2021학년도 대학수학능력시험 수학 영역 대비

『녹색지대 모의고사』 N제

【출제 및 해설】 이재종 〈wowhd93〉

【이용 안내】

- 이 문서는 기출제된 녹색지대 모의고사 4회분까지의 문제를 편집한 것으로, 3점과 4점 문항의 대부분을 수록하였습니다.
  [수록 문항 수] (수학I) 37제 (수학II) 33제 (확률과 통계) 32제 (미적분) 31제
- 문항 중 [4점*]으로 표기된 문제는 녹색지대 모의고사의 (가)형 또는 (나)형에서 21번, 29번 또는 30번에 출제된 문제입니다.

- 이 문서에 대한 다른 문의 사항이 있는 경우 아래 연락처로 연락해주시면 안내해 드리도록 하겠습니다.
  (E-mail) wowhd93@naver.com
  (Kakao) wowhd93
- 제작자 블로그 주소: https://blog.naver.com/wowhd93

수학 영역(수학Ⅰ)

1. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 > 0$이고,

$$a_2 + a_3 = 2a_4, \quad (a_2)^2 - (a_3)^2 = \frac{1}{12}$$

일 때, a_5의 값은? [3점]

① $\frac{1}{96}$ ② $\frac{1}{48}$ ③ $\frac{1}{24}$ ④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

2. 부등식 $\log_3(2x-3) \le \log_{\frac{1}{3}}x + 3$을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

3. 예각삼각형 ABC에 대하여

$$\cos A = \frac{3}{5},\quad \sin B = \frac{12}{13},\quad \overline{\mathrm{AB}} = \frac{14}{5}$$

일 때, 선분 AC의 길이는? [3점]

① $\frac{12}{5}$ ② $\frac{13}{5}$ ③ $\frac{14}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{16}{5}$

4. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 3 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{a_n - n}{2} & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5 = 3$일 때, a_1의 값은? [3점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

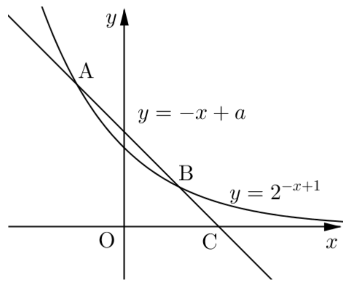
5. 실수 a와 3 이하의 자연수 b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos\left(bx+\frac{\pi}{3}\right)$$

가 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

6. 그림과 같이 양수 a에 대하여 직선 $y=-x+a$가 곡선 $y=2^{-x+1}$과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, x축과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=3:1$일 때, 2^a의 값은? [4점]



① $11\times 2^{\frac{2}{3}}$ ② $9\times 2^{\frac{1}{3}}$ ③ $7\times 2^{\frac{2}{3}}$
④ $5\times 2^{\frac{1}{3}}$ ⑤ $3\times 2^{\frac{2}{3}}$

7. 자연수 n에 대하여 $f(n)$을 $\log\dfrac{30}{n(n+1)}$의 $(n+1)$제곱근 중 실수인 것의 개수라고 하자. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} f(n)$의 값은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

8. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = a_2 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = n \;\cdots\cdots\; (*)$$

을 만족시킨다. 다음은 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 3의 배수가 되는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하는 과정이다.

(*)의 양변에 n 대신 $n+1$을 대입하면

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = n+1$$

이 등식과 (*)을 연립하여 풀면 $a_{n+3} - a_n = 1$이므로 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 각각 공차가 1인 등차수열이다.

$a_3 = -1$이므로 자연수 m에 대하여

(i) $n = 3m$인 경우

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m}\left(a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}\right) = \boxed{\text{(가)}}$$

이므로 m이 3의 배수일 때 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 3의 배수이다.

(ii) $n = 3m-1$인 경우

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \boxed{\text{(가)}} - \boxed{\text{(나)}} = \frac{3(m^2-m)+4}{2}$$

이므로 이 경우 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 3의 배수가 되는 자연수 m의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $n = 3m-2$인 경우

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3(m^2-m)+4}{2} - m = \frac{3(m-1)^2 + m + 1}{2}$$

이므로 $m+1$이 3의 배수일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 3의 배수이다.

(i), (ii), (iii)에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$의 값이 3의 배수가 되는 경우는 n을 9로 나눈 나머지가 0 또는 4인 경우이다.

따라서 문제의 조건을 만족하는 100 이하의 자연수 n의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나)에 각각 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)+g(p)$의 값은? [4점]

① 715 ② 720 ③ 725 ④ 730 ⑤ 735

9. 두 실수 a, b가 $2^a+2^b=10$을 만족시킬 때, $2^{-a}+2^{-b}$의 최솟값은 α이고, 그때의 2^{a+b}의 값은 β이다. $5\alpha+\beta$의 값을 구하시오. [3점]

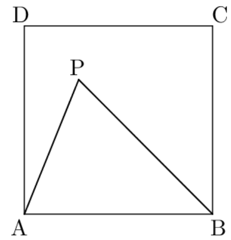
10. 방정식 $|\sin 2x|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 만족시키는 양의 실수 x를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.
$\dfrac{\pi^2}{32}\displaystyle\sum_{n=1}^{25}\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} = n^2+n+1$$

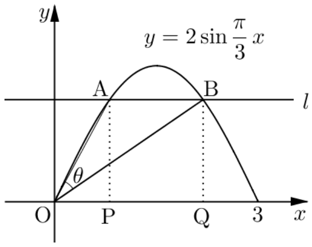
를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

12. 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P가 $\sin(\angle \mathrm{APB}) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ 을 만족시키며 정사각형 ABCD와 그 내부를 움직일 때, $(\overline{\mathrm{AP}})^2+(\overline{\mathrm{BP}})^2$의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 하자. $m+M=a+b\sqrt{5}$ 일 때, $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점*]



13. 그림과 같이 곡선 $y=2\sin\frac{\pi}{3}x\ (0\le x\le 3)$가 x축과 평행한 직선 l과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, $\angle\mathrm{AOB}=\theta$라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, $\tan\theta$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

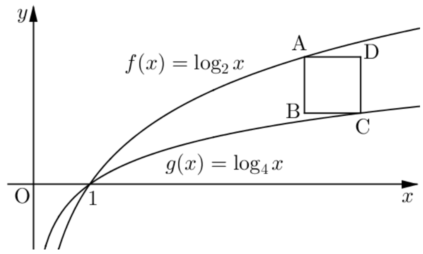
① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$



14. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=\log_2 x$, $g(x)=\log_4 x$의 그래프와 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 A는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이고, 점 C는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이다.
> (나) 정사각형 ABCD의 각 변은 x축 또는 y축에 평행하다.

점 A의 x좌표가 a일 때, $f(a-2)+g(a-2)$의 값은? [4점]



① $\frac{9}{4}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 3 ⑤ $\frac{13}{4}$

15. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3 + |a_7| = 8, \quad \sum_{k=1}^{10} a_k = -15$$

이고, $a_5 < 0$일 때, $a_2 + a_4$의 값을 구하시오. [3점]

16. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$S_{2n-1} = \frac{1}{n(n+1)}, \quad S_{2n} = -\frac{1}{n(n+1)}$$

이다. $\sum_{n=1}^{20} (-1)^{n+1} a_n = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $b_n = a_n + a_{2n}$ 일 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) b_1, b_2, b_5 는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
(나) $a_3 + b_3 = \frac{13}{2}$

$\sum_{k=1}^{12} a_k$의 값은? [4점]

① 34 ② 37 ③ 40 ④ 43 ⑤ 46

18. 함수 $f(x) = \cos^2 x + a\sin x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, 1\right)$을 지날 때, 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

19. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2^{n-1}+n+1$$

을 만족시키고, $a_4+a_5=7$일 때, a_{10}의 값은? [4점]

① 227 ② 243 ③ 259 ④ 275 ⑤ 291

20. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n}=a_n \\ a_{2n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 다음은 100 이하의 자연수 k에 대하여 $a_k=2$인 자연수 k의 개수를 구하는 과정이다.

> 수열 $\{a_n\}$의 정의에서 모든 자연수 n에 대하여
> $a_n \geq 1$이고, n이 3 이상인 홀수일 때에는 $a_n \geq 2$이다.
> 또한, 3 이상의 홀수 p와 자연수 q에 대하여
> $$a_{p\times 2^q}=a_p \geq 2$$
> 이므로 $a_n=1$일 필요충분조건은 $n=2^m$ (m은 음이 아닌 정수)이다. ⋯ (∗)
>
> (1) k가 홀수인 경우
> 주어진 조건으로부터 모든 자연수 n에 대하여
> $a_{2n+1}-a_{2n}=1$이고, k는 홀수이므로 (∗)에서
> $a_k=2$일 필요충분조건은
> $k=$ (가) (m은 음이 아닌 정수)
> 이다. k는 100 이하의 자연수이므로
> 이 경우 $a_k=2$인 자연수 k의 개수는 (나) 이다.
>
> (2) k가 짝수인 경우
> $k=p\times 2^q$ (p는 홀수, q는 자연수)라 하면
> $a_k=a_p$이므로 $a_k=2$이려면 $a_p=2$이어야 한다.
> (1)에서
> $a_3=2$이므로 $a_6=a_{12}=a_{24}=a_{48}=a_{96}=2$
> $a_5=2$이므로 $a_{10}=a_{20}=a_{40}=a_{80}=2$
> ⋯
> $a_{33}=2$이므로 $a_{66}=2$
> 따라서 이 경우 $a_k=2$인 자연수 k의 개수는
> (다) 이다.
>
> 따라서 (1), (2)에 의하여 구하는 자연수 k의 개수는
> (나) + (다) 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 하고, (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b라 할 때, $f(a+1)+b$의 값은? [4점]

① 272 ② 276 ③ 280 ④ 284 ⑤ 288

21. 첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

(가) $0 < \sum_{n=1}^{10} a_n < a_7$

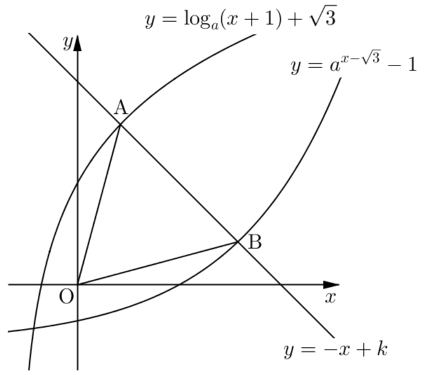
(나) $(|a_5| - |a_4|)(|a_6| - |a_5|) = -16$

① 25 ② 28 ③ 31 ④ 34 ⑤ 37

22. 그림과 같이 두 곡선

$$y = \log_a(x+1) + \sqrt{3}, \quad y = a^{x-\sqrt{3}} - 1 \ (a > 1)$$

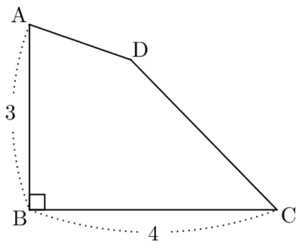
과 직선 $y = -x + k\ (k > 0)$가 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 삼각형 OAB가 정삼각형이고, 삼각형 OAB의 넓이가 $2\sqrt{3}$일 때, $(a+k)^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [3점]



23. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{AB}}=3$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이고 $\angle \mathrm{B}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\cos\angle\mathrm{ADC}=-\frac{3\sqrt{13}}{13}$
>
> (나) 점 D는 삼각형 ABC의 외부에 있다.

선분 BC의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{MD}}$의 최솟값은 m이고, 이때 $\sin(\angle\mathrm{CAD})=k$이다. $\left(\frac{1}{mk}\right)^2$의 값을 구하시오. [4점*]



24. 4의 세제곱근 중 실수인 것을 a, 2의 네제곱근 중 양의 실수인 것을 $\frac{1}{b}$이라 할 때, $\log_a b$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{8}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{3}{8}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{8}$

25. $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식

$$\log_3(\tan x) = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$$

의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\frac{\pi}{3}$ ② $\frac{2}{3}\pi$ ③ π ④ $\frac{4}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{3}\pi$

26. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$(n-8)(S_n-30) \ge 0$$

이다. 수열 $\{a_n\}$의 공차의 최솟값을 m, 최댓값을 M이라 할 때, $28(M+m)$의 값을 구하시오. [4점]

27. 닫힌구간 $[0, 2]$에서 정의된 함수 $f(x) = a \times 2^{1-x} + b$의 최댓값이 2이고 최솟값이 -1일 때, $f(1)$의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a > 0$이다.) [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{3}{8}$ ③ $-\frac{1}{4}$ ④ $-\frac{1}{8}$ ⑤ 0

28. 등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{11} (-1)^k a_k = a_4, \quad \sum_{k=1}^{12} a_k = a_8 + 5$$

를 만족시킬 때, a_{20}의 값은? [3점]

① -4 ② -1 ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

29. 두 실수 a, b $(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x) = a\sin x + b$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 곡선 $y = f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하여 얻은 곡선이 곡선 $y = f(x)$와 점 $\left(\frac{\pi}{4}, c\right)$에서 만난다.

함수 $f(x)$의 최댓값이 $2\sqrt{2}c$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{2-\sqrt{2}}{4}$　② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$　③ $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$　④ $\sqrt{2}-1$　⑤ $2-\sqrt{2}$

30. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(a_{n+1} - n)(a_{n+1} - a_n + 1) = 0$$

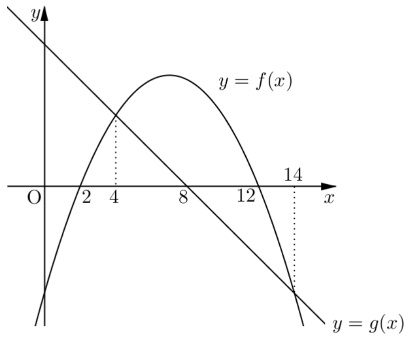
을 만족시킨다. $a_{10} = 5$일 때, $\sum_{n=1}^{15} a_n$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점*]

① 102　② 106　③ 110　④ 114　⑤ 118

31. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 그림과 같을 때, 부등식

$$\log_2 \frac{g(x)}{f(x)} \geq 0$$

를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. (단, $f(2)=f(12)=0$이고 $g(8)=0$이다.) [3점]

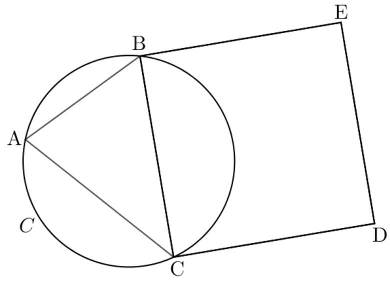


32. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 원 C 위의 세 점 A, B, C와 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형 BCDE가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 사각형 BCDE의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 3배이다.

(나) $\cos(\angle \mathrm{ABE}) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 ACD에 외접하는 원의 반지름의 길이를 R라 할 때, R^2의 값을 구하시오. [4점*]



33. 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_1+a_3=3, \quad a_2a_4+a_3a_5=12$$

를 만족시킬 때, a_7의 값은? [3점]

① $4\sqrt{2}$ ② 8 ③ $8\sqrt{2}$ ④ 16 ⑤ $16\sqrt{2}$

34. $\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=4$를 만족시키는 θ에 대하여 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 실근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$일 때, a^2+b^2의 값은? [3점]

① $\dfrac{25}{16}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{23}{16}$ ④ $\dfrac{11}{8}$ ⑤ $\dfrac{21}{16}$

35. 삼각형 ABC에서

$$\sin(A+B)=\cos(B+C)=\frac{3}{5}$$

이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [3점]

① $\frac{18}{25}$ ② $\frac{11}{15}$ ③ $\frac{56}{75}$ ④ $\frac{19}{25}$ ⑤ $\frac{58}{75}$

36. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 정의된 함수

$$f(x)=2^{2x}-2^{x+a}+b$$

에 대하여 $f(1)=f(2)$이고 함수 $f(x)$의 최솟값이 4이다. 함수 $f(x)$의 최댓값은? (단, a와 b는 상수이다.) [4점]

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

37. 자연수 n에 대하여 x에 대한 이차방정식

$$x^2 - 4nx + n(4n^2-1)a_n = 0$$

이 $x = b_n$을 중근으로 갖는다. $\sum_{n=1}^{25} \frac{a_n}{b_n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2021학년도 대학수학능력시험 대비 녹색지대 N제 문제지

수학 영역(수학 II)

1. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2} & (x>2)\\ 2x-1 & (x\le 2)\end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

2. 함수 $f(x)=x^3-(2a+1)x^2+3ax$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선이 곡선 위의 점 $(3,\ f(3))$을 지날 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

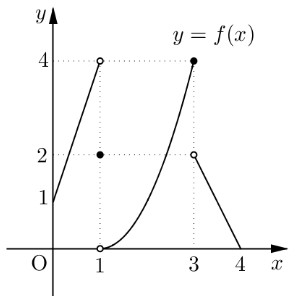
3. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2\int_0^1 tf(t)dt$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① $\frac{20}{7}$ ② $\frac{18}{7}$ ③ $\frac{16}{7}$ ④ 2 ⑤ $\frac{12}{7}$

4. 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다.



$\lim_{x \to a-} f(x) + \lim_{x \to a+} f(x) = 4$를 만족시키는 실수 a의 개수는? (단, $0 < a < 4$) [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 정수 k에 대하여 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(2k-3)x^2+kx-11$이 다음 조건을 만족시킬 때, k의 값은? [4점]

> (가) 함수 $f(x)$는 실수 전체에서 정의된 역함수를 갖는다.
> (나) 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

6. 양수 a에 대하여 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (|x|\geq a) \\ 8 & (|x|<a) \end{cases},\quad g(x)=x-2a+9$$

가 있다. 함수 $f(x)g(x)$가 $x=k$에서만 불연속일 때, $g(k)$의 값은? (단, k는 상수이다.) [4점]

① -27　② -24　③ -21　④ -18　⑤ -15

7. 실수 t에 대하여 사차함수 $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-9x+4$의 그래프와 원점을 지나고 기울기가 t인 직선의 교점의 x좌표 중 가장 큰 수를 $g(t)$라 하자. 상수 k에 대하여

$$\lim_{t \to k+} g(t) - \lim_{t \to k-} g(t) = \alpha \ (\alpha \neq 0)$$

일 때, $k+(f \circ g)(\alpha)$의 값은? [4점*]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. 다항함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-2x^3}{x^2}=1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{f(x)-x^2}{x-1}=0$$

을 만족시킬 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-6x^2+11x+4,\quad g(x)=2x+k$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

10. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_a^x (|f(t)|-1)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지고, $x=3$에서 극솟값을 갖는다.
> (나) 함수 $|g(x)|$는 $x=\alpha$와 $x=\beta$ $(\alpha<a<\beta)$에서만 미분가능하지 않다.

$g\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=k$일 때, $216k^2$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.) [4점*]

11. 함수 $f(x)=\int_{1}^{x}(t-1)(t-a)\,dt$의 극댓값이 $\frac{4}{3}$일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

12. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x_1, x_2가

$$x_1 = t^3 - t, \quad x_2 = 3t^2 - 10t + 4$$

이다. 두 점 P, Q의 속도의 차가 최소일 때, 두 점 P, Q 사이의 거리는? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

13. 함수 $f(x)=x^3-kx^2-2kx$의 그래프 위의 서로 다른 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 모두 $-2k$이고, 두 접선 사이의 거리가 $\frac{k^2}{27}$일 때, 양수 k의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{3}}{6}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{6}$

14. 함수

$$f(x)=\begin{cases} ax & (x<1) \\ ax+1 & (1\le x<2) \\ -bx+4 & (x\ge 2) \end{cases}$$

에 대하여 두 함수 $f(x)f(2-x)$와 $f(x)f(3-x)$가 각각 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

15. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x-1)\int_1^x f(t)\,dt$$

라고 하자. 다음 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(1) = 0$

ㄴ. $f(1) > 0$이면 함수 $g(x)$는 $x = 1$에서 극댓값을 갖는다.

ㄷ. $f(1) = 0$이고 함수 $g(x)$의 최솟값이 $-\dfrac{1}{9}$일 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{16}{81}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

16. 두 함수

$$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6$$
$$g(x) = x + |x-1| + k$$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 k의 값의 합을 구하시오. [4점]

17. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (1 \le x \le 3) \\ x+2 & (x<1 \text{ 또는 } x>3) \end{cases}$$

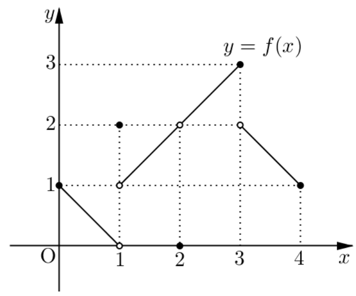
가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다.

(나) $\lim_{x\to t-} g'(x) + \lim_{x\to t+} g'(x) \ge 1$을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t \le 1 \text{ 또는 } t \ge 3\}$이다.

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점*]

18. 닫힌구간 $[0, 4]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 2-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은? (단, $0 \le a < 4$) [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

19. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 위치 x가

$$x = t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 6t + 2$$

이다. 점 P의 운동 방향이 $t = \alpha$와 $t = \beta\ (\alpha < \beta)$에서 바뀔 때, 점 P가 $t = \alpha$에서 $t = \beta$까지 이동한 거리는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

20. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x^2 - x)f(x) = \int_0^x (t^3 + at - 2)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(0) + f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② 4 ③ $\frac{9}{2}$ ④ 5 ⑤ $\frac{11}{2}$

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 최댓값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)+f(x)=2$이다.
> (나) $-1<x<1$일 때, $f(1)<f(x)<f(-1)$이다.

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

22. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $0 \le x < 4$일 때, $f(x)=|x-2|-1$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이다.

실수 t에 대하여 함수

$$h(x)=\int_t^x f(u)du$$

의 최솟값을 $g(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g(3)=0$
ㄴ. $g(t)=-1$이면 $g'(t)=0$이다.
ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 $\int_{-n}^{n} g(t)dt=-n$이다.

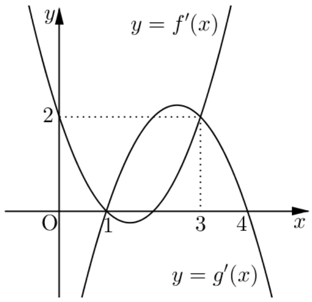
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

23. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{|x-1|}=\alpha,\quad \lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=\beta$$

를 만족시킬 때, $f(\alpha+\beta)$의 값을 구하시오. (단, α, β는 상수이다.) [3점]

24. 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $y=f'(x)$와 $y=g'(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$f(-1)=g(-1)$일 때, 방정식 $f(x)-g(x)=n$의 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 정수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

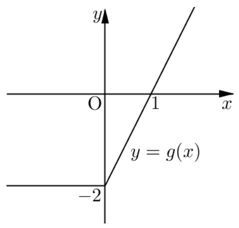
25. 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$와 두 함수

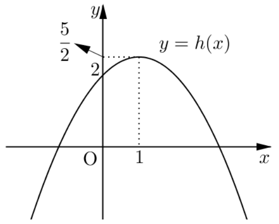
$$g(x)=|x|+x-2,\quad h(x)=-\frac{1}{2}x(x-2)+2$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

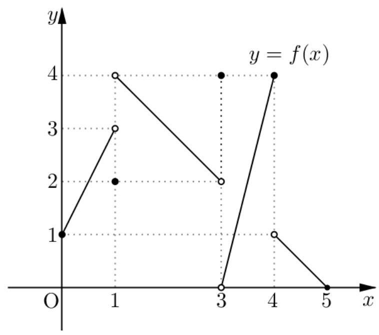
부등식 $\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}\le 0$을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 집합은 $\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$이다.

$\displaystyle\int_{-2}^{2}\{f(x)-h(x)\}\,dx$의 최댓값을 M이라 할 때, $25M^2$의 값을 구하시오. [4점*]





26. 닫힌구간 $[0,5]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=a$일 때, $\displaystyle f(a)+\lim_{x\to a-}f(x)$의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

27. 함수 $f(x)=ax+b$ 가

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(x-1)f(x)dx = 2$$

을 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은? (단, a 와 b 는 상수이다.) [3점]

① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

28. 함수 $f(x)=2x^3-3(k+1)x^2+6kx+1$ 이 $x=2k+1$ 에서 극댓값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, k 는 상수이다.) [3점]

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

29. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서 그은 접선을 $y=g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

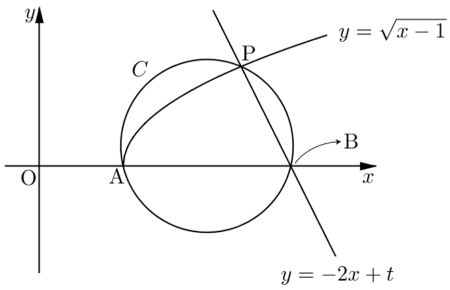
$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-g(x)}{x-4}=-9$$

을 만족시킬 때, 방정식 $f(x)=g(x)+kx$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [4점]

① -21 ② -20 ③ -19 ④ -18 ⑤ -17

30. 그림과 같이 실수 $t\ (t>2)$에 대하여 곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 직선 $y=-2x+t$가 x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 직선 $y=-2x+t$가 만나는 점을 P라 하자. 세 점 A, B, P를 지나는 원을 C라 할 때, 원 C의 넓이를 $f(t)$라 하고, 선분 BP의 길이를 $g(t)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{t\to 2+}\frac{f(t)g(t)}{(t-2)^3}$의 값은? [4점]



① $\dfrac{\sqrt{5}}{8}\pi$ ② $\dfrac{\sqrt{5}}{7}\pi$ ③ $\dfrac{5\sqrt{5}}{32}\pi$ ④ $\dfrac{\sqrt{5}}{6}\pi$ ⑤ $\dfrac{7\sqrt{5}}{40}\pi$

31. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^3 - 6t^2 + 10t + 2$$

이다. 점 P의 가속도가 최소일 때, 점 P의 위치를 구하시오. [3점]

32. 함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4$에 대하여 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = f'(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $6S$의 값을 구하시오. [4점]

33. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x < 0) \\ \displaystyle\int_{x}^{x+2} g(t)\,dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. (나) 함수 $\lvert h(x) \rvert$는 $x=-2$에서만 미분가능하지 않다.

$h(0)=0$일 때, $f(3)+g(3)$의 최솟값을 구하시오. [4점*]

수학 영역(확률과 통계)

1. 두 사건 A, B가 서로 독립이고

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}, \quad \mathrm{P}(A \cap B^C) = \frac{1}{6}$$

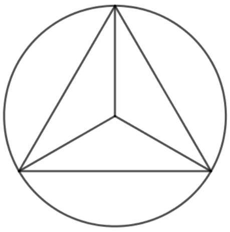
일 때, $\mathrm{P}(A \cup B^C)$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{4}{9}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{9}$ ④ $\frac{11}{18}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

2. 다항식 $(x+3)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 a라 하고, 다항식 $(2x-1)^2(x+1)^{n-2}$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수를 b라 하자. $a=b$일 때, 자연수 n의 값은? (단, $n \geq 4$) [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

3. 그림과 같이 원에 내접하는 정삼각형과 정삼각형의 각 꼭짓점과 원의 중심을 한 꼭짓점으로 갖는 3개의 합동인 삼각형이 있다. 원의 내부 또는 삼각형의 내부에 만들어지는 6개의 영역에 서로 다른 3가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 한 영역에 한 가지 색만을 칠하고, 이웃한 영역에는 서로 다른 색을 칠할 때, 색칠한 결과로 나올 수 있는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 8　② 12　③ 16　④ 20　⑤ 24

4. 자연수 전체의 집합의 부분집합 $X=\{x \mid 1 \le x \le 10\}$ 에서 임의로 선택된 하나의 원소 x가 부등식 $x^2-6x+5 \le 0$을 만족시키는 사건을 A, 방정식 $|x-4|=n$을 만족시키는 사건을 B라 하자. 두 사건 A, B가 서로 독립이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은? (단, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이다.) [4점]

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

5. 다음은 집합 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$와 함수 $f: A \to A$에 대하여 $f(1)+f(3)=4$를 만족시키고, 치역의 원소의 개수가 3인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> 함수 f가 $f(1)+f(3)=4$인 경우는 (1) $f(1)=1$, $f(3)=3$인 경우 또는 (2) $f(1)=3$, $f(3)=1$인 경우 또는
> (3) $f(1)=f(3)=2$인 경우이다.
>
> (1) $f(1)=1$, $f(3)=3$인 경우
> 함수 f의 치역의 남은 하나의 원소를 택하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$이고,
> 이 각각에 대하여 $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 선택할 때, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 모두 1 또는 3이 되는 경우를 제외해야 하므로 $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 선택하는 방법의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$ 이다.
> 따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는 $3\times\boxed{\text{(가)}}$
>
> (2) $f(1)=3$, $f(3)=1$인 경우
> (1)과 같은 방법으로 이를 만족하는 함수 f의 개수는 $3\times\boxed{\text{(가)}}$
>
> (3) $f(1)=f(3)=2$인 경우
> 함수 f의 치역의 남은 두 개의 원소를 택하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$이다. 선택한 두 원소를 a, b라 하면 $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 $2, a, b$ 중에서 선택하는 모든 방법 중에서 함수 f의 치역이 $\{2, a\}$, $\{2, b\}$, $\{2\}$가 되는 경우를 제외해야 한다.
> $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 $2, a, b$ 중에서 택하는 모든 방법의 수는 $3^3=27$이고,
> 그 중 함수 f의 치역이 $\{2, a\}$인 경우의 수와 $\{2, b\}$인 경우의 수는 각각 $\boxed{\text{(나)}}$이고,
> 함수 f의 치역이 $\{2\}$인 경우의 수는 1이므로
> $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 선택하는 방법의 수는
> $27-\left(1+2\times\boxed{\text{(나)}}\right)$ 이다.
> 따라서 이를 만족하는 함수 f의 개수는
> $6\times\left\{27-\left(1+2\times\boxed{\text{(나)}}\right)\right\}$ 이다.
>
> 따라서 (1), (2), (3)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 212 ② 217 ③ 222 ④ 227 ⑤ 232

6. 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수만큼 동전을 반복하여 던지는 시행을 할 때, 동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

7. 숫자 1이 적힌 카드가 3장, 숫자 2와 3이 적힌 카드가 각각 2장씩 총 7장의 카드가 들어 있는 주머니에서 임의로 5장의 카드를 뽑아 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) 숫자 1이 적힌 카드는 2장 이상 선택한다.
> (나) 숫자 1이 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않는다.

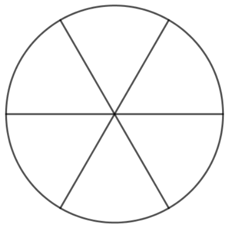
8. 3개의 문자 x, y, z에서 중복을 허락하여 7개를 택하여 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점*]

> (가) 가장 왼쪽과 가장 오른쪽에는 각각 x를 나열한다.
> (나) x와 y가 이웃하는 횟수는 1 이하이다.
> (다) x와 z가 이웃하는 횟수는 1 이하이다.

9. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 $Y=\{1, 2, 3\}$로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

$f(x)=n$을 만족시키는 $x \in X$의 개수는 n 이상이다. $(n=1, 2, 3)$

10. 그림과 같이 원을 6개의 합동인 부채꼴로 나누고, 나누어진 각 부채꼴에 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6을 하나씩 써넣으려고 한다. 마주 보는 부채꼴에 쓰인 두 수의 합이 모두 7이 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]



① 8 ② 12 ③ 16 ④ 20 ⑤ 24

11. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 집합을 각각 A, B라 할 때, $n(A)+n(B)=6$일 확률은? [3점]

① $\frac{3}{35}$ ② $\frac{4}{35}$ ③ $\frac{1}{7}$ ④ $\frac{6}{35}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

12. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는? [3점]

> (가) $a+b+c=8$
> (나) $a<b+c$

① 18 ② 21 ③ 24 ④ 27 ⑤ 30

13. 두 사건 A, B가

$$\mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{3},\quad \mathrm{P}(B|A) = \frac{1}{4}$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, A^C는 A의 여사건이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $\dfrac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{3}{4}$

ㄴ. $\mathrm{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$ 이면 $\mathrm{P}(A^C \cup B) = \dfrac{5}{8}$ 이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B) \leq \dfrac{3}{16}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

14. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ 로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [4점*]

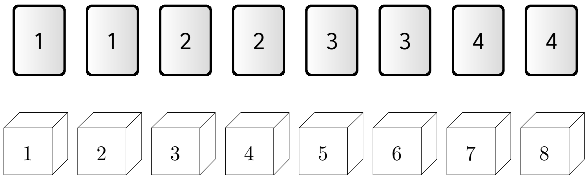
$n = 1, 2, 3, 4, 5$ 일 때, $f(n+1)$의 값은 $f(n)$ 또는 $f(n)+1$ 중 하나이다.

① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

15. $(x+2)^2\left(x-\frac{k}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항이 0일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

16. 한 개의 주사위를 세 번 던져 나오는 눈의 수를 차례대로 a, b, c라 하자. 세 수 a, b, c가 $(b-a)(b-3c)<0$을 만족시킬 때, $a>3c$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

17. 1, 2, 3, 4의 숫자가 하나씩 적혀 있는 카드가 각각 2장씩 8장이 있다. 그림과 같이 1에서 8까지의 자연수가 하나씩 적힌 8개의 상자에 각각 이 카드를 임의로 한 장씩 넣을 때, 8 이하의 자연수 k에 대하여 숫자 k가 적힌 상자에 들어 있는 카드에 적혀 있는 수를 a_k라고 하자. a_k+k의 값이 홀수인 k의 개수가 4보다 작은 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 숫자가 적혀 있는 카드는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

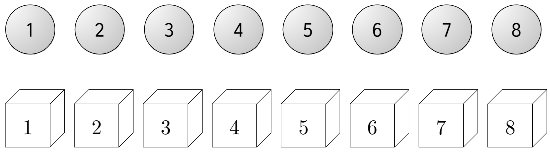


18. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 쓰여 있는 카드 3장이 있는 주머니에서 한 장의 카드를 임의로 꺼내어 카드에 적힌 수를 확인하고 다시 넣는 시행을 3회 반복할 때, 뽑은 카드에 적힌 숫자의 합이 8 이상일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

19. 그림과 같이 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 적혀 있는 공을 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 적힌 상자에 하나씩 넣으려고 한다. 8 이하의 자연수 k에 대하여 숫자 k가 적힌 공이 들어 있는 상자에 적혀 있는 수를 a_k라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수는? [4점]

> (가) $a_6 < a_7$
> (나) 6 이하의 모든 자연수 m에 대하여 $a_{m+2} > a_m$이다.

① 40　② 45　③ 50　④ 55　⑤ 60



20. 두 사건 A, B가 서로 독립이고,

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{P}(A\cup B^C)=\frac{2}{3}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? (단, B^C는 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{4}{15}$　③ $\frac{1}{5}$　④ $\frac{2}{15}$　⑤ $\frac{1}{15}$

21. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고,

$\mathrm{P}(X=2)=6\mathrm{P}(X=1)$일 때, n의 값은? [3점]

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

22. 빨간 공 3개, 노란 공 2개, 파란 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공 중 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{22}{35}$ ② $\frac{3}{5}$ ③ $\frac{4}{7}$ ④ $\frac{19}{35}$ ⑤ $\frac{18}{35}$

23. 한 개의 주사위를 세 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b, c라 하자. 세 수 a, b, c 중 두 수만 서로 같을 때, 세 수 a, b, c의 곱 $a \times b \times c$가 6의 배수일 확률은? [4점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{13}{30}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

24. 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 1^2)$, 확률변수 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(20-m,\ 2^2)$을 따른다.

$$\mathrm{P}(X \le k) \le \mathrm{P}(Y \ge k)$$

을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 9일 때, $\mathrm{P}(X \ge 8) + \mathrm{P}(Y \le 14)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.6247 ② 0.6587 ③ 0.7745 ④ 0.8085 ⑤ 0.8502

25. 좌표평면의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 3의 배수인 눈이 나오면 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼, 3의 배수가 아닌 눈이 나오면 점 A를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

위의 시행을 반복하여 점 A가 이동한 점의 좌표를 (a, b)라 할 때, $a=b+2$인 사건을 A라 하자.
다음은 위의 시행을 여섯 번 반복하여 사건 A가 발생한 횟수가 3이었을 때, 3의 배수인 눈이 나온 횟수가 2일 확률을 구하는 과정이다.

> 사건 A가 발생한 횟수가 3이 되려면 위의 시행을 반복하여 3의 배수의 눈이 나온 횟수가 처음으로 2가 되었을 때, 이어서 3의 배수가 아닌 눈이 연속하여 두 번만 나와야 한다.
> 위 시행에서 3의 배수인 눈이 총 두 번 나올 때까지 주사위를 던진 횟수를 $X\ (2 \le X \le 4)$라 하자. 그러면
>
> (1) $X=2$인 경우, 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3일 확률은
>
> $$\mathrm{P}(X=2)=\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$
>
> (2) $X=3$인 경우, 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3일 확률은
>
> $$\mathrm{P}(X=3)=\boxed{\text{(가)}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3$$
>
> (3) $X=4$인 경우, 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3일 확률은
>
> $$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{\text{(나)}}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4$$
>
> 이므로 여섯 번의 시행에서 사건 A가 발생한 횟수가 3이고, 3의 배수인 눈이 나온 횟수가 2인 경우는 $X=4$인 경우뿐이다.
> 따라서 조건부확률의 정의에서 구하는 확률은
>
> $$\frac{\mathrm{P}(X=4)}{\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)}=\boxed{\text{(다)}}$$
>
> 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r라 할 때, $p\times q\times r$의 값은? [4점]

① $\frac{24}{5}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{72}{17}$ ④ 4 ⑤ $\frac{72}{19}$

26. 어느 모집단의 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{{}_{x+1}\mathrm{C}_2}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

이다. 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 각각 X_1, X_2라 할 때, $Y=X_1+X_2$라 하자. $\mathrm{E}(24Y+1)$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

27. 5 이상의 자연수 n에 대하여 한 개의 원판을 중심각의 크기가 서로 같은 n개의 부채꼴로 나누고, 1부터 n까지의 자연수를 각 부채꼴에 하나씩 적을 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 $f(n)$이라 하자.

> (가) 1이 적힌 부채꼴과 짝수가 적힌 부채꼴은 서로 이웃하지 않는다.
> (나) 1이 적힌 부채꼴과 이웃하는 두 부채꼴에 적힌 수의 합은 $\frac{3}{2}n$보다 작다.

$\frac{f(13)}{f(12)} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이고, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]

28. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서 $Y = \{1, 2, 3, 4\}$로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점*]

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.
> (나) $n = 1, 2, 3$일 때, $f(n) \le f(n+1)$이다.
> (다) $n = 4, 5, 6$일 때, $f(n) \ge f(n+1)$이다.

29. 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	a	b	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=\frac{7}{3}$일 때, $\mathrm{V}(3X+1)$의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

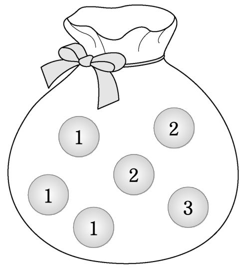
30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 카드 3장과 문자 a, a, b, b가 하나씩 적힌 4장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 다음 조건을 만족시키도록 일렬로 나열하는 모든 방법의 수는? [3점]

(가) 숫자가 적힌 카드는 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 오른쪽으로 나열한다.
(나) 문자 a가 적힌 카드끼리는 서로 이웃하지 않는다.

① 150 ② 180 ③ 210 ④ 240 ⑤ 270

31. 어느 버스 정류장에서 승객들이 버스를 기다리는 시간은 평균이 m, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다. 이 버스 정류장을 이용하는 승객 n명을 임의추출하여 버스를 기다리는 시간을 조사한 표본평균을 이용하여 구한 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $8.88 \le m \le 11.12$이다. $\dfrac{n}{\sigma} = 12.25$일 때, $n+\sigma$의 값을 구하시오.
(단, 시간의 단위는 분이고 Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96) = 0.475$로 계산한다.) [3점]

32. 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c라 하자. $a+b+c>4$일 때, 세 수 a, b, c 중 적어도 두 수가 같을 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



수학 영역(미적분)

1. $\lim_{x \to 0} \{(1-2x)(1+\sin x)\}^{\cot x}$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{e}$ ② 1 ③ e ④ e^2 ⑤ e^3

2. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx & (x < 2) \\ e^{x-2} - a & (x \geq 2) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$가

$$g(x) = (f \circ f)(x)$$

일 때, $g'(2)$의 값은? [3점]

① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

3. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$a_n + 2S_n = \frac{kn}{n+1} \ (n \geq 1)$$

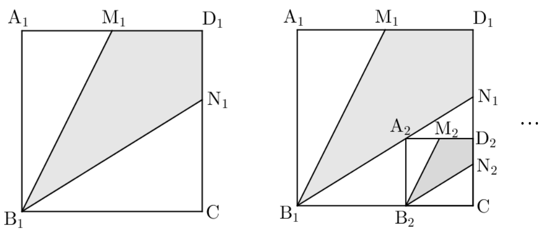
이다. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$일 때, a_1의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

4. 이차방정식 $4x^2 - 2x - 1 = 0$의 두 실근을 $\sin\alpha$, $\sin\beta$라 할 때, $\cos(\alpha+\beta)$의 값은? (단, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$) [4점]

① $\frac{\sqrt{6}-2}{8}$　② $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$　③ $\sqrt{5}-2$　④ $\frac{\sqrt{6}+2}{8}$　⑤ $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

5. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1CD_1$에서 선분 A_1D_1의 중점을 M_1이라 하고, $\angle M_1B_1C$를 이등분하는 직선이 선분 CD_1과 만나는 점을 N_1이라 할 때, 사각형 $B_1M_1D_1N_1$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 B_1N_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C 위의 점 B_2, 점 C, 선분 CN_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2CD_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 점 M_2, N_2를 잡아 사각형 $B_2M_2D_2N_2$의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1　　　　R_2　　　　…

① $\frac{2+3\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{5+7\sqrt{5}}{10}$　③ $\frac{3+4\sqrt{5}}{5}$
④ $\frac{7+9\sqrt{5}}{10}$　⑤ $\frac{4+5\sqrt{5}}{5}$

6. 함수

$$f(x) = -\sin x\cos x + 2\cos x + (2k+3)x$$

가 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 실수 k의 값은? [4점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

7. $\overline{\mathrm{AB}}=5$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$인 삼각형 ABC에서 점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AH를 지름으로 하는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 P라 하고, 선분 BC의 길이가 t $(2<t<8)$일 때, 선분 AP의 길이를 $f(t)$라 하자. 미분가능한 함수 $f(t)$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{AH}}^2=3f(t)$

ㄴ. $f(t)=2$인 모든 실수 t의 값의 곱은 16이다 .

ㄷ. $\overline{\mathrm{CH}}=k$인 실수 k에 대하여 $f'(k)=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 함수 $f(x)=(ax^2+bx+c)e^{-x}$ $(a\neq 0)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) 함수 $|f(x)-f(0)|$은 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(다) 어떤 양수 k에 대하여 함수 $|f(x)+x-k|$는 $x=p$ $(p<0)$에서만 미분가능하지 않다.

$f(2)$의 값은? (단, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$이다.) [4점*]

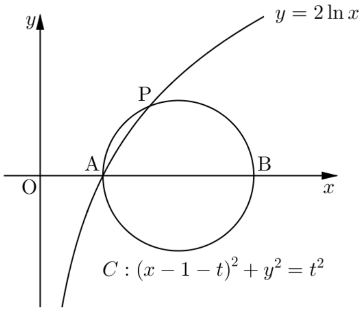
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. $t>0$인 실수 t에 대하여 그림과 같이 원

$$C: (x-1-t)^2+y^2=t^2$$

와 x축이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 원 C와 곡선 $y=2\ln x$의 교점 중 A가 아닌 점을 P라 하자.

$\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=a$일 때, $100a^2$의 값을 구하시오. [3점]



10. 매개변수 $t\left(-\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 나타내어진 함수

$$x=\sin^3 t,\quad y=\sin t-a\cos t\ \ (a\neq 0)$$

가 $t=\alpha$에서 극솟값 $-\dfrac{\sqrt{10}}{3}$를 갖는다. $t=-\alpha$에서 $\dfrac{dy}{dx}$의 값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11. 함수 $f(x)=\log_2(\cos\pi x+3)$과 다음 조건을 만족시키고 최고차항의 계수가 1인 모든 삼차함수 $g(x)$에 대하여 가능한 모든 정수 n의 값의 합을 구하시오. [4점*]

> (가) $g(2)=1$, $g(3)=n$
> (나) 닫힌구간 $[0, 2]$에서 방정식 $(f\circ g)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.
> (다) 닫힌구간 $[0, 2]$에서 방정식 $(g\circ f)(x)=1$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

12. 곡선 $x^2+y^2=e^{3x-4y}$ 위의 점 $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$에서 그은 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{3}{26}$ ② $\frac{2}{13}$ ③ $\frac{5}{26}$ ④ $\frac{3}{13}$ ⑤ $\frac{7}{26}$

13. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{n}{n+1} < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2^k}-3\right) < \frac{n+1}{n}$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2^n}{a_n+2^n}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

14. 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(\sin x)-1}{6x-\pi}=\sqrt{3}$$

를 만족시킬 때, $f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [3점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

15. 곡선 $y=\dfrac{\ln x+1}{x}\ (x>0)$ 위의 점에서 그은 접선 중 기울기가 최소인 직선을 l이라 하자. 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

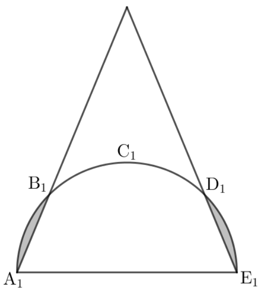
① $\dfrac{4}{e}$ ② 2 ③ e ④ 4 ⑤ $2e$

16. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)g(0)$의 값은? [4점]

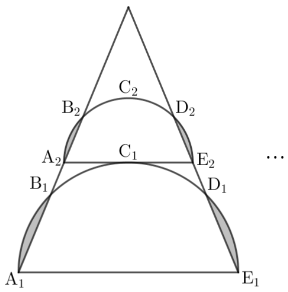
(가) $f(x)\sqrt{g(x)}=e^{x}(\sin x+2)$
(나) $2f'(0)g(0)=1-f(0)g'(0)$

① $\dfrac{1}{12}$ ② $\dfrac{1}{6}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{4}{3}$

17. 그림과 같이 $\overline{A_1E_1} = 2$인 선분 A_1E_1을 지름으로 하는 반원이 있다. 호 A_1E_1의 길이를 사등분하는 점을 각각 B_1, C_1, D_1이라 하고, 직선 A_1B_1과 호 A_1E_1, 직선 D_1E_1과 호 A_1E_1으로 둘러싸인 부분을 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 C_1을 지나고 선분 A_1E_1과 평행한 직선이 직선 A_1B_1, 직선 D_1E_1과 만나는 점을 각각 A_2, E_2라 하자. 선분 A_2E_2를 지름으로 하는 반원이 직선 A_1B_1, 직선 D_1E_1과 만나는 점 중 A_2, E_2가 아닌 점을 각각 B_2, D_2라 하고, 호 B_2D_2의 중점을 C_2라 하자. 직선 A_2B_2와 호 A_2E_2, 직선 D_2E_2와 호 A_2E_2로 둘러싸인 부분을 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1



R_2 …

① $\dfrac{(\pi-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}{28}$ ② $\dfrac{(\pi-2\sqrt{2})(5+4\sqrt{2})}{28}$
③ $\dfrac{(\pi-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}{24}$ ④ $\dfrac{(\pi-2\sqrt{2})(5+4\sqrt{2})}{24}$
⑤ $\dfrac{(\pi-2\sqrt{2})(5+2\sqrt{2})}{20}$

18. 두 함수

$$f(x) = \frac{ax+b}{e^x+c} \ (a \neq 0,\ c>0),$$
$$g(x) = |x+1| - |x-1|$$

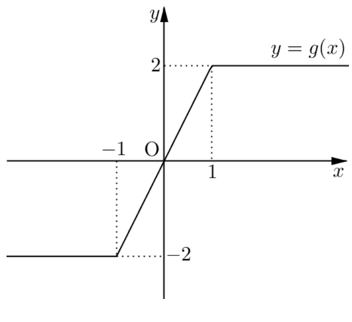
가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x) = f(x) - g(x)$는 $x = -1$에서 극댓값 2를 가지고, $x = t\ (t>1)$에서 극댓값 M을 갖는다.

M의 최댓값을 $M(t)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점*]

<보 기>
ㄱ. $t = 2$이면 $c = 2e^2$이다.
ㄴ. 함수 $h(x)$가 극소가 되는 x의 개수는 1이다.
ㄷ. $M'(\alpha) = -\dfrac{2}{3e^2}\alpha + 2$인 실수 $\alpha\ (\alpha>1)$에 대하여 $t = \alpha$일 때, 함수 $h(x)$의 극솟값의 최댓값은 $2+\dfrac{1}{e^2}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

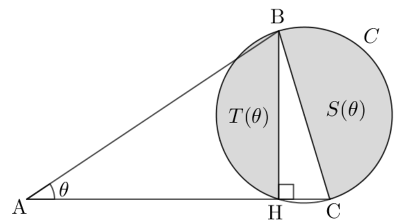
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=3,\quad \lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=2$$

일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4b_n}{2a_n+b_n-7n}$의 값을 구하시오. [3점]

20. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=1$인 삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 선분 AC로 내린 수선의 발을 H라 하고, 세 점 B, C, H를 지나는 원을 C라 하자. $\angle\mathrm{BAC}=\theta$일 때, 선분 BC와 호 BC로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하고, 두 점 B, H에 의하여 원 C가 나누어지는 두 부분 중 짧은 쪽과 선분 BH로 둘러싸인 부분의 넓이를 $T(\theta)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $100a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$) [4점]



21. 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수

$$f(x)=e^{3x-1}+3e^{x+1}-k\left|e^{2x}-1\right| \ (k\neq 0)$$

와 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $h(x)=\left(g\circ f^{-1}\right)(x)$는 열린구간 $(-k,\ \infty)$에서 미분가능하다.
(나) 방정식 $h'(x)=0$은 단 하나의 실근을 갖는다.

$g(1)-g(0)<1$일 때, $g(2)-g(1)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이고 p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점*]

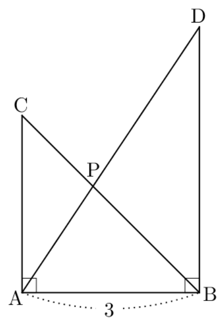
22. 곡선 $x^3+\sin(y+1)=1$ 위의 점 $(a,\ -1)$ 위의 점에서 그은 접선이 $(-1,\ b)$를 지날 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

23. 함수 $f(x) = x\cos x$ 에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left\{\frac{(n+2k)\pi}{2n}\right\}$ 의 값은? [3점]

① -4π　② -3π　③ -2π　④ $-\pi$　⑤ 0

24. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$ 이고, $\angle BAC = \angle ABD = \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC와 ABD가 있다. 선분 BC와 AD가 만나는 점을 P라 할 때, $2\overline{PB} = 3\overline{PC}$ 이고, $\tan(\angle APB) = 5$ 이다. 삼각형 APB의 넓이는? [3점]



① $\frac{12}{5}$　② $\frac{5}{2}$　③ $\frac{13}{5}$　④ $\frac{27}{10}$　⑤ $\frac{14}{5}$

25. 함수 $f(x)=(x^2-a)e^{ax}$가 $x=1$에서 극솟값을 가질 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① $\frac{1}{e^4}$ ② $\frac{2}{e^4}$ ③ $\frac{3}{e^4}$ ④ $\frac{4}{e^4}$ ⑤ $\frac{5}{e^4}$

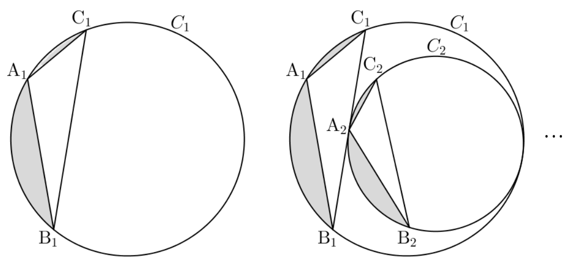
26. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=e^x-4x^2\int_0^1 f(t)dt+2x\int_0^1 f(1-\sqrt{t})dt$$

를 만족시킬 때, $\int_0^1 xf(x)dx$의 값은? [4점]

① $\frac{e}{5}$ ② $\frac{3e}{13}$ ③ $\frac{3e}{11}$ ④ $\frac{e}{3}$ ⑤ $\frac{3e}{7}$

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$인 원 C_1 위에 $\overline{\mathrm{A_1B_1}} : \overline{\mathrm{A_1C_1}} = 2:1$, $\angle \mathrm{B_1A_1C_1} = \frac{2\pi}{3}$가 되도록 세 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$, $\mathrm{C_1}$을 잡고, 선분 $\mathrm{A_1B_1}$과 호 $\mathrm{A_1B_1}$으로 둘러싸인 부분, 선분 $\mathrm{A_1C_1}$과 호 $\mathrm{A_1C_1}$으로 둘러싸인 부분에 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 원 C_1과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 동시에 접하는 원 중 반지름이 가장 큰 원을 C_2라 하고, 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 원 C_2가 만나는 점을 $\mathrm{A_2}$라 하자. 원 C_2 위에 $\overline{\mathrm{A_2B_2}} : \overline{\mathrm{A_2C_2}} = 2:1$, $\angle \mathrm{B_2A_2C_2} = \frac{2\pi}{3}$가 되도록 두 점 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$를 잡고, 선분 $\mathrm{A_2B_2}$와 호 $\mathrm{A_2B_2}$로 둘러싸인 부분, 선분 $\mathrm{A_2C_2}$와 호 $\mathrm{A_2C_2}$로 둘러싸인 부분에 각각 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1　　　R_2

① $\frac{16}{3}\pi - \frac{52\sqrt{3}}{7}$　② $\frac{17}{3}\pi - 7\sqrt{3}$　③ $6\pi - \frac{46\sqrt{3}}{7}$
④ $\frac{19}{3}\pi - \frac{43\sqrt{3}}{7}$　⑤ $\frac{20}{3}\pi - \frac{40\sqrt{3}}{7}$

28. 0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x} & (x < 0) \\ \ln(x+2) & (x \ge 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_0^x \{1 - \cos(2\pi t)\} f(t)\, dt$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점*]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄴ. $k>0$일 때, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄷ. $k=-1$일 때, 모든 정수 n에 대하여
　$2g(n) < g(n-1) + g(n+1)$이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

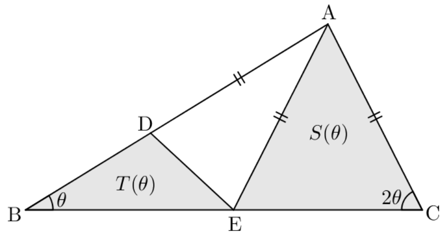
29. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\ln(1+t^2),\quad y=a\left(t-\frac{1}{t}\right)\ (a>0)$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력이 $\frac{\sqrt{5}}{2}$일 때, $\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

30. 그림과 같이 $\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\theta$, $\angle ACB=2\theta$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB와 BC 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{AE}$가 되도록 각각 점 D, E를 잡는다. 삼각형 ACE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 BDE의 넓이를 $T(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=a$이다.

$100a$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



31. 음의 실수 t에 대하여 함수

$$f(x) = \ln\left(e^t x^2 + a\right) + \frac{1}{2}x \quad (0 < a < 1)$$

가 실수 전체에서 정의된 역함수 $g(x)$를 가진다. 방정식

$$f(2x) = \frac{1}{2}g(x)$$

의 양의 실근을 $x = \alpha$라 할 때, $g'(\alpha)$의 최솟값을 $h(t)$라 하자.
$\displaystyle\int_{-\ln 10}^{-\ln 5}\left(\frac{1}{h(t)} - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점*]

2021학년도 대학수학능력시험 대비
녹색지대 N제 수학 영역

정답과 해설

수학Ⅰ

정 답

1	③	2	③	3	④	4	②	5	⑤
6	⑤	7	③	8	⑤	9	27	10	101
11	882	12	96	13	④	14	①	15	7
16	509	17	⑤	18	④	19	③	20	①
21	⑤	22	27	23	20	24	③	25	④
26	47	27	⑤	28	④	29	①	30	④
31	34	32	58	33	②	34	①	35	③
36	①	37	101						

해 설

1. [출제 의도] 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 공비를 r이라 하면
주어진 조건으로부터 $a_1 \neq 0$, $r \neq 0$이므로

$a_2 + a_3 = 2a_4$

$\Rightarrow a_1(r+r^2) = 2a_1 r^3$

$\Rightarrow 1+r = 2r^2$, $\quad 2r^2 - r - 1 = 0$

$\Rightarrow (2r+1)(r-1) = 0$, $r = -\dfrac{1}{2}$ 또는 $r=1$

$r=1$이면 $(a_2)^2 - (a_3)^2 = 0$이므로 $r = -\dfrac{1}{2}$이고,

$(a_2)^2 - (a_3)^2 = (a_1)^2(r^2 - r^4) = \dfrac{3(a_1)^2}{16} = \dfrac{1}{12}$

$\therefore\ (a_1)^2 = \dfrac{4}{9}$, $\quad a_1 = \dfrac{2}{3}$ $(\because\ a_1 > 0)$

$\therefore\ a_5 = a_1 \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{24}$

2. [출제 의도] 로그를 포함한 부등식의 해를 구할 수 있는가?

$\log_3(2x-3) \le \log_{\frac{1}{3}}x + 3$

$\Rightarrow \log_3(2x-3) + \log_3 x \le 3$

$\Rightarrow \log_3 x(2x-3) \le 3$, $\quad x(2x-3) \le 27$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 27 \le 0$, $(2x-9)(x+3) \le 0$

$\therefore\ -3 \le x \le \dfrac{9}{2}$ $\cdots$ (1)

한편, 로그가 정의될 조건에 의하여

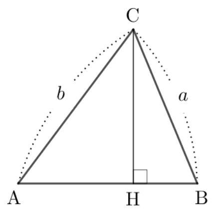
$2x - 3 \ge 0$, $x \ge 0$이므로 $x \ge \dfrac{3}{2}$ $\cdots$ (2)

(1), (2)에서 $\dfrac{3}{2} \le x \le \dfrac{9}{2}$이므로

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값은
2, 3, 4이고, 그 합은 9이다.

3. [출제 의도] 사인법칙을 이용하여 삼각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}} = a$, $\overline{\mathrm{AC}} = b$라 하고,
점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \dfrac{4}{5}$ $(\because\ A < 90^\circ)$

$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \dfrac{5}{13}$ $(\because\ B < 90^\circ)$

이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow \dfrac{12a}{13} = \dfrac{4b}{5}$ $\cdots$ (1)

한편

$\overline{\mathrm{AH}} = b\cos A = \dfrac{3b}{5}$, $\overline{\mathrm{BH}} = a\cos B = \dfrac{5a}{13}$

에서

$\overline{\mathrm{AH}} + \overline{\mathrm{BH}} = \dfrac{5a}{13} + \dfrac{3b}{5} = \overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{14}{5}$ $\cdots$ (2)

(1), (2)를 연립하여 풀면 $a = \dfrac{13}{5}$, $b = 3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}} = 3$

(다른 풀이) 점 A를 좌표평면의 원점으로 두면

$\overline{\mathrm{AB}} = \dfrac{14}{5}$이므로 $\mathrm{B}\left(\dfrac{14}{5},\ 0\right)$이고

$\cos A = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \dfrac{4}{5}$에서 $\tan A = \dfrac{4}{3}$

이므로 직선 AC의 방정식은 $y = \dfrac{4}{3}x$ $\cdots$ (1)

$\sin B = \dfrac{12}{13} \Rightarrow \cos B = \dfrac{5}{13}$에서 $\tan B = \dfrac{12}{5}$

이고, 직선 BC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $-B$이므로 직선 BC의 방정식은

$y = -\dfrac{12}{5}\left(x - \dfrac{14}{5}\right) = -\dfrac{12}{5}x - \dfrac{168}{25}$ $\cdots$ (2)

(1)과 (2)를 연립하여 풀면 $x = \dfrac{9}{5}$, $y = \dfrac{12}{5}$

이므로 점 C의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$이고

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\left(\dfrac{9}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{12}{5}\right)^2} = 3$

4. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 각 항을 계산할 수 있는가?

$a_1 = a$라 하면 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의로부터

$a_2 = a + 3$

$a_3 = \dfrac{a_2 - 2}{2} = \dfrac{a+1}{2}$

$a_4 = a_3 + 3 = \dfrac{a+7}{2}$

$a_5 = \dfrac{a_4 - 4}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a-1}{2} = \dfrac{a-1}{4}$

문제의 조건에서 $\dfrac{a-1}{4} = 3$이므로 $a = 13$

5. [출제 의도] 삼각함수의 그래프와 연속함수의 성질을 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) < 0$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) > 0$이므로 사잇값 정리에 의해

$f(c) = 0$인 c가 열린 구간 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, $bc + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ (n은 정수)인 c가

열린 구간 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재해야 한다. 그런데

(i) $b = 1$인 경우 $\dfrac{\pi}{2} < c + \dfrac{\pi}{3} < \dfrac{3\pi}{2}$이므로

$c + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$인 c가 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재하지 않는다.

(ii) $b = 2$인 경우 (i)과 같은 방법으로

$c + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$인 c가 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에 존재하지 않는다.

(i), (ii)와 문제의 조건으로부터 $b = 3$이다.

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{3}{2}$이므로

$a\cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{a}{2} = -\dfrac{3}{2}$, $\quad a = 3$

따라서 $a + b = 6$이다.

6. [출제 의도] 지수함수와 직선의 성질을 이용하여 지수함수의 식을 구할 수 있는가?

점 C의 좌표는 $(a,\ 0)$이고 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = 3:1$이므로
양수 k에 대하여 점 A의 x좌표를 $a - 4k$,
점 B의 x좌표를 $a - k$로 둘 수 있다.
즉, 점 A, B는 $y = -x + a$ 위의 점이므로
$\mathrm{A}(a-4k,\ 4k)$, $\mathrm{B}(a-k,\ k)$이다.

점 A, B는 곡선 $y = 2^{-x+1}$ 위의 점이므로
$2^{-(a-4k)+1} = 2^{4k-a+1} = 4k$
$2^{-(a-k)+1} = 2^{k-a+1} = k$

양변을 변변 나누면

$2^{(4k-a+1)-(k-a+1)} = 4$, $\quad 2^{3k} = 4$

$\therefore\ k = \dfrac{2}{3}$

$2^{k-a+1} = k$에서

$2^{\frac{5}{3}-a} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 2^{-a} = \dfrac{2}{3} \times 2^{-\frac{5}{3}} = \dfrac{1}{3} \times 2^{-\frac{2}{3}}$

$\therefore\ 2^a = 3 \times 2^{\frac{2}{3}}$

7. [출제 의도] 거듭제곱근의 정의를 이해하고, 실수인 거듭제곱근의 개수를 구할 수 있는가?

n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 실수인 n제곱근은 아래 표와 같다.

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

$\log\dfrac{30}{n(n+1)} = \log 30 - \log n(n+1)$에서

$1 \le n < 5$이면 $\log\dfrac{30}{n(n+1)} > 0$

$n = 5$이면 $\log\dfrac{30}{n(n+1)} = 0$

$n > 5$이면 $\log\dfrac{30}{n(n+1)} < 0$

이므로 위의 표로부터

$f(1) = f(3) = 2$
$f(5) = 1$
$f(7) = f(9) = 0$
$f(2) = f(4) = f(6) = f(8) = f(10) = 1$
이다.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{10} f(n) = 2\times2+1\times6 = 10$

8. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): 문제에서 주어진 조건으로부터
$a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k} = 3k-2$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k = \sum_{k=1}^{m}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$$
$$= \sum_{k=1}^{m}(3k-2)$$
$$= \frac{m\{2+3(m-1)\}}{2} = \frac{m(3m-1)}{2}$$

$\therefore\ f(m) = \dfrac{m(3m-1)}{2}$

(나): $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{3m-1} a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k - a_{3m}$
$= \dfrac{m(3m-1)}{2} - a_{3m}$

이고, 수열 $\{a_{3m}\}$은 첫째항이 $a_3 = -1$이고 공차가 1인 등차수열이므로 $a_{3m} = m-2$

$\therefore\ g(m) = m-2$

(다): 문제의 조건을 만족하는 자연수 n은 9로 나눈 나머지가 0 또는 4인 자연수이다.

100 이하의 자연수 중 9로 나눈 나머지가 0인 자연수의 개수는 11이고,

100 이하의 자연수 중 9로 나눈 나머지가 4인 자연수의 개수는 11이므로

문제의 조건을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는 22이다.

$\therefore\ p = 22$

$\therefore\ f(p)+g(p) = \dfrac{22\times65}{2}+(22-2) = 735$

9. [출제 의도] 지수법칙과 절대부등식을 이용하여 식의 최솟값을 구할 수 있는가?

임의의 두 양수 x, y에 대하여 $\dfrac{x+y}{2} \ge \sqrt{xy}$ 가 성립하므로 (등호는 $x=y$일 때 성립)

$10(2^{-a}+2^{-b}) = (2^a+2^b)(2^{-a}+2^{-b})$
$= 2+2^{a-b}+2^{b-a} \ge 2+2\sqrt{2^{a-b}\times2^{b-a}} = 4$

이고, $2^{-a}+2^{-b} \ge \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$이다.

또한, 위의 부등식에서 등호는

$2^{a-b} = \dfrac{1}{2^{a-b}} \Rightarrow 2^{a-b}=1 \Rightarrow a=b$

일 때 성립하므로 $2^{-a}+2^{-b}$는 $2^a = 2^b = 5$일 때 최솟값 $\dfrac{2}{5}$를 갖는다.

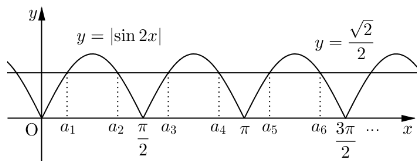
$\therefore\ \alpha = \dfrac{2}{5},\ \beta = 25 \Rightarrow 5\alpha+\beta = 2+25 = 27$

10. [출제 의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 삼각방정식의 해를 구하고, 수열의 합을 계산할 수 있는가?

방정식 $|\sin2x| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$은 닫힌구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 두 실근 $x=\dfrac{\pi}{8}$, $x=\dfrac{3\pi}{8}$를 갖는다.

즉, $a_1 = \dfrac{\pi}{8}$, $a_2 = \dfrac{3\pi}{8}$이다. … (1)

함수 $y=|\sin2x|$는 주기가 $\dfrac{\pi}{2}$인 주기함수이므로 아래 그림과 같이 $a_{n+2} = a_n+\dfrac{\pi}{2}$를 만족함을 알 수 있다. … (2)



(1), (2)에서 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n = \dfrac{\pi}{4}$를 만족시킨다. … (3)

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째 항이 $\dfrac{\pi}{8}$이고, 공차가 $\dfrac{\pi}{4}$인 등차수열이므로

$$a_n = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}(n-1) = \frac{(2n-1)\pi}{8}$$

이다.

$$\therefore\ \frac{\pi^2}{32}\sum_{n=1}^{25}\frac{1}{a_na_{n+1}}$$
$$= \frac{\pi^2}{32}\sum_{n=1}^{25}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$
$$= \frac{\pi}{8}\sum_{n=1}^{25}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\ \ (\because (3))$$
$$= \frac{\pi}{8}\left\{\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{25}}\right) - \left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\dots+\frac{1}{a_{26}}\right)\right\}$$
$$= \frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{26}}\right) = \frac{\pi}{8}\left(\frac{8}{\pi}-\frac{8}{51\pi}\right)$$
$$= 1-\frac{1}{51} = \frac{50}{51}$$

$\therefore\ p+q = 51+50 = 101$

11. [출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 있는가?

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1} = S_n$이라 하면

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

(i) $S_1 = \dfrac{a_1}{2} = 1^2+1+1 = 3 \Rightarrow a_1 = 6$

(ii) $n \ge 2$일 때,

$$\frac{a_n}{n+1} = S_n - S_{n-1}$$
$$= (n^2+n+1)-\{(n-1)^2+(n-1)+1\}$$
$$= 2n$$

이므로

$a_n = 2n(n+1) = 2n^2+2n\ (n\ge2)$

(i), (ii)에 의하여

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n = a_1+\sum_{n=2}^{10}a_n$$
$$= 6+\sum_{n=2}^{10}(2n^2+2n)$$
$$= 6+\sum_{n=1}^{10}(2n^2+2n)-4$$
$$= 2+\frac{10\times11\times21}{3}+10\times11 = 882$$

12. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 주어진 식의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

$\angle APB = \theta$라 하면 명백히 $0<\theta<\pi$이므로

$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$인 θ의 값은 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$일 때와 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$일 때 각각 하나씩 존재한다.

(i) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$인 경우

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2\times\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ 이므로 삼각형 APB는 반지름의 길이가 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$인 원에 내접한다.

또한, CD의 중점을 M이라 하면

$$\cos\angle AMB = \frac{(\overline{AM})^2+(\overline{BM})^2-(\overline{AB})^2}{2\,\overline{AM}\cdot\overline{BM}}$$
$$= \frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-2^2}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

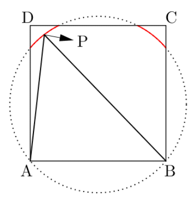
이고,

$$\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

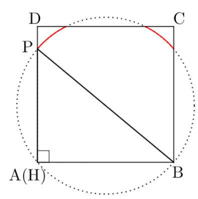
이므로 $\theta < \angle AMB$이다.

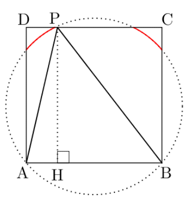
즉, $0<\theta<\angle AMB<\dfrac{\pi}{2}$이므로 삼각형 APB의 외접원의 중심은 정사각형 ABCD의 내부에 있고, 그 일부(활꼴)는 정사각형 ABCD의 외부에 있다.

즉, 점 P는 중심이 정사각형 ABCD의 내부에 있고, 반지름이 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$이고, 선분 AB를 현으로 갖는 원에서 정사각형 ABCD와 그 내부에 있는 부분(호) 위를 움직인다.
이를 그림으로 나타내면 다음와 같다.



점 P에서 선분 AB로 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH의 길이는 점 P가 선분 AD 위에 있을 때 가장 작고, 점 P가 선분 CD 위에 있을 때 가장 크다.





선분 PH의 길이가 최소인 경우, 점 H와 점 A는 일치하고, 선분 PB는 원의 지름과 같으므로

$\overline{PH} = \overline{PB}\cos\theta = \frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

선분 PH의 길이가 최대인 경우 선분 PH의 길이는 정사각형 ABCD의 한 변의 길이와 같으므로

$\overline{PH} = 2$

$\therefore\ \frac{4\sqrt{5}}{5} \le \overline{PH} \le 2\ \cdots\ (1)$

$\overline{AP} = a$, $\overline{BP} = b$라 하면

$$\triangle PAB = \frac{1}{2}ab\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{6}ab = \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH} = \overline{PH}$$

이므로 (1)에서

$$\frac{4\sqrt{5}}{5} \le \frac{\sqrt{5}}{6}ab \le 2\ \Rightarrow\ \frac{24}{5} \le ab \le \frac{12\sqrt{5}}{5}\ \cdots\ (2)$$

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\theta = (\overline{AB})^2$

$\Rightarrow\ a^2+b^2-\frac{4}{3}ab = 4\ \left(\because\ \cos\theta = \frac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow\ a^2+b^2 = 4+\frac{4}{3}ab$

(2)에서 $\frac{52}{5} \le a^2+b^2 \le 4+\frac{16\sqrt{5}}{5}\ \cdots$ (가)

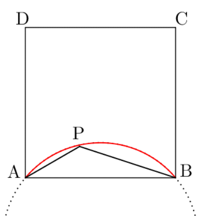
(ii) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 경우

정사각형 ABCD 또는 그 내부의 한 점 E가 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$를 만족시키는 경우 점 E는 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 있다.

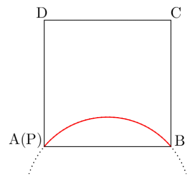
$\angle APB > \frac{\pi}{2}$이므로 점 P는 그 반원 내부의 점이고, 삼각형 APB의 외접원의 중심은 정사각형 ABCD의 외부에 있다.

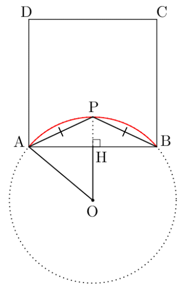
즉, 이 경우 점 P는 (i)과 같은 방법으로 중심이 정사각형 ABCD 외부에 있고, 반지름이 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$이고, 선분 AB를 현으로 갖는 원에서 정사각형 ABCD와 그 내부에 있는 부분(호) 위를 움직인다.

이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



점 P에서 선분 AB로 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH의 길이는 점 P가 호 AB의 중점일 때 가장 크고, 점 P가 점 A 또는 점 B와 일치할 때 가장 작다.





선분 PH의 길이가 최소인 경우 $\overline{PH} = 0$이다.

선분 PH의 길이가 최대인 경우 $\overline{PH} = x$라 하고, 삼각형 APB의 외접원의 중심을 O라 하면 직각삼각형 AHO에서

$(\overline{AO})^2 = (\overline{AH})^2+(\overline{OH})^2$

$\Rightarrow\ \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1^2+\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}-x\right)^2$

$\Rightarrow\ 5x^2-6\sqrt{5}x+5 = 0$

$\Rightarrow\ x = \frac{3\sqrt{5}\pm\sqrt{(3\sqrt{5})^2-25}}{5} = \frac{3\sqrt{5}\pm2\sqrt{5}}{5}$

$x < \frac{3\sqrt{5}}{5}$이므로 $x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ 0 \le \overline{PH} \le \frac{\sqrt{5}}{5}\ \cdots\ (3)$

(i)과 같은 방법으로

$\triangle PAB = \frac{\sqrt{5}}{6}ab = \overline{PH}$

이므로 (3)에서

$0 \le \frac{\sqrt{5}}{6}ab \le \frac{\sqrt{5}}{5}\ \Rightarrow\ 0 \le ab \le \frac{6}{5}\ \cdots\ (4)$

$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{2}{3}$이므로

삼각형 APB에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\theta = (\overline{AB})^2$

$\Rightarrow\ a^2+b^2+\frac{4}{3}ab = 4$

$\Rightarrow\ a^2+b^2 = 4-\frac{4}{3}ab$

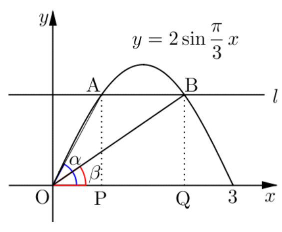
(4)에서 $\frac{12}{5} \le a^2+b^2 \le 4\ \cdots$ (나)

(가), (나)에서 $a^2+b^2 = (\overline{AP})^2+(\overline{BP})^2$의 최솟값은 $\frac{12}{5}$, 최댓값은 $4+\frac{16\sqrt{5}}{5}$이다.

$\therefore\ m+M = \frac{32}{5}+\frac{16\sqrt{5}}{5}$

$\therefore\ 10(a+b) = 10\left(\frac{32}{5}+\frac{16}{5}\right) = 96$

13. [출제 의도] 삼각함수의 그래프와 그 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?



그림과 같이 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라 하고,

$\angle AOP = \alpha$, $\angle BOQ = \beta$라 하면

$\tan\alpha = 2$, $\tan\beta = \frac{2}{5}$

$\therefore\ \tan\theta = \tan(\alpha-\beta)$

$$= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{2-\frac{2}{5}}{1+2\times\frac{2}{5}} = \frac{8}{9}$$

(다른 풀이) - 수학I

함수 $y = 2\sin\frac{\pi}{3}x$는 직선 $x = \frac{3}{2}$에 대하여 대칭이고, $\overline{AB} = 2$이므로

점 A의 x좌표는 $\frac{1}{2}$이고, 점 B의 x좌표는 $\frac{5}{2}$이다.

점 A는 함수 $y = 2\sin\frac{\pi}{3}x$의 그래프 위의 점이므로

$A\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $B\left(\frac{5}{2},\ 1\right)$이다.

따라서

$\overline{OA} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\overline{OB} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+1^2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2-2^2}{2\times\frac{\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{29}}{2}} = \frac{9}{\sqrt{145}}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{9}{\sqrt{145}}\right)^2} = \frac{8}{\sqrt{145}}$

$\therefore\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{9}$

14. [출제 의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

점 A의 좌표는 $(a,\ \log_2 a)$이고 조건 (가), (나)에 의하여 점 B의 좌표는 $(a+1,\ \log_4(a+1))$이다.

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 1이므로

$\log_2 a-\log_4(a+1) = 1$

$\log_4 a^2 = \log_4 4(a+1)$

$a^2 = 4(a+1)$, $a^2-4a-4 = 0$

$\therefore\ (a-2)^2 = 8$

$a > 0$이므로 $a-2 = 2\sqrt{2}$

$\therefore\ f(a-2)+g(a-2)$

$= \log_2 2\sqrt{2}+\log_4 2\sqrt{2}$

$= \log_2 2^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}\log_2 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}+\frac{3}{4} = \frac{9}{4}$

15. [출제 의도] 등차수열의 일반항과 합을 계산할 수 있는가?

$a_7 \ge 0$이면 $a_3+a_7 = 2a_5 > 0$이어야 하므로 문제의 조건에 어긋난다.

따라서 $a_7 < 0$이고, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3+|a_7| = a_3-a_7 = -4d = 8$

$\therefore\ d = -2$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10}\{a_1 - 2(n-1)\}$$
$$= \sum_{k=1}^{10}(-2n + a_1 + 2)$$
$$= -2\times\frac{10\times 11}{2} + 10(a_1+2)$$
$$= 10a_1 - 90 = -15$$

$\therefore\ a_1 = \dfrac{15}{2}$

$a_3 = a_1 + 2d = \dfrac{15}{2} - 4 = \dfrac{7}{2}$

이므로

$\therefore\ a_2 + a_4 = 2a_3 = 7$

16. [출제 의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하여 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

문제에서 주어진 등식으로부터

$S_1 = a_1 = \dfrac{1}{2}$이고,

$$a_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{2n-2}$$
$$= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n(n-1)}$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\ (n \ge 2)$$

$a_2 = S_2 - a_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = -1$이고,

$$a_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1}$$
$$= -\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= -\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\ (n \ge 2)$$

따라서

$(-1)^2 a_1 + (-1)^3 a_2 = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$,

$$(-1)^{2n}a_{2n-1} + (-1)^{2n+1}a_{2n}$$
$$= a_{2n-1} - a_{2n}$$
$$= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\ (n \ge 2)$$

이므로

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{20}(-1)^{n+1}a_n$$
$$= \sum_{n=1}^{10}\{a_{2n-1} - a_{2n}\}$$
$$= \frac{3}{2} + \sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + 3\sum_{n=2}^{10}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= \frac{3}{2} + \left(1 - \frac{1}{10}\right) + 3\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{11}\right)$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{9}{10} + \frac{27}{22} = \frac{399}{110}$$

$\therefore\ p + q = 110 + 399 = 509$

17. [출제 의도] 등차수열과 등비수열의 성질을 이해하고 있는가?

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

조건 (가)에서

${b_2}^2 = b_1 b_5$

$\Rightarrow\ (a_2 + a_4)^2 = (a_1 + a_2)(a_5 + a_{10})$

$\Rightarrow\ 4(a + 2d)^2 = (2a + d)(2a + 13d)$

$\Rightarrow\ d^2 - 4ad = 0,\ d(d - 4a) = 0$

$d \ne 0$이므로 $4a = d$ ⋯ ①

$a_3 + b_3 = 2a_3 + a_6 = 3a + 9d = \dfrac{13}{2}$

에서 $a + 3d = \dfrac{13}{6}$ ⋯ ②

①, ②에서 $a = \dfrac{1}{6},\ d = \dfrac{2}{3}$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{12} a_k = \frac{12\left(2\times\frac{1}{6} + 11\times\frac{2}{3}\right)}{2} = 46$$

18. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$의 그래프가 $\left(\dfrac{\pi}{6}, 1\right)$을 지나므로

$\cos^2\dfrac{\pi}{6} + a\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{4} + \dfrac{a}{2} = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) = \cos^2 x + \frac{1}{2}\sin x$$
$$= -\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin x + 1$$
$$= -\left(\sin x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{17}{16}$$

이고 $-1 \le \sin x \le 1$이므로 이차함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)$는 $\sin x = \dfrac{1}{4}$일 때 최댓값 $\dfrac{17}{16}$을 갖고, $\sin x = -1$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{17}{16} - \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$$

19. [출제 의도] $\sum$의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 계산할 수 있는가?

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)$$
$$= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_{n+1} - a_n)$$
$$= a_{n+1} - a_1$$

이므로

$a_{n+1} = 2^{n-1} + n + 1 + a_1\ (n \ge 1)$

따라서

$a_4 = 2^{3-1} + 3 + 1 + a_1 = 8 + a_1$

$a_5 = 2^{4-1} + 4 + 1 + a_1 = 13 + a_1$

$\Rightarrow\ a_4 + a_5 = 21 + 2a_1 = 7$

$\therefore\ a_1 = -7$

$\therefore\ a_{10} = 2^{9-1} + 9 + 1 + a_1 = 256 + 10 - 7 = 259$

20. [출제 의도] 수열의 귀납적 정의를 활용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $a_{2n+1} - a_{2n} = 1$이므로 $(*)$에서

$2n = 2^{m+1}$일 때에만 $a_{2n+1} = 2$이다.

즉 $2n + 1 = 2^m + 1$ (m은 음이 아닌 정수)이어야 한다. 따라서 $a_k = 2$일 필요충분조건은

$k = 2^{m+1} + 1$ (m은 음이 아닌 정수)

이다. $\therefore\ f(m) = 2^{m+1} + 1$

(나): (가)에서 $k = 2^{m+1} + 1 \le 100$이므로 $0 \le m \le 5$이다. 따라서 $a_k = 2$인 자연수 k의 개수는 6이다. $\therefore\ a = 6$

(다): $n = 2^{m+1} + 1$인 자연수 n은 $n = 3, 5, 9, 17, 33, 65$이다.

$a_3 = 2$에서 $a_6 = a_{12} = a_{24} = a_{48} = a_{96} = 2$

$a_5 = 2$에서 $a_{10} = a_{20} = a_{40} = a_{80} = 2$

$a_9 = 2$에서 $a_{18} = a_{36} = a_{72} = 2$

$a_{17} = 2$에서 $a_{34} = a_{68} = 2$

$a_{33} = 2$에서 $a_{66} = 2$

이상에서 $a_k = 2$인 자연수 k의 개수는

$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$이다. $\therefore\ b = 15$

$\therefore\ f(a+1) + b = (2^{7+1} + 1) + 15 = 272$

21. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d < 0$인 경우

$a_5 > a_6 > a_7$이면 $a_5 + a_6 > a_7$이다.

조건 (가)에서 a_7과 $a_5 + a_6$은 양수이므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = 5(a_5 + a_6) > a_7$이다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로

$d > 0$이어야 한다. 또한

$0 < \displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k < a_7$

$\Leftrightarrow\ 0 < 5(a_5 + a_6) < a_5 + 2d$

$\Leftrightarrow\ 0 < 10a_5 + 5d < a_5 + 2d$

$\Leftrightarrow\ -\dfrac{d}{2} < a_5 < -\dfrac{d}{3}$ ⋯ $(*)$

이므로 $a_5 < 0$이다.

$d > 0$이므로 $a_4 < 0$이다.

이때 $a_6 < 0$이면

$(|a_5| - |a_4|)(|a_6| - |a_5|)$

$= (a_4 - a_5)(a_5 - a_6) = d^2 > 0$

이므로 조건 (나)를 만족하지 않는다.

따라서 $a_6 > 0$이고, 조건 (나)에서

$(|a_5| - |a_4|)(|a_6| - |a_5|)$

$= (a_4 - a_5)(a_6 + a_5)$

$= (2a_5 + d)(-d) = -16$

$\Rightarrow\ d(2a_5 + d) = 16$

$d > 0$이므로 $2a_5 + d > 0$이고, d와 $2a_5 + d$는 모두 정수이므로 가능한 경우는 아래와 같다.

$d = 1,\ 2a_5 + d = 16 \Rightarrow a_5 = \dfrac{15}{2},\ d = 1$

$d = 2,\ 2a_5 + d = 8 \Rightarrow a_5 = 3,\ d = 2$

$d = 4,\ 2a_5 + d = 4 \Rightarrow a_5 = 0,\ d = 4$

$d = 8,\ 2a_5 + d = 2 \Rightarrow a_5 = -3,\ d = 8$

$d = 16,\ 2a_5 + d = 1 \Rightarrow a_5 = -\dfrac{15}{2},\ d = 16$

문제의 조건과 $(*)$을 모두 만족하는 경우는

$a_5 = -3,\ d = 8$인 경우뿐이다.

$\therefore\ a_{10} = -3 + 5d = 37$

22. [출제 의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

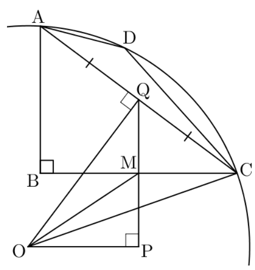
두 함수 $y = \log_a(x+1) + \sqrt{3}$, $y = a^{x-\sqrt{3}} - 1$은 서로 역함수 관계에 있으므로

점 A의 좌표를 (p, q)라 하면 점 A는 $y=-x+k$ 위의 점이므로 $q=-p+k \Rightarrow p=-q+k$
즉, 점 (q, p) 또한 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로 역함수의 그래프의 성질에 의하여 점 B의 좌표는 (q, p)이다. $(p<q)$

문제의 조건에서
$\overline{\text{OA}} = \overline{\text{AB}} = 2\sqrt{2}$ 이므로
$\overline{\text{OA}} = \sqrt{p^2+q^2} = 2\sqrt{2}$
$\overline{\text{AB}} = \sqrt{2(p-q)^2} = 2\sqrt{2}$
$\Rightarrow p^2+q^2=8,\ (p-q)^2=4$
이 둘을 연립하여 풀면
$p=\sqrt{3}-1,\ q=\sqrt{3}+1$
즉, 점 $(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$은
곡선 $y=\log_a(x+1)+\sqrt{3}$ 위의 점이므로
$\log_a\sqrt{3}+\sqrt{3} = \sqrt{3}+1 \ \Rightarrow\ a=\sqrt{3}$
또한, 점 $(\sqrt{3}-1,\ \sqrt{3}+1)$은 직선 $y=-x+k$ 위의 점이므로
$\sqrt{3}+1=-(\sqrt{3}-1)+k \Rightarrow k=2\sqrt{3}$
$\therefore\ (a+k)^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$

23. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\text{AC}}=5$이고,
$\sin\angle\text{ADC} = \sqrt{1-\cos^2\angle\text{ADC}} = \dfrac{2\sqrt{13}}{13}$
이므로 삼각형 ACD의 외접원의 반지름을 R이라 하면 사인법칙에 의하여
$$2R=\frac{\overline{\text{AC}}}{\sin\angle\text{ADC}} \Rightarrow R=\frac{5\sqrt{13}}{4}$$
이고, $\cos\angle\text{ADC}<0$이므로 세 점 A, C, D는 반지름의 길이가 $\dfrac{5\sqrt{13}}{4}$인 원 위에 있고, 점 D는 짧은 호 AC 위의 점이다. ⋯ ①



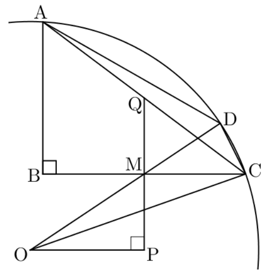
삼각형 ACD의 외접원의 중심을 O, 선분 AC의 중점을 Q라 하자.

그림과 같이 점 O를 지나고 선분 BC와 평행한 직선이 점 Q를 지나고 선분 AB와 평행한 직선과 만나는 점을 P, 선분 PQ가 선분 BC와 만나는 점을 M이라 하자.

①에서 $\overline{\text{OQ}}=\sqrt{\overline{\text{OC}}^2-\overline{\text{CQ}}^2}=\dfrac{15}{4}$
이고, $\triangle\text{ABC} \backsim \triangle\text{OPQ}$이므로
$\overline{\text{OP}}=\dfrac{3}{5}\overline{\text{OQ}}=\dfrac{9}{4},\ \overline{\text{PQ}}=\dfrac{4}{5}\overline{\text{OQ}}=3$
점 M은 선분 BC의 중점이므로
$\overline{\text{MQ}}=\dfrac{3}{2}$이고, $\overline{\text{PM}}=\overline{\text{PQ}}-\overline{\text{MQ}}=\dfrac{3}{2}$

$\overline{\text{OM}}=\sqrt{\overline{\text{OP}}^2+\overline{\text{PM}}^2}=\dfrac{3\sqrt{13}}{4}$

평면도형의 성질로부터
$\overline{\text{OM}}+\overline{\text{MD}} \ge \overline{\text{OD}}$
$\Rightarrow\ \overline{\text{MD}} \ge \overline{\text{OD}}-\overline{\text{OM}}$
$\qquad =\dfrac{5\sqrt{13}}{4}-\dfrac{3\sqrt{13}}{4}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$
$\therefore\ m=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ ⋯ ②



위 그림과 같이 $\overline{\text{MD}}$가 최소가 되는 경우는 세 점 O, M, D가 한 직선 위에 있는 경우이다.
이때
$\cos\angle\text{POM}=\cos\angle\text{CMD}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$
이므로 삼각형 CMD에서 코사인법칙에 의하여
$$\overline{\text{CD}}^2=\overline{\text{CM}}^2+\overline{\text{DM}}^2-2\cdot\overline{\text{CM}}\cdot\overline{\text{DM}}\cdot\cos\angle\text{CMD}$$
$$=2^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-2\cdot2\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}$$
$$=4+\frac{13}{4}-6=\frac{5}{4}$$
이므로 $\overline{\text{CD}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

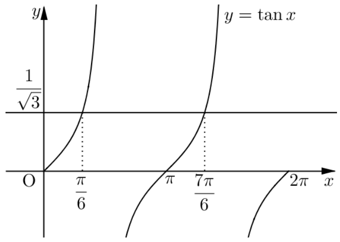
삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{\text{CD}}}{\sin\angle\text{CAD}}=2R=\dfrac{5\sqrt{13}}{2}$
$\Rightarrow\ \sin\angle\text{CAD}=\dfrac{1}{\sqrt{65}}=k$ ⋯ ③
②, ③에서
$\therefore\ \left(\dfrac{1}{mk}\right)^2=\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\cdot\sqrt{65}\right)^2=20$

24. [출제 의도] 거듭제곱근과 로그의 정의를 이해하고 있는가?

거듭제곱근의 정의에 의하여
$a=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}},\ \dfrac{1}{b}=2^{\frac{1}{4}} \Rightarrow b=2^{-\frac{1}{4}}$
따라서
$b=2^{-\frac{1}{4}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{8}}$
이므로 로그의 정의에 의하여
$\log_a b=-\dfrac{3}{8}$이다.

25. [출제 의도] 로그와 삼각함수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

주어진 방정식은
$\log_3(\tan x)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow \tan x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
아래 그림과 같이 탄젠트함수의 그래프를 그려서 $0\le x<2\pi$에서 위의 방정식을 풀면
$x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{7\pi}{6}$이다.



따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은
$$\frac{\pi}{6}+\frac{7\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$$

26. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$n=8$일 때에는 주어진 부등식이 항상 성립하므로 주어진 부등식이 모든 자연수 n에 대하여 성립하려면
$n<8$일 때 $S_n\le 30$
$n>8$일 때 $S_n\ge 30$이어야 한다.
따라서 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d>0$이고,
$S_7\le 30,\ S_9\ge 30$이어야 한다.
$S_7=\dfrac{7(a_1+a_7)}{2}=7a_4\le 30 \Rightarrow a_4\le\dfrac{30}{7}$
$S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5\ge 30 \Rightarrow a_5\ge\dfrac{10}{3}$
이므로
$a_4=a_1+3d=1+3d\le\dfrac{30}{7} \Rightarrow d\le\dfrac{23}{21}$
$a_5=a_1+4d=1+4d\ge\dfrac{10}{3} \Rightarrow d\ge\dfrac{7}{12}$
$\therefore\ \dfrac{7}{12}\le d\le\dfrac{23}{21}$
$\therefore\ 28(M+m)=28\left(\dfrac{7}{12}+\dfrac{23}{21}\right)=47$

27. [출제 의도] 지수함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

$f(x)=a\times 2^{1-x}+b$
$\quad=2a\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+b$
이고 $a>0$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.
따라서 닫힌구간 $[0, 2]$에서
함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=2a+b=2$
함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=\dfrac{1}{2}a+b=-1$
위 두 등식을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-2$
$\therefore\ f(1)=4\times\dfrac{1}{2}-2=0$

28. [출제 의도] 등차수열의 성질을 이해하고, 그 합을 구할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$\displaystyle\sum_{k=1}^{11}(-1)^k a_k$
$=(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{10}-a_9)-a_{11}$
$=-a_{11}+5d=-a_6$
이므로 문제의 조건에서 $a_4+a_6=0$
등차중항의 성질에서 $a_5=0$

한편

$\sum_{k=1}^{12} a_k = \dfrac{12\times(a_1+a_{12})}{2} = 6(a_5+a_8)$

이고, $a_5=0$이므로 문제의 조건에서

$6a_8 = a_8+5 \Rightarrow a_8=1$, $3d=1$

$\therefore\ a_{20} = a_5+15d = 5$

29. [출제 의도] 삼각함수의 그래프를 이해하고, 삼각함수를 포함한 방정식을 해결할 수 있는가?

곡선 $y=f(x)$를 x축에 대하여 대칭이동하고,

x축의 방향으로 $\dfrac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 -1만큼

평행이동하여 얻은 곡선의 식을 $y=g(x)$라 하면

$g(x) = -a\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)-b-1$

$\quad = a\cos x - b - 1$

문제의 조건에서 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = c$이므로

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+b = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a-b-1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{2}$

즉, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{1}{2} = c$ … ①

함수 $f(x)$의 최댓값이 $2\sqrt{2}c$이므로

(1) $a<0$인 경우

$-a-\dfrac{1}{2} = 2\sqrt{2}c$ … ②

①, ②를 연립하여 풀면

$a = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{6} > 0$이므로 가정에 모순이다.

(2) $a>0$인 경우

$a-\dfrac{1}{2} = 2\sqrt{2}c$ … ③

①, ③을 연립하여 풀면

$a = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}$, $c = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

30. [출제 의도] 귀납적으로 정의된 수열의 항을 계산하고, 그 합을 구할 수 있는가?

주어진 방정식으로부터 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=n$ 또는 $a_{n+1}=a_n-1$

이고 $a_{10}=5$이므로 $a_9=6$, $a_8=7$ … ①

한편, $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값이 최대가 되는 경우는

6 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=n$인

경우이고,

$\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값이 최소가 되는 경우는

6 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=a_n-1$인

경우이다.

따라서 $a_1=1$이므로 $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값의 최댓값과

최솟값은 각각

$1+(1+2+3+4+5+6)=22$,

$1+(0-1-2-3-4-5)=-14$ … ②

이다. 같은 방법으로

$\sum_{k=11}^{15} a_k$의 값이 최대가 되는 경우는

10 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=n$인

경우이고,

$\sum_{k=11}^{15} a_k$의 값이 최소가 되는 경우는

10 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=a_n-1$인 경우이다.

따라서 $a_{10}=5$이므로 $\sum_{k=11}^{15} a_k$의 값의 최댓값과

최솟값은 각각

$10+11+12+13+14=60$

$4+3+2+1+0=10$ … ③

①, ②, ③에서

$M = 22+(7+6+5)+60 = 100$

$m = -14+(7+6+5)+10 = 14$

$\therefore\ M+m = 100+14 = 114$

31. [출제 의도] 로그함수를 포함한 방정식을 해결할 수 있는가?

$\log_2\dfrac{g(x)}{f(x)} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{g(x)}{f(x)} \ge 1$

에서 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) $f(x)>0$인 경우

주어진 부등식은 $g(x) \ge f(x) > 0$과 같고,

문제의 그림에서 위 부등식을 만족시키는 x의 값의

범위는 $2<x\le 4$ … ①

(2) $f(x)<0$인 경우

주어진 부등식은 $g(x) \le f(x) < 0$과 같고

문제의 그림에서 위 부등식을 만족시키는 x의 값의

범위는 $12<x\le 14$ … ②

①, ②에서 주어진 부등식을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합은

$3+4+13+14=34$

32. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{BC}}=b$라 하면 조건 (가)에 의하여

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{3}b^2$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}ab\sin\left(\angle\mathrm{ABE}-\dfrac{\pi}{2}\right) = b^2$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}a(-\cos\angle\mathrm{ABE}) = b$

$\Rightarrow \dfrac{3\sqrt{5}}{5}a = b$ … ①

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{10}\sin\angle\mathrm{ABC} = 4\sqrt{2}$이고,

코사인법칙과 ①에서

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos\angle\mathrm{ABC}$

$\Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = a^2+b^2-2ab\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow 32 = a^2+\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a\right)^2-2a\times\dfrac{3\sqrt{5}}{5}a\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\Rightarrow a^2+\dfrac{9}{5}a^2-\dfrac{6}{5}a^2 = \dfrac{8}{5}a^2 = 32$

$\therefore\ a=2\sqrt{5}$, $b=6$

사인법칙에 의하여

$\sin\angle\mathrm{ACB} = \dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{2\sqrt{10}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow \sin\angle\mathrm{ACD} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\angle\mathrm{ACB}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\angle\mathrm{ACD} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\angle\mathrm{ACB}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}^2 = (4\sqrt{2})^2+6^2-2\times4\sqrt{2}\times6\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\quad = 32+36+48 = 116$

$\Rightarrow \overline{\mathrm{AD}} = 2\sqrt{29}$

이고, 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$2R = \dfrac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin\angle\mathrm{ACD}} = 2\sqrt{58}$

$\therefore\ R^2 = 58$

33. [출제 의도] 등비수열의 성질을 이용하여 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_2a_4+a_3a_5 = (a_3)^2+a_3a_5 = a_3(a_3+a_5)$

에서 수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$\dfrac{a_3(a_3+a_5)}{a_1+a_3} = a_3\cdot r^2 = a_5 = 4$

$a_5=4$이므로

$a_3(a_3+4) = 12$

$\Rightarrow (a_3)^2+4a_3-12=0$, $(a_3+6)(a_3-2)=0$

$a_5>0$이므로 $a_3>0$이어야 한다.

$\therefore\ a_3=2$

$\Rightarrow r^2 = \dfrac{a_5}{a_3} = 2$

$\therefore\ a_7 = a_5\cdot r^2 = 8$

34. [출제 의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 계산할 수 있는가?

$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\quad = \dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$\quad = \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = 4$

이므로 $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

한편 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a = \sin\theta+\cos\theta$, $b = \sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a^2+b^2 = (\sin\theta+\cos\theta)^2+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$

$\quad = \sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\dfrac{1}{16}$

$\quad = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{16} = \dfrac{25}{16}$

35. [출제 의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$\sin(A+B) = \sin(\pi-C) = \sin C = \dfrac{3}{5}$

$\cos(B+C) = \cos(\pi-A) = -\cos A = \dfrac{3}{5}$

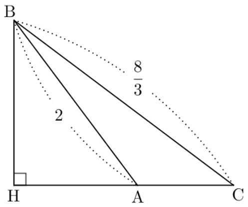
이므로 $\cos A = -\dfrac{3}{5}$이고

$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \dfrac{4}{5}$이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{BC}}{\sin A} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{4}{3} \times 2 = \frac{8}{3}$

$A > 90^\circ$ 이므로 점 B를 직선 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 다음과 같다.



$\overline{AH} = \overline{AB}\cos(\pi - A) = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

$\overline{CH} = \overline{BC}\cos C = \frac{8}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{32}{15}$

$\therefore \ \overline{AC} = \overline{CH} - \overline{AH} = \frac{32}{15} - \frac{6}{5} = \frac{14}{15}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin A$

$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{14}{15} \times \frac{4}{5} = \frac{56}{75}$

36. [출제 의도] 지수함수의 최대, 최소를 구할 수 있는가?

$f(1) = f(2)$

$\Rightarrow \ 4 - 2^{a+1} + b = 16 - 2^{a+2} + b$

$\Rightarrow \ 2^{a+2} - 2^{a+1} = 12, \ 2^{a+1} = 12$

$\therefore \ 2^a = 6$

$f(x) = 2^{2x} - 6 \times 2^x + b$
$\quad = (2^x - 3)^2 + b - 9$

이므로 함수 $f(x)$는 $2^x = 3$일 때 최솟값 $b-9$를 갖는다.

따라서 $b - 9 = 4, \ b = 13$

$\therefore \ f(x) = (2^x - 3)^2 + 4$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3) = 29$이다.

37. [출제 의도] 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

이차방정식 $x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = 0$이 중근 $x = b_n$을 가지므로

$x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = (x - b_n)^2$

$\Rightarrow \ x^2 - 4nx + n(4n^2 - 1)a_n = x^2 - 2b_n x + (b_n)^2$

위 등식은 항등식이므로

$-4n = -2b_n \Rightarrow \ b_n = 2n$

$n(4n^2 - 1)a_n = (b_n)^2 = 4n^2 \Rightarrow \ a_n = \frac{4n}{4n^2 - 1}$

$$\begin{aligned}
\therefore \ \sum_{n=1}^{25} \frac{a_n}{b_n} &= \sum_{n=1}^{25} \frac{2}{4n^2 - 1} \\
&= \sum_{n=1}^{25} \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} \\
&= \sum_{n=1}^{25} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{51} = \frac{50}{51}
\end{aligned}$$

$\therefore \ p + q = 101$

수학Ⅱ

정 답

1	②	2	①	3	⑤	4	③	5	①
6	④	7	①	8	49	9	22	10	12
11	⑤	12	②	13	①	14	②	15	③
16	6	17	13	18	⑤	19	①	20	③
21	③	22	⑤	23	9	24	36	25	64
26	④	27	③	28	④	29	④	30	③
31	12	32	71	33	51				

해 설

1. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이고, $f(2)=3$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=3$

위 극한이 존재하므로

$\lim\limits_{x\to2}(x^2+ax+b)=0$에서 $2a+b=-4$ ⋯ (*)

$b=-2a-4$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}(x+a+2)$

$=a+4=3$, $a=-1$

(*)에서 $b=-2a-4=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

2. [출제 의도] 접선의 방정식을 구하고, 이를 이용하여 미정계수를 계산할 수 있는가?

$f(1)=a$이고,

$f'(x)=3x^2-2(2a+1)x+3a$, $f'(1)=1-a$

이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ f(1))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=(1-a)x+2a-1$이다.

이를 $y=x^3-(2a+1)x^2+3ax$와 연립하면

$x^3-(2a+1)x^2+3ax=(1-a)x+2a-1$

$\Rightarrow\ x^3-(2a+1)x^2+(4a-1)x-2a+1=0$

문제의 조건에 의하여 이 방정식의 한 근이 $x=3$이므로

$27-9(2a+1)+3(4a-1)-2a+1=0$

$\Rightarrow\ -8a+16=0$, $a=2$

$\therefore\ f(x)=x^3-5x^2+6x$, $f(2)=0$

3. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 다항함수의 식을 구할 수 있는가?

$\int_0^1 tf(t)dt=a$라 하고 (a는 상수)

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4ax$

$\Rightarrow\ xf(x)=3x^3-4ax^2$

$\Rightarrow\ \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1(3x^3-4ax^2)dx$

$\Rightarrow\ a=\left[\dfrac{3}{4}x^4-\dfrac{4}{3}ax^3\right]_0^1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{4a}{3}$

$\Rightarrow\ \dfrac{7a}{3}=\dfrac{3}{4}$, $a=\dfrac{9}{28}$

$\therefore\ f(x)=3x^2-\dfrac{9x}{7}$, $f(1)=\dfrac{12}{7}$

4. [출제 의도] 함수의 그래프를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 불연속인 점은 $x=1$과 $x=3$뿐이다.

(i) $\lim\limits_{a\to1-}f(x)=4$, $\lim\limits_{a\to1+}f(x)=0$ 이므로

$a=1$은 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $\lim\limits_{a\to3-}f(x)=4$, $\lim\limits_{a\to3+}f(x)=2$ 이므로

$a=3$은 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) 함수 $f(x)$가 연속인 경우

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}f(x)=f(a)$에서

$f(a)=2$여야 한다.

함수 f가 $x=a$에서 연속이면서 $f(a)=2$인 실수 a는 열린 구간 $(0,\ 4)$에 2개 존재한다.

(i), (ii), (iii)에서 문제의 조건을 만족시키는 실수 a의 개수는 3이다.

5. [출제 의도] 도함수와 사잇값 정리를 활용하여 다항함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 실수 전체에서 연속이므로

$f(x)$가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지기 위해서는 $f(x)$가 실수 전체에서 증가하거나 감소해야 한다.

즉, $f'(x)=x^2-(2k-3)x+k$에서

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 모든 실수 전체에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

방정식 $x^2-(2k-3)x+k=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$일 때 $f'(x)\ge0$이다.

$D=(2k-3)^2-4k=4k^2-16k+9$

즉 $4k^2-16k+9\le0$ 이므로 근의 공식에서

$2-\dfrac{\sqrt7}{2}\le k\le2+\dfrac{\sqrt7}{2}$이다. ⋯ (1)

한편 조건 (나)와 사잇값 정리에 의하여 $f(0)f(3)<0$이어야 한다.

$f(0)=-11<0$에서

$f(3)=9-\dfrac{9}{2}(2k-3)+3k-11$

$\quad=-6k+\dfrac{23}{2}>0$

즉 $6k<\dfrac{23}{2}$이므로 $k<\dfrac{23}{12}$ ⋯ (2)

(1), (2)를 동시에 만족시키는 정수 k의 값은 1뿐이므로 $k=1$이다.

6. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$f(x)g(x)=\begin{cases}(x^2-1)(x-2a+9) & (|x|\ge a)\\ 8(x-2a+9) & (|x|<a)\end{cases}$

에서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-a$, $x=a$를 제외한 모든 실수 x에서 연속이다.

(i) $f(x)g(x)$가 $x=-a$에서 연속인 경우

$\lim\limits_{x\to-a-}f(x)g(x)=f(-a)g(-a)=(a^2-1)(-3a+9)$

$\lim\limits_{x\to-a+}f(x)g(x)=8(-3a+9)$

에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=-a$에서 연속이면

$(a^2-1)(-3a+9)=8(-3a+9)$

$(a^2-9)(-3a+9)=0$, $(a+3)(a-3)^2=0$

$a>0$이므로 $a=3$

그런데 $a=3$이면

$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & (|x|\ge3)\\ 8 & (|x|<3)\end{cases}$ 이므로

함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=-3$에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 실수 전체의 집합에서 연속이다.

이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속인 경우

$\lim\limits_{x\to a+}f(x)g(x)=f(a)g(a)=(a^2-1)(-a+9)$

$\lim\limits_{x\to a-}f(x)g(x)=8(-a+9)$

에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이면

$(a^2-1)(-a+9)=8(-a+9)$

$(a^2-9)(-a+9)=0$, $(a+3)(a-3)(a-9)=0$

$a>0$이므로 $a=3$ 또는 $a=9$

(i)에서 $a=3$인 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않으므로 $a=9$이다. 따라서

$f(x)g(x)=\begin{cases}(x^2-1)(x-9) & (|x|\ge9)\\ 8(x-9) & (|x|<9)\end{cases}$

이고,

$\lim\limits_{x\to-9-}f(x)g(x)=f(-9)g(-9)=-1440$

$\lim\limits_{x\to-9+}f(x)g(x)=-144$

이므로 $f(x)g(x)$는 $x=-9$에서만 불연속이다.

$\therefore\ k=-9$, $g(k)=-18$

7. [출제 의도] 다항함수의 미분법을 활용하여 접선의 방정식을 구하고, 함수의 그래프를 그려서 문제를 해결할 수 있는가?

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선과 곡선 $y=f(x)$가 접하는 점의 좌표를

$(p,\ p^4+2p^3-3p^2-9p+4)$라 하면

$f'(x)=4x^3+6x^2-6x-9$에서

원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은

$y-(p^4+2p^3-3p^2-9p+4)$

$\quad=(4p^3+6p^2-6p-9)(x-p)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(p^4+2p^3-3p^2-9p+4)$

$\quad=-p(4p^3+6p^2-6p-9)$

$\Rightarrow\ 3p^4+4p^3-3p^2-4=0$

$\Rightarrow\ (p-1)(3p^3+7p^2+4p+4)=0$

$\Rightarrow\ (p-1)(p+2)(3p^2+p+2)=0$

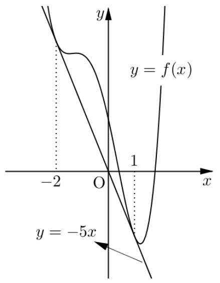
방정식 $3p^2+p+2=0$은 실근을 갖지 않으므로 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선은 두 점 $(-2,\ f(-2))$, $(1,\ f(1))$에서 곡선 $y=f(x)$와 접한다. ⋯ (*)

$f(-2) = 16-16-12+18+4 = 10$

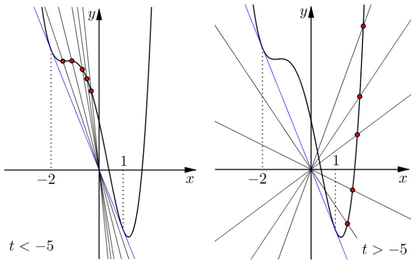
$f(1) = 1+2-3-9+4 = -5$

이므로 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 방정식은 $y=-5x$이다.

이를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



이를 이용하여 $t>-5$인 경우와 $t<-5$인 경우 직선 $y=tx$와 곡선 $y=f(x)$의 그래프는 각각 아래와 같다.



$t<-5$인 경우, t의 값이 증가함에 따라 $g(t)$는 연속적으로 감소하고, (*)에서 $-2<g(t)<0$이다.

$t>-5$인 경우, t의 값이 증가함에 따라 $g(t)$의 값은 연속적으로 증가하고, (*)에서 $g(t)>1$이다.

따라서 $\lim\limits_{t\to-5-} g(t) = -2$, $\lim\limits_{t\to-5+} g(t) = 1$이다.

$\therefore\ k=-5,\ \alpha=3$

이때 $g(\alpha)=g(3)$은 방정식

$$x^4+2x^3-3x^2-9x+4=3x$$

의 실근 중 가장 큰 값이다.

$x^4+2x^3-3x^2-12x+4=0$ 에서

$(x-2)(x^3+4x^2+5x-2)=0$

$x>2$이면 $x^3+4x^2+5x-2>0$이므로 $g(\alpha)=g(3)=2$이다.

$\therefore\ k+(f\circ g)(\alpha) = -5+f(2) = -5+6 = 1$

8. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-2x^3}{x^2}=1$에서

함수 $f(x)-2x^3$은 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

즉, 상수 a, b에 대하여

$f(x)=2x^3+x^2+ax+b$라 둘 수 있다.

이때

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+ax+b}{x-1}=0$

이고 (분모)$\to 0$이므로 극한의 성질에서 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}(2x^3+ax+b)=2+a+b=0$에서

$b=-a-2$이다. ⋯ (1)

이를 위의 극한에 대입하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3+ax-a-2}{x-1}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to1}(2x^2+2x+a+2)=0$

$\Rightarrow a+6=0,\ a=-6$

(1)에서 $b=6-2=4$이다.

$\therefore\ f(x)=2x^3+x^2-6x+4,\ f(3)=49$

9. [출제 의도] 도함수를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

방정식 $f(x)=g(x)$이 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 서로 다른 두 실근을 갖는 것은 방정식

$x^3-6x^2+11x+4-2x=k$

$\Rightarrow x^3-6x^2+9x+4=k$

이 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 서로 다른 두 실근을 갖는 것과 같다.

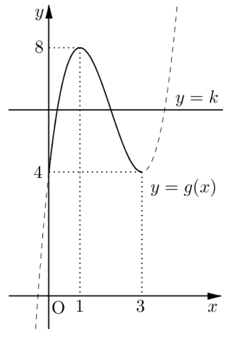
즉, 함수 $g(x)=x^3-6x^2+9x+4$의 그래프와 직선 $y=k$가 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 서로 다른 두 교점을 가져야 한다.

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

에서 함수 $g(x)$의 증감표를 그리면 아래와 같다.

x	0		1		3
$g'(x)$		+	0	−	0
$g(x)$	4	↗	8	↘	4

이를 이용하여 함수 $g(x)$의 그래프와 $y=k$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



위 그래프로부터 함수 $g(x)=x^3-6x^2+9x+4$의 그래프와 직선 $y=k$가 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 서로 다른 두 교점을 가지기 위해서는 $4\le k<8$이어야 함을 알 수 있다.

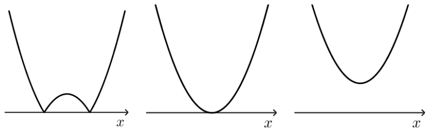
따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은 $4+5+6+7=22$이다.

10. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 그래프와 식의 형태를 추론할 수 있는가?

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x)=|f(x)|-1$이다.

$f(x)$는 이차함수이므로 $|f(x)|$의 그래프는 다음과 같이 세 가지 형태로 나타날 수 있다.

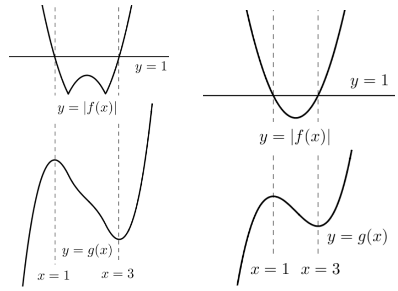


조건 (가)에서 함수 $|f(x)|$는 직선 $y=1$과 두 점 $(1, 1)$과 $(3, 1)$에서 접하지 않으면서 만나야 한다.

따라서 함수 $g(x)$가 조건 (가)를 만족하려면 함수 $|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$이 두 점 이상에서 만나야 하고, 그것은 다음과 같은 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 함수 $|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=1$과 단 두 점에서 만나는 경우

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 유일한 극댓값과 $x=3$에서 유일한 극솟값을 가지므로 함수 $|f(x)|$의 그래프에 따른 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



함수 $g(x)$는 실수 전체에서 미분가능한 함수이므로 함수 $|g(x)|$가 $x=c$에서 미분가능하지 않으려면

$g(c)=0,\ g'(c)\neq 0$ ⋯ (*)

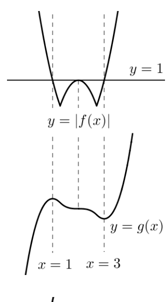
이어야 한다.

이러한 c의 개수는 $g(x)$의 그래프의 형태로부터 항상 1 또는 3이다.

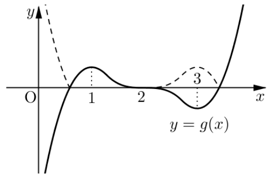
따라서 함수 $|g(x)|$가 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않은 경우는 존재하지 않는다.

(ii) 함수 $|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=1$과 서로 다른 세 점에서 만나는 경우

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 유일한 극댓값과 $x=3$에서 유일한 극솟값을 가지고, 함수 $|f(x)|$는 $x=2$에 대칭인 함수이므로 $g'(2)=0$이다.



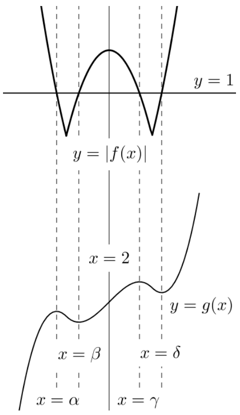
따라서 $g(2)=0$인 경우에만 그림과 같이 함수 $|g(x)|$는 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않다.



(iii) 함수 $|f(x)|$의 그래프가 직선 $y=1$과 서로 다른 네 점에서 만나는 경우

함수 $|f(x)|$는 $x=2$에 대하여 대칭인 함수이므로 다음 그림과 같이 $x=2$를 기준으로 좌우로 (i)과 같은 함수의 그래프를 두 개 얻을 수 있다.

(i)에서 함수 $|g(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는 1 또는 3이므로, 이 경우 함수 $|g(x)|$가 서로 다른 두 점에서 미분가능하지 않으려면 $x=2$를 기준으로 왼쪽 그래프와 오른쪽 그래프에서 각각 1개의 미분가능하지 않은 점을 얻어야 한다.



이때 함수 $g(x)$가 $x=\alpha$, $x=\gamma$에서 극대, $x=\beta$, $x=\delta$에서 극소라고 하자. $(\alpha<\beta<\gamma<\delta)$

(*)을 만족하는 실수 c에 대하여 그래프의 형태로부터

(1) $c>2$이면

$c>\delta$이고 $g(c)\geq g(\gamma)$ 또는 $c<\gamma$이고 $g(c)\leq g(\delta)$

(2) $c<2$이면

$c>\beta$이고 $g(c)\geq g(\alpha)$ 또는 $c<\alpha$이고 $g(c)\leq g(\beta)$ 이어야 한다.

그런데 함수 $g(x)$는 열린 구간 $(\beta,\ \gamma)$에서 증가하므로 (1)과 (2)의 한 경우만을 각각 만족하는 실수 c는 존재하지 않는다.

따라서 이 경우, 함수 $|g(x)|$가 서로 다른 두 점에서만 미분가능하지 않은 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 문제의 조건을 만족하는 경우는 (ii)뿐이고, (ii)에서

이차함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고, $|f(x)|$는 $y=1$에 접하므로 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

즉, $f(x)=p(x-2)^2-1\ (p>0)$이고, $f(1)=f(3)=1$이므로 $p=2$이다.

한편, 조건 (나)와 (ii)에서 함수 $|g(x)|$의 개형으로부터 $g(a)=0$이고, 함수 $|g(x)|$가 $x=a$에서 미분가능한 실수 a는 2뿐이다.
따라서 $a=2$이다.

이때 함수 $|f(x)|$가 x축과 만나는 점을 구하면

$f(x)=2(x-2)^2-1=0$

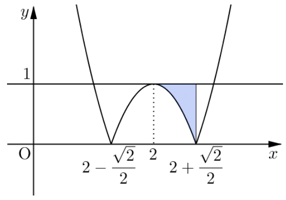
$\Rightarrow x=2+\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ g\left(a+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}(|f(x)|-1)dx$

$=\int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}\{1-2(x-2)^2-1\}dx$

$=-\int_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}2(x-2)^2dx=-\left[\frac{2}{3}(x-2)^3\right]_2^{2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$=-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=-\frac{\sqrt{2}}{6}$



$\therefore\ k=-\frac{\sqrt{2}}{6},\quad 216k^2=216\times\frac{1}{18}=12$

11. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 극값을 구할 수 있는가?

$f'(x)=(x-1)(x-a)$에서 함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $a\neq1$이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$는 $x=1$과 $x=a$에서 극값을 가지고, 이때 $f(1)=0$이므로 함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{4}{3}$이려면 $f(a)=4$이고 $a<1$이어야 한다.

$$f(a)=\int_1^a(t-1)(t-a)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}(a+1)t^2+at\right]_1^a$$
$$=-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$$
$$=-\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ a=-1$

12. [출제 의도] 수직선 위의 점의 위치와 속도에 대하여 이해하고 있는가?

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=3t^2-1$, $v_2=6t-10$

$\Rightarrow |v_1-v_2|=|3t^2-6t+9|$
$=|3(t-1)^2+6|=3(t-1)^2+6$

이므로 $t=1$일 때 두 점 P, Q의 속도의 차가 최소이다.

$t=1$ 두 점 P, Q의 위치는 각각 0, -3이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 3이다.

13. [출제 의도] 곡선 위의 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2-2kx-2k=-2k$에서

$3x^2-2kx=0 \Rightarrow x=0$ 또는 $x=\frac{2k}{3}$

$f(0)=0$이므로 곡선 위의 점 $(0,\ f(0))$에서 그은 접선의 방정식은 $y=-2kx$

$f\left(\frac{2k}{3}\right)=-\frac{4k^3}{27}-\frac{4k^2}{3}$이므로

곡선 위의 점 $\left(\frac{2k}{3},\ f\left(\frac{2k}{3}\right)\right)$에서 그은 접선의 방정식은 $y=-2kx-\frac{4k^3}{27}$

두 접선 사이의 거리는 직선 $y=-2kx-\frac{4k^3}{27}$와 원점 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{\left|\frac{4k^3}{27}\right|}{\sqrt{(2k)^2+1}}=\frac{k^2}{27}$$

$\Rightarrow \frac{4k^3}{27}=\frac{k^2}{27}\sqrt{4k^2+1}$

$\Rightarrow 4k=\sqrt{4k^2+1}$, $16k^2=4k^2+1$

$\Rightarrow 12k^2=1 \quad \therefore\ k=\frac{\sqrt{3}}{6}\ \ (\because\ k>0)$

14. [출제 의도] 함수의 연속의 정의를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x)$와 $f(3-x)$는 $x=1$과 $x=2$를 제외한 다른 모든 점에서는 연속이다.

$$\lim_{x\to1-}f(x)f(3-x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to2+}f(x)=a(-2b+4)$$
$$\lim_{x\to1+}f(x)f(3-x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to2-}f(x)=(a+1)(2a+1)$$

$f(1)f(3-1)=f(1)f(2)=(a+1)(-2b+4)$

이고 함수 $f(x)f(3-x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$a(-2b+4)=(a+1)(-2b+4) \Rightarrow b=2$

$(a+1)(2a+1)=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)f(3-x)$는 $x=2$에서 연속이므로 위와 같은 방법으로 $b=2$이고, $a=-1$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$을 얻을 수 있다.

함수 $f(2-x)$는 $x=0$과 $x=1$을 제외한 모든 점에서 연속이다.

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $f(0)=0$이므로 함수 $f(x)f(2-x)$는 $x=0$, $x=2$에서 연속이다.

한편

$$\lim_{x\to1-}f(x)f(2-x)=\lim_{x\to1-}f(x)\lim_{x\to1+}f(x)=a(a+1)$$
$$\lim_{x\to1+}f(x)f(2-x)=\lim_{x\to1+}f(x)\lim_{x\to1-}f(x)=a(a+1)$$

$f(1)f(2-1)=\{f(1)\}^2=(a+1)^2$

이고 함수 $f(x)f(2-x)$는 $x=1$에서 연속이므로

$a(a+1)=(a+1)^2 \Rightarrow a=-1$

$\therefore\ a=-1,\ b=2,\quad a+b=1$

15. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 다항함수에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

ㄱ) $g'(x)=\int_1^x f(t)dt+(x-1)f(x)$

이므로 $g'(1)=0$이다. (참)

ㄴ) $f(1)>0$이므로 $x=1$ 근방에서

$x<1$이면 $g'(x)<0$이고,
$x>1$이면 $g'(x)>0$이다.

즉, $x=1$ 좌우에서 $g'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(거짓)

ㄷ) $f(1)=0$이면 $h(x)=\int_1^x f(t)dt$에 대하여

$h(1)=h'(1)=0$이므로 함수 $h(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$h(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{1}{3}$이므로

$g(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3(x-\alpha)$의 꼴로 나타낼 수 있다.

$g'(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(4x-3\alpha-1)$

에서 함수 $g(x)$는 $x = \frac{3\alpha+1}{4}$에서 유일한 극솟값을

가지므로 $x = \frac{3\alpha+1}{4}$에서 최솟값을 갖는다.

$$g\left(\frac{3\alpha+1}{4}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3\alpha-3}{4}\right)^3\left(\frac{-\alpha+1}{4}\right)$$
$$= -\frac{9(\alpha-1)^4}{256} = -\frac{1}{9}$$

에서 $(\alpha-1)^4 = \frac{256}{81} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = \frac{16}{9}$이고,

$$\int_1^x f(t)dt = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-\alpha)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\{(x-1)(3x-2\alpha-1)\}$$
$$= \frac{1}{3}\{(3x^2-2(\alpha+2)x+2\alpha+1)\}$$
$$= \left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)^2 - \frac{(\alpha-1)^2}{9}$$
$$= \left(x-\frac{\alpha+2}{3}\right)^2 - \frac{16}{81}$$

이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{16}{81}$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

16. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

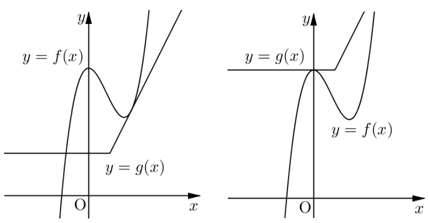
$f'(x) = 3x^2-5x = x(3x-5)$에서

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값을, $x = \frac{5}{3}$에서

극솟값을 갖는다. 따라서

$$g(x) = \begin{cases} 2x-1+k & (x \geq 1) \\ k+1 & (x < 1) \end{cases}$$

에서 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서만 만나려면 다음 그림과 같이 두 함수의 그래프가 접하면서 만나는 점이 존재해야 한다.



(1) 두 함수의 그래프가 $x > 1$에서 접하는 경우 곡선 $y = f(x)$ 위의 점에서 접선의 기울기가 2인 접선의 방정식을 구하면

$f'(x) = 2$에서

$3x^2-5x-2 = 0$, $(3x+1)(x-2) = 0$

$x > 1$이므로 $x = 2$

즉, 구하는 접선은 $(2, f(2)) = (2, 4)$를 지나므로 $y = 2x$이다. $\therefore k = 1$

(2) 두 함수의 그래프가 $x < 1$에서 접하는 경우 $k+1$이 함수 $f(x)$의 극댓값이어야 하고, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0) = 6$이므로

$k+1 = 6$, $k = 5$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은 $1+5 = 6$이다.

17. [출제 의도] 도함수를 활용하여 문제의 조건을 만족하는 함수를 구할 수 있는가?

함수 $g(x)$가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(1, 3)$에서 극값을 갖지 않아야 한다. 따라서 다음과 같은 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$가 증가하는 경우

이 경우 함수 $g(x)$ 또한 실수 전체에서 증가한다. 즉, 조건 (가)를 만족하려면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이어야 한다.

즉, $f(1) = 3$, $f(3) = 5$이다.

한편 열린 구간 $(1, 3)$에서 함수 $g(x)$는 미분가능하고,

$$\lim_{x \to t-} g'(x) + \lim_{x \to t+} g'(x) = 2f'(t)$$

이다. 또한, 조건 (나)에서 $1 < t < 3$일 때,

$2f'(t) < 1 \Rightarrow f'(t) < \frac{1}{2}$이어야 한다.

즉, 열린 구간 $(1, 3)$에서 $0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$이어야 한다. … (#)

그런데 함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린 구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = 1 = f'(c)$$

인 c가 열린 구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재해야 한다. 이는 (#)에 모순이다.

(2) 닫힌 구간 $[1, 3]$에서 함수 $f(x)$가 감소하는 경우

조건 (가)에 의하여 $f(1) = 5$, $f(3) = 3$이어야 한다.

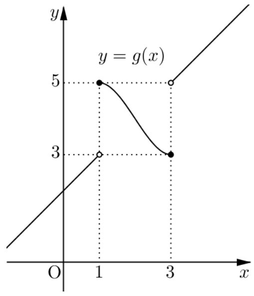
한편 $\lim_{x \to 1-} g'(x) = 1$, $\lim_{x \to 3+} g'(x) = 1$이고

닫힌 구간 $[1, 3]$에서 $f'(x) \leq 0$이므로

조건 (나)에서

$$\lim_{x \to 1+} g'(x) = f'(1) = 0$$

$\lim_{x \to 3-} g'(x) = f'(3) = 0$이어야 한다.



따라서 $f'(x) = a(x-1)(x-3)$ $(a > 0)$의 꼴로 나타낼 수 있고,

$$f(x) = a\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)+b \ (b\text{는 상수})$$

이다.

$f(1) = 5$, $f(3) = 3$이므로

$\frac{4}{3}a+b = 5$, $b = 3$ $\quad \therefore a = \frac{3}{2}$, $b = 3$

$\therefore f(x) = \frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+3$

$\therefore f(5) = 13$

18. [출제 의도] 함수의 극한을 이해하고 있는가?

$\lim_{x \to 2-} f(x) = 2$이므로

$\lim_{x \to a+} f(x) = 2$이어야 한다.

문제의 그림에서 위 조건을 만족시키는 실수 a의 값은 $a = 2$ 또는 $a = 3$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은 $2+3 = 5$

19. [출제 의도] 수직선 위의 점이 이동한 거리를 구할 수 있는가?

점 P의 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v = 3t^2-9t+6 = 3(t-1)(t-2)$

따라서 $\alpha = 1$, $\beta = 2$이다.

$1 < t < 2$에서 $v < 0$이므로

점 P가 $t = \alpha$에서 $t = \beta$까지 이동한 거리는

$$|x(1)-x(2)| = \frac{9}{2}-4 = \frac{1}{2}$$

20. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

문제에서 주어진 등식의 양변에 $x = 1$을 대입하면

$$\int_0^1 (t^3+at-2)dt = 0$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}at^2-2t\right]_0^1 = \frac{1}{2}a-\frac{7}{4} = 0$$

$\therefore a = \frac{7}{2}$

주어진 등식으로부터

(1) $x \neq 0$일 때,

$$(x-1)f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(t^3+\frac{7}{2}t-2\right)dt$$

이고, 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 연속이므로

적분과 미분의 관계에 의하여

$$\lim_{x \to 0}(x-1)f(x) = \lim_{x \to 0}\frac{1}{x}\int_0^x \left(t^3+\frac{7}{2}t-2\right)dt$$

$\Rightarrow -f(0) = -2$, $f(0) = 2$

(2) $x \neq 1$일 때,

$$xf(x) = \frac{1}{x-1}\int_0^x \left(t^3+\frac{7}{2}t-2\right)dt$$
$$= \frac{1}{x-1}\int_1^x \left(t^3+\frac{7}{2}t-2\right)dt$$
$$\left(\because \int_0^1 \left(t^3+\frac{7}{2}t-2\right)dt = 0\right)$$

이고, 함수 $f(x)$는 $x = 1$에서 연속이므로

적분과 미분의 관계에 의하여

$$\lim_{x \to 1} xf(x) = \lim_{x \to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x \left(t^3+\frac{7}{2}t-2\right)dt$$

$\Rightarrow f(1) = 1+\frac{7}{2}-2 = \frac{5}{2}$

(1), (2)에서

$\therefore f(0)+f(1) = 2+\frac{5}{2} = \frac{9}{2}$

21. [출제 의도] 도함수의 성질을 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

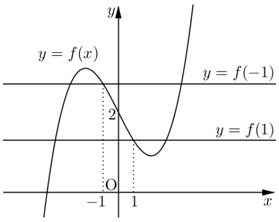
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 두면

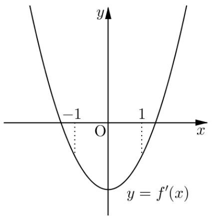
$f(-x)+f(x)=2ax^2+2c=2$

위 등식은 항등식이므로 $a=0$, $c=1$

$\therefore\ f(x)=x^3+bx+1$

조건 (나)를 만족시키려면 아래 그림과 같이 열린 구간 $(-1,1)$에서 함수 $f(x)$가 감소해야 한다.



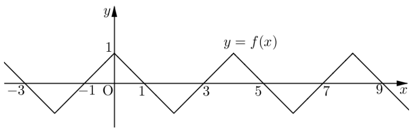


$f'(x)=3x^2+b$에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이므로 함수 $f(x)$가 열린 구간 $(-1,1)$에서 감소하려면 $f'(1)\le 0$이어야 한다.

$f'(1)=b+3\le 0$에서 $b\le -3$

$\therefore\ f(2)=2b+9\le 3$

22. [출제 의도] 정적분을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?



함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이고,

위 그래프에서 $\int_0^4 f(x)dx=0$이므로

임의의 실수 a에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx=0$이다.

따라서

$$\begin{aligned}h(x+4)&=\int_t^{x+4}f(u)du\\&=\int_t^x f(u)du+\int_x^{x+4}f(u)du\\&=\int_t^x f(u)du=h(x)\end{aligned}$$

이다. ⋯ (1)

(ㄱ) (1)에 의하여 $g(3)$은 닫힌 구간 $[3,7]$에서

함수 $\int_3^x f(u)du$의 최솟값과 같다.

$h'(x)=f(x)$이고, 함수 $f(x)$의 그래프로부터

$3<x<5$일 때 $f(x)>0 \Rightarrow h(x)$는 증가

$5<x<7$일 때 $f(x)<0 \Rightarrow h(x)$는 감소

이므로

함수 $\int_3^x f(u)du$는 $x=3$ 또는 $x=7$일 때

최솟값을 갖는다.

이때 $\int_3^3 f(u)du=\int_3^7 f(u)du=0$이므로

$g(3)=0$이다. (참)

(ㄴ) (1)로부터 함수 $h(x)$가 극소인 모든 점에서 함숫값이 동일하고, 함수 $h(x)$가 극소인 점에서 함수 $h(x)$가 최솟값을 갖는다.

함수 $h'(x)=f(x)$에서

함수 $h(x)$가 극소인 점은 $f(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌는 점이므로 함수 $h(x)$는 $x=4k+3$ (k는 정수)에서 극솟값을 갖는다.

특히 $x=3$일 때 함수 $h(x)$는 극솟값을 가지고, (#)에 의하여 $x=3$일 때 함수 $h(x)$는 최솟값을 갖는다.

$\therefore\ g(t)=h(3)=\int_t^3 f(u)du$ ⋯ (2)

한편 $g(1)=-1$이고, (1)과 같은 방법으로 모든 실수 t에 대하여 $g(t+4)=g(t)$이므로

$g(t)=-1 \Leftrightarrow t=4k+3$ (k는 정수)

이고, (2)에서

$g'(t)=-f(t)$

이고 $f(4k+3)=0$이므로 $g'(t)=0$이다. (참)

(ㄷ) 닫힌구간 $[0,4]$에서

$$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (0\le x<2)\\ x-3 & (2\le x<4)\end{cases}$$

이므로

$0\le t<2$일 때,

$$\begin{aligned}g(t)&=h(3)\\&=\int_t^3 f(x)dx\\&=\int_t^2(-x+1)dx+\int_2^3(x-3)dx\\&=\left[-\frac{1}{2}x^2+x\right]_t^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$2\le t<4$일 때,

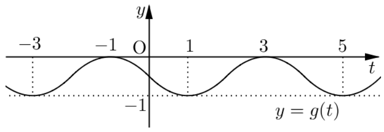
$$\begin{aligned}g(t)&=h(3)\\&=\int_t^3 f(x)dx=\int_t^3(x-3)dx\\&=\left[\frac{1}{2}x^2-3x\right]_t^3=-\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2} & (0\le t<2)\\ -\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{9}{2} & (2\le t<4)\end{cases}$$

이고, 모든 실수 t에 대하여 $g(t+4)=g(t)$를 만족시킨다. 즉, 임의의 실수 t에 대하여

$\int_t^{t+4}g(t)dt=\int_0^4 g(t)dt$ 이다.



또한

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 g(t)dt&=\int_3^4 g(t)dt\\&=\int_3^4\left(-\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{9}{2}\right)dt\\&=\left[-\frac{1}{6}t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t\right]_3^4=-\frac{1}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)dt&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]_0^1=-\frac{5}{6}\end{aligned}$$

이므로 $\int_{-1}^1 g(t)dt=-1$이고,

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 g(t)dt&=\int_0^4 g(t)dt\\&=\int_0^2\left(\frac{1}{2}t^2-t-\frac{1}{2}\right)dt\\&\quad+\int_2^4\left(-\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{9}{2}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t\right]_0^2\\&\quad+\left[-\frac{1}{6}t^3+\frac{3}{2}t^2-\frac{9}{2}t\right]_2^4\\&=-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}=-2\end{aligned}$$

이고 모든 실수 t에 대하여 $g(t+4)=g(t)$이므로

$\int_{-1}^3 g(t)dt=\int_0^4 g(t)dt=-2$이다.

따라서 $\int_1^3 g(t)dt=-1$이다.

한편 $\int_{-n}^n g(t)dt$의 값은

(i) n이 짝수인 경우

$\int_{-n}^n g(t)dt=\frac{n}{2}\int_0^4 g(t)dt=-n$

(ii) n이 홀수인 경우

$n=2k-1$ (k는 자연수)라 하면

$$\begin{aligned}\int_{-n}^n g(t)dt&=\int_{-2k+1}^{2k-1}g(t)dt\\&=\int_{-2k+1}^{-2k+1+\{4(k-1)+2\}}g(t)dt\\&=(k-1)\int_{-2k+1}^{-2k+5}g(t)dt+\int_{2k-3}^{2k-1}g(t)dt\\&=(k-1)\int_0^4 g(t)dt+\int_{2k-3}^{2k-1}g(t)dt\\&=-2(k-1)+\int_{2k-3}^{2k-1}g(t)dt\end{aligned}$$

이고

$\int_{2k-3}^{2k-1}g(t)dt$의 값은 $\int_{-1}^1 g(t)dt$ 또는 $\int_1^3 g(t)dt$와 같으므로 $\int_{2k-3}^{2k-1}g(t)dt=-1$이다.

$\therefore\ \int_{-2k+1}^{2k-1}g(t)dt=-2(k-1)-1=-2k+1$

따라서 (i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여

$\int_{-n}^n g(t)dt=-n$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

23. [출제 의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 식을 구할 수 있는가?

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{|x-1|}=\alpha$이므로 함수의 극한의 성질에서

$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$

인수정리에 의하여 최고차항의 계수가 1인 이차식 $g(x)$에 대하여

$f(x)=(x-1)g(x)$

한편

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)g(x)}{x-1} = g(1)$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)g(x)}{-(x-1)} = -g(1)$$

이고 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{|x-1|}$의 값이 존재하므로

$g(1)=-g(1) \Rightarrow g(1)=0$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-a)$ (a는 실수)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2(x-a)}{|x-1|} = \lim_{x\to 1}|x-1|(x-a) = 0$$

$\therefore\ \alpha=0$

$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\beta$이므로 함수의 극한의 성질에서

$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)=0$

$\therefore\ f(x)=(x-1)^2(x-3)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x-1)^2=4$$

$\therefore\ \beta=4$

$\therefore\ f(\alpha+\beta)=f(4)=9$

24. [출제 의도] 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$f'(1)=g'(1)=0$, $f'(3)=g'(3)=2$

이므로 두 방정식

$f'(x)-(x-1)=0$, $g'(x)-(x-1)=0$은 각각

$x=1$, $x=3$을 실근으로 갖는다.

인수정리에 의하여 실수 a, b에 대하여

$f'(x)-(x-1)=a(x-1)(x-3)$

$g'(x)-(x-1)=b(x-1)(x-3)$

주어진 그림으로부터

$f'(0)=2$이므로 $a=1$

$g'(4)=0$이므로 $b=-1$

$$\therefore\ f'(x)-g'(x)=2(x-1)(x-3) = 2x^2-8x+6\ \cdots\ (*)$$

$\Rightarrow f(x)-g(x)=\frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+c$ (c는 상수)

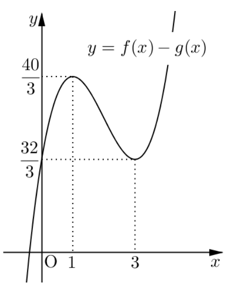
$f(-1)-g(-1)=0$이므로 $c=\frac{32}{3}$

$(*)$에서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{40}{3}$을 가지고, $x=3$에서 극솟값 $\frac{32}{3}$을 갖는다.

방정식 $f(x)-g(x)=n$의 실근의 개수가 3이려면 함수 $y=f(x)-g(x)$와 $y=n$의 교점의 개수가 3이어야 한다.

따라서 $\frac{32}{3}<n<\frac{40}{3}$이고,

가능한 정수 n의 값은 $n=11, 12, 13$이다.



따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 정수 n의 값의 합은 $11+12+13=36$

25. [출제 의도] 도함수를 활용하여 문제의 조건을 만족하는 함수를 구할 수 있는가?

$g(x)=\begin{cases}-2 & (x<0)\\ 2x-2 & (x\ge 0)\end{cases}$

에서 방정식 $g(x)=h(x)$를 풀면

(i) $x<0$일 때

$-\frac{1}{2}x(x-2)+2=-2$

$\Rightarrow x^2-2x-8=0$, $(x+2)(x-4)=0$

에서 $x<0$이므로 $x=-2$

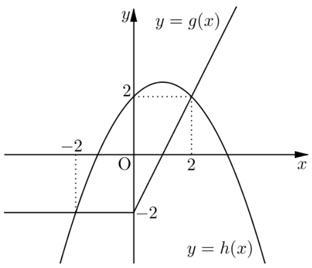
(ii) $x\ge 0$일 때

$-\frac{1}{2}x(x-2)+2=2x-2$

$x^2+2x-8=0$, $(x+4)(x-2)=0$

에서 $x\ge 0$이므로 $x=2$

따라서 두 함수 $y=g(x)$와 $y=h(x)$가 만나는 두 점의 좌표는 $(-2, -2)$와 $(2, 2)$이고, 아래 그림과 같이 $-2\le x\le 2$에서 $g(x)\le h(x)$이다.



한편 부등식 $\{f(x)-g(x)\}\{f(x)-h(x)\}\le 0$을 만족하려면

$g(x)\le f(x)\le h(x)$ 또는

$h(x)\le f(x)\le g(x)$

이어야 하고, 그 해가 $-2\le x\le 2$뿐이므로

$-2\le x\le 2$에서만 $g(x)\le f(x)\le h(x)$이어야 한다. 즉, 함수 $f(x)$의 그래프가

$-2\le x\le 2$에서만 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프 사이에 존재해야 한다.

이때 두 함수 $y=g(x)$와 $y=h(x)$가 만나는 두 점의 좌표가 $(-2, -2)$와 $(2, 2)$이므로

$f(2)=2$, $f(-2)=-2$이다. $\cdots$ (1)

한편 $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이고

$\lim_{x\to-\infty}g(x)=-2$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$이므로

충분히 작은 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이고

$f(x)>h(x)$이다.

따라서 문제의 조건을 만족시키려면

구간 $(-\infty, -2)$에 속하는 모든 실수 x에 대하여

$f(x)>g(x)$이고 $f(x)>h(x)$이어야 한다.

즉, $x<-2$일 때와 $x>-2$일 때 모두 $f(x)>g(x)$이므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다.

위와 비슷한 방법으로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=2$에서도 극솟값을 가져야 한다.

$\therefore\ f'(-2)=0$, $f'(2)=2\ \cdots$ (2)

(1)에서 인수정리에 의하여

$$f(x)-x=(x+2)(x-2)(ax^2+bx+c) = (x^2-4)(ax^2+bx+c)\ \ (a>0)$$

$\Rightarrow f(x)=(x^2-4)(ax^2+bx+c)+x$ $(a>0)$

따라서

$f'(x)=2x(ax^2+bx+c)+(x^2-4)(2ax+b)+1$

이므로 (2)에서

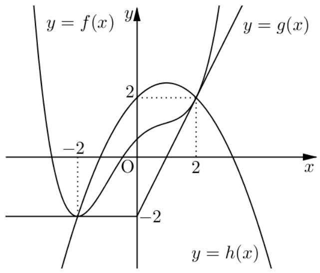
$f'(-2)=-4(4a-2b+c)+1$

$f'(2)=4(4a+2b+c)+1$

$\Rightarrow \begin{cases}16a-8b+4c=1\\ 16a+8b+4c=1\end{cases}$

위 연립방정식을 풀면 $b=0$, $c=\frac{1}{4}-4a$

$\therefore\ f(x)=(x^2-4)\left(ax^2-4a+\frac{1}{4}\right)+x$ $(a>0)$



한편 $-2\le x\le 2$에서

$$f(x)-h(x)=(x^2-4)\left(ax^2-4a+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}x^2-2 = (x^2-4)\left(ax^2-4a+\frac{3}{4}\right)\le 0$$

이어야 하고,

$-2\le x\le 2$에서 $x^2-4\le 0$이므로

$-2\le x\le 2$에서 $ax^2-4a+\frac{3}{4}\ge 0$이어야 한다.

즉, $ax^2\ge 4a-\frac{3}{4}$이어야 하고,

$-2\le x\le 2$에서 함수 $y=ax^2$의 최솟값은

0이므로 $4a-\frac{3}{4}\le 0$이어야 한다.

$\therefore\ a\le\frac{3}{16}\ \cdots$ (3)

한편

$$\int_{-2}^{2}\{f(x)-h(x)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}\left\{ax^4-\left(8a-\frac{3}{4}\right)x^2+16a-3\right\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\left\{ax^4-\left(8a-\frac{3}{4}\right)x^2+16a-3\right\}dx$$

$$=2\left[\frac{1}{5}ax^5-\frac{1}{3}\left(8a-\frac{3}{4}\right)x^3+(16a-3)x\right]_0^2$$

$$=2\left\{\frac{32}{5}a-\frac{8}{3}\left(8a-\frac{3}{4}\right)+2(16a-3)\right\}$$

$$=\frac{512}{15}a-8$$

(3)에 의하여

$$\int_{-2}^{2}\{f(x)-h(x)\}dx\le\frac{512}{15}\cdot\frac{3}{16}-8=-\frac{8}{5}$$

$\therefore\ M=-\frac{8}{5}$, $25M^2=25\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)^2=64$

26. [출제 의도] 함수의 그래프를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

주어진 그래프로부터 $\lim_{x\to 1-} f(x)=3$

$\therefore\ f(a)+\lim_{x\to a-} f(x)$

$= f(3)+\lim_{x\to 3-} f(x)=4+2=6$

27. [출제 의도] 정적분의 값을 계산할 수 있는가?

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax+b)dx$$
$$=2b=2\ \Rightarrow\ b=1$$

$$\int_{-1}^{1}(x-1)f(x)dx=\int_{-1}^{1}xf(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx-2$$
$$=\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_{-1}^{1}-2=\frac{2}{3}a-2=2$$
$$\Rightarrow a=6$$

$\therefore\ f(2)=2a+b=12+1=13$

28. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있는가?

$$f'(x)=6x^2-6(k+1)x+6k$$
$$=6(x-1)(x-k)$$

에서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=k$에서 극값을 갖는다.

(1) $k>1$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 갖는다.

문제의 조건에서 $2k+1=1$이므로 $k=0$이다.

이는 가정과 모순이다.

(2) $k<1$인 경우

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극댓값을 갖는다.

문제의 조건에서 $2k+1=k$이므로 $k=-1$이다.

(1), (2)에서 $k=-1$이므로

$$f(x)=2x^3-6x+1$$

이고, 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=-3$이다.

29. [출제 의도] 도함수와 함수의 극한의 성질을 이용하여 함수의 식을 구할 수 있는가?

문제의 조건에서 $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$ 이므로 다항식 $f(x)-g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

또한 주어진 극한으로부터 $f(4)-g(4)=0$ 이므로 다항식 $f(x)-g(x)$는 $x-4$를 인수로 갖는다.

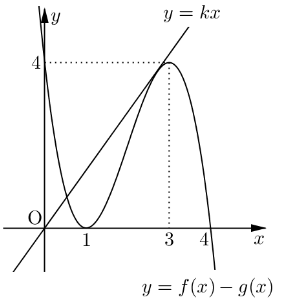
$f(x)-g(x)=a(x-1)^2(x-4)$라 하면

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-g(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{a(x-1)^2(x-4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}a(x-1)^2=9a=-9$$

$\therefore\ a=-1$, $f(x)-g(x)=-(x-1)^2(x-4)$

그림과 같이 방정식 $f(x)-g(x)=kx$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 직선 $y=kx$가 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 접선이어야 한다.

직선 $y=kx$와 곡선 $y=f(x)-g(x)$가 접하는 점의 좌표를 $(t,\ f(t)-g(t))=(t,\ -(t-1)^2(t-4))$ 라 하면



$$f'(x)-g'(x)=-2(x-1)(x-4)-(x-1)^2$$
$$=(x-1)(-2x+8-x+1)$$
$$=-3(x-1)(x-3)$$

에서

$$\frac{-(t-1)^2(t-4)}{t-0}=-3(t-1)(t-3)$$

(1) $t=1$인 경우 $f'(1)-g'(1)=0$이므로 $k=0$이다.

(2) $t\neq 1$인 경우 주어진 방정식은

$$\frac{(t-1)(t-4)}{t}=3(t-3)$$

$\Rightarrow\ t^2-5t+4=3t^2-9t$

$\Rightarrow\ t^2-2t-2=0$

이다. 위 두 방정식의 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

$\Rightarrow\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=8$

이때 $k=f'(t)=-3t^2+12t-9$

이므로 문제의 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은

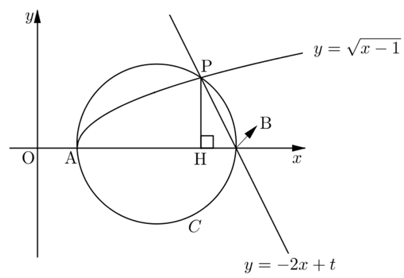
$$0+(-3\alpha^2+12\alpha-9)+(-3\beta^2+12\beta-9)$$
$$=-3(\alpha^2+\beta^2)+12(\alpha+\beta)-18$$
$$=-24+24-18=-18$$

30. [출제 의도] 삼각함수를 활용하여 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

점 P의 좌표를 $(u,\ \sqrt{u-1})$라 하고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\tan\angle\mathrm{PBH}=2$이고 $\angle\mathrm{PBH}$는 예각이므로

$$\sin\angle\mathrm{PBH}=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \ \cos\angle\mathrm{PBH}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$



$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(u-1)^2+u-1}=\sqrt{u(u-1)}$이고,

원 C의 반지름을 R이라 하면 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin\angle\mathrm{PBH}}\ \Rightarrow\ R=\frac{\sqrt{5u(u-1)}}{4}$$

따라서 원 C의 넓이는

$$\pi R^2=\frac{5u(u-1)}{16}\pi\ \cdots\ ①$$

한편 $\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{u-1}$이므로

$$\overline{\mathrm{BP}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\overline{\mathrm{PH}}=\frac{\sqrt{5(u-1)}}{2}\ \cdots\ ②$$

또한 직선 BP의 기울기가 -2이므로

$$\frac{\sqrt{u-1}}{u-\frac{t}{2}}=-2\ \Rightarrow\ 2u+\sqrt{u-1}=t$$
$$\Rightarrow\ 2(u-1)+\sqrt{u-1}=t-2$$
$$\Rightarrow\ \sqrt{u-1}\,(2\sqrt{u-1}+1)=t-2$$

따라서 $2\sqrt{t-1}+1>0$이므로

$t\to 2+$ 일 때 $u\to 1+\ \cdots\ ③$

①, ②, ③에 의하여

$$\lim_{t\to 2+}\frac{f(t)g(t)}{(t-2)^3}$$
$$=\lim_{u\to 1+}\frac{\frac{5u(u-1)}{16}\pi\times\frac{\sqrt{5(u-1)}}{2}}{\{\sqrt{u-1}\,(2\sqrt{u-1}+1)\}^3}$$
$$=\lim_{u\to 1+}\frac{(\sqrt{u-1})^3\times\frac{5u}{16}\pi\times\frac{\sqrt{5}}{2}}{(\sqrt{u-1})^3(2\sqrt{u-1}+1)^3}$$
$$=\frac{5\pi}{16}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{32}\pi$$

31. [출제 의도] 직선 위를 운동하는 점의 위치, 속도, 가속도의 관계를 이해하고 있는가?

점 P의 시각 t에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$$a(t)=v'(t)=3t^2-12t+10$$
$$=3(t-2)^2-2$$

에서 점 P의 가속도는 $t=2$일 때 최소이다.

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로

점 P의 시각 $t=2$에서의 위치는

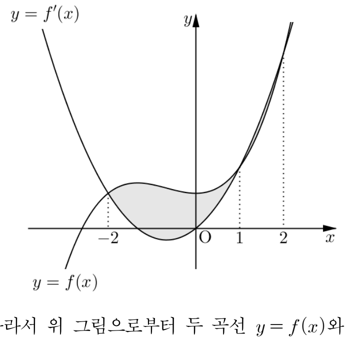
$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(t^3-6t^2+10t+2)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4-2t^3+5t^2+2t\right]_0^2$$
$$=4-16+20+4=12$$

32. [출제 의도] 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

$f'(x)=3x^2+4x$에서

$$f(x)=f'(x)\ \Leftrightarrow\ x^3+2x^2+4=3x^2+4x$$
$$\Leftrightarrow\ x^3-x^2-4x+4=0$$
$$\Leftrightarrow\ (x+2)(x-2)(x-1)=0$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f'(x)$가 만나는 점의 x좌표는 -2, 1, 2이다.



따라서 위 그림으로부터 두 곡선 $y=f(x)$와

$y=f'(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{2}|f(x)-f'(x)|dx\\&=\int_{-2}^{1}\{f(x)-f'(x)\}dx+\int_{1}^{2}\{f'(x)-f(x)\}dx\\&=\int_{-2}^{1}(x^3-x^2-4x+4)dx\\&\qquad+\int_{1}^{2}(-x^3+x^2+4x-4)dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{-2}^{1}\\&\qquad+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+2x^2-4x\right]_{1}^{2}\\&=\frac{45}{4}+\frac{7}{12}=\frac{71}{6}\end{aligned}$$

$\therefore\ 6S=71$

33. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이고 $h(0)=0$이므로

$f(0)=0\ \cdots$ ① 이고

$\int_{0}^{2}g(t)dt=0\ \cdots$ ② 이다.

또한 $h(0)=0$이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=0$에서 극솟값을 가지고, ($\because\ |h(x)|\geq 0$)

함수 $|h(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$h'(0)=0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{h(x)}{x}=f'(0)=0\ \cdots$ ③ 이고

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{h(x)}{x}=g(2)-g(0)=0\ \cdots$ ④ 이다.

$$\left(\because\ \frac{d}{dx}\int_{x}^{x+2}g(t)dt=g(x+2)-g(x)\right)$$

함수 $|h(x)|$가 $x=-2$에서 미분가능하지 않으므로

$h(-2)=f(-2)=0$이어야 한다. $\cdots$ ⑤

따라서 ①, ③, ⑤에서 $f(x)=x^2(x+2)$이다.

④에서 $g(0)=g(2)=b$라 하면 인수정리에서

$$g(x)=x(x-2)(x-a)+b$$

로 둘 수 있다. (a, b는 실수)

②에서

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2}g(x)dx&=\int_{0}^{2}\{x^3-(a+2)x^2+2ax+b\}dx\\&=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}(a+2)x^3+ax^2+bx\right]_{0}^{2}\\&=4-\frac{8}{3}(a+2)+4a+2b\\&=\frac{4}{3}a+2b-\frac{4}{3}=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow\ b=-\dfrac{2}{3}a+\dfrac{2}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ g(x)&=x^3-(a+2)x^2+2ax-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\\&=x(x-a)(x-2)-\frac{2}{3}(a-1)\end{aligned}$$

$x>0$일 때

$$\begin{aligned}h'(x)&=g(x+2)-g(x)\\&=x(x+2)(x+2-a)-x(x-a)(x-2)\\&=x(6x-4a+4)\end{aligned}$$

이고, $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=\infty$이므로

$x>0$일 때 함수 $h(x)$의 함숫값이 0보다 작은 점이 존재하면 사잇값 정리에 의해 함수 $|h(x)|$가 $x>0$에서 미분가능하지 않은 점(즉, $h(x)=0$이고 $h'(x)\neq 0$인 점)이 존재한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면

$x>0$일 때 $h(x)\geq 0$이어야 한다.

$h'(x)=x(6x-4a+4)$에서

$a>1$이면 함수 $h(x)$가 열린구간 $(0, k)$에서 감소하게 되는 양수 k가 존재하고,

$a\leq 1$이면 함수 $h(x)$는 열린구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

따라서 조건 (나)를 만족하려면 $a\leq 1$이어야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore\ f(3)+g(3)&=45+27-9(a+2)+6a-\frac{2}{3}a+\frac{2}{3}\\&=54-\frac{11}{3}a+\frac{2}{3}\\&\geq 54-\frac{11}{3}+\frac{2}{3}=51\end{aligned}$$

따라서 $f(3)+g(3)$의 최솟값은 51이다.

확률과 통계

정 답

1	⑤	2	④	3	③	4	③	5	①
6	115	7	48	8	53	9	455	10	①
11	②	12	⑤	13	⑤	14	④	15	6
16	77	17	612	18	31	19	④	20	⑤
21	①	22	①	23	③	24	⑤	25	⑤
26	78	27	59	28	276	29	⑤	30	①
31	53	32	20						

해 설

1. [출제 의도] 확률의 성질을 이용하여 식의 값을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

두 사건 A, B^C 또한 서로 독립이다. 따라서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3}$ ⋯ ①

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\dfrac{1}{6}$ ⋯ ②

①, ② 를 변변 더하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{3\mathrm{P}(A)}=\dfrac{2}{3}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

2. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 다항식의 전개식의 계수를 구할 수 있는가?

$(x+3)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

${}_n\mathrm{C}_{n-1}\times 3=3n=a$

$(2x-1)^2(x+1)^{n-2}=(4x^2-4x+1)(x+1)^{n-2}$

의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$4\times{}_{n-2}\mathrm{C}_{n-3}-4\times{}_{n-2}\mathrm{C}_{n-2}$

$=4(n-2)-4=4n-12=b$

$a=b$이므로 $n=12$

3. [출제 의도] 원순열과 중복순열의 수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

합동인 삼각형 3개에 3개의 색을 칠하는 방법의

수는 $\dfrac{{}_3\mathrm{P}_3}{3}=2$ ⋯ ①

합동인 삼각형 외부에 인접한 활꼴에 색을 칠하는 방법의 수는 각 활꼴마다 서로 다른 2개의 색 중 하나를 칠하는 방법의 수이므로

$2^3=8$ ⋯ ②

①, ②에 의하여 구하는 경우의 수는

$$2\times 8=16$$

4. [출제 의도] 독립인 사건의 성질을 이해하고 있는가?

$x^2-6x+5\le 0$

$(x-1)(x-5)\le 0\ \Rightarrow\ 1\le x\le 5$ ⋯ ①

이므로 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

$|x-4|=n$

$\Leftrightarrow\ x=4+n$ 또는 $x=4-n$ ⋯ ②

이므로 $\mathrm{P}(B)$가 될 수 있는 값은 0, $\dfrac{1}{10}$, $\dfrac{1}{5}$이다.

두 사건 A, B가 독립이려면

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

이어야 하고, $\mathrm{P}(B)\neq 0$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{10}$이고 $\mathrm{P}(B)=\dfrac{1}{5}$이다.

즉, $n(A\cap B)=1$, $n(B)=2$이므로

①, ②에서 $n=2$, 3이어야 한다.

따라서 자연수 n의 값의 합은 5이다.

5. [출제 의도] 중복순열의 수를 활용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$를 선택하는 방법의 수는 서로 다른 3개의 원소 중에서 중복을 허락하여 3개를 택할 때, 선택한 3개의 값이 모두 1 또는 3이 아닌 경우의 수이므로

$3^3-2^3=27-8=19\quad\therefore\ p=19$

(나): 함수 f의 치역이 $\{2, a\}$인 경우의 수는 $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 2와 a 중 중복을 허락하여 3개를 선택할 때, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 모두 2인 경우를 제외하는 경우의 수이므로

$2^3-1=7\quad\therefore\ q=7$

(다): 구하는 함수 f의 개수는

$3\times 19+3\times 19+6\times(26-2\times 7)=186$

$\therefore\ r=186$

$\therefore\ p+q+r=19+7+186=212$

6. [출제 의도] 독립시행의 확률과 확률의 곱셈정리를 이해하고 있는가?

주사위의 눈이 짝수이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) 주사위의 눈이 2인 경우

동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_2\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{12}$$

(2) 주사위의 눈이 4인 경우

동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_4\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

(3) 주사위의 눈이 6인 경우

동전의 앞면과 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률은

$$\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{5}{96}$$

(1), (2), (3)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{5}{96}=\frac{19}{96}$$

$\therefore\ p=96$, $q=19\ \Rightarrow\ p+q=115$

7. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열과 확률의 곱셈정리를 이해하고 있는가?

(1) 숫자 1이 적힌 카드를 2장 선택하는 경우

이 경우는 1, 1, 2, 2, 3 또는 1, 1, 2, 3, 3이 적힌 카드를 선택하여 나열하는 경우이다.

숫자 1인 적힌 카드를 2장 선택할 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_5}=\frac{4}{7}$$

숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$1-\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{5!}{2!2!}}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족시킬 확률은

$$\frac{4}{7}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{35}$$

(2) 숫자 1이 적힌 카드를 3장 선택하는 경우

이 경우는 1, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 3, 3 또는 1, 1, 1, 2, 3이 적힌 카드를 선택하여 나열하는 경우이다.

(a) 1, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 3, 3를 선택할 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_2\times 2}{{}_7\mathrm{C}_5}=\frac{2}{21}$$

이 경우 숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$\frac{1}{\frac{5!}{3!2!}}=\frac{1}{10}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{2}{21}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{105}$$

(b) 1, 1, 1, 2, 3을 선택할 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_5}=\frac{4}{21}$$

이 경우 숫자 1이 적힌 카드끼리 이웃하지 않을 확률은

$$\frac{2}{\frac{5!}{3!}}=\frac{1}{10}$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{4}{21}\times\frac{1}{10}=\frac{2}{105}$$

(1), (2)에 의하여 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{12}{35}+\frac{1}{105}+\frac{2}{105}=\frac{13}{35}$$

$\therefore\ p+q=13+35=48$

(다른 풀이) 같은 것이 적힌 카드도 서로 다른 것으로 간주하고 문제를 해결할 수 있다.

(1) 숫자 1이 적힌 카드를 2장 선택하는 경우

1이 적힌 카드를 제외한 3장의 카드를 먼저 일렬로 나열하고, 3장의 카드의 사이에 1이 적힌 카드 2장을 배열하면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{{}_4\mathrm{P}_3\times({}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{P}_2)}{{}_7\mathrm{P}_5}=\frac{12}{35}$$

(2) 숫자 1이 적힌 카드를 3장 선택하는 경우

1이 적힌 카드를 먼저 모두 나열하고, 3장의 카드의 사이에 1이 아닌 수가 적힌 카드 2장을 선택하여

배열하면 되므로 구하는 확률은

$$\frac{3!\times{}_4\mathrm{P}_2}{{}_7\mathrm{P}_5}=\frac{1}{35}$$

(1), (2)에 의하여 문제의 조건을 만족할 확률은

$$\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$$

$\therefore\ p+q=13+35=48$

8. [출제 의도] 중복조합과 중복순열의 수를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

문제의 조건에 의하여 x는 맨 왼쪽과 오른쪽에만 연이어 나열하고, 가운데에는 y, z만 배열하되 x와 인접하는 한 쪽엔 y, 한 쪽엔 z가 배치되어야 한다. (예를 들어, x, x, y, z, y, z, x와 같은 배치가 가능하다.)

(1)	x	(2)	x	(1)

위의 그림에서 (1)에 들어가는 x의 총 개수에 따라 다음과 같은 경우가 있다.

(a) (1)에 들어가는 x의 총 개수가 0인 경우
x를 배열하는 방법의 수는 1이고,
(2)에 y 또는 z를 나열하는 방법의 수는
$2\times2^3=16$이므로 구하는 경우의 수는
$2\times2^3=16$

(b) (1)에 들어가는 x의 총 개수가 1인 경우
x를 배열하는 방법의 수는 ${}_2\mathrm{H}_1=2$이고,
(2)에 y 또는 z를 나열하는 방법의 수는
$2\times2^2=8$이므로 구하는 경우의 수는
$2\times2\times2^2=16$

(c) (1)에 들어가는 x의 총 개수가 2인 경우
x를 배열하는 방법의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$이고,
(2)에 y 또는 z를 나열하는 방법의 수는
$2\times2=4$이므로 구하는 경우의 수는
$3\times2\times2=12$

(d) (1)에 들어가는 x의 총 개수가 3인 경우
x를 배열하는 방법의 수는 ${}_2\mathrm{H}_3=4$이고,
(2)에 y 또는 z를 나열하는 방법의 수는
2이므로 구하는 경우의 수는
$4\times2=8$

(e) (1)에 들어가는 x의 총 개수가 4인 경우
가운데에 y 또는 z 1개만 올 수 있는데, 이는 조건 (나) 또는 (다)를 만족하지 않는다.

(f) (1)에 들어가는 x의 총 개수가 5인 경우
x만 7개 선택하여 일렬로 나열하는 방법의 수이므로 구하는 경우의 수는
1

(a)~(f)에서 구하는 경우의 수는
$16+16+12+8+1=53$

9. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족하는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

$f(x)=n$을 만족시키는 x의 개수를 a_n이라 하자.
그러면 문제의 조건을 만족시키는 경우는 다음의 세 가지 경우 중 하나이다.

(1) $a_1=2,\ a_2=2,\ a_3=3$인 경우
문제의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
1, 1, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{2!2!3!}=210$$

(2) $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=3$인 경우
문제의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
1, 2, 2, 2, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3!3!}=140$$

(3) $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=4$인 경우
문제의 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
1, 2, 2, 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{2!4!}=105$$

(1), (2), (3)에 의하여 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는
$210+140+105=455$

10. [출제 의도] 원순열의 성질을 이해하고 있는가?

문제의 조건을 만족하는 경우는 마주보는 부채꼴의 각 쌍에 숫자 1, 6과 2, 5와 3, 4를 적는 경우이다.

문제의 그림에서 숫자 1, 6을 마주보는 부채꼴에 적는 방법의 수는 $\frac{2!}{2}=1$

숫자 1이 적힌 부채꼴의 왼쪽에 적는 수를 결정하는 방법의 수는 4이고,
이때 이 숫자가 적힌 부채꼴과 마주보는 부채꼴에 적힌 숫자는 결정되므로
남은 두 개의 마주보는 부채꼴에 숫자를 적는 방법의 수는 2

따라서 구하는 방법의 수는 $1\times4\times2=8$이다.

11. [출제 의도] 수학적 확률의 정의를 이해하고 있는가?

집합 X의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4-1=15$이므로 여기서 두 집합 A, B를 선택하는 모든 방법의 수는
$15\times14=210$

(1) $n(A)=4,\ n(B)=2$인 경우
두 집합 A, B를 선택하는 방법의 수는
${}_4\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_2=6$

(2) $n(A)=n(B)=3$인 경우
두 집합 A, B를 선택하는 방법의 수는
${}_4\mathrm{C}_3\times({}_4\mathrm{C}_3-1)=12$

(3) $n(A)=2,\ n(B)=4$인 경우
두 집합 A, B를 선택하는 방법의 수는
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_4=6$

따라서 문제에서 구하는 확률은

$$\frac{6+12+6}{210}=\frac{4}{35}$$

12. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

주어진 조건을 만족시키기 위해서는
$a\le3$이어야 한다.

(1) $a=3$인 경우
$b+c=5$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_5={}_6\mathrm{C}_5=6$

(2) $a=2$인 경우
$b+c=6$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6=7$

(3) $a=1$인 경우
$b+c=7$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_7=8$

(4) $a=0$인 경우
$b+c=8$이므로 이를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_2\mathrm{H}_8={}_9\mathrm{C}_8=9$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$6+7+8+9=30$

13. [출제 의도] 여러 가지 수학적 확률의 성질을 이해하고 있는가?

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$$

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{4}$$

에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=k\ (k>0)$라 하면
$\mathrm{P}(A)=4k,\ \mathrm{P}(B)=3k$이다.

(ㄱ) $\frac{\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3k}{4k}=\frac{3}{4}$ (참)

(ㄴ) $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$이면

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이고 $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{8}$이고

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

이므로
$\mathrm{P}(A^C\cup B)$
$=\mathrm{P}(A^C)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)$
$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$ (참)

(ㄷ) $\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$
$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$
$=(1-4k)\cdot3k=-12k^2+3k$
$=-12\left(k-\frac{1}{8}\right)^2+\frac{3}{16}$

이고, $\mathrm{P}(A\cup B)=6k\le1$에서 $0<k\le\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$는 $k=\frac{1}{8}$일 때 최댓값 $\frac{3}{16}$을 갖는다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\le\frac{3}{16}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

14. [출제 의도] 중복조합을 활용하여 문제의 조건을 만족하는 경우의 수를 구할 수 있는가?

함수 f의 치역을 A라 하자. 문제의 조건을 만족하는 모든 함수 f의 개수는 $n=1, 2, 3, 4, 5$일 때 $f(n)\le f(n+1)$을 만족하는 함수 f 중에서

$f(n+1) > f(n)+1$이 존재하는 함수 f를 제외한 것의 개수를 구하는 것과 같다.

X에서 Y로의 함수 중 $n=1, 2, 3, 4, 5$일 때 $f(n) \le f(n+1)$을 만족시키는 함수 f의 개수는 서로 다른 4개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택하는 방법의 수와 같다.
따라서 ${}_4\mathrm{H}_6 = 84$

한편, $n=1, 2, 3, 4, 5$일 때 $f(n) \le f(n+1)$을 만족하면서 $f(n+1) > f(n)+1$인 n이 존재하는 경우는 다음 중 하나이다.

(1) $A=\{1, 3\}$ 또는 $A=\{1, 4\}$ 또는 $A=\{2, 4\}$인 경우, 이를 만족하는 함수 f의 개수는
서로 다른 2개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택할 때, 2개의 숫자를 각각 적어도 한 개 이상 선택하는 방법의 수와 같다.
따라서 이 경우 함수 f의 개수는

$$3 \times {}_2\mathrm{H}_{6-2} = 15$$

(2) $A=\{1, 2, 4\}$ 또는 $A=\{1, 3, 4\}$인 경우, 이를 만족하는 함수 f의 개수는
서로 다른 3개의 수 중에서 중복을 허락하여 6개의 수를 선택할 때, 3개의 숫자를 각각 적어도 한 개 이상 선택하는 방법의 수와 같다.

따라서 이 경우 함수 f의 개수는

$$2 \times {}_3\mathrm{H}_{6-3} = 20$$

(1), (2)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

$$84 - 15 - 20 = 49$$

15. [출제 의도] 이항정리를 이용하여 식을 전개할 수 있는가?

$$(x+2)^2\left(x-\frac{k}{x}\right)^4 = (x^2+4x+4)\left(x-\frac{k}{x}\right)^4$$

에서 상수항은

$$x^2 \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \cdot x \cdot \left(-\frac{k}{x}\right)^3 + 4 \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \cdot x^2 \cdot \left(-\frac{k}{x}\right)^2$$

$$= -4k^3 + 24k^2$$

문제의 조건에서

$-4k^3 + 24k^2 = 0 \Rightarrow k^2(k-6) = 0$

$k > 0$이므로 $\therefore\ k = 6$

16. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

$a=3c$이면 $(b-a)(b-3c) \ge 0$이므로
$(b-a)(b-3c) < 0$이려면 $a > 3c$ 또는 $a < 3c$이어야 한다.

(1) $a > 3c$인 경우
$(b-a)(b-3c) < 0 \Leftrightarrow 3c < b < a$
에서
(a) $c=1$인 경우
$a=5$이면 $b=4$
$a=6$이면 $b=4, 5$
(b) $c \ge 2$인 경우
조건을 만족하는 자연수 a, b는 존재하지 않는다.

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 3이다.

(2) $a < 3c$인 경우
$(b-a)(b-3c) < 0 \Leftrightarrow a < b < 3c$
에서
(a) $c=1$인 경우
$a=1$이면 $b=2$
(b) $c=2$인 경우
$a=1$이면 $b=2, 3, 4, 5$
$a=2$이면 $b=3, 4, 5$
$a=3$이면 $b=4, 5$
$a=4$이면 $b=5$
(c) $c \ge 3$인 경우
$a=1$이면 $b=2, 3, 4, 5, 6$
$a=2$이면 $b=3, 4, 5, 6$
$a=3$이면 $b=4, 5, 6$
$a=4$이면 $b=5, 6$
$a=5$이면 $b=6$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$1 + 10 + 4 \cdot 15 = 71$$

(1), (2)에서 조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

$$\frac{3}{3+71} = \frac{3}{74}$$

$\therefore\ p+q = 77$

17. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$a_k + k$가 홀수이려면 a_k와 k의 홀짝이 서로 달라야 한다.
그런데, 상자에 적힌 숫자 중 홀수와 짝수의 개수가 각각 4이고, 카드에 적힌 숫자 중 홀수와 짝수의 개수도 각각 4이므로
$a_k + k$가 짝수가 되는 k의 개수와 $a_k + k$가 홀수가 되는 k의 개수는 각각 짝수여야 한다.
따라서 $a_k + k$의 값이 홀수인 k의 개수가 4보다 작으려면 그 개수는 0 또는 2이어야 한다.

(1) $a_k + k$의 값이 홀수인 k의 개수가 0인 경우
숫자 1, 3, 5, 7이 적혀 있는 상자에 각각 1, 1, 3, 3이 적힌 카드를 넣어야 하고
숫자 2, 4, 6, 8이 적혀 있는 상자에 각각 2, 2, 4, 4가 적힌 카드를 넣어야 하므로
구하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!2!} \times \frac{4!}{2!2!} = 36$$

(2) $a_k + k$의 값이 홀수인 k의 개수가 2인 경우
$a_k + k$의 값이 홀수가 되는 상자 2개를
숫자 1, 3, 5, 7이 적힌 상자 중에 한 개 선택하고
숫자 2, 4, 6, 8이 적힌 상자 중에 한 개 선택해야 한다.
따라서 $a_k + k$의 값이 홀수가 되는 상자 2개를 선택하는 방법의 수는

$${}_4\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_1 = 16$$

위에서 숫자 1이 적힌 상자와 숫자 2가 적힌 상자를 각각 선택했다고 하면
숫자 1이 적힌 상자에 넣을 짝수가 적힌 카드를 결정하는 방법의 수는 2
숫자 2가 적힌 상자에 넣을 홀수가 적힌 카드를 결정하는 방법의 수는 2
남은 6개의 상자에 적힌 수와 홀짝이 같도록 카드를 넣는 방법의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$16 \times 2 \times 2 \times 9 = 576$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 576 = 612$$

18. [출제 의도] 중복순열과 같은 것이 있는 순열을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

문제에서 주어진 시행을 3회 반복하였을 때 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $3^3 = 27$

(1) 뽑은 카드에 적힌 숫자의 합이 8인 경우
세 카드에 적힌 숫자가 각각 2, 3, 3인 경우이므로
구하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

(2) 뽑은 카드에 적힌 숫자의 합이 9인 경우
세 카드에 적힌 숫자가 모두 3인 경우이므로
구하는 경우의 수는 1

(1), (2)에서 구하는 확률은

$$\frac{3+1}{27} = \frac{4}{27}$$

$\therefore\ p+q = 31$

19. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열을 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

상자를 숫자가 작은 것부터 큰 것의 순서대로 나열했다고 생각하면, 홀수가 적힌 공끼리는 적힌 숫자가 작은 공일수록 왼쪽에 있는 상자에 들어가야 하고, 짝수가 적힌 공끼리도 적힌 숫자가 작은 공일수록 왼쪽에 있는 상자에 들어가야 한다. ⋯ (#)

이때 조건 (가)를 만족하는 경우는 다음과 같이 두 가지 경우가 있다.

(1) $a_7 < a_8$인 경우
a_7은 홀수가 적힌 공이 들어 있는 상자 중 가장 오른쪽에 있는 상자에 적힌 숫자이고, a_8은 짝수가 적힌 공이 들어 있는 상자 중 가장 오른쪽에 있는 상자에 적힌 숫자이므로 $a_8 = 8$이어야 한다.

상자 7에 들어갈 수 있는 공에 적힌 숫자는 6 또는 7이어야 하므로 조건 (가)에서 $a_7 = 7$이어야 한다.

따라서 문제에서 구하는 경우의 수는 1에서 6까지 적힌 공을 1에서 6까지 적힌 상자에 (#)을 만족하도록 넣는 방법의 수이므로

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

(2) $a_8 < a_7$인 경우
(1)과 같은 방법으로 $a_7 = 8$이어야 한다. 또한 이 경우 $a_6 < a_8 < a_7$이므로 문제에서 구하는 경우의 수는 1에서 7까지 적힌 공을 1에서 7까지 적힌 상자에 (#)을 만족하도록 넣는 방법의 수이므로

$$\frac{7!}{3!4!} = 35$$

(1), (2)에서 문제에서 구하는 경우의 수는

$$20 + 35 = 55$$

20. [출제 의도] 독립인 사건의 성질을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

두 사건 A, B가 독립이므로 확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdots$ ①

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)-\mathrm{P}(A\cap B^C)$

$=\mathrm{P}(A)+\{1-\mathrm{P}(B)\}-\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=1-\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\cdots$ ②

①, ②를 변변 더하면

$1+\mathrm{P}(A)=\frac{7}{6},\ \mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$

이를 ②에 대입하여 풀면

$1-\mathrm{P}(B)+\frac{1}{6}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(B)=\frac{2}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{15}$

21. [출제 의도] 이항분포의 정의를 이해하고 있는가?

$\mathrm{P}(X=1)={}_n\mathrm{C}_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=n\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_n\mathrm{C}_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2^{n-2}}{3^n}$

이고 문제의 조건으로부터

$\frac{\mathrm{P}(X=2)}{\mathrm{P}(X=1)}=6$이므로

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{2^{n-2}}{3^n}}{n\cdot\frac{2^{n-1}}{3^n}}=\frac{n-1}{4}=6$$

$\therefore\ n=25$

22. [출제 의도] 여사건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

문제에서 구하는 확률은 주머니에서 3개의 공을 꺼낼 때, 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 1 이하일 확률을 전체에서 제외한 것과 같다.

(1) 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 1일 확률은 빨간 공을 2개 선택하고, 나머지 1개의 공을 노란 공 또는 파란 공 중 하나를 선택할 확률이므로

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$$

(2) 노란 공과 파란 공의 개수의 합이 0일 확률은 빨간 공을 3개 선택할 확률이므로

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$$

따라서 (1), (2)에서 문제에서 구하는 확률은

$$1-\frac{12}{35}-\frac{1}{35}=\frac{22}{35}$$

23. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

세 수 a, b, c 중 두 수만 서로 같은 사건을 A라 하고, $a\times b\times c$가 6의 배수인 사건을 B라 하자.

$n(A)={}_3\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{P}_2=90$

이고, 사건 $A\cap B$는 아래와 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(1) 같은 두 수가 1 또는 5인 경우

남은 하나의 수는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times1\times2=6$

(2) 같은 두 수가 2 또는 4인 경우

남은 하나의 수는 3 또는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times2\times2=12$

(3) 같은 두 수가 3인 경우

남은 하나의 수는 2 또는 4 또는 6이어야 하므로 가능한 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times3=9$

(4) 같은 두 수가 6인 경우

남은 하나의 수는 6을 제외한 다섯 개의 수가 모두 될 수 있으므로 가능한 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times5=15$

(1)~(4)에서

$$n(A\cap B)=6+12+9+15=42$$

조건부확률의 정의에 의하여 구하는 확률은

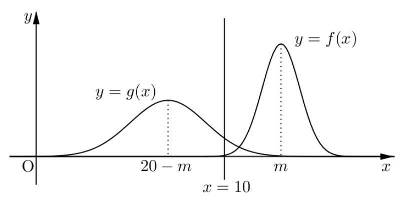
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{7}{15}$$

24. [출제 의도] 정규분포의 성질을 이해하고, 이를 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

두 확률변수 X, Y의 평균인 m, $20-m$의 평균이 10이므로 다음과 같은 경우로 나누어 생각한다.

(1) $m\ge10$인 경우

두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하면 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이 경우

$\mathrm{P}(10\le X\le m)=\mathrm{P}(10-m\le Z\le0)$

$\mathrm{P}(20-m\le Y\le10)=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{m-10}{2}\right)$

이므로

$\mathrm{P}(10\le X\le m)\ge\mathrm{P}(20-m\le Y\le10)$

이다. 따라서

$\mathrm{P}(X\le10)=\frac{1}{2}-\mathrm{P}(10\le X\le m)$

$\mathrm{P}(Y\ge10)=\frac{1}{2}-\mathrm{P}(20-m\le Y\le10)$

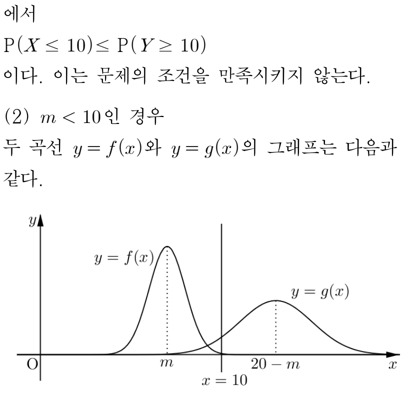
에서

$\mathrm{P}(X\le10)\le\mathrm{P}(Y\ge10)$

이다. 이는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

(2) $m<10$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



k의 값이 증가할 때,

$\mathrm{P}(X\le k)$의 값은 증가하고 $\mathrm{P}(Y\ge k)$의 값은 감소하므로 문제의 조건에서 $k=9$일 때 $\mathrm{P}(X\le k)=\mathrm{P}(Y\ge k)$이어야 한다.

$\mathrm{P}(X\le9)=\mathrm{P}(Z\le9-m)$

$\mathrm{P}(Y\ge9)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-11}{2}\right)$

즉, $\mathrm{P}(Z\le9-m)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{m-11}{2}\right)$

이므로 표준정규분포의 성질에서

$9-m+\frac{m-11}{2}=0\ \Rightarrow\ m=7$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge8)+\mathrm{P}(Y\le14)$

$=\mathrm{P}(Z\ge1)+\mathrm{P}\left(Z\le\frac{1}{2}\right)$

$=(0.5-0.3413)+(0.5+0.1915)=0.8502$

25. [출제 의도] 조건부확률과 독립시행의 정의를 이용한 문제 해결 과정을 이해할 수 있는가?

(가): $X=3$인 경우는 주사위를 던져서 처음 두 번에는 3의 배수인 눈과 3의 배수가 아닌 눈이 각각 한 번씩 나오고, 세 번째에는 3의 배수의 눈이 나와야 한다. (총 2가지 경우)

또한, 네 번째와 다섯 번째에는 3의 배수가 아닌 눈이 나오고, 여섯 번째에는 3의 배수인 눈이 나와야 한다. (총 1가지 경우)

$\therefore\ \mathrm{P}(X=3)=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3\ \Rightarrow\ p=2$

(나): $X=4$인 경우는 주사위를 던져서 처음 세 번에는 3의 배수인 눈이 한 번, 3의 배수가 아닌 눈이 두 번 나오고 네 번째에는 3의 배수인 눈이 나와야 한다. (총 3가지 경우)

또한, 다섯 번째와 여섯 번째에는 모두 3의 배수가 아닌 눈이 나와야 한다. (총 1가지 경우)

$\therefore\ \mathrm{P}(X=4)=3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4\ \Rightarrow\ q=3$

(다): (1), (2), (3)에서 구하는 확률은

$$\frac{3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4}{\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4}$$

$=\frac{48}{12+16+48}=\frac{12}{19}\ \Rightarrow\ r=\frac{12}{19}$

$\therefore\ p\times q\times r=2\times3\times\frac{12}{19}=\frac{72}{19}$

26. [출제 의도] 이산확률분포를 따르는 확률변수와 표본평균의 성질을 이해하고 있는가?

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{{}_{x+1}\mathrm{C}_2}$

$=\frac{2k}{x(x+1)}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이고 확률질량함수의 성질에 의하여

$\sum_{x=1}^{4}\frac{2k}{x(x+1)}$

$=2k\sum_{x=1}^{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$

$=2k\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{8}{5}k=1\qquad\therefore\ k=\frac{5}{8}$

따라서 $\mathrm{P}(X=x)=\frac{5}{4x(x+1)}\ (x=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

이고,

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{x=1}^{4} x\cdot\frac{5}{4x(x+1)}$$
$$=\frac{5}{4}\sum_{x=1}^{4}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{77}{48}$$

한편 이 모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$Y=X_1+X_2=2\overline{X}$

이므로 확률변수와 표본평균의 성질에 의하여

$$\therefore\ \mathrm{E}(24Y+1)=\mathrm{E}(48\overline{X}+1)$$
$$=48\mathrm{E}(\overline{X})+1$$
$$=48\mathrm{E}(X)+1=77+1=78$$

27. [출제 의도] 원순열을 이용한 경우의 수를 구할 수 있는가?

(1) $n=12$인 경우

조건 (가)를 만족하는 모든 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에는 홀수를 배열하고, 나머지 부채꼴에 남은 수를 배열하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2\times 9!=20\times 9!$

조건 (가)를 만족하는 모든 경우에서 조건 (나)를 만족하지 않는 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 적힌 수의 합이 18 이상인 경우이고,
1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 배열한 두 홀수의 합이 18 이상인 경우는 두 수가 각각 $(7, 11)$, $(9, 11)$인 경우뿐이므로 조건 (가)를 만족하고, 조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수는 $2\times 2\times 9!=4\times 9!$

따라서 $f(12)=20\times 9!-4\times 9!=16\times 9!$

(2) $n=13$인 경우

조건 (가)를 만족하는 모든 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에는 홀수를 배열하고, 나머지 부채꼴에 남은 수를 배열하는 경우이므로 그 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2\times 10!=30\times 10!$

조건 (가)를 만족하는 모든 경우에서 조건 (나)를 만족하지 않는 경우는 1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 적힌 수의 합이 20 이상인 경우이고,
1이 적힌 부채꼴의 양 옆에 배열한 두 홀수의 합이 20 이상인 경우는 두 수가 각각 $(7, 13)$, $(9, 11)$, $(9, 13)$, $(11, 13)$인 경우뿐이므로
조건 (가)를 만족하고, 조건 (나)를 만족하지 않는 경우의 수는 $4\times 2\times 10!=8\times 10!$

따라서 $f(13)=30\times 10!-8\times 10!=22\times 10!$

(1), (2)에서 $\dfrac{f(13)}{f(12)}=\dfrac{22\times 10!}{16\times 9!}=\dfrac{55}{4}$

$\therefore\ p+q=59$

28. [출제 의도] 중복조합을 이용하여 문제의 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

함수 f의 치역을 선택하는 방법의 수는

${}_4\mathrm{C}_3=4$ ⋯ ①

조건 (나), (다)에서 선택된 함수 f의 치역의 원소 중에서 가장 큰 것은 $f(4)$이고,

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 선택하는 모든 방법의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

$f(5)$, $f(6)$, $f(7)$을 선택하는 모든 방법의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

이므로 함수 f의 치역의 원소의 개수가 3 이하가 되도록 함수 f를 결정하는 방법의 수는

$10\times 10=100$ ⋯ ②

이 중에서

함수 f의 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 함수 f를 결정하는 방법의 수는 1 ⋯ ③

함수 f의 치역의 원소의 개수가 2가 되도록 함수 f를 결정하는 방법의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times({}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3-1)=30$ ⋯ ④

①, ②, ③, ④에서

문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f의 개수는

$4\times(100-1-30)=276$

29. [출제 의도] 이산확률변수의 성질을 이해하고, 평균과 분산을 구할 수 있는가?

이산확률변수의 성질에 의하여

$\dfrac{1}{3}+a+b+\dfrac{1}{6}=1\ \Rightarrow\ a+b=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ①

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{3}+2a+3b+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{3}$

에서 $2a+3b=\dfrac{4}{3}$ ⋯ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{3}$

따라서

$$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+4^2\times\frac{1}{6}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+3+\frac{8}{3}=\frac{20}{3}$$

이므로

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{20}{3}-\frac{49}{9}=\frac{11}{9}$$

$\therefore\ \mathrm{V}(3X+1)=9\mathrm{V}(X)=11$

30. [출제 의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 활용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

문자 a가 적힌 카드끼리 서로 이웃하지 않게 카드를 나열하는 방법의 수는 카드를 나열하는 모든 방법의 수에서 a가 적힌 카드끼리 이웃하는 경우의 수를 제외하면 되므로

$$\frac{7!}{2!2!}-\frac{6!}{2!}=1260-360=900$$

한편, 숫자가 적힌 카드가 작은 수부터 크기순으로 왼쪽부터 오른쪽으로 나열해야 하므로 숫자 1, 2, 3이 적힌 카드를 서로 같은 것으로 봐야 한다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$900\times\frac{1}{3!}=150$$

31. [출제 의도] 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

승객 n명을 임의추출하여 버스를 기다리는 시간을 조사한 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이므로

$$2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=11.12-8.88=2.24$$

$\Rightarrow\ \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{2.24}{3.92}=\dfrac{4}{7}$ ⋯ ①

문제의 조건에서 $\dfrac{n}{\sigma}=12.25=\dfrac{49}{4}$ ⋯ ②

①, ②에서 $n=49$, $\sigma=4$ $\quad\therefore\ n+\sigma=53$

32. [출제 의도] 조건부확률의 정의를 이해하고 있는가?

$a+b+c\le 4$인 경우는 뽑은 공에 적힌 세 수가 각각 1, 1, 1이거나 1, 1, 2인 경우뿐이다.

따라서 $a+b+c>4$일 확률은

$$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}-\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{13}{20}\ \cdots\ ①$$

이때 $a+b+c>4$이면서 세 수 a, b, c 중 적어도 두 수가 같은 경우는 뽑은 세 수가 1, 1, 1이거나 1, 1, 2이거나 1, 2, 3이 아닌 경우이다.

따라서 $a+b+c>4$이고 a, b, c 중 적어도 두 수가 같을 확률은

$$1-\frac{{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_1\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{7}{20}\ \cdots\ ②$$

①, ②에서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{7}{20}}{\frac{13}{20}}=\frac{7}{13}\quad\therefore\ p+q=20$$

미적분

정 답

1	①	2	⑤	3	①	4	⑤	5	②
6	②	7	⑤	8	③	9	20	10	47
11	37	12	⑤	13	③	14	①	15	④
16	③	17	②	18	②	19	9	20	25
21	10	22	②	23	③	24	④	25	②
26	②	27	①	28	③	29	16	30	25
31	29								

해 설

1. [출제 의도] e의 정의를 이용하여 극한을 계산할 수 있는가?

$\lim_{x\to 0}\{(1-2x)(1+\sin x)\}^{\cot x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{(1-2x)^{\frac{1}{\tan x}}(1+\sin x)^{\frac{1}{\tan x}}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}\cdot\frac{-2x}{\tan x}}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\tan x}}\right\}$

$=\lim_{x\to 0}\left[\left\{(1-2x)^{-\frac{1}{2x}}\right\}^{-\frac{2x}{\tan x}}\left\{(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}\right\}^{\frac{\sin x}{\tan x}}\right]$

$=e^{-2}\times e^{1}=\dfrac{1}{e}$

2. [출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

즉 $\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$이므로

$1-a=4+2b \Rightarrow a+2b=-3 \ \cdots\ (\#)$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 2+}\dfrac{e^{x-2}-a-(1-a)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\dfrac{x^2+bx-(4+2b)}{x-2}$

$\Rightarrow\ 1=4+b,\ b=-3$

$(\#)$에서 $a=3$

$\therefore\ g'(2)=f'(f(2))\times f'(2)$

$=f'(-2)\times f'(2)$

$=-7\times 1=-7$

3. [출제 의도] 급수의 성질을 이해하고 있는가?

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$이고,

급수의 성질에 의하여 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이므로

주어진 등식에 $n\to\infty$인 극한을 취하면

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2S_n)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{kn}{n+1} \Rightarrow k=6$

주어진 등식에 $n=1$을 대입하면

$a_1+2S_1=3 \Rightarrow 3a_1=3 \qquad \therefore\ a_1=1$

4. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수를 포함한 식의 값을 계산할 수 있는가?

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\alpha+\sin\beta=\dfrac{1}{2}\ \cdots$ ①

$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{4}\ \cdots$ ②

①의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{4}$

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\dfrac{3}{4}$ ($\because$ ②) $\cdots$ ③

②의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha\sin^2\beta=\dfrac{1}{16}$

$(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)=\dfrac{1}{16}$

$1-(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{1}{16}$

$1-(2-\sin^2\alpha-\sin^2\beta)+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{1}{16}$

$\cos^2\alpha\cos^2\beta=\dfrac{5}{16}$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$이므로

$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

(다른 풀이)

근의 공식과 주어진 조건으로부터

$\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4},\ \sin\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$이다.

$\sin\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$이고 주어진 조건으로부터

$\cos\alpha>0$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}}$

$\sin\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$이고 주어진 조건으로부터

$\cos\beta>0$이므로

$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}$

따라서

$\cos\alpha\cos\beta=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\cdot\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}}=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

5. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

그림 R_1에서 $\tan\angle A_1B_1M_1=\dfrac{1}{2}$이므로

$\tan\angle CB_1M_1=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\angle A_1B_1M_1\right)=2$

$\angle CB_1N_1=\theta$라 하면 $\tan 2\theta=2$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=2$

$2\tan\theta=2-2\tan^2\theta$

$\tan^2\theta+\tan\theta-1=0$

$\tan\theta>0$이므로 $\tan\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore\ \overline{CN_1}=\sqrt{5}-1$

$\therefore\ S_1=\square ABCD-\triangle A_1B_1M_1-\triangle B_1CN_1$

$=4-1-(\sqrt{5}-1)=4-\sqrt{5}$

그림 R_2에서 $\overline{A_2B_2}=x$라 하면

$\overline{A_2B_2}:\overline{B_1B_2}=\overline{N_1C}:\overline{B_1C}$

$x:2-x=\sqrt{5}-1:2$

$2x=(\sqrt{5}-1)(2-x)$

$(\sqrt{5}+1)x=2(\sqrt{5}-1)$

$\therefore\ x=\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{(\sqrt{5}-1)^2}{2}=3-\sqrt{5}$

따라서 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는

넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r=\left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{4-\sqrt{5}}{1-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2(4-\sqrt{5})}{3\sqrt{5}-5}=\frac{2(4-\sqrt{5})(3\sqrt{5}+5)}{(3\sqrt{5})^2-5^2}=\frac{5+7\sqrt{5}}{10}$$

6. [출제 의도] 함수의 극대와 극소를 이해하고 계산할 수 있는가?

$f'(x)=-\cos^2x+\sin^2x-2\sin x+2k+3$

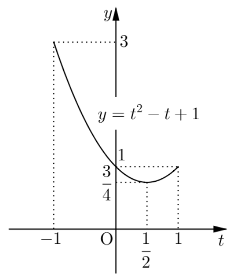
$=2\sin^2x-2\sin x+2k+2$

$=2(\sin^2x-\sin x+k+1)$

함수 $f(x)$가 열린 구간 $(0,2\pi)$에서 단 하나의 극값을 가지려면 함수 $f'(x)$의 부호가 열린 구간 $(0,2\pi)$에서 한 번만 바뀌어야 한다.

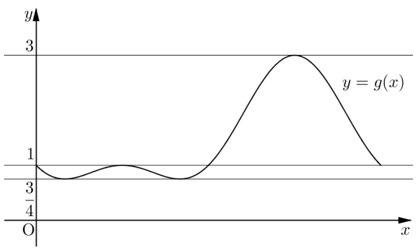
즉, 곡선 $y=\sin^2x-\sin x+1$과 직선 $y=-k$가 접하지 않으면서 만나는 점의 개수가 1이어야 한다.

$y=t^2-t+1\ (-1\le t\le 1)$의 그래프는 아래와 같다.



따라서 함수 $g(x)$를 $g(x)=\sin^2x-\sin x+1$라 하고, $\sin x=t$라 하면 $g(x)$의 증감표와 그래프는 각각 다음과 같다.

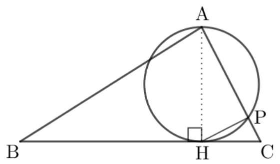
x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	0		$\frac{1}{2}$		1		$\frac{1}{2}$		-1		0
$g(x)$	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1	↘	$\frac{3}{4}$	↗	3	↘	1



따라서 $f'(x)$의 부호가 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 한 번만 바뀌기 위해서는 $k=-1$이어야 한다.

7. [출제 의도] 코사인법칙과 합성함수의 미분법을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

ㄱ) 그림과 같이 원의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{PH}}$이므로



$\triangle\mathrm{AHC}\backsim\triangle\mathrm{APH}$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{AP}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{AP}}=3f(t)$ (참)

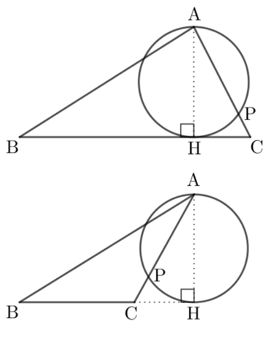
ㄴ) $f(t)=2$이면 ㄱ에 의하여 $\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{6}$이고, 직각삼각형 AHB에서

$\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{19}$

직각삼각형 AHC에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{3}$

따라서 다음 그림과 같은 두 가지 경우에 대하여 $\overline{\mathrm{BC}}=t$의 값은 $\sqrt{19}+\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{19}-\sqrt{3}$이다.



따라서 $f(t)=2$인 모든 실수 t의 값의 곱은 $(\sqrt{19}+\sqrt{3})(\sqrt{19}-\sqrt{3})=16$ (참)

ㄷ) $\angle\mathrm{ABC}=\theta(t)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\overline{\mathrm{AB}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}\cos\theta(t)=\overline{\mathrm{AC}}^2$

$\Rightarrow\ 25+t^2-10t\cos\theta(t)=9$

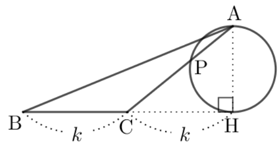
$\Rightarrow\ t^2-10t\cos\theta(t)+16=0\ \cdots$ ①

직각삼각형 AHB에서

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{AB}}\sin\theta(t)=5\sin\theta(t)$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AH}}^2=3f(t)=25\sin^2\theta(t)$

$\Rightarrow\ f(t)=\dfrac{25}{3}\sin^2\theta(t)\ \cdots$ ②



한편 $\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BC}}=k$일 때, 위 그림과 같이 $\overline{\mathrm{BC}}<\overline{\mathrm{BH}}$이고, 직각삼각형 AHB에서

$\cos\theta(k)=\dfrac{2}{5}k$

①에서 $\cos\theta(k)=\dfrac{k^2+16}{10k}$이므로

$\dfrac{k^2+16}{10k}=\dfrac{2k}{5}\ \Rightarrow\ k^2=\dfrac{16}{3}\quad\therefore\ k=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$\overline{\mathrm{AH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-k^2}=\sqrt{\dfrac{11}{3}}$ 이므로

$\therefore\ \cos\theta(k)=\dfrac{8}{5\sqrt{3}},\ \sin\theta(k)=\dfrac{\sqrt{11}}{5\sqrt{3}}\ \cdots$ ③

①의 양변을 t에 대하여 미분하면

$2t-10\cos\theta(t)+10t\sin\theta(t)\cdot\theta'(t)=0$

위 등식의 양변에 $t=k=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$를 대입하면

③에 의하여

$\dfrac{8}{\sqrt{3}}-\dfrac{16}{\sqrt{3}}+10\cdot\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{5\sqrt{3}}\cdot\theta'(k)=0$

$\dfrac{8\sqrt{11}}{3}\theta'(k)=\dfrac{8}{\sqrt{3}},\ \theta'(k)=\sqrt{\dfrac{3}{11}}\ \cdots$ ④

②에서

$f'(t)=\dfrac{50}{3}\sin\theta(t)\cos\theta(t)\cdot\theta'(t)$

③, ④에서

$\therefore\ f'(k)=\dfrac{50}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{11}}{5\sqrt{3}}\cdot\dfrac{8}{5\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{11}}=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

(참)

(다른 풀이) 직각삼각형 ABH와 ACH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2-\left(\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CH}}\right)^2$

$\quad=\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CH}}^2$

$\Rightarrow\ 25-\left(t+\overline{\mathrm{CH}}\right)^2=9-\overline{\mathrm{CH}}^2$

$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{8}{t}-\dfrac{1}{2}t$

$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{BC}}=k$에서

$k=\dfrac{8}{k}-\dfrac{1}{2}k\ \Rightarrow\ k=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

$f(t)=\dfrac{1}{3}\overline{\mathrm{AH}}^2=\dfrac{1}{3}\left\{9-\left(\dfrac{8}{t}-\dfrac{1}{2}t\right)^2\right\}$

$\quad=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{64}{t^2}+17\right)$

$\Rightarrow\ f'(t)=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{128}{t^3}\right)$

$\therefore\ f'(k)=f'\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

8. [출제 의도] 도함수를 이용하여 함수의 그래프를 그리고 문제를 해결할 수 있는가?

(가) 조건에 의하여 실수 전체의 집합에서 $f'(x)\geq 0$이거나 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

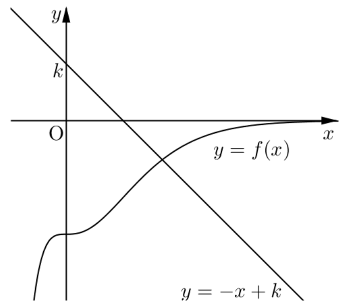
(1) $f'(x)\geq 0$인 경우

$f'(x)=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$

에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이려면 $a<0$이어야 한다.

또한, $a<0$이면 충분히 큰 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<0$이어야 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이다.

이때 그림과 같이 두 함수 $y=f(x)$와 $y=-x+k$는 반드시 제4사분면에서 접점이 아닌 교점을 가지므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.



(2) $f'(x)\leq 0$인 경우

(1)과 같은 방법으로 $a>0$이고

조건 (나)에서 함수 $|f(x)-f(0)|$의 그래프는 원점을 지나므로 $f'(0)=0$이어야 한다.

즉, 실수 전체의 집합에서 $f'(x)\leq 0$이고, $f'(0)=0$이므로

$f'(x)=\{-ax^2+(2a-b)x+b-c\}e^{-x}$

$\quad=-ax^2e^{-x}$

$\Rightarrow\ 2a-b=0,\ b-c=0$

$\therefore\ f(x)=a\left(x^2+2x+2\right)e^{-x}$

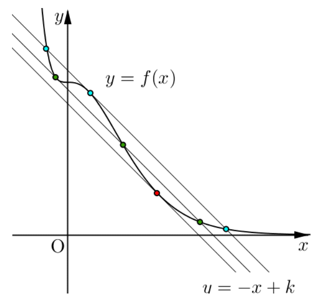
이때 조건 (다)를 만족하려면 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 $x<0$에서 접점이 아닌 교점을 하나 가지고, $x>0$에서 교점을 가지면 그 점은 반드시 접점이어야 한다. ⋯ (#)

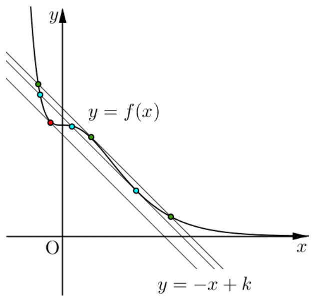
방정식 $f'(x)=-1$의 실근은

방정식 $x^2e^{-x}=\dfrac{1}{a}$ ⋯ ⓐ의 실근과 같다.

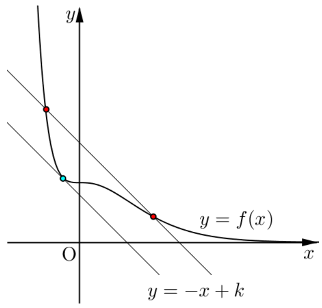
$a>0$이므로 방정식 ⓐ는 2개 이하의 양의 실근을 갖는다.

방정식 ⓐ가 2개의 양의 실근을 갖는 경우, 그림과 같이 어느 경우에도 (#)을 만족하지 않는다.

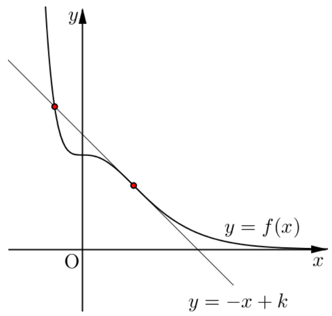




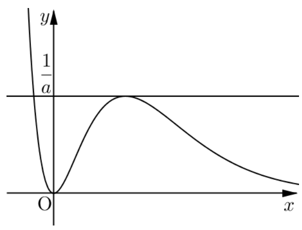
같은 방법으로 방정식 ⓐ가 양의 실근을 갖지 않는 경우에도 그림과 같이 어느 경우에도 (#)을 만족하지 않는다.



방정식 ⓐ가 단 하나의 양의 실근을 갖는 경우, 아래와 같은 경우에만 조건 (다)를 만족시킨다.



방정식 $x^2e^{-x}=\frac{1}{a}$가 단 하나의 양의 실근을 갖는 경우는 $\frac{1}{a}$가 함수 $y=x^2e^{-x}$의 극댓값인 경우이다.



함수 $y=x^2e^{-x}$의 극댓값은 $\frac{4}{e^2}$이므로

$\therefore\ a=\frac{e^2}{4}$

$\therefore\ f(x)=\frac{e^2}{4}(x^2+2x+2)e^{-x},\quad f(2)=\frac{5}{2}$

(참고) 조건 (다)를 만족하는 경우는 직선 $y=-x+k$가 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선일 때이다.

곡선 $y=f(x)$는 $x=2$에서 변곡점을 가지므로 $f'(2)=-1$이다. 이를 이용해서 a의 값을 구할 수도 있다.

9. [출제 의도] 로그함수의 극한을 계산할 수 있는가?

점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(u,\ 2\ln u)$라 하면
점 P는 원 C 위의 점이므로

$$(u-1-t)^2+(2\ln u)^2=t^2$$
$$t^2-2t(u-1)+(u-1)^2+(2\ln u)^2=t^2$$
$$(u-1)^2+4(\ln u)^2=2t(u-1)$$
$$\therefore\ t=\frac{(u-1)^2+4(\ln u)^2}{2(u-1)}$$

$t\to 0+$일 때 $u\to 1+$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{2t}$$
$$=\lim_{u\to 1+}\frac{\sqrt{(u-1)^2+(2\ln u)^2}}{\dfrac{(u-1)^2+4(\ln u)^2}{u-1}}$$
$$=\lim_{u\to 1+}\frac{\sqrt{\dfrac{(u-1)^2+4(\ln u)^2}{(u-1)^2}}}{\dfrac{(u-1)^2+4(\ln u)^2}{(u-1)^2}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+4}}{1+4}\quad\left(\because\ \lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}=1\right)$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore\ 100a^2=100\times\frac{1}{5}=20$$

10. [출제 의도] 매개변수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수의 값을 계산할 수 있는가?

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos t+a\sin t}{3\sin^2 t\cos t}\ (t\neq 0)$$

$\frac{dy}{dx}$의 값의 부호가 $t=0$ 좌우에서 바뀌지 않으므로(양의 값을 가지므로) 주어진 함수는 $t=0$에서 극값을 가지지 않는다.

$t\neq 0$이면 $-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $3\sin^2 t\cos t>0$
이므로 $y'=\cos t+a\sin t$의 부호가 바뀔 때, 주어진 함수가 극값을 가진다.

$y'=\cos t(a\tan t+1)$

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos t>0$이므로
$a\tan t+1$의 값이 음에서 양으로 바뀔 때 주어진 함수가 극솟값을 갖는다.

$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\tan t$는 증가함수이므로
$a>0$이다. ⋯ (#)

즉, 문제의 조건에서 $\tan\alpha=-\frac{1}{a}$이고,
$a\sin\alpha=-\cos\alpha$에서
$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=(a^2+1)\sin^2\alpha=1$$
$$\Rightarrow\ \sin^2\alpha=\frac{1}{a^2+1}$$

(#)에서 $\tan\alpha=-\frac{1}{a}<0$이므로
$\alpha<0$이고, $\sin\alpha<0$이므로
$$\therefore\ \sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

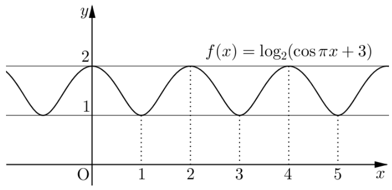
$\cos\alpha>0$이고, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로
$$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$$

따라서 주어진 함수의 극솟값은
$$\sin\alpha-a\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}-\frac{a^2}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=-(a^2+1)\times\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=-\sqrt{a^2+1}=-\frac{\sqrt{10}}{3}$$
$$\Rightarrow\ a^2=\frac{1}{9},\ a=\frac{1}{3}\ (\because\ a>0)$$
$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}},\ \sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

따라서 $x=-\alpha$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-\alpha}=\frac{\cos(-\alpha)+a\sin(-\alpha)}{3\sin^2(-\alpha)\cos(-\alpha)}$$
$$=\frac{\cos\alpha-a\sin\alpha}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha}{3\sin^2\alpha\cos\alpha}$$
$$=\frac{2}{3\sin^2\alpha}=\frac{20}{27}$$
$$\therefore\ p+q=20+27=47$$

11. [출제 의도] 여러 가지 함수의 도함수를 활용하여 방정식의 실근의 개수를 구할 수 있는가?

$f(x)$는 주기가 2이고, 최댓값과 최솟값이 각각 1, 2이므로 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 아래와 같다.



$g(2)=1$이고, $f(0)=f(2)=2$이므로 조건 (다)를 만족하려면
$f(x)=k\ (1\le k\le 2)$, $g(k)=1$인 실수 x가 열린 구간 $(0,\ 2)$에 오직 하나만 존재해야 한다.

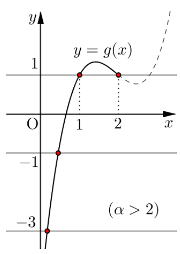
따라서 함수 $f(x)$의 그래프로부터 $x=1$이고, $k=1$이어야 한다.

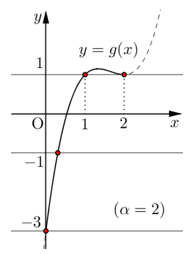
즉, $g(1)=g(2)=1$이므로 인수정리에 의하여
$$g(x)=(x-1)(x-2)(x-\alpha)+1$$
의 형태로 나타낼 수 있다.

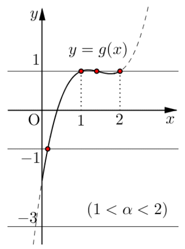
조건 (나)를 만족하려면 닫힌 구간 $[0,\ 2]$에서 방정식 $g(x)=2k-1$ (k는 정수)의 $x=1$, $x=2$가 아닌 실근이 단 하나만 존재해야 한다. ⋯ (#)

이때 α의 값을 기준으로 함수 $g(x)$의 형태를 다음과 같이 구별할 수 있다.

(1) $\alpha>1$인 경우
다음 그림과 같이 방정식 $g(x)=2k-1$은 4개 이상의 실근을 가지므로 어느 경우에도 (#)를 만족하지 않는다.







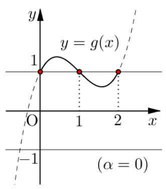
(2) $0 \le \alpha \le 1$인 경우

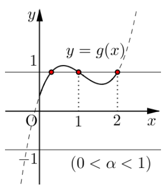
$0 \le \alpha \le 1$이면 $0 < x < 1$일 때
$0 < (x-1)(x-2) < 2$이고 $-1 < x-\alpha < 1$이므로
$-2 < (x-1)(x-2)(x-\alpha) < 2$이다.
따라서 $0 < x < 1$이면 $-1 < g(x) < 3$이다.

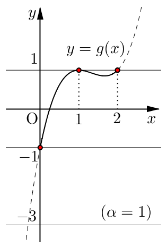
비슷한 방법으로 $1 < x < 2$이면 $0 < g(x) < 1$이다.

즉, $0 \le \alpha \le 1$인 경우 함수 $g(x)$의 극댓값은 3보다 작고, 극솟값은 0보다 크므로 곡선 $y=g(x)$는 그림과 같이 구간 $[0, 1)$에서 직선 $y=1$ 또는 $y=-1$과 단 한 점에서만 만난다.

따라서 이 경우 항상 (#)를 만족시킨다.



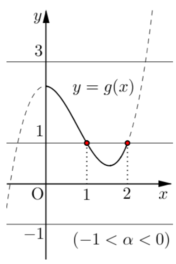




(3) $-1 < \alpha < 0$인 경우

α의 값이 감소함에 따라 $g(0) = -2\alpha+1$의 값은 증가한다. 또한
$-1 < \alpha < 0$이면 $1 < x < 2$일 때
$-\frac{1}{4} < (x-1)(x-2) < 0$이고 $1 < x-\alpha < 3$이므로
$-\frac{3}{4} < (x-1)(x-2)(x-\alpha) < 0$
이다. 따라서 $1 < x < 2$이면 $\frac{1}{4} < g(x) < 1$이다.

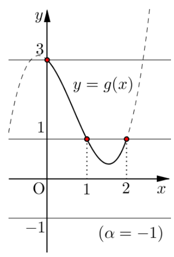
즉, 함수 $g(x)$의 극솟값은 0보다 크므로 그림과 같이 방정식 $g(x) = 2k-1$은 서로 다른 두 실근만 갖는다.
따라서 이 경우 (#)를 만족시키지 않는다.

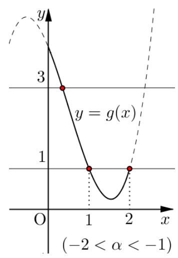


(4) $-2 < \alpha \le -1$인 경우

α의 값이 감소함에 따라 $g(0) = -2\alpha+1$의 값은 증가한다. 또한
$-2 < \alpha \le -1$이면 $1 < x < 2$일 때
$-\frac{1}{4} < (x-1)(x-2) < 0$이고 $2 < x-\alpha < 4$이므로
$-1 < (x-1)(x-2)(x-\alpha) < 0$
이다. 따라서 $1 < x < 2$이면 $0 < g(x) < 1$이다.

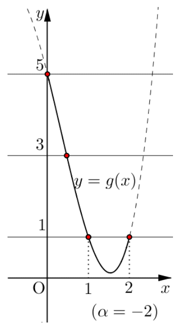
따라서 곡선 $y=g(x)$는 그림과 같이 구간 $[0, 1)$에서 직선 $y=3$과 단 한 점에서 만나고, 이 경우 항상 (#)를 만족시킨다.

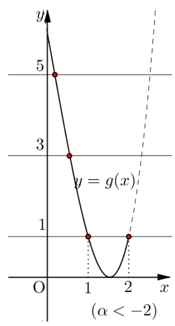




(5) $\alpha \le -2$인 경우

$g(0) \ge 5$이므로 다음 그림과 같이 방정식 $g(x) = 2k-1$은 4개 이상의 실근을 가지므로 어느 경우에도 (#)을 만족하지 않는다.





(1)~(5)에서 문제의 조건을 만족시키는 α의 값의 범위는 $0 \le \alpha \le 1$ 또는 $-2 < \alpha \le -1$이다.

이때 $g(3) = 7-2\alpha$이므로
$5 \le g(3) \le 7$ 또는 $9 \le g(3) < 11$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 정수 n의 값은 5, 6, 7, 9, 10이므로 그 합은 37이다.

12. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이해하고 있는가?

$\frac{dy}{dx} = y'$이라 하자.
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2x + 2yy' = (3-4y')e^{3x-4y}$
$(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$를 대입하면

$\frac{8}{5} + \frac{6y'}{5} = (3-4y')$

$\Rightarrow 26y' = 7 \quad \therefore y' = \frac{7}{26}$

따라서 구하는 접선의 기울기는 $\frac{7}{26}$이다.

13. [출제 의도] 수열의 극한과 급수의 성질을 이해하고 있는가?

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 1$이므로
수열의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{2^k}-3\right) = 1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2^n}-3\right) = 0$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n} = 3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2^n}{a_n+2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{2^n}-1}{\frac{a_n}{2^n}+1} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$

14. [출제 의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 극한을 계산할 수 있는가?

주어진 극한이 수렴하고 (분모)→ 0이므로
(분자)→ 0이어야 한다. 따라서

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\{f(\sin x)-1\} = f\left(\frac{1}{2}\right)-1 = 0$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

한편 주어진 식에서

$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{f(\sin x)-1}{x-\frac{\pi}{6}} = 6\sqrt{3}$이고, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$이므로
$g(x) = f(\sin x)$라 하면 미분계수의 정의에서
$g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\sqrt{3}$이다.
합성함수의 미분법에서
$g'(x) = f'(\sin x)\cos x$

$\Rightarrow g'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}f'\left(\frac{1}{2}\right) = 6\sqrt{3}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 12$

$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 12 = 13$

15. [출제 의도] 이계도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$f(x) = \frac{\ln x+1}{x}$이라 하면

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x+1)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$

$f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x - 1}{x^3}$

이를 이용하여 $f'(x)$의 증감표를 그리면 아래 표와 같다.

x		$\sqrt{e}$	
$f'(x)$	↘	$-\frac{1}{2e}$	↗
$f''(x)$	$(-)$	0	$(+)$

따라서 $f'(x)$는 $x = \sqrt{e}$에서 최솟값을 갖는다.
즉, 함수 $y = f(x)$ 위의 점 $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$에서 그은 접선의 기울기가 가장 작다.

$f(\sqrt{e}) = \dfrac{3}{2\sqrt{e}}$, $f'(\sqrt{e}) = -\dfrac{1}{2e}$이므로

함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(\sqrt{e}, f(\sqrt{e}))$에서 그은 접선 l의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e}) + \frac{3}{2\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$$

따라서 직선 l의 x절편은 $4\sqrt{e}$이고 y절편은 $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$이므로 직선 l과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{e}\times\frac{2}{\sqrt{e}} = 4$$

16. [출제 의도] 여러 가지 함수의 미분법을 활용하여 미분계수의 값을 계산할 수 있는가?

(가)에서 모든 실수 x에 대하여 $e^x(2+\sin x) > 0$이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로($\Rightarrow$ 연속이므로) $f(x) > 0$이고 $g(x) > 0$이어야 한다.

즉, 두 함수 $f(x)$와 $\sqrt{g(x)}$는 실수 전체에서 미분가능하다.

(가)의 양변을 미분하면

$$f'(x)\sqrt{g(x)} + f(x)\cdot\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}} = e^x(\sin x + \cos x + 2)$$

위 등식의 양변에 $2\sqrt{g(x)}$를 곱하면

$$2f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = 2\sqrt{g(x)}\cdot e^x(\sin x+\cos x+2)$$

위 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2f'(0)g(0) + f(0)g'(0) = 6\sqrt{g(0)}$

(나)에서 $6\sqrt{g(0)} = 1$

$\therefore\ g(0) = \dfrac{1}{36}$

조건 (가)의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\dfrac{1}{6}f(0) = 2$, $f(0) = 12$

$\therefore\ f(0)g(0) = 12\cdot\dfrac{1}{36} = \dfrac{1}{3}$

17. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

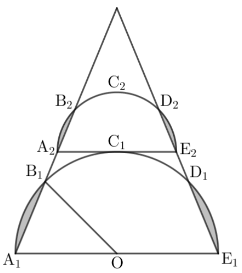


그림 R_1에서 선분 A_1E_1의 중점을 O라 하면

$\angle A_1OB_1 = \dfrac{\pi}{4}$이므로

부채꼴 A_1OB_1의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

삼각형 A_1OB_1의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore\ S_1 = 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

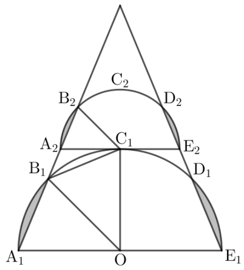


그림 R_2에서 세 점 B_1, C_1, D_1은 호 A_1E_1을 사등분하는 점이므로

$\triangle A_1OB_1 \equiv \triangle B_1OC_1$ (SAS 합동)이고

$\triangle A_1OB_1$, $\triangle B_1OC_1$은 모두 이등변삼각형이므로

$\angle A_1B_1O = \angle C_1B_1O \ \Rightarrow\ \angle B_2B_1C_1 = \dfrac{\pi}{4}$ ⋯ (1)

세 점 B_2, C_2, D_2은 반원 A_2E_2를 사등분하는 점이므로

$\angle B_1B_2C_1 = \angle A_1B_1O$ ⋯ (2)

(1), (2)에서

$\triangle A_1OB_1 \backsim \triangle B_2B_1C_1$ (AA 닮음) ⋯ (3)

삼각형 A_1OB_1에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2 - 2\,\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cos\angle A_1OB_1 = 1+1-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2-\sqrt{2}$$

즉, $\overline{A_1B_1}^2 = \overline{B_1C_1}^2 = 2-\sqrt{2}$

(3)에서 $\overline{A_1O} : \overline{A_1B_1} = \overline{B_1C_1} : \overline{B_2C_1}$

$\Rightarrow\ \overline{B_2C_1} = \overline{A_1B_1}\cdot\overline{B_1C_1} = 2-\sqrt{2}$

따라서 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의

$$r = \left(\frac{\overline{B_2C_1}}{\overline{B_1O}}\right)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 6-4\sqrt{2}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-r} = \frac{\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-(6-4\sqrt{2})} = \frac{\pi-2\sqrt{2}}{4(4\sqrt{2}-5)} = \frac{(\pi-2\sqrt{2})(5+4\sqrt{2})}{28}$$

18. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

(ㄱ) $g(-1) = -2$이고, 문제의 조건에서 $h(-1) = 2$이므로 $f(-1) = 0$이다. 따라서 $a=b$이다.

또한, $x>1$일 때 $h'(x) = f'(x)$이고,

$f'(x) = \dfrac{-a(xe^x - c)}{(e^x+c)^2}$ 이고 $c>0$이므로

함수 $h(x)$가 $x=t$ $(t>1)$에서 극댓값을 가지려면 $f'(t) = 0 \Rightarrow te^t = c$이어야 한다. ⋯ ①

따라서 $t=2$이면 $c = 2e^2$이다. (참)

(ㄴ) 함수 $h(x)$는 연속이고

$$\lim_{x\to -1-} h'(x) = \lim_{x\to -1-}\{f'(x) - g'(x)\} = f'(-1)$$

$$\lim_{x\to -1+} h'(x) = \lim_{x\to -1+}\{f'(x) - g'(x)\} = f'(-1) - 2$$

이므로 함수 $h(x)$가 $x=-1$에서 극댓값을 가지려면 $f'(-1)\ge 0$, $f'(-1)-2\le 0$이어야 한다.

$\Rightarrow\ 0\le f'(-1)\le 2$

$$f'(-1) = \frac{ae^{-1}+ac}{(e^{-1}+c)^2} = \frac{a}{e^{-1}+c}$$

이고, $a\ne 0$, $c>0$이므로

$$0 < a \le 2(e^{-1}+c) \ \cdots\ ②$$

한편

$$f''(x) = -\frac{a(x+1)e^x(e^x+c) - 2ae^x(xe^x-c)}{(e^x+c)^3} = -\frac{ae^x\{(1-x)e^x + c(x+3)\}}{(e^x+c)^3}$$

에서 $-1<x<1$일 때 $(1-x)e^x>0$이고 $c(x+3)>0$이므로 $-1<x<1$일 때 $f''(x)<0$이다.

①에서 $f'(-1)\le 2$이므로 $-1<x<1$일 때 $f'(x)<2$이고

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1) \\ 2 & (-1<x<1) \end{cases}$$

에서 $-1<x<1$일 때

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = f'(x) - 2 < 0$이다. ⋯ ③

또한

$$\lim_{x\to 1+} h'(x) = \lim_{x\to 1+}\{f'(x) - g'(x)\} = f'(1) \ \cdots\ ④$$

$f'(1) = \dfrac{a(c-e)}{(e+c)^2}$ 에서

$c - e = te^t - e > 0$ $(\because\ t>1)$

이므로 $f'(1)>0$이다.

③, ④에서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

한편 $x<-1$일 때

$$h'(x) = f'(x) = \frac{-a(xe^x-c)}{(e^x+c)^2} = \frac{-a(xe^x - te^t)}{(e^x+c)^2}$$

이고, 함수 $y = xe^x$는 구간 $(-1, \infty)$에서 증가하므로 $xe^x < te^t$ $(\because\ t>1)$

따라서 $x<-1$일 때 $f'(x)>0$이고, $h'(x)>0$이다.

같은 방법으로 $1<x<t$일 때 $h'(x)>0$이고 $x>t$일 때 $h'(x) = f'(x) < 0$이다. 이를 이용하여 함수 $h(x)$의 증감표를 그리면 다음과 같다.

x		-1		1		t	
$h'(x)$	$(+)$		$(-)$		$(+)$	0	$(-)$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $h(x)$는 $x=1$에서만 극솟값을 갖는다. (참)

(ㄷ) ①, ②에서

$$M = h(t) = f(t) - g(t) = \frac{a(t+1)}{e^t + c} - 2 = \frac{a(t+1)}{(1+t)e^t} - 2 \le \frac{2(e^{-1}+te^t)}{e^t} - 2 = 2e^{-t-1} + 2t - 2$$

이므로 $M(t) = 2e^{-t-1} + 2t - 2$

이고 $M'(t) = -2e^{-t-1}+2$이다.

$M'(\alpha)=-\dfrac{2}{3e^2}\alpha+2$에서

$$-2e^{-\alpha-1}+2=-\frac{2}{3e^2}\alpha+2$$

$$\Rightarrow\ e^2\times 3e^{-\alpha-1}=\alpha$$

$$\Rightarrow\ \alpha e^{\alpha}=3e$$

따라서 ①에서 $t=\alpha$일 때 $c=\alpha e^{\alpha}=3e$이고,
$t=\alpha$일 때 함수 $h(x)$의 극솟값의 최댓값은

$$\begin{aligned} h(1) &= f(1)-g(1) \\ &= \frac{2a}{e+c}-2 \\ &\le \frac{4(e^{-1}+c)}{e+c}-2 \\ &= \frac{4(e^{-1}+3e)}{4e}-2 = 1+\frac{1}{e^2} \end{aligned}$$

이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19. [출제 의도] 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+1}=3$에서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{2n+1}+\frac{2b_n}{2n+1}\right)=0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2n+1}=-\frac{3}{2}$$

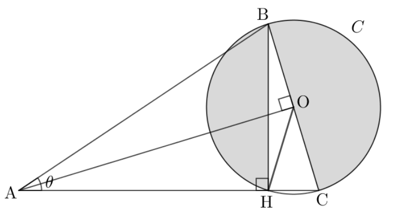
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4b_n}{2a_n+b_n-7n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{a_n}{2n+1}-\dfrac{4b_n}{2n+1}}{\dfrac{2a_n}{2n+1}+\dfrac{b_n}{2n+1}-\dfrac{7n}{2n+1}}$$

$$=\frac{3+6}{6-\dfrac{3}{2}-\dfrac{7}{2}}=9$$

20. [출제 의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

$\angle\mathrm{BHC}=90^\circ$이므로 원주각의 성질에 의하여 원 C는 선분 BC를 지름으로 하는 원이다.



선분 BC의 중점을 O라 하면 위 그림에서
$S(\theta)-T(\theta)$는 삼각형 OBH의 넓이와 부채꼴 OCH의 넓이의 합과 같다.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=1$이므로 이등변삼각형의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{AO}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이고 $\angle\mathrm{BAO}=\angle\mathrm{CAO}=\dfrac{\theta}{2}$

직각삼각형 AOC에서

$\angle\mathrm{ACO}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$이므로

$\angle\mathrm{OHC}=\angle\mathrm{ACO}=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$

$\Rightarrow\ \angle\mathrm{COH}=\theta,\ \angle\mathrm{BOH}=\pi-\theta$

또한 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{AC}}\sin\dfrac{\theta}{2}=\sin\dfrac{\theta}{2}$

이므로

삼각형 OBH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cdot\overline{\mathrm{OH}}\cdot\sin\angle\mathrm{BOH}=\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta$$

부채꼴 OCH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OC}}^2\cdot\angle\mathrm{COH}=\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ S(\theta)-T(\theta) &= \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta+\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\{\sin\theta+\theta\}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)-T(\theta)}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{\theta}{2}\{\sin\theta+\theta\}}{\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\right)^2\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}+1\right)\right\}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ 100a=25$$

21. [출제 의도] 미분계수의 정의를 이용하여 여러 가지 함수의 식을 추론할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

$$f(x)=\begin{cases} e^{3x-1}+ke^{2x}+3e^{x+1}-k & (x<0) \\ e^{3x-1}-ke^{2x}+3e^{x+1}+k & (x\ge 0)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases} 3e^{3x-1}+2ke^{2x}+3e^{x+1} & (x<0) \\ 3e^{3x-1}-2ke^{2x}+3e^{x+1} & (x>0)\end{cases}$$

이고 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

$e^x=t$라 하면 $t>0$이고

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{e}t^3+2kt^2+3et & (0<t<1) \\ \dfrac{3}{e}t^3-2kt^2+3et & (t>1)\end{cases}$$

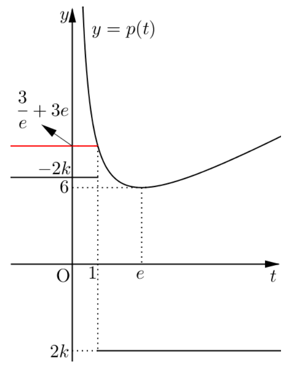
이므로

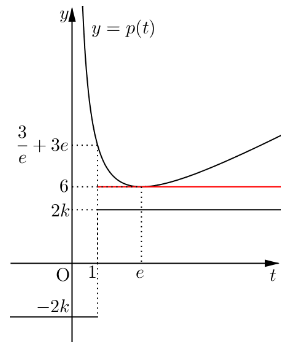
$$f'(x)\ge 0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \dfrac{3t}{e}+\dfrac{3e}{t}\ge -2k & (0<t<1) \\ \dfrac{3t}{e}+\dfrac{3e}{t}\ge 2k & (t>1)\end{cases}$$

$p(t)=\dfrac{3t}{e}+\dfrac{3e}{t}$라 하면 다음 그림에서 위 부등식을 만족하는 실수 k는 그림과 같이

$$-2k\le p(1)=\frac{3}{e}+3e,\ 2k\le p(e)=6$$

을 만족해야 한다.





$$\therefore\ -\frac{3}{2e}-\frac{3e}{2}\le k\le 3$$

(i) $k=-\dfrac{3}{2e}-\dfrac{3e}{2}$인 경우

$x<0$일 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x-1}-3e^{2x-1}-3e^{2x+1}+3e^{x+1} \\ &= 3e^{2x}(e^{x-1}-e)-3e^{x}(e^{x-1}-e) \\ &= 3e^{x-1}(e^x-1)(e^x-e^2)\end{aligned}$$

이고, $x>0$일 때

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x-1}+3e^{2x-1}+3e^{2x+1}+3e^{x+1} \\ &= 3e^{2x}(e^{x-1}+e)+3e^{x}(e^{x-1}+e) \\ &= 3e^{x-1}(e^x+1)(e^x+e^2)\end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고,
위로부터 $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f'(x)\ne\lim_{x\to 0+}f'(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않다.

$f(0)=3e+\dfrac{1}{e}$이므로 함수 $f^{-1}(x)$는

$x=3e+\dfrac{1}{e}$에서만 미분가능하지 않다.

한편 $3e+\dfrac{1}{e}=a$라 하면

$$\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(0)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a+}\frac{g(f^{-1}(x))-g(0)}{x-a}$$

$$\underset{t=f^{-1}(x)}{=}\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0)}{f(t)-f(0)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2e\{g(t)-g(0)\}}{2e^{3t}+(3+3e^2)e^{2t}+6e^2\cdot e^t-(9e^2+5)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2e\{g(t)-g(0)\}}{(e^t-1)\{2e^{2t}+(5+3e^2)e^t+9e^2+5\}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{g(t)-g(0)}{t}\cdot\frac{t}{e^t-1}\cdot\frac{2e}{12(e^2+1)}\right)$$

$$=\frac{e}{6(e^2+1)}g'(0)$$

이고

$$\lim_{x\to a-}\frac{h(x)-h(0)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{g\left(f^{-1}(x)\right)-g(0)}{x-a}$$
$$\underset{t=f^{-1}(x)}{=}\lim_{t\to 0-}\frac{g(t)-g(0)}{f(t)-f(0)}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\{g(t)-g(0)\}}{2e^{3t}-\left(3+3e^2\right)e^{2t}+6e^2\cdot e^t+1-3e^2}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2e\{g(t)-g(0)\}}{\left(e^t-1\right)\left\{2e^{2t}-\left(1+3e^2\right)e^t+3e^2-1\right\}}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2e\{g(t)-g(0)\}}{\left(e^t-1\right)^2\left(2e^t-3e^2+1\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{g(t)-g(0)}{t^2}\cdot\frac{t^2}{\left(e^t-1\right)^2}\cdot\frac{2e}{3\left(1-e^2\right)}\right)$$
$$=\frac{2e}{3\left(1-e^2\right)}\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0)}{t^2}$$

이고, 조건 (나)에서

$$\frac{e}{6\left(e^2+1\right)}g'(0)=\frac{2e}{3\left(1-e^2\right)}\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0)}{t^2}$$

이때 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0)}{t^2}$의 값이 존재하므로

$\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0)}{t}=g'(0)=0$이다.

따라서 $\displaystyle\lim_{t\to 0+}\frac{g(t)-g(0)}{t^2}=0$

이고, 다항식 $g(t)-g(0)$은 t^3을 인수로 가져야 한다.

$g(t)-g(0)=t^3(t-\alpha)$라 두면

$g'(t)=3t^2(t-\alpha)+t^3=t^2(4t-3\alpha)$

$f^{-1}(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않고,
위의 식으로부터 방정식 $h'(x)=0$의 실근의 개수는 방정식 $g'(x)=0$의 실근의 개수와 같다.

따라서 조건 (다)에서 방정식 $g'(t)=0$은 단 하나의 실근을 가져야 하므로 $\alpha=0$이다.

$\therefore\ g(t)=t^4+g(0)$

이 경우 $g(1)-g(0)=1$이므로 문제의 조건을 만족하지 않는다.

(ii) $-\dfrac{3}{2e}-\dfrac{3e}{2}<k<3$인 경우

$k\neq 0$이므로 (i)과 같은 방법으로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 미분가능하지 않고, $f'(x)=0$인 실수 x가 존재하지 않으므로 함수 $f^{-1}(x)$는 $x=3e+\dfrac{1}{e}$에서만 미분가능하지 않다.

이때 조건 (나)를 만족하려면 (i)과 같은 방법으로 $g'(0)=0$이어야 하고, 방정식 $g'(x)=0$은 단 하나의 실근을 가져야 하므로

$$g(t)=t^4+g(0)$$

을 얻는다. 이는 (i)과 같이 문제의 조건을 만족하지 않는다.

(iii) $k=3$인 경우

$x<0$일 때

$$f'(x)=3e^{3x-1}+6e^{2x}+3e^{x+1}$$
$$=3e^{x-1}\left(e^x+e\right)^2$$

이고, $x>0$일 때

$$f'(x)=3e^{3x-1}-6e^{2x}+3e^{x+1}$$
$$=3e^{x-1}\left(e^x-e\right)^2$$

이다. 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $\displaystyle\lim_{x\to 0-}f'(x)=\lim_{x\to 0+}f'(x)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $f^{-1}(x)$는 $x=3e+\dfrac{1}{e}$에서 미분가능하지 않다.

또한 $f'(1)=0$이고 $f(1)=e^2+3$이므로 함수 $f^{-1}(x)$는 $x=e^2+3$에서도 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f^{-1}(x)$는 $x=3e+\dfrac{1}{e}$과 $x=e^2+3$에서만 미분가능하지 않다.

(i)과 같은 방법으로 함수 $h(x)$가 $x=3e+\dfrac{1}{e}$에서 미분가능하려면 $g'(0)=0$이어야 하고,
$h'\left(3e+\dfrac{1}{e}\right)=0$이다. 한편 $e^2+3=b$라 하면

$$\lim_{x\to b}\frac{h(x)-h(b)}{x-b}$$
$$=\lim_{x\to b}\frac{g\left(f^{-1}(x)\right)-g(1)}{x-b}$$
$$\underset{t=f^{-1}(x)}{=}\lim_{t\to 1}\frac{g(t)-g(1)}{f(t)-f(1)}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{g(t)-g(1)}{e^{3t-1}-3e^{2t}+3e^{t+1}+3-\left(e^2+3\right)}$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{e\{g(t)-g(1)\}}{e^{3t}-3e^{2t+1}+3e^{t+2}-e^3}$$
$$=\lim_{t\to 1}\left(\frac{g(t)-g(1)}{(t-1)^3}\cdot\frac{(t-1)^3}{\left(e^t-e\right)^3}\cdot e\right)$$
$$=\frac{1}{e^2}\lim_{t\to 1}\frac{g(t)-g(1)}{(t-1)^3}$$

에서 함수 $h(x)$가 $x=b$에서 미분가능하려면
다항식 $g(t)-g(1)$은 $(t-1)^3$을 인수로 가져야 하고,
$h'\left(3e+\dfrac{1}{e}\right)=0$이므로 조건 (다)를 만족시키려면
다항식 $g(t)-g(1)$이 $(t-1)^4$으로는 나누어떨어지지 않아야 한다.

$g(t)-g(1)=(t-1)^3(t-\beta)$라 두면

$g'(t)=(t-1)^2(4t-3\beta-1)$

$g'(0)=-3\beta-1=0$에서 $\beta=-\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ g(t)=(t-1)^3\left(t+\dfrac{1}{3}\right)+g(1)$

이 경우 $g(1)-g(0)=\dfrac{1}{3}<1$이므로 문제의 조건을 만족한다.

(i)~(iii)에서 $k=3$이고,

$g(t)=(t-1)^3\left(t+\dfrac{1}{3}\right)+g(1)$이다.

$\therefore\ g(2)-g(1)=\dfrac{7}{3}$, $p+q=10$

22. [출제 의도] 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

방정식 $x^3+\sin(y+1)=1$에 $(x,\ y)=(a,\ -1)$을 대입하면

$a^3=1\ \Rightarrow\ a=1$

방정식 $x^3+\sin(y+1)=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+y'\cos(y+1)=0$

위 등식에 $(x,\ y)=(1,\ -1)$을 대입하면

$3+y'=0$, $y'=-3$

따라서 주어진 곡선 위의 점 $(1,\ -1)$에서 그은 접선의 방정식은

$y=-3(x-1)-1=-3x+2$

$\Rightarrow\ b=-3\cdot(-1)+2=5$

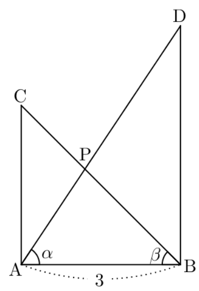
$\therefore\ a+b=6$

23. [출제 의도] 정적분을 이용하여 급수를 계산할 수 있는가?

정적분과 급수의 관계에서

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left\{\frac{(n+2k)\pi}{2n}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$$
$$=\int_0^{\pi}f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$
$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$
$$=-\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin x\,dx-\int_0^{\pi}x\sin x\,dx$$
$$=-\frac{\pi}{2}\times 2+\Big[x\cos x\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$
$$=-2\pi$$

24. [출제 의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?



그림과 같이 $\angle\mathrm{PAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{PBA}=\beta$라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=3\tan\beta$, $\overline{\mathrm{BD}}=3\tan\alpha$ ⋯ ①

$\triangle\mathrm{PAC}\backsim\triangle\mathrm{PDB}$ (AA 닮음)

이므로 닮음의 성질에 의하여

$$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{AC}}\ \cdots\ ②$$

문제의 조건에서 $\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=3:2$이므로 ①, ②에서

$$\tan\alpha:\tan\beta=3:2$$

$\tan\alpha=3t$, $\tan\beta=2t$ $(t>0)$이라 하면

$$\tan\angle\mathrm{APB}=\tan\{\pi-(\alpha+\beta)\}$$
$$=-\tan(\alpha+\beta)$$
$$=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=-\frac{5t}{1-6t^2}=5$$

$\Rightarrow\ 6t^2-t-1=0$, $(3t+1)(2t-1)=0$

$t>0$이므로 $\therefore\ t=\dfrac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{AC}}=3\tan\beta=3$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{9}{2}$

$\overline{\mathrm{PB}}:\overline{\mathrm{PC}}=3:2$이므로

$\therefore\ \triangle\mathrm{APB}=\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{27}{10}$

25. [출제 의도] 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

함수 $f(x)$는 미분가능한 함수이고 $x=1$에서

극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$이다.

$f'(x)=(ax^2+2x-a^2)e^{ax}$
$\Rightarrow\ f'(1)=(-a^2+a+2)e^a=0$
에서 $a=-1$ 또는 $a=2$

(1) $a=-1$인 경우
$f'(x)=(-x^2+2x-1)e^{ax}$
$\quad=-(x-1)^2e^{ax}$
이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.
따라서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다.

(2) $a=2$인 경우
$f'(x)=(2x^2+2x-4)e^{ax}$
$\quad=2(x+2)(x-1)e^{ax}$
이므로 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

(1), (2)에서 $a=2$이고 함수 $f(x)$의 극댓값은
$f(-2)=(2^2-2)e^{2\times(-2)}=\dfrac{2}{e^4}$이다.

26. [출제 의도] 치환적분법을 이용하여 함수의 정적분의 값을 계산할 수 있는가?

정적분 $\int_0^1 f(1-\sqrt{t})dt$에서 $1-\sqrt{t}=u$라 하면
$-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt=du \Rightarrow dt=-2\sqrt{t}\,du=2(u-1)du$
이므로
$$\int_0^1 f(1-\sqrt{t})dt=\int_1^0 2(u-1)f(u)du=-\int_0^1 2(u-1)f(u)du$$
따라서
$$f(x)=e^x-4x^2\int_0^1 f(t)dt-4x\int_0^1(t-1)f(t)dt$$
이고,
$\int_0^1 f(t)dt=a$, $\int_0^1(t-1)f(t)dt=b$라 하자.

$f(x)=e^x-4ax^2-4bx$에서
$$a=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(e^x-4ax^2-4bx)dx=\left[e^x-\frac{4a}{3}x^3-2bx^2\right]_0^1=e-\frac{4a}{3}-2b-1$$
$\Rightarrow\ 7a+6b=3e-3\ \cdots$ ①

$(x-1)f(x)=(x-1)e^x-4ax^2(x-1)-4bx(x-1)$
$\quad=(x-1)e^x-4ax^3+4(a-b)x^2+4bx$
에서
$$b=\int_0^1(x-1)f(x)dx=\int_0^1\{(x-1)e^x-4ax^3+4(a-b)x^2+4bx\}dx$$
$$=\left[(x-2)e^x-ax^4+\frac{4}{3}(a-b)x^3+2bx^2\right]_0^1$$
$$=-e+2-a+\frac{4}{3}(a-b)+2b=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b-e+2$$
$\Rightarrow\ a-b=3e-6\ \cdots$ ②

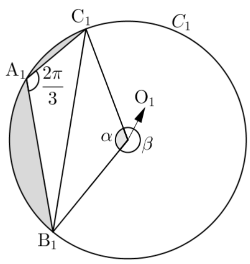
①, ②를 연립하여 풀면
$a=\dfrac{21}{13}e-3$, $b=-\dfrac{18}{13}e+3$
$$\therefore\ \int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_0^1(x-1)f(x)dx=a+b=\frac{3e}{13}$$

27. [출제 의도] 도형의 성질을 이용하여 등비급수의 합을 구할 수 있는가?

그림 R_1에서 문제의 조건과 사인법칙에 의하여
$\dfrac{\overline{B_1C_1}}{\sin\angle B_1A_1C_1}=2\sqrt{7} \Rightarrow \overline{B_1C_1}=\sqrt{21}$

$\overline{A_1B_1}=2k$, $\overline{A_1C_1}=k$라 하면
삼각형 $A_1B_1C_1$에서 코사인법칙에 의하여
$\overline{B_1C_1}^2=(2k)^2+k^2-2\cdot 2k\cdot k\cdot\cos\angle B_1A_1C_1$
$\Rightarrow\ 21=5k^2+2k^2,\ k=\sqrt{3}$
따라서 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{A_1B_1}\cdot\overline{A_1C_1}\cdot\sin\angle B_1A_1C_1$
$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ \cdots$ ①

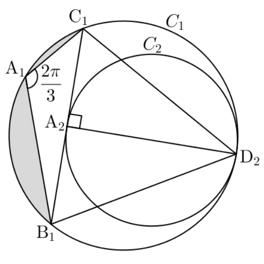
원 C_1의 중심을 O_1이라 하고, 그림과 같이 두 선분 B_1O_1과 C_1O_1이 이루는 두 각 중 크기가 작은 각의 크기를 α, 큰 것의 크기를 β라 하면 원주각과 중심각의 성질에 의하여
$\beta=2\angle B_1A_1C_1=\dfrac{4\pi}{3}$
이므로 $\alpha=2\pi-\beta=\dfrac{2\pi}{3}$



따라서 삼각형 $B_1O_1C_1$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{B_1O_1}\cdot\overline{C_1O_1}\cdot\sin\alpha=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}\ \cdots$ ②
이고, 부채꼴 $B_1O_1C_1$의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{B_1O_1}^2\cdot\alpha=\dfrac{7}{3}\pi\ \cdots$ ③

①, ②, ③에서 그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는
$S_1=\dfrac{7}{3}\pi-\dfrac{7\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7}{3}\pi-\dfrac{13\sqrt{3}}{4}$

한편 그림 R_2에서



원 C_2가 원 C_1과 만나는 점을 D_2라 하면 선분 A_2D_2는 원 C_2의 지름이고, 원과 접선의 성질에서 $\overline{B_1C_1}\perp\overline{A_2D_2}$이다.

또한, 원 C_2는 원 C_1과 선분 B_1C_1에 접하는 원 중 반지름이 가장 큰 원이므로 원 C_1의 중심은 직선 A_2D_2 위에 있다. 따라서 원과 현의 성질에서 A_2는 선분 B_1C_1의 중점이다.

따라서 $\triangle B_1A_2D_2\equiv\triangle C_1A_2D_2$ (SAS 합동)
이고, 원의 내접하는 사각형의 성질에서
$\angle B_1D_2C_1=\pi-\angle B_1A_1C_1=\dfrac{\pi}{3}$
즉, 삼각형 $B_1C_1D_2$는 정삼각형이다.
$\overline{B_1C_1}=\sqrt{21}$이므로 $\overline{A_2D_2}=\sqrt{21}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{7}}{2}$

즉, 원 C_2의 반지름은 $\dfrac{3\sqrt{7}}{4}$이다.

따라서 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는 넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의
$$r=\left(\frac{\frac{3\sqrt{7}}{4}}{\sqrt{7}}\right)^2=\frac{9}{16}$$
배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}=\frac{\frac{7}{3}\pi-\frac{13\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{16}{3}\pi-\frac{52\sqrt{3}}{7}$$

28. [출제 의도] 적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분으로 정의된 함수의 극대와 극소를 판정할 수 있는가?

(ㄱ) $\displaystyle\lim_{x\to0-}\{1-\cos(2\pi x)\}f(x)$
$\displaystyle=\lim_{x\to0-}\frac{k\{1-\cos(2\pi x)\}}{x}$
$\displaystyle=\lim_{x\to0-}\frac{k\sin^2(2\pi x)}{x\{1+\cos(2\pi x)\}}=0$
이고,
$\displaystyle\lim_{x\to0+}\{1-\cos(2\pi x)\}f(x)$
$\displaystyle=\lim_{x\to0+}\{1-\cos(2\pi x)\}\ln(x+2)$
$=1-\cos(2\pi\cdot0)f(0)=0$
이므로
함수 $y=\{1-\cos(2\pi x)\}f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

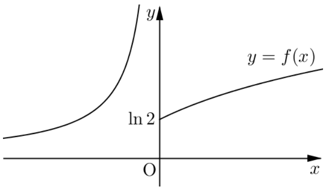
따라서 적분과 미분의 관계에 의하여
함수 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

(ㄴ) ㄱ에서 $g'(0)=0$이고, $k>0$이므로
$x<0$일 때 $f(x)<0$이고
$x>0$일 때 $f(x)>0$이다.

모든 실수 x에 대하여 $1-\cos(2\pi x)\ge 0\ \cdots$ ①
이므로 $g'(x)=\{1-\cos(2\pi x)\}f(x)$의 값의 부호는 $x=0$ 좌우에서 음에서 양으로 바뀐다.

따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.
또한, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 유일한 극솟값을 가지므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
(참)

(ㄷ) $k=-1$일 때, 그림과 같이 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-\infty,\ 0)$과 $(0,\ \infty)$에서 각각 증가한다. ⋯ ②



한편,

$\{g(n-1)+g(n+1)\}-2g(n)$

$=\{g(n+1)-g(n)\}-\{g(n)-g(n-1)\}$

이고 모든 정수 n에 대하여

$$g(n+1)-g(n)=\int_n^{n+1}\{1-\cos(2\pi t)\}f(t)dt,$$

$$\begin{aligned}g(n)-g(n-1)&=\int_{n-1}^{n}\{1-\cos(2\pi t)\}f(t)dt\\&=\int_n^{n+1}\{1-\cos(2\pi(t-1))\}f(t-1)dt\\&=\int_n^{n+1}\{1-\cos(2\pi t)\}f(t-1)dt\end{aligned}$$

이므로 정수 n에 대하여

$n<0$일 때와 $n>0$일 때에는

$\{g(n+1)-g(n)\}-\{g(n)-g(n-1)\}$

$$=\int_n^{n+1}\{1-\cos(2\pi t)\}\{f(t)-f(t-1)\}dt>0$$

(∵ ①, ②)

즉, $n<0$일 때와 $n>0$일 때에는 $2g(n)<g(n-1)+g(n+1)$이다.

한편 $n=0$일 때,

$$\begin{aligned}g(0)-g(-1)&=\int_0^1\{1-\cos(2\pi t)\}f(t-1)dt\\&=\int_0^1\left(-\frac{1}{t-1}\right)\{1-\cos(2\pi t)\}dt\end{aligned}$$

이고

$$g(1)-g(0)=\int_0^1\ln(t+2)\{1-\cos(2\pi t)\}dt$$

이므로 $n=0$일 때

$\{g(n+1)-g(n)\}-\{g(n)-g(n-1)\}$

$\{g(1)-g(0)\}-\{g(0)-g(-1)\}$

$$=\int_0^1\left\{\ln(t+2)+\frac{1}{t-1}\right\}\{1-\cos(2\pi t)\}dt$$

$h(t)=\ln(t+2)+\dfrac{1}{t-1}$이라 하면

$$\begin{aligned}h'(t)&=\frac{1}{t+2}-\frac{1}{(t-1)^2}\\&=\frac{t^2-3t-1}{(t+2)(t-1)^2}=\frac{t(t-1)-2t-1}{(t+2)(t-1)^2}\end{aligned}$$

이므로 $0<t<1$일 때 $h'(t)<0$이고, $h(0)=\ln2-1<0$이므로 $0<t<1$일 때 $h(t)<0$이다.

$1-\cos(2\pi t)\ge 0$이고, ㄱ에서 함수

$y=h(t)\{1-\cos(2\pi t)\}$

는 모든 실수 t에서 연속이므로 $0\le t\le 1$에서 $h(t)\{1-\cos(2\pi t)\}\le 0$이다.

따라서

$\{g(1)-g(0)\}-\{g(0)-g(-1)\}$

$$=\int_0^1 h(t)\{1-\cos(2\pi t)\}dt\le 0$$

이므로 $2g(0)\ge g(1)+g(-1)$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

29. [출제 의도] 평면 위를 움직이는 점의 위치와 속도의 관계를 이해하고 있는가?

점 P의 시각 t에서의 속도는

$$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)=\left(\frac{2t}{1+t^2},\ a\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right)$$

이므로 점 P의 시각 $t=1$에서의 속도는 $(1,\ 2a)$이다.

따라서 점 P의 시각 $t=1$에서의 속력은

$$\sqrt{1^2+(2a)^2}=\sqrt{4a^2+1}=\frac{\sqrt5}{2}$$

$$\Rightarrow\ 4a^2+1=\frac{5}{4},\quad a^2=\frac{1}{16}$$

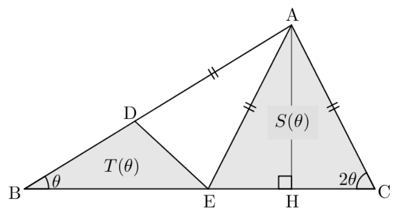
$$\therefore\ \frac{1}{a^2}=16$$

30. [출제 의도] 도형의 성질과 삼각함수의 극한을 활용하여 극한값을 계산할 수 있는가?

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\angle\mathrm{BAC}}=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\angle\mathrm{ABC}}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin\angle\mathrm{ACB}}$$

$$\Rightarrow\ \overline{\mathrm{AB}}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta},\ \overline{\mathrm{AC}}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$$



점 A에서 선분 BC로 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{\mathrm{CH}}=\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{AC}}\cos2\theta=\frac{\sin\theta\cos2\theta}{\sin3\theta}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ S(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\sin2\theta\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{2\sin\theta\cos2\theta}{\sin3\theta}\times\sin2\theta\\&=\frac{\sin^2\theta\sin2\theta\cos2\theta}{\sin^23\theta}\end{aligned}$$

한편 $\angle\mathrm{AEC}=2\theta$이고 $\angle\mathrm{ABE}=\theta$이므로

외각의 성질에 의하여 $\angle\mathrm{BAE}=\theta$

따라서 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BE}}=\dfrac{\sin\theta}{\sin3\theta}$이고,

$$\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sin2\theta-\sin\theta}{\sin3\theta}$$

이므로

$$\begin{aligned}\therefore\ T(\theta)&=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{BD}}\times\sin\theta\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\times\frac{\sin2\theta-\sin\theta}{\sin3\theta}\times\sin\theta\\&=\frac{\sin^2\theta(\sin2\theta-\sin\theta)}{2\sin^23\theta}\end{aligned}$$

따라서

$$\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\frac{\dfrac{\sin^2\theta(\sin2\theta-\sin\theta)}{2\sin^23\theta}}{\dfrac{\sin^2\theta\sin2\theta\cos2\theta}{\sin^23\theta}}=\frac{\sin2\theta-\sin\theta}{2\sin2\theta\cos2\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin2\theta-\sin\theta}{2\sin2\theta\cos2\theta}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\dfrac{\sin2\theta}{\sin\theta}-1}{2\times\dfrac{\sin2\theta}{\sin\theta}\times\cos2\theta}=\frac{2-1}{2\times2\times1}=\frac{1}{4}$$

$\therefore\ 100a=25$

31. [출제 의도] 역함수의 성질과 역함수의 미분법을 이용하여 역함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

모든 실수 x에 대하여 $e^tx^2+a>0$이므로

함수 $f(x)$는 실수 전체에서 미분가능하다.

따라서 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지려면 모든 실수 x에 대하여

$f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2e^tx}{e^tx^2+a}+\frac{1}{2}\\&=\frac{e^tx^2+4e^tx+a}{2(e^tx^2+a)}=\frac{e^t(x+2)^2-4e^t+a}{2(e^tx^2+a)}\end{aligned}$$

이고, $e^t(x+2)^2\ge0$이므로 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 정의된 역함수를 가지려면

$f'(x)\ge0\ \Leftrightarrow\ -4e^t+a\ge0$

$\Leftrightarrow\ a\ge4e^t$

이어야 한다. ⋯ ①

즉, 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 실수 전체에서 증가하고, 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{2}g(f(2x))=\frac{1}{2}\times2x=x$$

$$f\left(2\times\frac{1}{2}g(x)\right)=f(g(x))=x$$

이므로 두 함수 $f(2x)$와 $\dfrac{1}{2}g(x)$ 또한 서로 역함수 관계에 있다.

이때 $f(2x)$와 $\dfrac{1}{2}g(x)$ 또한 실수 전체에서 증가하므로

$$f(2x)=\frac{1}{2}g(x)\ \Leftrightarrow\ f(2x)=\frac{1}{2}g(x)=x$$

이다.

따라서 $f(2\alpha)=\alpha$, $g(\alpha)=2\alpha$이다. ⋯ ②

$f(2\alpha)=\ln\{e^t(2\alpha)^2+a\}+\alpha=\alpha$에서

$\ln(4e^t\alpha^2+a)=0\ \Rightarrow\ 4e^t\alpha^2+a=1$

$$\Rightarrow\ \alpha^2=\frac{1-a}{4e^t}$$

$$\Rightarrow\ \alpha=\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{1-a}$$

이고, 역함수의 미분법과 ①, ②에 의하여

$$\begin{aligned}g'(\alpha)&=\frac{1}{f'(g(\alpha))}\\&=\frac{1}{f'(2\alpha)}\\&=\frac{2(4e^t\alpha^2+a)}{4e^t\alpha^2+8e^t\alpha+a}\\&=\frac{1}{f'(2\alpha)}=\frac{2(4e^t\alpha^2+a)}{4e^t\alpha^2+8e^t\alpha+a}\\&=\frac{2}{1-a+8e^t\times\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\sqrt{1-a}+a}\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{4\sqrt{e^t(1-a)}+1}$$

$$\geq \frac{2}{4\sqrt{e^t(1-4e^t)}+1}$$

$$\therefore \ h(t) = \frac{2}{4\sqrt{e^t(1-4e^t)}+1}$$

$$\therefore \ \int_{-\ln 10}^{-\ln 5}\left(\frac{1}{h(t)} - \frac{1}{2}\right)^2 dt$$

$$= \int_{-\ln 10}^{-\ln 5} 4e^t(1-4e^t)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(1-4e^t)^2\right]_{-\ln 10}^{-\ln 5}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{25} - \frac{9}{25}\right) = \frac{4}{25}$$

$$\therefore \ p+q = 29$$