고나니 부담이 없어졌어요. 퀄리티를 떨어트리면 되겠더라고요!

hansungeun.com

- 저자소개, 학습자료, 교재판매

| CCL

- 허락 없이 문제를 쓰실 수 있지만, 출처를 반드시 표시해 주세요.
- 자신이 저작자라는 주장을 하지 말아 주세요.

수학 영역(가형)

5지선다형

1. $2 \times 4^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

2. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 4$, $a_3 = 6$ 일 때, a_5 의 값은? [2점]

- ① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 1}{3^{n+1} + 1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

4. 세 문자 a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 64 ⑤ 81

2

수학 영역(가형)

5. 반지름의 길이가 2이고 호의 길이가 4인 부채꼴의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

6. 다항식 $(ax^2+2x)^5$ 의 전개식에서 x^8 의 계수가 5일 때, a 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 4

7. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t>0)$ 에서의 위치 (x, y) 가 $x = \cos t + t \sin t$, $y = \sin t - t \cos t$ 이다.

$t=2$ 일 때, 점 P의 가속도의 크기는? [3점]

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$
④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

8. $\int_1^e x \ln x dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{e^2+1}{4}$ ② $\frac{e^2+2}{4}$ ③ $\frac{e^2+3}{4}$
 ④ $\frac{e^2+4}{4}$ ⑤ $\frac{e^2+5}{4}$

9. 확률변수 X 는 정규분포 $N(0, 9)$, 확률변수 Y 는 정규분포 $N(2, 4)$ 를 따른다. $P(X \geq k) = P(Y \geq k)$ 를 만족시키는 실수 k 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

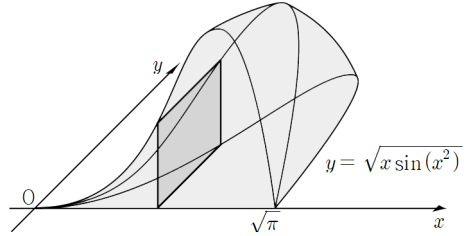
10. 곡선 $y = \log_4 x$ 위의 점 P 에 대하여, 점 P 를 지나고 x 축과 수직인 직선이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 Q , 점 Q 를 지나고 y 축과 수직인 직선이 곡선 $y = \log_4 x$ 와 만나는 점을 R 이라 하자. 두 점 O, P 를 꼭짓점으로 하고 각 변이 x 축 또는 y 축에 평행한 직사각형의 넓이가 4이고 두 점 P, R 을 꼭짓점으로 하고 각 변이 x 축 또는 y 축에 평행한 직사각형의 넓이가 12일 때, 점 P 의 x 좌표는? [3점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$
 ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

11. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. ab 가 6의 배수일 때, a 가 3의 배수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{8}{15}$
 ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{2}{5}$

12. 그림과 같이 곡선 $y = \sqrt{x \sin(x^2)}$ ($0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$)과 x 축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형인 입체도형의 부피는? [3점]



- ① $\frac{1}{2\pi}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
 ④ 2 ⑤ 2π

13. $1 \leq x \leq e$ 인 모든 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 는

$$f(ex) = f(x) + e$$

를 만족시킨다. $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$ 일 때, $\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 의

값은? [3점]

- ① $e-2$ ② $e-1$ ③ e
 ④ $e+1$ ⑤ $e+2$

14. 흑발 1명, 백발 1명, 금발 1명, 대머리 3명의 학생이 있다. 이 6명의 학생을 일렬로 임의로 나열할 때, 어느 2명의 대머리도 서로 이웃하지 않을 확률은? (단, 대머리끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{7}{30}$
 ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{3}{10}$

6

수학 영역(가형)

15. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \dots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때

$$(\text{좌변}) = 1 - \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{1+1}$$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때 (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}$$

이다. $n=m+1$ 일 때

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} + \frac{(-1)^{2m+2}}{2m+1} + \frac{(-1)^{2m+3}}{2m+2} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \boxed{(\text{가})} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} \\ &= \sum_{k=2}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2} \\ &= \sum_{k=2}^{m+2} \frac{1}{m+k} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{\boxed{(\text{나})} + k} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때에도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$ 이라

할 때, $\frac{g(4)}{f(4)}$ 의 값은? [4점]

- ① 25 ② 26 ③ 27
 ④ 28 ⑤ 29

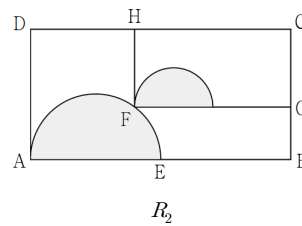
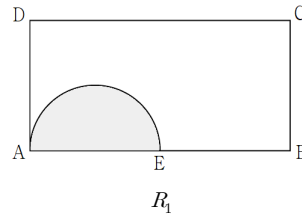
16. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=2$ 인 직사각형 ABCD가 있다.

선분 AB의 중점을 E라 하고, 직사각형 ABCD의 내부에 선분 AE를 지름으로 하는 반원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

선분 BC 위의 점 G, 선분 CD 위의 점 H, 호 AE 위의 점 F를 꼭짓점으로 하고 $\overline{FG}:\overline{GC}=2:1$ 인 직사각형 FGCH를 그리고 직사각형 FGCH에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 반원을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?

[4점]



- ① $\frac{21}{32}\pi$ ② $\frac{23}{32}\pi$ ③ $\frac{25}{32}\pi$
 ④ $\frac{27}{32}\pi$ ⑤ $\frac{29}{32}\pi$

17. 네 양수 a, b, c, d 에 대하여 함수

$$f(x) = |a \sin\{b(x-c)\} + d|$$

가 극댓값을 갖는 모든 x 값 중 양수인 것을
작은 수부터 크기순으로 두 개를 나열한 것이

$$\pi, 5\pi$$

이다. $f(\pi) = 2, f(5\pi) = 6$ 일 때, $abcd$ 의 값은?
(단, $0 \leq bc < 2\pi$ 이다.) [4점]

- ① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 6π

18. 두 곡선 $y = 2^x, y = \log_3 x$ 와 원 $x^2 + y^2 = r^2 (r > 1)$ 가
제1사분면에서 만나는 점을 각각 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 라
할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

—<보 기>—

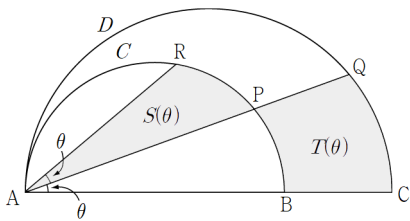
ㄱ. $x_2 > y_1$

ㄴ. $x_1 x_2 > y_1 y_2$

ㄷ. $x_1 + y_1 > x_2 + y_2$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 그림과 같이 $\overline{AC}=2\sqrt{2}$ 인 선분 위의 점 B는 $\overline{AB}=2$ 를 만족시키고, 선분 AB를 지름으로 하는 반원 C와 선분 AC를 지름으로 하는 반원 D가 있다. 반원 C 위의 두 점 P, R은 $\angle PAB = \angle RAP$ 이고, 직선 AP와 반원 D가 만나는 점 중 A가 아닌 것을 Q라 하자. $\angle PAB = \theta$ 라 할 때, 두 선분 AP, AR과 호 PR로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$, 두 선분 BC, PQ와 두 호 BP, CQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta) - T(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? [4점]



- ① -8 ② -4 ③ -2
- ④ 4 ⑤ 8

20. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 a , 남은 9개의 공이 들어 있는 주머니에서 한 개의 공을 임의로 꺼내어 공에 적힌 수를 b 라 하자. 두 수 $\log_2 a, \log_2 b$ 의 소수부분이 서로 같을 확률은? [4점]

- ① $\frac{8}{45}$ ② $\frac{7}{45}$ ③ $\frac{2}{15}$
- ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{4}{45}$

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x < 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 는 함수 $y = \frac{\ln x}{x}$ ($0 < x < 1$)의 역함수이다.
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) + f(-x) = 2$ 이다.

$\int_0^e xf'(x)dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{4}e$ ② $\frac{1}{2}e$ ③ $\frac{1}{4}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

단답형

22. $\sum_{k=1}^5 k^2 - \sum_{k=1}^5 (k-1)^2$ 의 값을 구하여라. [3점]

23. 반지름의 길이가 10인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\sin(\angle BAC) = \frac{3}{5}$ 일 때, \overline{BC} 를 구하여라. [3점]

24. 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 = 4, \quad \sum_{n=3}^{\infty} a_n = 4$$

일 때, a_1 의 값을 구하여라. [3점]

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$

의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $20 \times g'(f(0))$ 의 값을 구하여라. [3점]

26. 어느 회사에서 생산하는 초콜릿 한 개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 9개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 신뢰도 95%로 추정된 모평균 m 에 대한 신뢰 구간이 $[64, 72]$ 이다. 이 회사에서 생산하는 초콜릿 36개를 다시 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여 신뢰도 95%로 추정된 신뢰구간이 $[63, a]$ 일 때, a 의 값을 구하여라. [4점]

27. 모든 항이 양수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하자. 모든 자연수 n 에 대하여

$$\frac{S_n}{(n+c)a_n} \quad (\text{단, } c \text{는 상수})$$

이 일정한 값을 가질 때, $c + \frac{a_8}{a_2}$ 의 값을 구하여라.

[4점]

28. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c 의 모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하여라. [4점]

(가) $|a+b+c-12|=12-(a+b+c)$

(나) $a+b+c$ 를 4로 나눈 나머지는 2이다.

29. 모든 자연수 n 에 대하여 수열 $\{a_n\}$ 과 $\{S_n\}$ 은

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k a_k = (-1)^n S_n, \quad \sum_{k=1}^n S_k = \sqrt{n+1}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^9 a_k$ 의 값이 $a + \sqrt{b}$ 일 때,
 $a+b$ 의 값은? (단, a 와 b 는 자연수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 에 대하여
 함수 $g(x) = f(x)e^{-x}$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $\frac{g(x)}{x} \leq 1$ 이다.
 (나) x 에 대한 방정식 $g(g(x)) = g(x)$ 의
 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

방정식 $g(g(x)) = g(x)$ 의 모든 근을 작은 수부터
 크기순으로 나열한 것이 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 라 할 때,

$a_3 > 0$ 이고 $a_3 a_4 = 6$ 이다. $\frac{f(6)}{e^3}$ 의 값을 구하여라.

(단, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} = 0$ 이다.) [4점]

[박하나/한성은 모의고사]
수능(가형) 연습(2/4) 정답표

문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답	문항	정답
01	④	02	③	03	①	04	⑤	05	④
06	②	07	⑤	08	①	09	③	10	④
11	②	12	③	13	④	14	②	15	①
16	③	17	⑤	18	⑤	19	②	20	①
21	④	22	25	23	12	24	8	25	10
26	67	27	5	28	100	29	13	30	24

COMMENT 13

$\int_1^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx = \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx + \int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 이다. $\int_e^{e^2} \frac{f(x)}{x} dx$ 에서 $x = et$ 로 치환적분.

COMMENT 14

대머리끼리 서로 구별하든 구별하지 않든 답은 변하지 않는다.

$\frac{3! \times 4P_3}{6!}$ 으로 풀어도 좋고, $\frac{3! \times 4C_3}{6!/3!}$ 으로 풀어도 좋다. 후자가 단서를 살린 풀이이다.

보통, 인간의 존엄성 존중 차원에서 사람은 항상 서로 구별한다. 대머리는 글썸.

COMMENT 15

$$f(m) = \frac{1}{m+1}, \quad g(m) = m+1$$

COMMENT 16

선분 AE의 중점을 O, 점 F에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하자.

$\overline{HF} = a$ 이면, $\overline{OM} = 3-2a$, $\overline{FM} = 1-a$ 이다. 삼각형 OMF에서 피타고라스를 치면 $a = \frac{6}{5}$ 이다.

답음비는 5:3이다. 첫째항은 $\frac{\pi}{2}$, 공비는 $\frac{9}{25}$ 인 등비급수.

COMMENT 17

큰 극댓값은 $a+d$ 이고 작은 극댓값은 $a-d$ 이다.

$5\pi - \pi$ 는 반주기이므로 $b = \frac{1}{4}$, 평행이동은 3π 만큼이다.

따라서 $f(x) = \left| 4\sin\left\{\frac{1}{4}(x-3\pi)\right\} + 2 \right|$ 이다.

COMMENT 18

지역 : 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 과 함수 $y = \log_2 x$ 의 교점은 (y_1, x_1) 이다.

니은 : 점 (y_1, x_1) 과 점 (x_2, y_2) 사이의 기울기 비교

디글 : 점 (x_1, y_1) 과 점 (x_2, y_2) 사이의 기울기는 -1 보다 작다.

COMMENT 19

$$S(\theta) - T(\theta) = (\cos 2\theta \sin 2\theta + 2\theta) - (2\cos \theta \sin \theta + 2\theta)$$

COMMENT 20

a 와 b 는 세 집합 $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{3, 6\}$, $\{5, 10\}$ 중 하나에 동시에 속해야 한다.

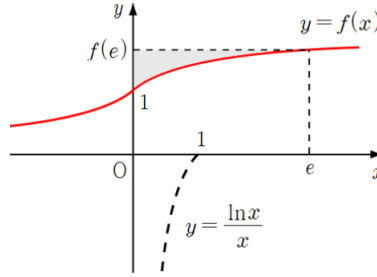
COMMENT 21

부분적분법으로 $\int_0^e x f'(x) = [x f(x)]_0^e - \int_0^e f(x) dx$ 이고,

이는 오른쪽 그림에서 색칠한 부분의 넓이다.

대칭시켜 추적해보면 구하는 값은 $-\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln x}{x} dx$ 이다.

※ $f(-e) = \frac{1}{e}$ 에서 $f(e) = 2 - \frac{1}{e}$ 이다.



COMMENT 27

$S_n = an^2 + bn$ 이라 하자. $a_n = 2an - a + b$ 이므로 $\frac{S_n}{(n+c)a_n} = \frac{an^2 + bn}{(n+c)(2an - a + b)}$ 이다.

이 값을 p 라 하면 $an^2 + bn = p(n+c)(2an - a + b)$ 이다. 양 변의 계수를 비교하면 $p = \frac{1}{2}$, $a = b$, $c = 1$ 이다.

($a+b=0$ 은 $a_1=0$ 이라 가능하지 않다.) $S_n = an^2 + an$ 이고 $a_n = 2an$ 이다.

COMMENT 28

$|a+b+c-12| = 12 - (a+b+c)$ 에서 $a+b+c \leq 12$ 이다.

$a+b+c=2$ 또는 $a+b+c=6$ 또는 $a+b+c=10$ 이다.

COMMENT 29

준 식을 더하고 빼고 췌려보면, $a_1 = S_1$, $a_2 = S_1 + S_2$, $a_3 = S_2 + S_3$, ..., $a_n = S_{n-1} + S_n$ 이다.

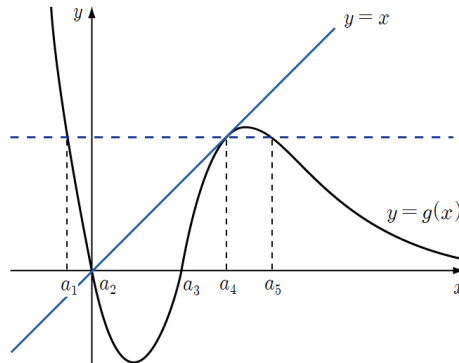
모두 더하면 $\sum_{k=1}^n a_k = 2 \sum_{k=1}^n S_k - S_n$ 이고, $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 이므로 $\sum_{k=1}^n a_k = 2\sqrt{n+1} - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 이다.

COMMENT 30

(가)에서 $x < 0$ 일 때 $f(x) \geq x$ 이고 $x > 0$ 일 때 $f(x) \leq x$ 이므로 $f(0) = 0$ 이다.

(나)에서 방정식 $g(x) = x$ 의 근은 두 개 이상이므로 $y = g(x)$ 는 $x \neq 0$ 일 때 직선 $y = x$ 와 만난다.

방정식 $g(g(x)) = g(x)$ 를 푸는 법을 선생님에게 배워서 개형을 잘 찍어보면 다음과 같다.



a_3 는 $g(x) = 0$ 의 근이고, a_4 는 곡선 $y = g(x)$ 와 직선 $y = x$ 가 접하는 점의 x 좌표이다.

$g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ 라 하자. $a_3 = -\frac{b}{a}$ 이고, a_4 를 t 라 하면

$$(at^2 + bt)e^{-t} = t, \quad (-at^2 + (2a-b)t + b)e^{-t} = 1, \quad -\frac{b}{a} \times t = 6$$

이다. 세 식을 연립하여 풀면 $a = e^3$, $b = -2e^3$, $t = 3$ 이다.