2021학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가(수학)

4점 문제 해설집(集)

※ 본문을 읽기 전에, 먼저 읽어주세요!

1) 본 문서에 들어 있는 문제들에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.

2) 본문의 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다.

3) 본문의 구성은 문제에 대한 주석과 해설, 해당 문제와 비슷한 유형의 연습 문제 몇 가지로 구성되어 있습니다.
(관련 교과 내용: 교과서의 내용 요소 기준 / 난이도: 필자가 주관적인 기준으로 판단)

4) 이 문서는 재가공하여 판매하는 등의 **영리를 취할 목적으로 이용하지 않는 한** 누구나 자유롭게 열람, 배포, 이용할 수 있습니다.
(교육 목적으로 이용하시는 경우, 저작자만 명시해주시면 됩니다.)

5) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.

- 제작자: 그린란드(이재종)
(http://blog.naver.com/wowhd93)

- 최종 수정일자: 2020/06/19 03:00

‘가’ 형

Problem #14

14. $0 \le \theta < 2\pi$일 때, x에 대한 이차방정식

$$x^2-(2\sin\theta)x-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5=0$$

이 실근을 갖도록 하는 θ의 최솟값과 최댓값을 각각 α, β라 하자. $4\beta-2\alpha$의 값은? [4점]

① 3π ② 4π ③ 5π ④ 6π ⑤ 7π

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 이차방정식의 판별식
[수학I] 삼각함수의 그래프, 삼각함수를 포함한 부등식
(난이도) $2/5$

“이차방정식의 판별식의 성질을 이해하고, 그 성질을 그대로 적용하여 해결할 수 있는 간단한 문제입니다.”

Solution

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-\sin\theta)^2-\left(-3\cos^2\theta-5\sin\theta+5\right)\\&=\sin^2\theta+3\cos^2\theta+5\sin\theta-5\\&=\sin^2\theta+3\left(1-\sin^2\theta\right)+5\sin\theta-5\\&=-2\sin^2\theta+5\sin\theta-2\end{aligned}$$

이고, 주어진 이차방정식이 실근을 가지므로

$$\begin{aligned}D\ge 0 \Rightarrow\ &-2\sin^2\theta+5\sin\theta-2\ge 0\\&2\sin^2\theta-5\sin\theta+2\le 0\\&(2\sin\theta-1)(\sin\theta-2)\le 0\end{aligned}$$

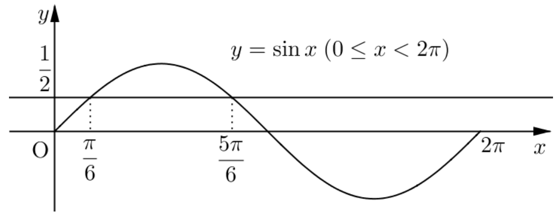
$0\le\theta<2\pi$에서 $\sin\theta-2<0$이므로

$2\sin\theta-1\ge 0 \Rightarrow \sin\theta\ge\frac{1}{2}$이어야 하고,

아래의 그래프에서

$$\sin\theta\ge\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5\pi}{6}$$

임을 알 수 있습니다.



$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{5\pi}{6},\ 4\beta-2\alpha=\frac{10\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=3\pi$$

정답: ①

Supplementary Problem

1. $0\le x<2\pi$에서 부등식 $2\sin x+1<0$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\cos(\beta-\alpha)$의 값은?
[3점] [2018년 4월 가09]

(정답) $-\frac{1}{2}$

2. $0\le\theta<2\pi$ 일 때, x에 대한 이차방정식

$$6x^2+(4\cos\theta)x+\sin\theta=0$$

이 실근을 갖지 않도록 하는 모든 θ의 값의 범위는 $\alpha<\theta<\beta$ 이다. $3\alpha+\beta$의 값은?
[3점] [2019학년도 수능 가11]

(정답) $\frac{4\pi}{3}$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #15

15. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = (2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)} + (n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n} \quad \cdots\cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)} + m\times 2^{-m-1} \\ &= \boxed{(가)} \times \boxed{(나)} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m} \\ &= 2^{(m+1)(m+2)} - (m+2)\times 2^{-(m+1)}\end{aligned}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n(n+1)} - (n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 지수법칙, 수학적 귀납법
(난이도) $2/5$

“수학적 귀납법을 이용한 문제 해결 과정을 이해하는 문제입니다. 다만, 빈칸이 있는 부분이 전체적인 문제 해결 과정을 이해하지 않아도 채울 수 있을 만큼(앞뒤만 비교해도 빈칸에 무엇이 들어갈지 알 수 있을 정도로) 쉬운 문제였다고 생각합니다.”

Solution

(가): $\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + a_{m+1}$

이고, $(*)$로부터 $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} a_k = 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m}$,

수열 $\{a_n\}$의 정의로부터

$$\begin{aligned}a_{m+1} &= (2^{2(m+1)}-1)\times 2^{(m+1)m} + (m+1-1)\times 2^{-(m+1)} \\ &= (2^{2m+2}-1)\times 2^{m(m+1)} + m\times 2^{-m-1}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1} a_k &= 2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2}-1)\times 2^{m(m+1)} + m\times 2^{-m-1}\end{aligned}$$

$\therefore \ f(m) = 2^{m(m+1)}$

(나): (가)에서

$$\begin{aligned}&2^{m(m+1)} - (m+1)\times 2^{-m} \\ &\quad + (2^{2m+2}-1)\times 2^{m(m+1)} + m\times 2^{-m-1} \\ &= 2^{m(m+1)}(1+2^{2m+2}-1) + 2^{-m}\left(-m-1+\frac{m}{2}\right) \\ &= 2^{m(m+1)}\times 2^{2m+2} - \frac{m+2}{2}\times 2^{-m}\end{aligned}$$

$\therefore \ g(m) = 2^{2m+2}$

$\therefore \ \dfrac{g(7)}{f(3)} = \dfrac{2^{2\times 7+2}}{2^{3\times 4}} = 2^{16-12} = 2^4 = 16$

정답: ④

문제에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Supplementary Problem

1. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 3$ 이고

$$n a_{n+1} - 2n a_n + \frac{n+2}{n+1} = 0 \ \ (n \geq 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n 이

$$a_n = 2^n + \frac{1}{n} \ \cdots \ (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

i) $n=1$ 일 때, (좌변)$= a_1 = 3$,

(우변)$= 2^1 + \frac{1}{1} = 3$ 이므로 (*) 이 성립한다.

ii) $n=k$ 일 때 (*) 이 성립한다고 가정하면

$a_k = 2^k + \frac{1}{k}$ 이므로

$$k a_{k+1} = 2k a_k - \frac{k+2}{k+1}$$
$$= \boxed{\text{(가)}} - \frac{k+2}{k+1}$$
$$= k2^{k+1} + \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 따라서 $a_{k+1} = 2^{k+1} + \frac{1}{k+1}$ 이므로

$n=k+1$ 일 때도 (*) 이 성립한다.

i), ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$a_n = 2^n + \frac{1}{n}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$ 이라 할 때, $f(3) \times g(4)$ 의 값은?

[3점] [2013년 9월 나12]

(정답) 40

2. 수열 $\{a_n\}$이

$$T_n = 2a_1 + 3a_2 + \cdots + (n+1)a_n = \frac{n}{2n+4}$$

(단, $n = 1, 2, 3, \cdots$)

을 만족할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} - T_n \ \cdots \ (★)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$= a_1 = \boxed{\text{(가)}}$

(우변)$= \frac{1}{(1+1)^2} - T_1 = \boxed{\text{(가)}}$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$ 일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m$$

이다. $n=m+1$일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + a_{m+1}$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_m + \boxed{\text{(나)}}(T_{m+1} - T_m)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{m+3}{m+2}(T_{m+1} - T_m)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1} + \frac{1}{(m+2)^2}$$
$$= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{(k+1)^2} - T_{m+1}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 α, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\frac{\alpha}{f(2)}$의 값은?

[3점] [2011년 7월 가나19]

(정답) $\frac{1}{3}$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

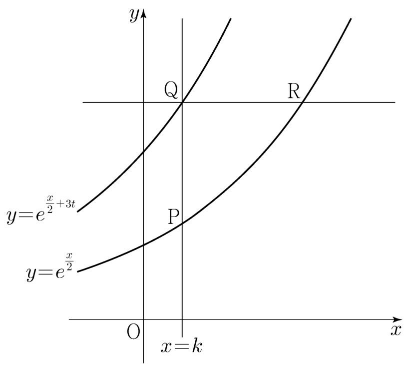
Problem #16

16. 양수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 값을 $f(t)$라 하자.

> 직선 $x=k$와 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$이 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$과 만나는 점을 R라 할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이다.

함수 $f(t)$에 대하여 $\lim_{t \to 0+} f(t)$의 값은? [4점]

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $\ln 4$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$



commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 지수함수의 그래프, 지수를 포함한 방정식
[미적분] 지수함수의 극한
(난이도) $3/5$

"문제의 조건을 이용하면 정직하게 답이 나오는 문제입니다.
다만, 식의 올바른 처리나 계산의 정확성이 요구됩니다."

Solution

문제의 조건으로부터

직선 $x=k$가 두 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$, $y=e^{\frac{x}{2}+3t}$와 만나는 점의 좌표는 각각 $\mathrm{P}\left(k,\ e^{\frac{k}{2}}\right)$, $\mathrm{Q}\left(k,\ e^{\frac{k}{2}+3t}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} = e^{\frac{k}{2}+3t} - e^{\frac{k}{2}}$ ⋯ ①

점 Q를 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=e^{\frac{x}{2}}$와 만나는 점의 x좌표를 p라 하면

$$e^{\frac{p}{2}} = e^{\frac{k}{2}+3t} \Rightarrow \frac{p}{2} = \frac{k}{2}+3t,\quad p=k+6t$$

따라서 점 R의 좌표는 $\left(k+6t,\ e^{\frac{k}{2}+3t}\right)$이므로

$\overline{\mathrm{QR}} = (k+6t)-k = 6t$ ⋯ ②

문제의 조건에서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 ①, ②에서

$$e^{\frac{k}{2}+3t} - e^{\frac{k}{2}} = 6t$$

$$\Rightarrow \frac{e^{\frac{k}{2}+3t}-e^{\frac{k}{2}}}{6t} = \frac{e^{\frac{k}{2}}\left(e^{3t}-1\right)}{6t} = 1 \quad (\because\ t>0)$$

$$\Rightarrow e^{\frac{k}{2}} = \frac{6t}{e^{3t}-1},\quad k = 2\ln\left(\frac{6t}{e^{3t}-1}\right)$$

양변에 $t \to 0+$인 극한을 취하면, $k=f(t)$이므로

$$\lim_{t\to 0+} f(t) = \lim_{t \to 0+} 2\ln\left(\frac{6t}{e^{3t}-1}\right) = 2\ln 2 = \ln 4$$

정답: ③

Supplementary Problem

1. $a>e$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=e^{x-1}$과 $y=a^x$이 만나는 점의 x좌표를 $f(a)$라 할 때, $\lim_{a \to e+} \frac{1}{(e-a)f(a)}$의 값은?

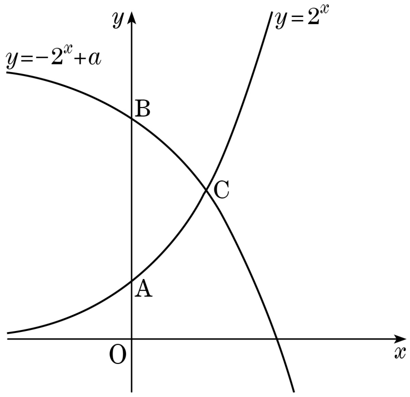
[4점] [2018년 4월 가17]

(정답) $\frac{1}{e}$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

2. 2보다 큰 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+a$가 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선의 교점을 C라 하자. 직선 AC의 기울기를 $f(a)$, 직선 BC의 기울기를 $g(a)$라 할 때, $\lim_{a\to 2+}\{f(a)-g(a)\}$의 값은?

[4점] [2014년 3월 가14]



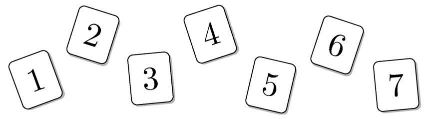
(정답) $2\ln 2$

Problem #17

17. 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이 하나씩 적혀 있는 7장의 카드가 있다. 이 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 임의로 나열할 때, 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 4보다 큰 수가 적혀 있는 카드가 있다.
(나) 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에는 각각 5보다 작은 수가 적혀 있는 카드가 있다.

① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{14}$ ③ $\frac{3}{28}$ ④ $\frac{1}{7}$ ⑤ $\frac{5}{28}$



commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 순열과 조합
[확률과 통계] 확률
(난이도) 3/5

"경우를 나누어 확률의 정의에 따라 확률을 계산하면 되는 문제이나, 문제에서 주어진 조건을 만족할 확률을 효율적으로 계산하기 적당히 경우를 나누고, 정확히 계산하는 것이 쉽지만은 않은 문제입니다."

Solution

7장의 카드를 나열하는 모든 방법의 수는 7!이고, 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는 다음과 같이 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드가 이웃한 경우와 이웃하지 않은 경우로 나누어 생각합니다.

(1) 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드가 이웃하는 경우

⋯	4	5	⋯

⋯	5	4	⋯

위와 같이 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드의 위치를 바꾸는 방법의 수는 2

위의 각 경우에 대하여 4가 적힌 카드와 이웃하는 카드를 결정하는 방법의 수는 2(6, 7이 적힌 카드가 올 수 있습니다.)이고, 5와 이웃하는 숫자를 결정하는 방법의 수는

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

3($1, 2, 3$이 적힌 카드가 올 수 있습니다.)이므로
4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드에 이웃하는 카드를 결정하는 방법의 수는 $2 \times 3 = 6$

남은 3장의 카드의 위치를 결정하는 방법의 수는
위에서 배열한 4장의 카드의 좌측과 우측에 오는 카드의 개수를 결정하고(4가지), 3장의 카드의 위치를 결정하면 되므로($3!$가지) $3! \times 4 = 24$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는

$$2 \times 6 \times 24 = 288$$

(2) 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드가 이웃하지 않는 경우

⋯		4		5		⋯

⋯		5		4		⋯

위와 같이 4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드의 위치를 바꾸는 방법의 수는 2

위의 각 경우에 대하여 4가 적힌 카드의 양 옆(노란색 영역)에 오는 카드를 결정하는 방법의 수는 $2! = 2$이고,
5가 적힌 카드의 양 옆(파란색 영역)에 오는 카드를 결정하는 방법의 수는 ${}_3\mathrm{P}_2 = 6$
4가 적힌 카드와 5가 적힌 카드에 이웃하는 카드를 결정하는 방법의 수는 $2 \times 6 = 12$

남은 한 장의 카드는 가장 왼쪽이나 가장 오른쪽 또는 배열된 6장의 카드의 정중앙에 배열되어야 하므로 남은 한 장의 카드의 위치를 결정하는 방법의 수는 3

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 경우의 수는

$$2 \times 12 \times 3 = 72$$

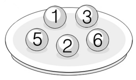
(1), (2)에서 구하는 확률은

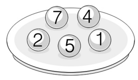
$$\frac{288+72}{7!} = \frac{360}{7!} = \frac{1}{14}$$

정답: ②

Supplementary Problem

1. 주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수 중 연속된 자연수의 최대 개수가 3인 사건을 A라 하자.

예를 들어 

은 연속된 자연수의 최대 개수가 3이므로 사건 A에 속하고, 

은 연속된 자연수의 최대 개수가 2이므로 사건 A에 속하지 않는다. 사건 A가 일어날 확률은?

[4점] [2016년 4월 가20]

(정답) $\frac{5}{14}$

2. 동전 A의 앞면과 뒷면에는 각각 1과 2가 적혀 있고 동전 B의 앞면과 뒷면에는 각각 3과 4가 적혀 있다. 동전 A를 세 번, 동전 B를 네 번 던져 나온 7개의 수의 합이 19 또는 20일 확률은?

[4점] [2018년 9월 가15]

(정답) $\frac{7}{16}$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #18

18. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 하자. $x_1<x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2>\dfrac{1}{2}$

ㄴ. $y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

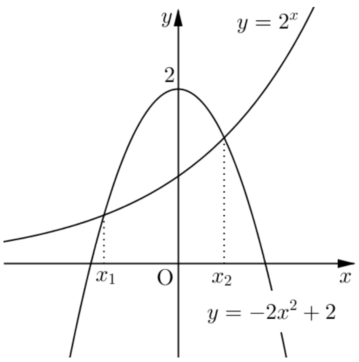
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 이차함수의 그래프
[수학I] 지수함수의 그래프
(난이도) $3/5$

“이차함수와 지수함수의 성질을 활용하여 해결하는 문제입니다. 각 보기에서 묻는 항목에 따라 다루기 편한 함수를 끌어와서 문제를 해결하는 것이 핵심입니다.”

Solution



위 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2x^2+2$는 서로 다른 두 교점을 가집니다.

ㄱ) $f(x)=2^x$, $g(x)=-2x^2+2$라 하면

$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{3}{2}$

이고, $\sqrt{2}<\dfrac{3}{2}$이므로 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)$입니다.

또한, 두 함수의 그래프로부터

$x_1<x<x_2$일 때 $f(x)<g(x)$이고,

$x<x_1$ 또는 $x>x_2$일 때 $f(x)>g(x)$이므로 ⋯ (*)

$x_1<\dfrac{1}{2}<x_2$, $\therefore\ x_2>\dfrac{1}{2}$ (참)

ㄴ) $y_1=-2{x_1}^2+2$, $y_2=-2{x_2}^2+2$

이므로

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2\left({x_2}^2-{x_1}^2\right)}{x_2-x_1}=-2(x_1+x_2)$$

이고,

$x_1>-1$이고 ㄱ에서 $x_2>\dfrac{1}{2}$이므로

$x_1+x_2>-1+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-2(x_1+x_2)<-2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1$

$\therefore\ y_2-y_1<x_2-x_1$ (참)

ㄷ) $y_1=2^{x_1}$, $y_2=2^{x_2}$이므로

$y_1y_2=2^{x_1}\times 2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$

한편, ㄴ에서 $x_1+x_2>-\dfrac{1}{2}$ ⋯ ①

$f(x_1)<f(x_2)\ \Rightarrow\ g(x_1)<g(x_2)$이고 함수 $g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $x_1+x_2<0$ ⋯ ②

①, ②에서 $-\dfrac{1}{2}<x_1+x_2<0$

$\therefore\ 2^{-\frac{1}{2}}<y_1y_2=2^{x_1+x_2}<2^0\ \Rightarrow\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

정답: ⑤

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Supplementary Problem

1. $0<a<\frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y=x$가 곡선 $y=\log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점] [2009학년도 수능 나11]

<보 기>

ㄱ. $p=\frac{1}{2}$이면 $a=\frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p<q$

ㄷ. $a^{p+q}=\frac{pq}{2^q}$

(정답) ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 정의역이 $x<4$인 두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1<x_2$)

[3점] [2009년 7월 가나13]

<보 기>

ㄱ. $x_1+x_2>0$

ㄴ. $x_1y_1+x_2y_2<0$

ㄷ. $|x_1y_2|-|x_2y_1|>0$

(정답) ㄱ, ㄷ

Problem #19

19. 두 집합 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{1,2,3\}$에 대하여 A에서 B로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

$f(1)\ge 2$이거나 함수 f의 치역은 B이다.

① $\frac{16}{27}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{20}{27}$ ④ $\frac{22}{27}$ ⑤ $\frac{8}{9}$

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 순열과 조합
[확률과 통계] 중복순열, 확률
(난이도) $4/5$

“17번과 비슷하게 문제에서 요구하는 확률을 경우를 정확하게 나누어 계산하는 것이 핵심인 문제입니다. 확률의 덧셈정리를 이용할 수도 있고, 여사건을 이용하여 확률을 구할 수도 있습니다.”

Solution

집합 A에서 B로의 모든 함수 f의 개수는 $3^4=81$입니다.
문제의 조건을 만족하는 함수 f의 개수는 다음과 같이 나누어 구할 수 있습니다.

(1) $f(1)\ge 2$인 경우
$f(1)$의 값을 결정하는 방법의 수는 2 ($f(1)=2$ 또는 $f(1)=3$)
남은 3개의 함숫값을 결정하는 방법의 수는 $3^3=27$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 함수 f의 개수는
$$2\times 27=54$$

(2) 함수 f의 치역이 B인 경우
이 경우 집합 A를 3개의 부분집합으로 나누고, 각 집합을 B의 각 원소에 대응시키면 됩니다.

집합 A를 3개의 부분집합으로 나누는 경우, 각 집합의 원소의 개수는 $2,1,1$이어야 합니다. 즉, 원소의 개수가 2인 부분집합만 결정하면 되므로 집합 A를 3개의 부분집합으로 나누는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$

나누어진 부분집합을 집합 B의 각 원소에 대응시키는 방법의 수는 $3!=6$

따라서 이 경우 함수 f의 개수는 $6\times 6=36$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

(3) $f(1) \geq 2$이고 함수 f의 치역이 B인 경우
$f(1)$의 값을 결정하는 방법의 수는 2

$f(1)=2$라고 가정하면, 함수 f의 치역이 B이기 위해서는
(i) $\{f(2),\ f(3),\ f(4)\} = \{1, 3\}$
또는
(ii) $\{f(2),\ f(3),\ f(4)\} = \{1, 2, 3\}$
이어야 합니다.

(i)의 경우를 만족하는 f의 개수는 서로 다른 2개에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 모든 방법의 수에서 뽑은 3개가 모두 같은 경우만 제외하는 방법의 수와 같으므로
$2^3 - 2 = 6$

(ii)의 경우 함수 f의 개수는 $3! = 6$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 함수 f의 개수는
$$2 \times (6+6) = 24$$

(1), (2), (3)에서 문제의 조건을 만족시키는 모든 함수 f의 개수는
$$54 + 36 - 24 = 66$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{66}{81} = \frac{22}{27}$

(다른 풀이) 여사건을 이용할 수도 있습니다.

문제의 조건을 만족시키지 않는 함수 f는
$f(1) < 2$이고 함수 f의 치역이 B가 아니어야 합니다.

즉, $f(1)=1$이고, $f(1)=1$인 함수 f의 개수는 $3^3 = 27$

본 풀이의 (3)에서 $f(1)=1$이고 함수 f의 치역이 B인 경우의 수는 $6+6 = 12$이므로

$f(1)=1$이고 함수 f의 치역이 B가 아닌 경우의 수는
$$27 - 12 = 15$$

따라서 구하는 확률은 여사건의 성질에 의하여
$$1 - \frac{15}{81} = \frac{22}{27}$$

정답: ④

Supplementary Problem

1. 한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은?

[4점] [2011학년도 수능 나17]

11	12	13

21	22	23

(정답) $\frac{1}{5}$

2. 집합 $X=\{1, 2, 3\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$, $Z=\{0, 1\}$에 대하여 조건 (가)를 만족시키는 모든 함수 $f: X \to Y$ 중에서 임의로 하나를 선택하고, 조건 (나)를 만족시키는 모든 함수 $g: Y \to Z$ 중에서 임의로 하나를 선택하여 합성함수 $g \circ f: X \to Z$를 만들 때, 이 합성함수의 치역이 Z일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2008년 6월 가24]

(가) X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다.

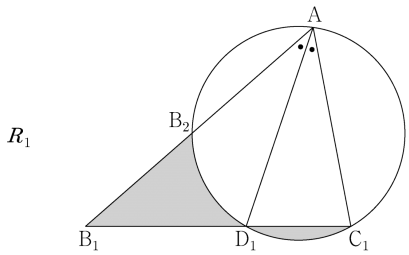
(나) g의 치역은 Z이다.

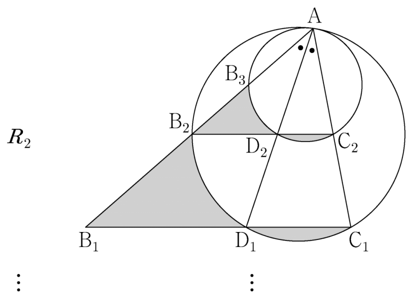
(정답) 13

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #20

20. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인 ◺◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자.
세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인 ◺◡ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [4점]



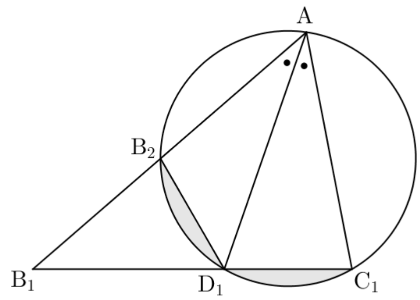


commentary

(관련 교과 내용)
[(중)수학-2] 각 이등분선 정리
[(중)수학-3] 원주각
[수학I] 코사인법칙
[미적분] 등비급수
(난이도) $4/5$

"각종 평면 기하의 정리들이 골고루 이용되는 문제입니다.
문제에서 구하고자 하는 부분의 넓이를 단순 계산하는 것보다 구하기 편한 방법을 찾는 것이 핵심이고,
구해야 할 선분의 길이나 도형의 넓이를 적절한 평면 기하의 정리(원주각의 성질, 각 이등분선 정리, 코사인법칙 등)를 이용하여 찾아내어야 하므로 고민을 상당히 해야 하는 문제입니다."

Solution



위 그림과 같이 호 B_2D_1과 C_1D_1에 대응되는 원주각의 크기가 같으므로 활꼴 B_2D_1과 C_1D_1 내부의 넓이는 서로 같습니다.

따라서 S_1은 삼각형 $B_1B_2D_1$의 넓이와 같습니다.

$\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{B_1C_1}^2 &= \overline{AB_1}^2+\overline{AC_1}^2-2\,\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}\cdot\cos\angle B_1AC_1\\ &= 3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\frac{1}{2}=7\end{aligned}$$

따라서 $\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$이고, 각 이등분선 정리에 의하여

$\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{C_1D_1}$

$\Rightarrow\ \overline{B_1D_1}:\overline{C_1D_1}=3:2$

$\Rightarrow\ \overline{B_1D_1}=\frac{3}{5}\overline{B_1C_1}=\frac{3\sqrt{7}}{5}$ ⋯ ①

위에서 $\overline{C_1D_1}=\frac{2}{5}\overline{B_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$이므로

$\overline{B_2D_1}=\overline{C_1D_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$ ⋯ ②

원의 내접하는 사각형의 성질에서

$\angle B_2AC_1+\angle B_2D_1C_1=\pi$

$\Rightarrow\ \angle B_2D_1C_1=\frac{2\pi}{3}$, $\angle B_2D_1B_1=\frac{\pi}{3}$ ⋯ ③

①, ②, ③에 의하여

문제에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

$S_1 = \triangle \mathrm{B_1B_2D_1}$

$= \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathrm{B_1D_1}} \cdot \overline{\mathrm{B_2D_1}} \cdot \sin\angle \mathrm{B_2D_1B_1}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{50}$

삼각형 $\mathrm{B_1B_2D_1}$에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{B_1B_2}}^2 = \overline{\mathrm{B_1D_1}}^2 + \overline{\mathrm{B_2D_1}}^2 - 2\overline{\mathrm{B_1D_1}} \cdot \overline{\mathrm{B_2D_1}} \cdot \cos\angle \mathrm{B_2D_1B_1}$

$= \left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{5} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{63}{25} + \frac{28}{25} - \frac{42}{25} = \frac{49}{25}$

이므로 $\overline{\mathrm{B_1B_2}} = \frac{7}{5}$이고 $\overline{\mathrm{AB_2}} = 3 - \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$

한편, 그림 R_2에서 새로 색칠된 도형의 넓이는

넓이는 R_1에서 색칠된 부분의 넓이의

$$\left(\frac{\overline{\mathrm{AB_2}}}{\overline{\mathrm{AB_1}}}\right)^2 = \left(\frac{8}{15}\right)^2 = \frac{64}{225}$$

배이고, 이는 모든 자연수 n에 대하여 R_{n+1}과 R_n에 대해서도 동일하므로 등비급수 공식에 의하여

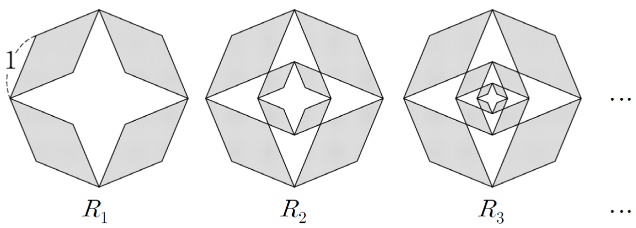
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1 - \frac{64}{225}} = \frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{\frac{161}{225}} = \frac{27\sqrt{3}}{46}$$

정답: ①

Supplementary Problem

1. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4 개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4 개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.
그림 R_1 에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4 개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 4 개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_2 라 하자.
그림 R_2 에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4 개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 4 개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻는 그림을 R_3 이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?

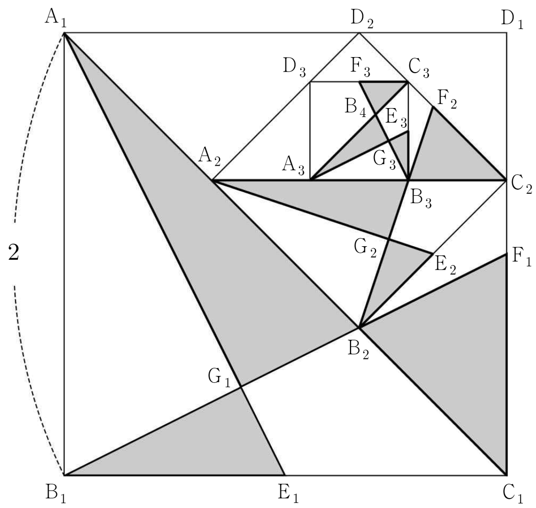
[4점] [2013년 9월 가18]



(정답) $2+\sqrt{2}$

2. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 두 선분 B_1C_1, C_1D_1의 중점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1E_1과 A_1C_1이 선분 B_1F_1과 만나는 두 점을 각각 G_1, B_2라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_1G_1B_2$, $B_1E_1G_1$, $C_1F_1B_2$의 넓이의 합을 S_1이라 하자.
점 B_2를 지나고 선분 A_1B_2에 수직인 직선과 선분 C_1D_1이 만나는 점을 C_2라 하자. 점 C_2를 지나고 선분 B_2C_2에 수직인 직선과 선분 A_1D_1이 만나는 점을 D_2라 하고, 점 D_2에서 선분 A_1B_2에 내린 수선의 발을 A_2라 하자. 정사각형 $A_2B_2C_2D_2$에서 두 선분 B_2C_2, C_2D_2의 중점을 각각 E_2, F_2라 하고, 두 선분 A_2E_2와 A_2C_2가 선분 B_2F_2와 만나는 두 점을 각각 G_2, B_3이라 하자. 이때, 세 삼각형 $A_2G_2B_3$, $B_2E_2G_2$, $C_2F_2B_3$의 넓이의 합을 S_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 세 삼각형 $A_nG_nB_{n+1}$, $B_nE_nG_n$, $C_nF_nB_{n+1}$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$의 값은?

[4점] [2013년 4월 가16나18]



(정답) $\frac{48}{35}$

Problem #21

21. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}}$$

이다. $\sum_{k=1}^{m} a_k$의 값이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 모든 자연수 m의 값의 합은? [4점]

① 150 ② 154 ③ 158 ④ 162 ⑤ 166

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 로그, 여러 가지 수열의 합
(난이도) $3/5$

"로그를 포함한 식의 합을 로그의 성질을 이용하여 계산하고, 계산한 결과를 문제에서 요구하는 사항과 대조하여 정직하게 해결하면 되는 문제입니다."

Solution

$$a_n = \frac{1}{2}\log_2\frac{2(n+1)}{(n+2)} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\{\log_2(n+1)-\log_2(n+2)\}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} a_k &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\log_2 2-\log_2 3)\\ &+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\log_2 3-\log_2 4)\\ &+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\log_2 4-\log_2 5)\\ &+ \quad \cdots\\ &+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\{\log_2(m+1)-\log_2(m+2)\}\\ &=\frac{m}{2}+\frac{1}{2}\log_2 2-\frac{1}{2}\log_2(m+2)\\ &=\frac{1}{2}\{m+1-\log_2(m+2)\}\end{aligned}$$

m은 자연수이므로 위의 값이 자연수가 되려면
$m+2=2^l$ (l은 2 이상의 자연수)이어야 하고, 이때

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = \frac{1}{2}(2^l-2+1-l) = 2^{l-1}-\frac{l+1}{2}$$

에서 l은 홀수여야 합니다.

$l \geq 2$이므로 $2^{l-1}-\frac{l+1}{2}>0$이고,

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

$l=3$일 때 $2^{l-1}-\dfrac{l+1}{2}=4-2=2$

$l=5$일 때 $2^{l-1}-\dfrac{l+1}{2}=16-3=13$

$l=7$일 때 $2^{l-1}-\dfrac{l+1}{2}=64-4=60$

$l=9$일 때 $2^{l-1}-\dfrac{l+1}{2}=256-5=251$

이고 $l \geq 9$이면 $2^{l-1}-\dfrac{l+1}{2}>251$이므로

문제의 조건을 만족시키는 자연수 m의 값은

$m=2^3-2,\ 2^5-2,\ 2^7-2$

이고, 그 합은 $6+30+126=162$

정답: ④

Supplementary Problem

1. $a>1$인 실수 a에 대하여 $a^{\log_5 16}$이 $2^n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$이 되도록 하는 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, k번째 수를 a_k라 하자. $\displaystyle\sum_{k=1}^{40}\log_5 a_k$의 값은?

[4점] [2014년 7월 나17]

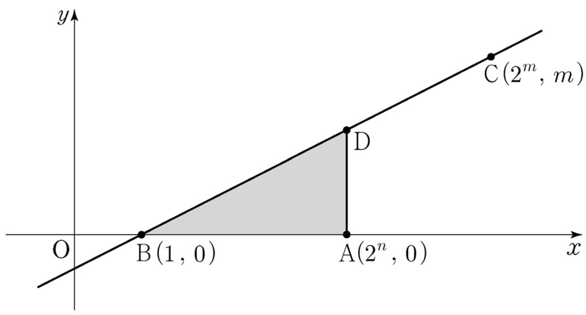
(정답) 205

2. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 m을 a_n이라 할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은?

[4점] [2015학년도 수능 가21]

(가) 점 A의 좌표는 $(2^n, 0)$이다.

(나) 두 점 $\mathrm{B}(1, 0)$과 $\mathrm{C}(2^m, m)$을 지나는 직선 위의 점 중 x좌표가 2^n인 점을 D라 할 때, 삼각형 ABD의 넓이는 $\dfrac{m}{2}$보다 작거나 같다.



정답: 109

3. 100 이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n \in S$에 대하여 집합 $\{k \mid k \in S$ 이고 $\log_2 n - \log_2 k$는 정수$\}$의 원소의 개수를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$ 이고 $f(99)=1$ 이다. 이때, $f(n)=1$ 인 n 의 개수를 구하시오.

[4점] [2011년 6월 가나30]

(정답) 25

문제에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #26

26. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 등차수열
(난이도) $2/5$

"등차수열의 공차가 나와 있으므로, 단순히 등차수열의 합 공식만 이용해도 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다."

Solution

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=-16 \Rightarrow a_1+a_k=-\frac{32}{k} \quad \cdots ①$$

$$S_{k+2}=\frac{(k+2)(a_1+a_{k+2})}{2}=-12$$

$$\Rightarrow a_1+a_{k+2}=-\frac{24}{k+2} \quad \cdots ②$$

①, ②의 양변을 변변 빼면
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$a_{k+2}-a_k=-\frac{24}{k+2}+\frac{32}{k}=4$$

$$\Rightarrow -6k+8(k+2)=k(k+2)$$

$$\Rightarrow k^2=16,\ k=4\ (\because\ k>0)$$

①에서

$$a_1+a_4=-8 \Rightarrow a_1+(a_1+6)=2a_1+6=-8$$

에서 $a_1=-7$

$$\therefore\ a_n=-7+2(n-1)=2n-9$$

$$\therefore\ a_{2k}=a_8=16-9=7$$

정답: 7

Supplementary Problem

1. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9=|S_3|=27$일 때, a_{10}의 값은?

[4점] [2019년 4월 나14]

(정답) 23

2. 첫째항이 a이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$일 때, 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

[4점] [2014년 3월 가28]

(정답) 37

3. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

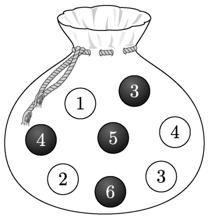
[4점] [2007학년도 수능 가나22]

(정답) 13

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #27

27. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 조건부확률
(난이도) $3/5$

"이전에 등장했던 조건부확률의 문제와 다르게, 문제를 해결하기 위해 경우를 나누는 것이 상당히 까다로운 문제입니다. 이번 평가원 시험의 확률 문제에서 공통적으로 나타나는 특성이라고 할 수 있습니다."

Solution

주머니 안의 8개의 공 중 4개의 공을 선택하는 방법의 수는

$${}_8C_4 = 70$$

이고, 문제에서 구하는 경우는 다음과 같이 선택한 4개의 공 중 검은 공의 개수에 따라 나누어 생각할 수 있습니다.
이때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있어야하므로 흰 공과 검은 공은 각각 1개 이상 선택해야 합니다.

(1) 꺼낸 공 중 검은 공의 개수가 1인 경우
검은 공은 3, 4가 적혀 있는 것 중에서 선택해야 하므로
검은 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이때 흰 공 3개 중에 하나는 선택한 검은 공과 같은 수가 적혀 있어야 하므로 흰 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$

따라서 이 경우 흰 공과 검은 공을 선택하는 방법의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(2) 꺼낸 공 중 검은 공의 개수가 2인 경우
꺼낸 4개의 공 중 흰 공과 검은 공에 적힌 수가 같은 공이 한 쌍인 경우의 수는

$${}_2C_1 \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1) = 16$$

꺼낸 4개의 공 중 흰 공과 검은 공에 적힌 수가 같은 공이 두 쌍인 경우의 수는

$$1$$

따라서 이 경우 흰 공과 검은 공을 선택하는 방법의 수는

$$16 + 1 = 17$$

(3) 꺼낸 공 중 검은 공의 개수가 3인 경우
흰 공은 3, 4가 적혀 있는 것 중에 선택해야 하므로
흰 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이때 검은 공 3개 중에 하나는 선택한 흰 공과 같은 수가 적혀 있어야 하므로 검은 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$

따라서 이 경우 흰 공과 검은 공을 선택하는 방법의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(1), (2), (3)에서 구하는 확률은

$$\frac{17}{6+17+6} = \frac{17}{29}$$

$\therefore\ p+q = 29+17 = 46$

정답: 46

Supplementary Problem

1. 그림과 같이 6개의 주머니 중에서 3개의 주머니에는 흰 공만 2개씩 들어 있고, 2개의 주머니에는 검은 공만 2개씩 들어 있으며, 1개의 주머니에는 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 들어있다. 이 6개의 주머니 중에서 임의로 2개를 선택하여 두 주머니 속에 있는 공을 모두 꺼낸다. 꺼낸 공에 흰 공이 1개 이상 있을 때, 검은 공도 1개 이상 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

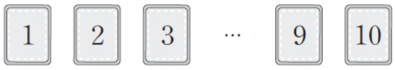
[4점] [2019년 전북5월 나27]

(정답) 25

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

2. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑는다. 뽑은 3장의 카드에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 5미만 일 때, 최댓값과 최솟값의 차가 홀수일 확률은?

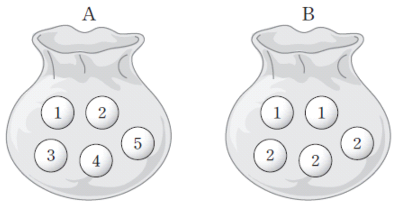
[4점] [2018년 전북10월 가16]



(정답) $\frac{7}{20}$

3. 주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 1, 2, 2, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있다. 주머니 A에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 차례로 a_1, a_2라 하고, 주머니 B에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 차례로 b_1, b_2라 하자. $a_1 \geq 3$일 때, $a_1b_1 < a_2b_2$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2019년 전북5월 가28]



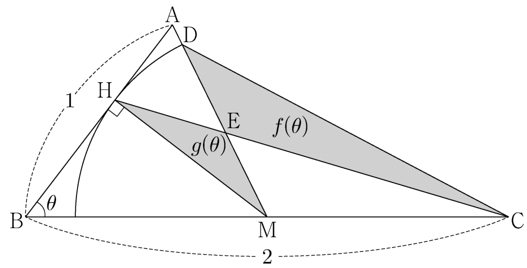
(정답) 51

Problem #28

28. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 두 선분 AB, BC에 대하여 선분 BC의 중점을 M, 점 M에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 중심이 M이고 반지름의 길이가 $\overline{MH}$인 원이 선분 AM과 만나는 점을 D, 선분 HC가 선분 DM과 만나는 점을 E라 하자. $\angle ABC = \theta$라 할 때, 삼각형 CDE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 MEH의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3} = a$일 때, $80a$의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]



commentary

(관련 교과 내용)
[수학Ⅰ] 삼각함수
[미적분] 삼각함수의 극한
(난이도) $3/5$

"구하고자 하는 두 삼각형의 넓이를 직접적으로 구하기는 어려우므로, 두 삼각형의 넓이의 차를 주변의 다른 두 삼각형의 넓이의 차로 계산하는 방법을 생각하는 것이 핵심입니다. 이와 비슷한 발상은 작년에도 출제된 바 있습니다."

Solution

$f(\theta)-g(\theta) = \triangle DMC - \triangle HMC$ ⋯ ①임에 주목합니다.

$\overline{BM}=1$이고 $\angle ABC=\theta$이므로 $\overline{HM}=\sin\theta$

$\angle BMH = \frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle CMH = \frac{\pi}{2}+\theta$

$$\therefore \ \triangle HMC = \frac{1}{2}\cdot\overline{HM}\cdot\overline{CM}\cdot\sin\angle CMH$$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\theta \ \cdots \ ②$$

한편, $\overline{DM}=\overline{HM}=\sin\theta$이고

$\overline{AM}=\overline{BM}$이므로 $\angle AMB = \frac{\pi-\theta}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

$\Rightarrow \ \angle\mathrm{AMC} = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta}{2}$

$$\therefore \ \triangle\mathrm{DMC} = \frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{DM}}\cdot\overline{\mathrm{CM}}\cdot\sin\angle\mathrm{AMC} = \frac{1}{2}\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}$$

①, ②, ③에 의하여

$$f(\theta) - g(\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta\left(\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta\left(-2\cos^2\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} + 1\right)$$
$$= \frac{1}{2}\sin\theta\left(2\cos\frac{\theta}{2}+1\right)\left(1-\cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\left(\because \ \cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right) = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1\right)$$

$$\therefore \ \lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta^3}$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{\theta^2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{\theta\to 0+}\frac{1-\cos^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\cos\frac{\theta}{2}\right)}$$
$$= \frac{3}{4}\lim_{\theta\to 0+}\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{16}$$

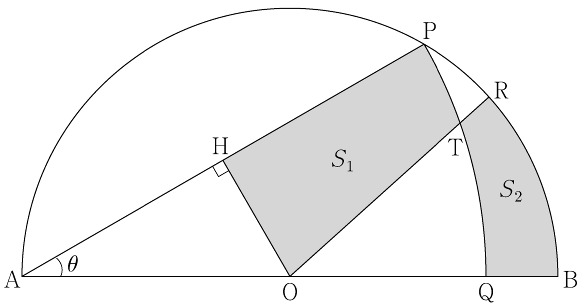
$\therefore \ 80a = 15$

정답: 15

Supplementary Problem

1. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AP}}$인 원과 선분 AB의 교점을 Q라 하자.
호 PB 위에 점 R를 호 PR와 호 RB의 길이의 비가 3:7이 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OR와 호 PQ의 교점을 T, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H라 하자.
세 선분 PH, HO, OT와 호 TP로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 두 선분 RT, QB와 두 호 TQ, BR로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2라 하자. $\angle\mathrm{PAB} = \theta$라 할 때, $\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{S_1 - S_2}{\overline{\mathrm{OH}}} = a$이다. $50a$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$)

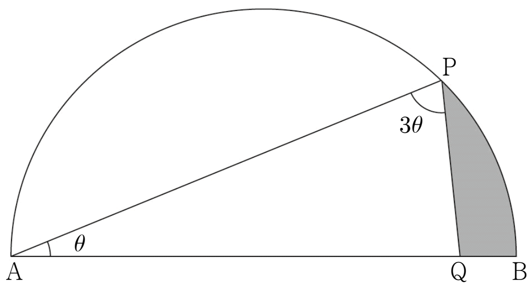
[4점] [2019년 6월 가28]



(정답) 40

2. 그림과 같이 길이가 12인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의호 AB 위에 $\angle \mathrm{PAB}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$인 점 P가 있다. $\angle \mathrm{APQ}=3\theta$가 되도록 선분 AB 위의 점 Q를 잡을 때, 두 선분 PQ, QB와 호 BP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값을 구하시오.

[4점] [2015년 7월 가29]



(정답) 18

Problem #29

29. 검은색 볼펜 1자루, 파란색 볼펜 4자루, 빨간색 볼펜 4자루가 있다. 이 9자루의 볼펜 중에서 5자루를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 볼펜끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜을 1자루도 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 중복조합
(난이도) 4/5

“앞에 나왔던 확률과 통계 문제와 같이, 경우를 나누는 것이 까다로운 문제입니다. 이 문제가 가장 까다롭고 나눠야할 경우의 수도 제일 많습니다. 경우의 수를 구할 때 적당히 나누어 구하는 방법에 대한 연습을 하는 것이 좋겠습니다.”

Solution

주어진 볼펜 9자루 중에 5자루를 선택하여 나누어주기 위해서는 서로 다른 색 볼펜을 적어도 2종류 이상 선택해야 합니다.
따라서 다음과 같이 나누어 생각합니다.

(1) 5자루의 볼펜 중 서로 다른 색의 볼펜이 2종류인 경우
이 경우는 선택한 5자루의 볼펜 중 (i) 검은색 볼펜이 포함되는 경우와 (ii) 검은색 볼펜이 포함되지 않는 경우로 나누어 생각할 수 있습니다.

(i) 검은색 볼펜이 포함되는 경우
남은 4자루의 볼펜은 모두 같은 색이어야 하므로
남은 4자루의 볼펜의 색을 결정하는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{C}_1=2$$

검은색 볼펜 1자루를 학생 2명에게 나누어주는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{H}_1=2$$

남은 4자루의 볼펜을 학생 2명에게 나누어주는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$$

따라서 이 경우 볼펜을 학생에게 나누어주는 방법의 수는

$$2\times2\times5=20$$

(ii) 검은색 볼펜이 포함되지 않는 경우
선택된 5자루의 볼펜 중 파란색 볼펜의 개수를 a, 빨간색 볼펜의 개수를 b라고 하면
학생 2명에게 볼펜을 나누어주는 방법의 수는

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

$a=1,\ b=4$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_4 = 10$

$a=2,\ b=3$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_3 = 12$

$a=3,\ b=2$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 12$

$a=4,\ b=1$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_4 \times {}_2\mathrm{H}_1 = 10$

따라서 이 경우 볼펜을 학생에게 나누어주는 방법의 수는

$$10+12+12+10=44$$

(2) 5자루의 볼펜 중 서로 다른 색의 볼펜이 3종류인 경우
검은색 볼펜 1자루를 학생 2명에게 나누어주는 방법의 수는

$${}_2\mathrm{H}_1 = 2$$

남은 4자루의 볼펜 중 볼펜의 개수를 a, 빨간색 볼펜의 개수를 b라고 하면
학생 2명에게 볼펜을 나누어주는 방법의 수는

$a=1,\ b=3$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_1 \times {}_2\mathrm{H}_3 = 8$

$a=2,\ b=2$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2 = 9$

$a=3,\ b=1$인 경우 ${}_2\mathrm{H}_3 \times {}_2\mathrm{H}_1 = 8$

따라서 이 경우 볼펜을 학생에게 나누어주는 방법의 수는

$$2\times(8+9+8)=50$$

(1), (2)에서 문제의 조건에 맞게 학생들에게 볼펜을 나누어주는 방법의 수는

$$20+44+50=114$$

정답: 114

Supplementary Problem

1. 연필 7자루와 볼펜 4자루를 다음 조건을 만족시키도록 여학생 3명과 남학생 2명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 연필끼리는 서로 구별하지 않고, 볼펜끼리도 서로 구별하지 않는다.)

[4점] [2019년 9월 가28나29]

(가) 여학생이 각각 받는 연필의 개수는 서로 같고, 남학생이 각각 받는 볼펜의 개수도 서로 같다.

(나) 여학생은 연필을 1자루 이상 받고, 볼펜을 받지 못하는 여학생이 있을 수 있다.

(다) 남학생은 볼펜을 1자루 이상 받고, 연필을 받지 못하는 남학생이 있을 수 있다.

(정답) 49

2. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는?

[4점] [2018년 4월 나21]

(가) $a+b+c+d=12$

(나) 좌표평면에서 두 점 (a, b), (c, d)는 서로 다른 점이며 두 점 중 어떠한 점도 직선 $y=2x$ 위에 있지 않다.

(정답) 134

3. 전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 6 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: U \to U$의 개수를 구하시오.

[4점] [2018년 전북5월 나29]

(가) $x_1 \in A$, $x_2 \in A$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) \geq f(x_2)$이다.

(나) $x_1 \in B$, $x_2 \in B$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

(다) $x_1 \in A$, $x_2 \in B$인 모든 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

(정답) 28

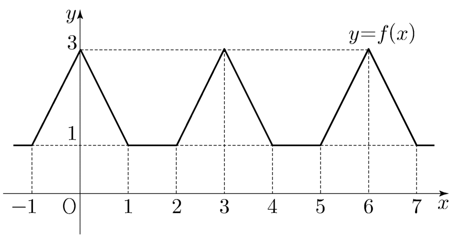
문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #30

30. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오. [4점]



commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 미분계수와 도함수
[미적분] 여러 가지 미분법
(난이도) $5/5$

"함수 $g(x)$가 함수 $f(2^x)$의 미분가능성과 관련이 있음을 파악하고, 이 함수의 미분가능성을 합성함수의 미분법을 활용하여 판단하는 것이 핵심이나, 도함수의 극한과 미분계수를 반드시 구별하여 계산하도록 합니다."

Solution

함수 $p(x)$를 $p(x) = f(2^x)$라 하면
함수 $p(x)$는 2^x의 값이 정수가 아닐 때
합성함수의 미분법에 의하여 $p'(x) = f'(2^x) \cdot 2^x \ln 2$이므로
$p(x)$는 2^x의 값이 정수가 아닐 때 미분가능하고, $p'(x)$는 연속입니다.
또한, 2^x의 값이 정수가 아닐 때

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \right| = |p'(x)|$$

이므로 $g(x)$는 2^x의 값이 정수가 아닐 때에는 항상 연속입니다.

문제에서 함수 $f(x)$는 주기가 3인 주기함수이므로 다음과 같이 x의 값의 범위를 나누어 생각합니다.

(1) $3m < 2^x < 3m+1$ (m은 정수)인 경우
$p'(x) = f'(2^x) \cdot 2^x \ln 2 = -2\ln 2 \cdot 2^x$
$\Rightarrow\ g(x) = |p'(x)| = 2\ln 2 \cdot 2^x$

(2) $3m+1 < 2^x < 3m+2$인 경우
$p'(x) = f'(2^x) \cdot 2^x \ln 2 = 0$
$\Rightarrow\ g(x) = |p'(x)| = 0$

(3) $3m+2 < 2^x < 3(m+1)$인 경우
$p'(x) = f'(2^x) \cdot 2^x \ln 2 = 2\ln 2 \cdot 2^x$
$\Rightarrow\ g(x) = |p'(x)| = 2\ln 2 \cdot 2^x$

따라서 모든 정수 m에 대하여

$$g(x) = \begin{cases} 2\ln 2 \cdot 2^x & (3m < 2^x < 3m+1 \text{ 또는 } 3m+2 < 2^x < 3(m+1)) \\ 0 & (3m+1 < 2^x < 3m+2) \end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)$는 $2^x = 3m+1$ 또는 $2^x = 3m+2$일 때 불연속이고,

$3m \le x < 3m+1$일 때 $f(x) = -2(x-3m)+3$
이므로 $2^x = 3m$인 경우(즉, $x = \log_2 3m$인 경우)

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(3m \cdot 2^h) - f(3m)}{h} \right| \\ &= \lim_{h \to 0+} \left| \frac{-2(3m \cdot 2^h - 3m) + 3 - 3}{h} \right| \quad (\because\ 3m \cdot 2^h > 3m) \\ &= \lim_{h \to 0+} \left| \frac{-6m(2^h - 1)}{h} \right| = 6m \ln 2 \end{aligned}$$

이므로

$$\lim_{x \to \log_2 3m} g(x) = g(\log_2 3m) = 6m \ln 2$$

따라서 $g(x)$는 $2^x = 3m$일 때에는 연속입니다.

또한, 위와 같은 방법으로
$2^x = 3m+1$인 경우 $g(x) = 0$이고
$2^x = 3m+2$인 경우 $g(x) = 2\ln 2(3m+2)$
를 얻을 수 있습니다. ⋯ (*)

열린구간 $(-5, 5)$에서 $\frac{1}{32} < 2^x < 32$이므로
$2^x = 3m+1$ 또는 $2^x = 3m+2$인 실수 x의 개수는 21이므로
함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 실수 a의 개수는 21입니다.
$\therefore\ n = 21$

또한 (*)과 수열 $\{a_n\}$의 정의로부터
$g(a_1) = 0,\ g(a_2) = 4\ln 2,$

문제에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

$g(a_3)=0,\ g(a_4)=10\ln2,$

$\cdots$

$g(a_{19})=0,\ g(a_{20})=58\ln2,$

$g(a_{21})=0$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}=4+10+\cdots+58=310$

$\displaystyle\therefore\ n+\sum_{k=1}^{n}\frac{g(a_k)}{\ln2}=21+310=331$

정답: 331

Supplementary Problem

1. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오.

[4점] [2016년 9월 가30]

(정답) 48

2. 열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}2\sin^3x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right)\\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right)\end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$

(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a,\ g(0)=b,\ g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은?

[4점] [2018년 6월 가21]

(정답) 99

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

‘나’ 형

Problem #14

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 수열의 귀납적 정의
(난이도) $1/5$

“$a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값을 찾기 위해서 주어진 수열의 귀납적 정의에서 각 등식에 $n=4$만 대입하면 된다는 사실만 찾아내면 매우 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다.
심지어 이를 발견하지 못하더라도 문제를 푸는 데에는 크게 지장이 없습니다.”

Solution

주어진 수열의 귀납적 정의로부터
$a_{11}=2a_4+1$, $a_{12}=-a_4+2$, $a_{13}=a_4+1$
$\Rightarrow$ $a_{11}+a_{12}+a_{13}=2a_4+4$
$a_{3n+1}=a_n+1$에서
$a_4=a_1+1=2$

$\therefore$ $a_{11}=2a_4+4=2\times2+4=8$

정답: ③

Supplementary Problem

1. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=p$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n-2n$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제5항까지의 합이 10이 되도록 하는 상수 p의 값은?

[3점] [2018년 전북5월 나12]

(정답) 10

2. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n+a_{n+1}=n$$

을 만족시킨다. $\sum_{n=1}^{41} a_n$ 의 값은?

[3점] [2018년 대구11월 나13]

(정답) 421

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #15

15. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t + 5$$

이다. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는? [4점]

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 속도와 거리
(난이도) $1/5$

"속도와 거리에 관한 기본 성질을 적용하면 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다."

Solution

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면
$x'(t) = v(t)$이므로

$$\int_0^3 v(t)dt = \int_0^3 (-4t+5)dt$$
$$= \left[-2t^2+5t\right]_0^3 = -18+15 = -3$$
$$= x(3) - x(0)$$

즉, $x(3)-x(0) = -3$이고, 문제의 조건에서 $x(3)=11$이므로
$\therefore\ x(0) = x(3)+3 = 11+3 = 14$

정답: ④

Supplementary Problem

1. 원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각 $3t^2+6t-6$, $10t-6$이다. 두 점 P, Q가 출발 후 $t=a$에서 다시 만날 때, 상수 a의 값은?

[4점] [2018년 7월 나14]

(정답) 2

2. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3t^2+t,\quad v_2(t) = 2t^2+3t$$

이다. 출발한 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간 두 점 P, Q 사이의 거리를 a라 할 때, $9a$의 값을 구하시오.

[4점] [2018년 9월 나28]

(정답) 12

3. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t) = 3t^2 - 12t + 9\ (t \geq 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점] [2022예비 5월 공통14]

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.

ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #16

16. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $|a-3|+|b-3|=2$이거나 $a=b$일 확률은? [4점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 확률
(난이도) $2/5$

“구해야 할 경우의 수를 정확하게 구하고, 확률의 덧셈정리를 정확하게 적용할 수 있다면 어렵지 않게 해결할 수 있습니다.”

Solution

한 개의 주사위를 던져 나올 수 있는 모든 경우의 수는 $6\times6=36$이고, 문제의 조건을 만족시키는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있습니다.

(1) $|a-3|+|b-3|=2$인 경우
순서쌍 (a, b)의 개수는
$|a-3|=2$, $|b-3|=0$이면 $2\times1=2$
$|a-3|=1$, $|b-3|=1$이면 $2\times2=4$
$|a-3|=0$, $|b-3|=2$이면 $1\times2=2$
따라서 이 경우 순서쌍 (a, b)의 개수는

$$2+4+2=8$$

(2) $a=b$인 경우
이 경우 순서쌍 (a, b)의 개수는 6

(3) $|a-3|+|b-3|=2$이고 $a=b$인 경우
$a=b$이므로 $2|a-3|=2$
즉, $|a-3|=1$이어야 하고, $a=b$이므로
이 경우 순서쌍 (a, b)의 개수는 2

(1), (2), (3)에서 문제의 조건을 만족시킬 확률은
확률의 덧셈정리에 의하여

$$\frac{8+6-2}{36}=\frac{1}{3}$$

정답: ②

Supplementary Problem

1. A, B를 포함한 8명의 요리 동아리 회원 중에서 요리 박람회에 참가할 5명의 회원을 임의로 뽑을 때, A 또는 B가 뽑힐 확률은?

[3점] [2017년 10월 나11]

(정답) $\frac{25}{28}$

2. 방정식 $a+b+c=9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 모든 순서쌍 (a, b, c) 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 선택한 순서쌍 (a, b, c)가

$$a<2 \text{ 또는 } b<2$$

를 만족시킬 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2018년 9월 가28]

(정답) 89

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #17

17. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=4x^3+x\int_0^1 f(t)\,dt$$

를 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 정적분의 계산
(난이도) $1/5$

“계산 연습을 목표로 하는 기초적 수준의 문제집에서도 자주 등장하는 유형의 정적분의 계산 문제입니다.”

Solution

$\int_0^1 f(t)dt=k$라 두면 $f(x)=4x^3+kx$

양변을 0에서 1까지 적분하면

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (4x^3+kx)dx$$
$$=\left[x^4+\frac{1}{2}kx^2\right]_0^1=1+\frac{k}{2}$$

따라서 $k=1+\frac{k}{2}$이므로 $k=2$

$\therefore\ f(x)=4x^3+2x,\ f(1)=6$

정답: ①

Supplementary Problem

1. 모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_{12}^{x} f(t)\,dt=-x^3+x^2+\int_0^1 xf(t)\,dt$$

$\int_0^1 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[3점] [2014년 10월 나24]

(정답) 132

2. 함수 $f(x)$가 $f(x)=x^2-2x+\int_0^1 tf(t)dt$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

[3점] [2013년 7월 나12]

(정답) $\frac{13}{6}$

3. 이차함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{12}{7}x^2-2x\int_1^2 f(t)\,dt+\left\{\int_1^2 f(t)dt\right\}^2$$

일 때, $10\int_1^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

[3점] [2005년 9월 가19]

(정답) 20

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #18

18. 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_k=-16$, $S_{k+2}=-12$를 만족시키는 자연수 k에 대하여 a_{2k}의 값은? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 등차수열
(난이도) $2/5$

"등차수열의 공차가 나와 있으므로, 단순히 등차수열의 합 공식만 이용해도 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다."

Solution

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=-16 \Rightarrow a_1+a_k=-\frac{32}{k} \cdots ①$$

$$S_{k+2}=\frac{(k+2)(a_1+a_{k+2})}{2}=-12$$

$$\Rightarrow a_1+a_{k+2}=-\frac{24}{k+2} \cdots ②$$

①, ②의 양변을 변변 빼면
수열 $\{a_n\}$의 공차가 2이므로

$$a_{k+2}-a_k=-\frac{24}{k+2}+\frac{32}{k}=4$$

$$\Rightarrow -6k+8(k+2)=k(k+2)$$

$$\Rightarrow k^2=16,\ k=4\ (\because\ k>0)$$

①에서

$$a_1+a_4=-8 \Rightarrow a_1+(a_1+6)=2a_1+6=-8$$

에서 $a_1=-7$

$$\therefore\ a_n=-7+2(n-1)=2n-9$$

$$\therefore\ a_{2k}=a_8=16-9=7$$

정답: ②

Supplementary Problem

1. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_9=|S_3|=27$일 때, a_{10}의 값은?

[4점] [2019년 4월 나14]

(정답) 23

2. 첫째항이 a이고 공차가 -4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n<200$일 때, 자연수 a의 최댓값을 구하시오.

[4점] [2014년 3월 가28]

(정답) 37

3. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이 $a_{n+1}b_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

[4점] [2007학년도 수능 가나22]

(정답) 13

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #19

19. 방정식 $2x^3+6x^2+a=0$이 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 정수 a의 개수는? [4점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

commentary

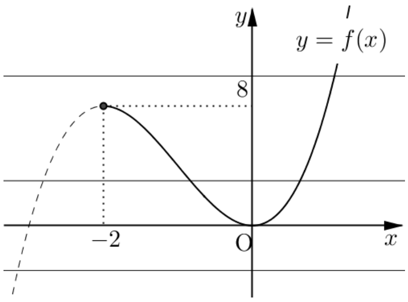
(관련 교과 내용)
[수학II] 도함수의 활용(방정식과 부등식에의 활용)
(난이도) $2/5$

"주어진 삼차방정식의 실근의 개수를 삼차함수의 그래프와 직선의 교점의 개수로 바꾸어 생각하는 전형적인 문제입니다. 이는 '도함수의 활용' 단원의 가장 기본적인 유형 중 하나이므로 반드시 풀 수 있게 연습하도록 합니다."

Solution

$2x^3+6x^2=-a$에서
주어진 방정식이 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $f(x)=2x^3+6x^2$의 그래프와 직선 $y=-a$가 $-2 \le x \le 2$에서 서로 다른 두 점에서만 만나야 합니다.

$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$
에서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 8, $x=0$에서 극솟값 0을 가지고, $f(2)=40$이므로
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-a$를 그리면 아래와 같습니다.



따라서 문제의 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$$0<-a \le 8 \iff -8 \le a < 0$$

따라서 문제의 조건을 만족시키는 정수 a의 개수는 8입니다.

정답: ③

Supplementary Problem

1. 방정식 $x^3-3x^2-9x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 최댓값은?

[4점] [2018년 9월 나15]

(정답) 4

2. 함수 $y=x^3+2$의 그래프와 직선 $y=kx$가 만나는 교점의 개수를 $f(k)$라 할 때, $\sum_{k=1}^{6} f(k)$의 값을 구하시오.

[4점] [2017년 10월 나26]

(정답) 13

3. 두 함수

$$f(x)=x^4+x^2-(k+1)x+k$$
$$g(x)=2x^3+x^2-5x+3$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

[4점] [2019년 전북5월 나18]

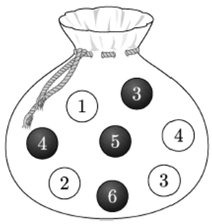
(정답) 2

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #20

20. 주머니에 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적혀 있는 흰 공 4개와 숫자 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 검은 공 4개가 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내는 시행을 한다. 이 시행에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있을 때, 꺼낸 공 중 검은 공이 2개일 확률은? [4점]

① $\frac{13}{29}$ ② $\frac{15}{29}$ ③ $\frac{17}{29}$ ④ $\frac{19}{29}$ ⑤ $\frac{21}{29}$



commentary

(관련 교과 내용)

[확률과 통계] 조건부확률

(난이도) $3/5$

“이전에 등장했던 조건부확률의 문제와 다르게, 문제를 해결하기 위해 경우를 나누는 것이 상당히 까다로운 문제입니다. 이번 평가원 시험의 확률 문제에서 공통적으로 나타나는 특성이라고 할 수 있습니다.”

Solution

주머니 안의 8개의 공 중 4개의 공을 선택하는 방법의 수는

$${}_8C_4 = 70$$

이고, 문제에서 구하는 경우는 다음과 같이 선택한 4개의 공 중 검은 공의 개수에 따라 나누어 생각할 수 있습니다.
이때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 같은 것이 있어야하므로 흰 공과 검은 공은 각각 1개 이상 선택해야 합니다.

(1) 꺼낸 공 중 검은 공의 개수가 1인 경우
검은 공은 3, 4가 적혀 있는 것 중에서 선택해야 하므로
검은 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이때 흰 공 3개 중에 하나는 선택한 검은 공과 같은 수가 적혀 있어야 하므로 흰 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$

따라서 이 경우 흰 공과 검은 공을 선택하는 방법의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(2) 꺼낸 공 중 검은 공의 개수가 2인 경우
꺼낸 4개의 공 중 흰 공과 검은 공에 적힌 수가 같은 공이 한 쌍인 경우의 수는

$${}_2C_1 \times ({}_3C_1 \times {}_3C_1 - 1) = 16$$

꺼낸 4개의 공 중 흰 공과 검은 공에 적힌 수가 같은 공이 두 쌍인 경우의 수는

$$1$$

따라서 이 경우 흰 공과 검은 공을 선택하는 방법의 수는

$$16 + 1 = 17$$

(3) 꺼낸 공 중 검은 공의 개수가 3인 경우
흰 공은 3, 4가 적혀 있는 것 중에 선택해야 하므로
흰 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_1 = 2$

이때 검은 공 3개 중에 하나는 선택한 흰 공과 같은 수가 적혀 있어야 하므로 검은 공을 선택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$

따라서 이 경우 흰 공과 검은 공을 선택하는 방법의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(1), (2), (3)에서 구하는 확률은

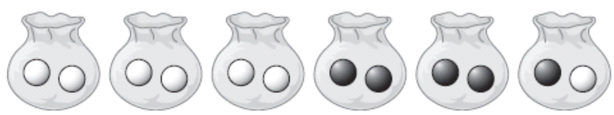
$$\frac{17}{6+17+6} = \frac{17}{29}$$

정답: ③

Supplementary Problem

1. 그림과 같이 6개의 주머니 중에서 3개의 주머니에는 흰 공만 2개씩 들어 있고, 2개의 주머니에는 검은 공만 2개씩 들어 있으며, 1개의 주머니에는 흰 공과 검은 공이 각각 1개씩 들어있다. 이 6개의 주머니 중에서 임의로 2개를 선택하여 두 주머니 속에 있는 공을 모두 꺼낸다. 꺼낸 공에 흰 공이 1개 이상 있을 때, 검은 공도 1개 이상 있을 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2019년 전북5월 나27]

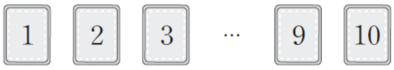


(정답) 25

문제에 대한 저작권은 **한국교육과정평가원**에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

2. 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적힌 10장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 뽑는다. 뽑은 3장의 카드에 적힌 수의 최댓값과 최솟값의 차가 5미만 일 때, 최댓값과 최솟값의 차가 홀수일 확률은?

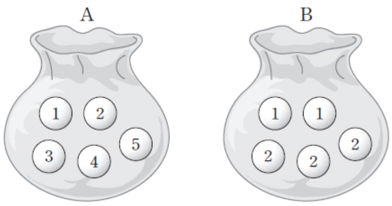
[4점] [2018년 전북10월 가16]



(정답) $\frac{7}{20}$

3. 주머니 A에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있고, 주머니 B에는 1, 1, 2, 2, 2의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 구슬이 들어 있다. 주머니 A에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 차례로 a_1, a_2라 하고, 주머니 B에서 공을 임의로 한 개씩 두 번 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수를 차례로 b_1, b_2라 하자. $a_1 \geq 3$일 때, $a_1b_1 < a_2b_2$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 한 번 꺼낸 공은 주머니에 다시 넣지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2019년 전북5월 가28]



(정답) 51

정답: ③

Problem #21

21. 두 곡선 $y=2^x$과 $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 (x_1, y_1), (x_2, y_2)라 하자. $x_1 < x_2$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $x_2 > \frac{1}{2}$

ㄴ. $y_2 - y_1 < x_2 - x_1$

ㄷ. $\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1y_2 < 1$

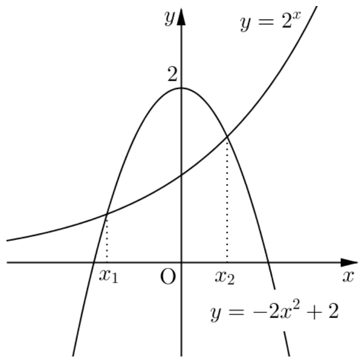
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 이차함수의 그래프
[수학I] 지수함수의 그래프
(난이도) $3/5$

“이차함수와 지수함수의 성질을 활용하여 해결하는 문제입니다. 각 보기에서 묻는 항목에 따라 다루기 편한 함수를 끌어와서 문제를 해결하는 것이 핵심입니다.”

Solution



위 그림과 같이 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2x^2+2$는 서로 다른 두 교점을 가집니다.

ㄱ) $f(x)=2^x$, $g(x)=-2x^2+2$라 하면

$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$

이고, $\sqrt{2}<\frac{3}{2}$이므로 $f\left(\frac{1}{2}\right)<g\left(\frac{1}{2}\right)$입니다.

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

또한, 두 함수의 그래프로부터

$x_1 < x < x_2$일 때 $f(x) < g(x)$이고,

$x < x_1$ 또는 $x > x_2$일 때 $f(x) > g(x)$이므로 ⋯ (*)

$x_1 < \frac{1}{2} < x_2$, $\therefore\ x_2 > \frac{1}{2}$ (참)

ㄴ) $y_1 = -2{x_1}^2 + 2$, $y_2 = -2{x_2}^2 + 2$

이므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2\left({x_2}^2 - {x_1}^2\right)}{x_2 - x_1} = -2(x_1 + x_2)$$

이고,

$x_1 > -1$이고 ㄱ에서 $x_2 > \frac{1}{2}$이므로

$x_1 + x_2 > -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -2(x_1 + x_2) < -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

$\therefore\ y_2 - y_1 < x_2 - x_1$ (참)

ㄷ) $y_1 = 2^{x_1}$, $y_2 = 2^{x_2}$이므로

$y_1 y_2 = 2^{x_1} \times 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}$

한편, ㄴ에서 $x_1 + x_2 > -\frac{1}{2}$ ⋯ ①

$f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$이고 함수 $g(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $x_1 + x_2 < 0$ ⋯ ②

①, ②에서 $-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0$

$\therefore\ 2^{-\frac{1}{2}} < y_1 y_2 = 2^{x_1 + x_2} < 2^0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ입니다.

정답: ⑤

Supplementary Problem

1. $0 < a < \frac{1}{2}$인 상수 a에 대하여 직선 $y = x$가 곡선 $y = \log_a x$와 만나는 점을 $(p,\ p)$, 직선 $y = x$가 곡선 $y = \log_{2a} x$와 만나는 점을 $(q,\ q)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

[4점] [2009학년도 수능 나11]

〈보 기〉

ㄱ. $p = \frac{1}{2}$이면 $a = \frac{1}{4}$이다.

ㄴ. $p < q$

ㄷ. $a^{p+q} = \frac{pq}{2^q}$

(정답) ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 정의역이 $x < 4$인 두 함수 $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$의 그래프가 만나는 두 점을 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $x_1 < x_2$)

[3점] [2009년 7월 가나13]

〈보 기〉

ㄱ. $x_1 + x_2 > 0$

ㄴ. $x_1 y_1 + x_2 y_2 < 0$

ㄷ. $|x_1 y_2| - |x_2 y_1| > 0$

(정답) ㄱ, ㄷ

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #26

26. 함수 $f(x)=x^3-3x^2+5x$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율이 $f'(2)$의 값과 같게 되도록 하는 양수 a의 값을 구하시오. [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학II] 미분계수
(난이도) $1/5$

"평균변화율과 순간변화율(미분계수)의 정의만 이해하고 있다면 쉽게 해결할 수 있는 문제입니다."

Solution

함수 $f(x)$에서 x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(0)}{a-0} = \frac{a^3-3a^2+5a}{a} = a^2-3a+5$$

이고, $f'(x)=3x^2-6x+5$이므로 $f'(2)=5$

문제의 조건에서

$a^2-3a+5 = 5$

$a^2-3a=0,\ a(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

정답: 3

Supplementary Problem

1. 함수 $f(x)=x^3+ax$에서 x의 값이 0에서 2까지 변할 때의 평균변화율이 9일 때, $f'(3)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

[3점] [2016년 10월 나23]

(정답) 32

Problem #27

27. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$
(나) a, b, c, d 중에서 적어도 하나는 0이다.

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 여사건, 중복조합
(난이도) $2/5$

"'적어도'라는 말이 포함된 경우의 수는 여사건을 이용하여 구한다는 전형적인 문제 유형입니다."

Solution

여사건을 이용합니다.
문제의 조건 (나)를 만족하지 않는 경우(여사건)는
a, b, c, d가 모두 0이 아닌 경우입니다.
즉, a, b, c, d는 음이 아닌 정수이므로
$a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1,\ d \ge 1$인 경우입니다.

따라서 구하는 경우의 수는
방정식 $a+b+c+d=6$를 만족시키는 음이 아닌 정수
a, b, c, d의 모든 순서쌍의 개수에서
$a \ge 1,\ b \ge 1,\ c \ge 1,\ d \ge 1$인 순서쌍의 개수를 뺀 것과
같으므로

$${}_4H_6 - {}_4H_{6-4} = {}_9C_6 - {}_5C_2 = 84-10 = 74$$

정답: 74

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Supplementary Problem

1. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$의 개수는?

[4점] [2017년 9월 나16]

(가) $x+y+z=10$

(나) $0<y+z<10$

(정답) 54

2. 세 명의 학생 A, B, C에게 같은 종류의 사탕 6개와 같은 종류의 초콜릿 5개를 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오.

[4점] [2020학년도 수능 나29]

(가) 학생 A가 받는 사탕의 개수는 1 이상이다.
(나) 학생 B가 받는 초콜릿의 개수는 1 이상이다.
(다) 학생 C가 받는 사탕의 개수와 초콜릿의 개수의 합은 1 이상이다.

(정답) 285

Problem #28

28. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=2n^2+7n$$

을 만족시킨다. $a_5\times a_7\times a_9=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

commentary

(관련 교과 내용)
[수학I] 여러 가지 수열의 합
(난이도) $3/5$

“수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이용하는 문제입니다. 합의 기호 $\sum$ 안에 있는 식이 복잡한 경우에도 일반항을 구하는 문제를 풀어보도록 합시다.”

Solution

$\sum_{k=1}^{n}\frac{4k-3}{a_k}=S_n$이라 하면
수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의하여

$$S_n-S_{n-1}=\frac{4n-3}{a_n}\quad(n\ge 2)$$

$$\Rightarrow\ 2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}$$
$$=4n+5=\frac{4n-3}{a_n}\quad(n\ge 2)$$

$$\Rightarrow\ a_n=\frac{4n-3}{4n+5}\quad(n\ge 2)$$

한편 $S_1=\frac{1}{a_1}=9$이므로 $a_1=\frac{1}{9}$

$$\therefore\ a_n=\frac{4n-3}{4n+5}\quad(n\ge 1)$$

$$\therefore\ a_5\times a_7\times a_9=\frac{17}{25}\times\frac{25}{33}\times\frac{33}{41}=\frac{17}{41},\quad p+q=58$$

정답: 58

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Supplementary Problem

1\. 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = 4n^3 + 3n^2 - n$ 일 때, b_5의 값을 구하시오.

[4점] [2017년 7월 나26]

(정답) 15

2\. 수열 $\{a_n\}$이 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k+1} = n^2 + n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ 의 값은?

[4점] [2013년 3월 나17]

(정답) $\frac{5}{11}$

3\. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오.

[4점] [2011학년도 수능 나30]

(정답) 21

Problem #29

29. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 A에서 A로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은 p이다. $120p$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $f(1) \times f(2) \geq 9$
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

commentary

(관련 교과 내용)
[확률과 통계] 확률
(난이도) $3/5$

"문제의 조건을 만족하는 상황을 적당히 경우를 나누어 구하는 문제입니다. 이 문제의 경우 문제에서 제시하고 있는 상황이 경우를 나누기 그렇게 어렵지 않지만,
자신이 나누어 계산한 것 중에 중복되는 경우가 있지는 않은지, 자신이 계산한 것이 문제에서 구하는 것과 동일한 것인지 확인하도록 합니다."

Solution

집합 A에서 A로의 모든 함수 f의 개수는 $4^4 = 256$이고,
문제의 조건을 만족하는 함수 f를 조건 (가)를 이용하여 다음과 같이 나누어 생각할 수 있습니다.

(1) $f(1) = f(2) = 3$ 또는 $f(1) = f(2) = 4$인 경우
$f(1)$, $f(2)$의 값을 결정하는 방법의 수는 2

조건 (나)에서 $f(3)$, $f(4)$의 값은 각각 $f(1)$, $f(2)$와 다르고 $f(3) \neq f(4)$이어야하므로 $f(3)$, $f(4)$를 결정하는 방법의 수는

$${}_3\mathrm{P}_2 = 6$$

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 함수 f의 개수는

$$2 \times 6 = 12$$

(2) $f(1) \times f(2) = 12$인 경우
$f(1)$, $f(2)$의 값을 결정하는 방법의 수는 2

조건 (나)에서 $f(3)$, $f(4)$를 결정하는 방법의 수는
집합 A의 원소 중에서 중복을 허락하여 2개를 선택하여 일렬로 나열하는 모든 방법 중에서
$\{f(3), f(4)\} \subset \{1, 2\}$ 이거나 $\{f(3), f(4)\} \subset \{3, 4\}$인 경우를 제외하면 되므로

$$4^2 - (2^2 - 1) - (2^2 - 1) = 10$$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

따라서 이 경우 문제의 조건을 만족하는 함수 f의 개수는

$$2 \times 10 = 20$$

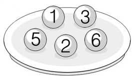
(1), (2)에서 구하는 확률은

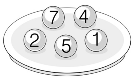
$$\frac{12+20}{256} = \frac{1}{8}, \quad 120p = 15$$

정답: 15

Supplementary Problem

1. 주머니에 1부터 10까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 10개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 5개의 공을 동시에 꺼낼 때 꺼낸 공에 적혀 있는 자연수 중 연속된 자연수의 최대 개수가 3인 사건을 A라 하자.

예를 들어  은 연속된 자연수의 최대 개수가

3이므로 사건 A에 속하고,  은 연속된 자연수의 최대 개수가 2이므로 사건 A에 속하지 않는다. 사건 A가 일어날 확률은?

[4점] [2016년 4월 가20]

(정답) $\frac{5}{14}$

2. 한국, 중국, 일본 학생이 2명씩 있다. 이 6명이 그림과 같이 좌석번호가 지정된 6개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 같은 나라의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉게 될 확률은?

[4점] [2011학년도 수능 나17]

11	12	13

21	22	23

(정답) $\frac{1}{5}$

3. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 공집합이 아닌 모든 부분집합 중에서 임의로 한 개의 집합을 택할 때, 택한 집합의 원소 중에서 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 합이 7일 확률은?

[4점] [2017년 전북10월 나14]

(정답) $\frac{1}{3}$

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Problem #30

30. 이차함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고,
삼차함수 $g(x)$는 이차항의 계수가 0이다. 함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 0) \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $h'(-3)+h'(4)$의 값을 구하시오. [4점]

(가) 방정식 $h(x)=h(0)$의 모든 실근의 합은 1이다.
(나) 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $3+4\sqrt{3}$이다.

commentary

(관련 교과 내용)
[(고1)수학] 이차함수
[수학II] 도함수의 활용(함수의 그래프, 함수의 최대와 최소)
(난이도) $4/5$

"이차함수와 삼차함수의 그래프를 이용한 종합적인 문제 해결 능력을 요구하는 문제입니다. 다항함수의 식을 결정할 때, 적극적으로 인수정리를 이용하도록 합니다.
이 경우 주어진 이차함수는 선대칭함수, 주어진 삼차함수는 점대칭함수인 것을 인지하고 있어야 문제를 좀 더 쉽게 해결할 수 있습니다."

Solution

함수 $h(x)$가 $x=0$에서 미분가능하고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 실수 전체에서 미분가능하므로

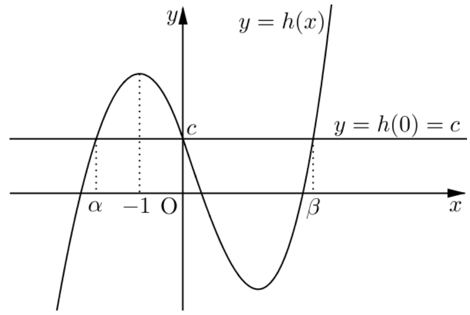
$$\lim_{x\to 0} h(x) = h(0) \Leftrightarrow f(0)=g(0)$$

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x} = \lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x} \Leftrightarrow f'(0)=g'(0)$$

따라서 다항식 $f(x)-g(x)$는 x^2을 인수로 갖습니다.
즉, $f(x)$와 $g(x)$의 일차항과 상수항이 일치해야 합니다. ··· ①

한편, 함수 $g(x)$의 그래프는 $(0, c)$에 대하여 대칭인 함수이므로 함수 $g(x)$는 $x>0$에서 최대 1개의 극값을 가질 수 있습니다.

또한 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $f'(0)<0$이므로 조건 (가)를 만족시키는 경우는 아래와 같이 함수 $g(x)$가 $x>0$에서 극솟값을 하나 가지는 경우뿐입니다.



$h(0)=c$라 하고, 위 그림과 같이 방정식 $h(x)=c$의 0이 아닌 두 실근을 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<0<\beta)$이라 하면

이차함수의 성질(대칭성)에 의하여 $\alpha=-2$
조건 (가)에서 $\alpha+\beta=1$이므로 $\beta=3$

따라서 인수정리에 의하여 적당한 상수 a, b에 대하여
$f(x)-c=ax(x+2)$ $(a<0)$
이고, 함수 $g(x)$의 이차항의 계수는 0이므로
$g(x)-c=bx(x+3)(x-3)$ $(b>0)$
$\therefore$ $f(x)=ax^2+2ax+c$, $g(x)=bx^3-9bx+c$

①에서 $2a=-9b$ ··· ②

한편, 함수 $h(x)$의 그래프의 형태로부터
닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 함수 $f(x)$의 극댓값이고, 함수 $h(x)$의 최솟값은 함수 $g(x)$의 극솟값과 같습니다.

따라서 닫힌구간 $[-2, 3]$에서
함수 $h(x)$의 최댓값은 $f(-1)=-a+c$이고,

$g'(x)=3bx^2-9b=3b(x^2-3)=3b(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$
이므로 함수 $g(x)$는 $x=\sqrt{3}$에서 극솟값을 갖고,
닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은
$g(\sqrt{3})=3\sqrt{3}b-9\sqrt{3}b+c=-6\sqrt{3}b+c$

따라서 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $h(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $-a+c-(-6\sqrt{3}b+c)=6\sqrt{3}b-a$
문제의 조건에서 $6\sqrt{3}b-a=3+4\sqrt{3}$ ··· ③

②, ③을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=\frac{2}{3}$

$$\therefore\ h(x)=\begin{cases} -3x^2-6x+c & (x\le 0) \\ \frac{2}{3}x^3-6x+c & (x>0) \end{cases}$$

$$h'(x)=\begin{cases} -6x-6 & (x\le 0) \\ 2x^2-6 & (x>0) \end{cases}$$ 이므로

$\therefore$ $h'(-3)+h'(4)=12+26=38$

정답: 38

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.

Supplementary Problem

1. 함수 $f(x)=2x^3-3ax^2+9$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 0) \\ -f(x)+18 & (x<0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 1이다.

(나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 양수이다.

방정식 $g(x)=x$의 실근을 k라 할 때, $12(a+k)$의 값을 구하시오. (단, a는 0이 아닌 상수이다.)

[4점] [2019년 전북5월 나30]

(정답) 47

2. 두 실수 a와 k에 대하여 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq a) \\ (x-1)^2(2x+1) & (x>a) \end{cases},$$

$$g(x)=\begin{cases} 0 & (x \leq k) \\ 12(x-k) & (x>k) \end{cases}$$

이고, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq g(x)$이다.

k의 최솟값이 $\frac{q}{p}$일 때, $a+p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점] [2018학년도 수능 나29]

(정답) 32

3. 최고차항의 계수가 1이고 $f(2)=3$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax-9}{x-1} & (x<1) \\ f(x) & (x \geq 1) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 두 점에서만 만나도록 하는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid t=-1 \text{ 또는 } t \geq 3\}$이다.

$(g \circ g)(-1)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[4점] [2019년 6월 나30]

(정답) 19

문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.
본 문서는 영리적 목적 이외의 용도에 한해 자유로운 열람 및 배포가 가능합니다.