01 지수와 로그

유제

본문 5~15쪽

1 ③	2 ④	3 ③	4 6	5 ⑤
6 ④	7 ④	8 ①	9 ③	10 ②
11 ③	12 ⑤			

1 $\sqrt[3]{-8}$은 방정식 $x^3=-8$의 근 중에서 실수인 근이므로

$\sqrt[3]{-8}=-2$

또 $\sqrt[4]{(-4)^2}=\sqrt[4]{2^4}$이고, 이는 방정식 $x^4=2^4$의 근 중에서 양의 실수인 근이므로

$\sqrt[4]{(-4)^2}=2$

따라서

$$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{(-4)^2}=-2+2$$
$$=0$$

답 ③

2 $\sqrt[6]{6}\div\sqrt{\sqrt[3]{3}}\times(\sqrt[6]{2})^5$

$$=\frac{\sqrt[6]{2\times3}}{\sqrt[2\times3]{3}}\times\sqrt[6]{2^5}$$
$$=\frac{\sqrt[6]{2\times3}}{\sqrt[6]{3}}\times\sqrt[6]{2^5}$$
$$=\sqrt[6]{\frac{2\times3}{3}}\times\sqrt[6]{2^5}$$
$$=\sqrt[6]{2}\times\sqrt[6]{2^5}$$
$$=\sqrt[6]{2\times2^5}$$
$$=\sqrt[6]{2^6}$$
$$=2$$

답 ④

3 $5^{-4}\times\left(\frac{1}{25}\right)^{-5}\div\frac{1}{125^{-2}}$

$$=5^{-4}\times\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-5}\div\frac{1}{(5^3)^{-2}}$$
$$=5^{-4}\times(5^{-2})^{-5}\div(5^{-6})^{-1}$$
$$=5^{-4}\times5^{10}\div5^6$$
$$=5^{-4+10-6}$$
$$=1$$

답 ③

4 $(24\times n^{-3})^{-1}=24^{-1}\times n^3$

$$=\frac{n^3}{24}$$
$$=\frac{n^3}{2^3\times3}$$

그러므로 이 수가 자연수가 되려면 n이 2와 3을 약수로 가져야 한다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.

답 6

5 $\sqrt[4]{8}\div\left\{\sqrt[8]{4}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$

$$=2^{\frac{3}{4}}\div\{4^{\frac{1}{8}}\times(2^{-2})^{\frac{1}{4}}\}$$
$$=2^{\frac{3}{4}}\div(2^{\frac{1}{4}}\times2^{-\frac{1}{2}})$$
$$=2^{\frac{3}{4}}\div2^{\frac{1}{4}+(-\frac{1}{2})}$$
$$=2^{\frac{3}{4}}\div2^{-\frac{1}{4}}$$
$$=2^{\frac{3}{4}-(-\frac{1}{4})}$$
$$=2^1=2$$

답 ⑤

6 $(3^{\sqrt{3}}\div3)^{\sqrt{3}+1}=(3^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}$

$$=3^{(\sqrt{3}-1)\times(\sqrt{3}+1)}$$
$$=3^2=9$$

답 ④

7 $\log_2 x=\frac{1}{3}$에서

$x=2^{\frac{1}{3}}$

또 $\log_x y=2$에서 $y=x^2$이므로

$y=(2^{\frac{1}{3}})^2=2^{\frac{2}{3}}$

따라서

$$xy=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$$
$$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}=2^1=2$$

답 ④

8 $\log_2(\sqrt{2}\times\sqrt[3]{4})+\log_2\frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

$$=\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[3]{4}-\log_2\sqrt[4]{8}$$
$$=\log_2 2^{\frac{1}{2}}+\log_2 2^{\frac{2}{3}}-\log_2 2^{\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\log_2 2+\frac{2}{3}\log_2 2-\frac{3}{4}\log_2 2$$

$=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}$

$=\frac{6+8-9}{12}$

$=\frac{5}{12}$

답 ①

9 $\log_2 \sqrt{3}\times\log_9 16$

$=\log_2 3^{\frac{1}{2}}\times\log_{3^2} 2^4$

$=\frac{1}{2}\log_2 3\times 2\log_3 2$

$=1$

답 ③

10 $2^{\log_4 3}=9^a$이므로 로그의 정의에 의하여

$a=\log_9 2^{\log_4 3}$

$=\log_4 3\times\log_9 2$

$=\frac{\log_3 3}{\log_3 2^2}\times\frac{\log_3 2}{\log_3 3^2}$

$=\frac{1}{4}$

답 ②

다른 풀이

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$을 이용하면

$2^{\log_4 3}=3^{\log_4 2}$

$=3^{\frac{\log_2 2}{\log_2 2^2}}$

$=3^{\frac{1}{2}}$

$=(3^2)^{\frac{1}{4}}$

$=9^{\frac{1}{4}}=9^a$

$9^{\frac{1}{4}-a}=1$이므로

$\frac{1}{4}-a=0$

따라서 $a=\frac{1}{4}$

11 $\log N=-2.5229$

$=-2-0.5229$

$=-2+\{-0.5229+1+(-1)\}$

$=-3+0.4771$

$=\log 10^{-3}+\log 3$

$=\log(3\times10^{-3})$

$\log N-\log(3\times10^{-3})=0$

$\log\frac{N}{3\times10^{-3}}=0$

$\frac{N}{3\times10^{-3}}=1$

$N=3\times10^{-3}$

따라서 $a=3$, $n=-3$이므로

$a+n=0$

답 ③

12 $\log a+\log b=3+\log 2$에서

$\log ab=3+\log 2$

$=\log 10^3+\log 2$

$=\log(2\times10^3)$

$=\log(2^4\times5^3)$

$\log\frac{ab}{2^4\times5^3}=0$

$\frac{ab}{2^4\times5^3}=1$

$ab=2^4\times5^3$

이때 a, b가 자연수이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2^4\times5^3$의 양의 약수의 개수와 같다.

따라서 $(4+1)\times(3+1)=20$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 16~17쪽

1 ⑤	2 ②	3 ②	4 ③	5 ⑤
6 3	7 ④	8 ③	9 ②	10 ①

1 $(\sqrt{3}+1)^5\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}\right)^{-5}$

$=(\sqrt{3}+1)^5\times\{(\sqrt{3}-1)^{-1}\}^{-5}$

$=(\sqrt{3}+1)^5\times(\sqrt{3}-1)^5$

$=\{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)\}^5$

$=\{(\sqrt{3})^2-1^2\}^5$

$=2^5$

$=32$

답 ⑤

2 $\sqrt[3]{2}\times16^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^4)^{\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times2^{4\times\frac{1}{6}}$

$=2^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1=2$

답 ②

3 $a^4=4^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$이므로

$a=(2^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{4}}$

$=2^{\frac{1}{6}}$

따라서

$a\div\sqrt[6]{2^7}=2^{\frac{1}{6}}\div 2^{\frac{7}{6}}$

$=2^{\frac{1}{6}-\frac{7}{6}}$

$=2^{-1}$

$=\frac{1}{2}$

답 ②

4 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{54}$

$=2^{\frac{1}{3}}+(2\times 3^3)^{\frac{1}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{1}{3}}\times 3$

$=2^{\frac{1}{3}}\times(1+3)$

$=2^{\frac{1}{3}}\times 2^2$

$=2^{\frac{1}{3}+2}$

$=2^{\frac{7}{3}}$

따라서 $p+q=3+7=10$

답 ③

5 $\left(2^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)^3$

$=(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})^3$

$=(2^{\frac{4}{3}})^3+(2^{-\frac{1}{3}})^3+3\times 2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=2^{\frac{4}{3}\times 3}+2^{\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3}+3\times 2^{\frac{4}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)}\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=2^4+2^{-1}+3\times 2^1\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=16+\frac{1}{2}+6\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=\frac{33}{2}+6\times(2^{\frac{4}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})$

$=6\times\left(2^{\frac{4}{3}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)+\frac{33}{2}$

따라서 $a=6$, $b=\frac{33}{2}$이므로

$ab=6\times\frac{33}{2}=99$

답 ⑤

참고

$(x+y)^3=x^3+y^3+3xy(x+y)$

6 $\log_x(2x+3)=2$에서

$x^2=2x+3$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x=3$ 또는 $x=-1$

이때 $x>0$이고 $x\neq 1$이므로

$x=3$

답 3

7 $\log_5\sqrt[3]{100}+\frac{1}{3}\log_5\frac{5}{4}$

$=\frac{2}{3}\log_5(2\times 5)+\frac{1}{3}(1-\log_5 2^2)$

$=\frac{2}{3}(\log_5 2+1)+\frac{1}{3}(1-2\log_5 2)$

$=1$

답 ④

8 $\log_2(\sqrt[3]{9}-1)+\log_2(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1)$

$=\log_2\{(\sqrt[3]{9}-1)(\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{9}+1)\}$

$=\log_2[(\sqrt[3]{9}-1)\{(\sqrt[3]{9})^2+\sqrt[3]{9}+1\}]$

$=\log_2\{(\sqrt[3]{9})^3-1^3\}$

$=\log_2 8$

$=\log_2 2^3$

$=3$

답 ③

9 $\log_2 12-\frac{1}{\log_3 2}$

$=\log_2 12-\log_2 3$

$=\log_2\frac{12}{3}$

$=\log_2 2^2$

$=2$

답 ②

10 $\log_{1000}\frac{1}{2}+\log\sqrt[3]{200}$

$=\log_{10^3}\frac{1}{2}+\log 200^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log 10^3}+\frac{1}{3}\log 200$

$=\frac{1}{3}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\log 200$

$=\frac{1}{3}\left(\log\frac{1}{2}+\log 200\right)$

$=\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{2}\times 200\right)$

$=\frac{1}{3}\log 10^2$

$=\frac{2}{3}\log 10$

$=\frac{2}{3}$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 18~19쪽

1 ③	2 ②	3 ②	4 ④	5 ④
6 ④	7 ②	8 500		

1 허수 $1+i$가 정수 k의 n제곱근이므로

$(1+i)^n=k$

한편 n은 2 이상의 자연수이므로

$(1+i)^2=1+2i+i^2$

$=2i$

$(1+i)^3=(1+i)^2(1+i)$

$=2i(1+i)$

$=2i+2i^2$

$=-2+2i$

$=-2(1-i)$

$(1+i)^4=(1+i)^2(1+i)^2$

$=2i\times 2i$

$=4i^2$

$=-4$

따라서 최소의 자연수 n의 값은 4이고, 그때의 정수 k의 값은 -4이므로

$p+q=4+(-4)=0$

답 ③

2 $(a+b)^{-1}=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{a+b}=\frac{1}{2}$

$a+b=2$ …… ㉠

또 $a^{-1}+b^{-1}=-\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{2}$

$\frac{a+b}{ab}=-\frac{1}{2}$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{2}{ab}=-\frac{1}{2}$

$ab=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=2^3-3\times(-4)\times 2=32$

답 ②

참고

$a+b=2$, $ab=-4$이므로 a, b는 방정식 $x^2-2x-4=0$의 근이다.

이 방정식의 근은 $x=1\pm\sqrt{5}$이므로 a, b가 존재한다.

3 이차방정식 $\sqrt[3]{3}x^2-\sqrt[4]{k}x+\sqrt[3]{9}=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-\sqrt[4]{k})^2-4\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{9}$

$=(k^{\frac{1}{4}})^2-4\times 3^{\frac{1}{3}}\times 3^{\frac{2}{3}}$

$=k^{\frac{1}{2}}-4\times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=k^{\frac{1}{2}}-4\times 3$

$=\sqrt{k}-12>0$

이므로

$\sqrt{k}>12$, $k>144$

따라서 자연수 k의 최솟값은 145이다.

답 ②

4 $f(x)=(x\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}}=(x\times x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=(x^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$=x^{\frac{2}{3}}$

이므로

$(f\circ f)(a)=f(f(a))=f(a^{\frac{2}{3}})$

$=(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}$

$=a^{\frac{4}{9}}$

이 값이 자연수이고 $a\,(a>1)$도 자연수이므로 $(f\circ f)(a)$는 $a=2^9$일 때 최솟값을 갖고, 그 값은

$(2^9)^{\frac{4}{9}}=2^4=16$

답 ④

5 $A-B=\{3\}$이므로

$\log_2 ab=3$

$\log_2 a+\log_2 b=3$ ······ ㉠

또 $1\in B$이어야 하므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) $\log_2 a=1$인 경우

㉠에서

$\log_2 b=2$

이때 집합 B의 원소 중 $\log_2 \sqrt{b^3}$의 값은

$$\log_2 \sqrt{b^3}=\frac{3}{2}\log_2 b=\frac{3}{2}\times 2=3$$

즉, 집합 $B=\{2, 1, 3\}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\log_2 \sqrt{b^3}=1$인 경우

$\frac{3}{2}\log_2 b=1$

$\log_2 b=\frac{2}{3}$

이때 ㉠에서

$\log_2 a=\frac{7}{3}$

즉, 집합 $B=\left\{2, \frac{7}{3}, 1\right\}$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서

$$\log_2 \frac{a}{b}=\log_2 a-\log_2 b=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

답 ④

6 $\log_3 \sqrt[3]{24}+\log_3 \frac{\sqrt[6]{81^k}}{2}$

$=\log_3 (2^3\times 3)^{\frac{1}{3}}+\log_3 \frac{\sqrt[6]{3^{4k}}}{2}$

$=\log_3 (2\times 3^{\frac{1}{3}})+\log_3 \frac{3^{\frac{2k}{3}}}{2}$

$=\log_3 2+\log_3 3^{\frac{1}{3}}+\log_3 3^{\frac{2k}{3}}-\log_3 2$

$=\frac{1}{3}+\frac{2k}{3}$

$=\frac{2k+1}{3}$

이 수가 자연수가 되려면 $2k+1$의 값이 3의 배수이어야 한다.

한편 k는 10 이하의 자연수이므로 만족시키는 k의 값은 1, 4, 7, 10이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

7 $\log_a b=\frac{\log_b c}{2}=\frac{\log_c a}{3}$에서 밑을 a로 나타내면

$\log_a b=\frac{\log_a c}{2\log_a b}=\frac{1}{3\log_a c}$

이 식으로부터

$2(\log_a b)^2=\log_a c$ ······ ㉠

$3(\log_a c)^2=2\log_a b$ ······ ㉡

㉠에서 $\log_a c=2(\log_a b)^2$을 ㉡에 대입하면

$3\{2(\log_a b)^2\}^2=2\log_a b$

$6(\log_a b)^4=\log_a b$

이때 $\log_a b\neq 0$이므로

$(\log_a b)^3=\frac{1}{6}$

$\log_a b=6^{-\frac{1}{3}}$

이 값을 ㉠에 대입하면

$$\log_a c=2(\log_a b)^2=2\times(6^{-\frac{1}{3}})^2=2\times 6^{-\frac{2}{3}}$$

따라서

$\log_a b\div\log_a c$

$=6^{-\frac{1}{3}}\div(2\times 6^{-\frac{2}{3}})$

$=\frac{1}{2}\times 6^{-\frac{1}{3}-(-\frac{2}{3})}$

$=\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

답 ②

8 두 점 $(0, \log a)$, $(1, \log b)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{\log b-\log a}{1-0}\times(x-0)+\log a$이므로

$y=\log\frac{b}{a}\times x+\log a$

이 직선이 점 $(2, 3)$을 지나므로 $x=2$, $y=3$을 대입하면

$3=2\log\frac{b}{a}+\log a$

$3=\log\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\times a\right\}$

$\log\frac{b^2}{a}=3$

$\frac{b^2}{a}=10^3$

따라서 $\frac{b^2}{2a}=\frac{10^3}{2}=500$

답 500

Level 3 실력 완성

본문 20쪽

1 ③ 2 11 3 6 4 8

1 $n^2-10n+21=(n-3)(n-7)$

이므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(ⅰ) $(n-3)(n-7)>0$인 경우

$n<3$ 또는 $n>7$

$n^2-10n+21>0$이므로 $n^2-10n+21$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n은 짝수이어야 한다.

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 2, 8, 10이다.

(ⅱ) $(n-3)(n-7)<0$인 경우

$3<n<7$

$n^2-10n+21<0$이므로 $n^2-10n+21$의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 n은 홀수이어야 한다.

그러므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 5이다.

(ⅲ) $(n-3)(n-7)=0$인 경우

$n=3$ 또는 $n=7$

$n^2-10n+21=0$이므로 0의 n제곱근 중 음의 실수가 존재하도록 하는 자연수 n의 값은 없다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 자연수 n의 값은 2, 5, 8, 10이고, 그 합은 25이다.

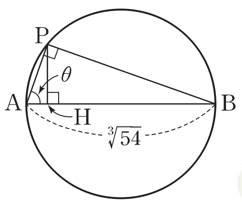
답 ③

2 선분 AB가 원의 지름이므로

$\angle APB=90^\circ$

이때 $\angle PAB=\theta$라 하면

직각삼각형 ABP에서



$$\cos\theta=\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{54}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{(2\times3^3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$=\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3\times2^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3}$$

이때

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

그러므로 삼각형 PAH의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{PH}$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}\cos\theta\times\overline{AP}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{AP}^2\times\cos\theta\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times(2^{\frac{1}{3}})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$=\frac{2^{-1}\times2^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{3}{2}}}{9}$$

$$=\frac{2^{-1+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}}}{9}$$

$$=\frac{2^{\frac{7}{6}}}{9}$$

$$=2^{\frac{7}{6}}\times3^{-2}$$

따라서 $p=6$, $q=7$, $r=-2$이므로

$p+q+r=6+7+(-2)$

$=11$

답 11

3 조건 (나)에서

$$\log_a n\times\log_n(n\times a^2)$$

$$=\log_a n\times\frac{\log_a(n\times a^2)}{\log_a n}$$

$$=\log_a(n\times a^2)$$

$$=\log_a n+\log_a a^2$$

$$=\frac{\log_2 n}{\log_2 a}+2$$

이 값이 자연수이므로 $\dfrac{\log_2 n}{\log_2 a}$은 -1 이상인 정수이어야 한다.

한편 $\log_2 n$은 자연수이므로 조건 (가)에서 $\log_2 a$는 $-\log_2 n$이거나 $\log_2 n$의 양의 약수이어야 한다.

그러므로 $f(n)=7$이면 $\log_2 n$은 양의 약수의 개수가 6인 수이다.

이때 n의 최솟값이 k이고, 양의 약수의 개수가 6인 자연수 중에서 가장 작은 자연수는 $2^2\times3$이므로

$\log_2 k=2^2\times3$

$k=2^{12}$

따라서

$$\log_4 2^{12}=\log_{2^2}2^{12}$$

$$=\frac{12}{2}\log_2 2$$

$$=6$$

답 6

4 집합 $A=\{x\,|\,\log_2 x$는 자연수$\}$에서
$A=\{2, 2^2, 2^3, \cdots\}$
이고, 집합 $B=\{x\,|\,\log_p x$는 자연수$\}$에서
$B=\{p, p^2, p^3, \cdots\}$
이다.
한편 조건 (가)에서 $A\cap B=B$이므로
$B\subset A$
그러므로 어떤 자연수 k에 대하여
$p=2^k$
이고
$B=\{2^k, (2^k)^2, (2^k)^3, \cdots\}$
한편 조건 (나)에서 $a\in A$이고 $2\le a\le 10$인 수는
$2^1, 2^2, 2^3$
이때 k의 값에 따라 나누면 다음과 같다.

(i) $k=1$일 때
$b\in B$이고 $1\le b\le 1000$인 수는
$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^m}{\log_2 2^l}=\frac{m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 9 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 (l, m)의 개수는 7보다 크다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 7보다 크므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k=2$일 때
$b\in B$이고 $1\le b\le 1000$인 수는
$2^2, 2^4, 2^6, 2^8$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^{2m}}{\log_2 2^l}=\frac{2m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 4 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 $(l, 2m)$은
$(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8)$,
$(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8)$,
$(3, 6)$
으로 그 개수는 9이다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 9이므로
조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $k=3$일 때
$b\in B$이고 $1\le b\le 1000$인 수는
$2^3, 2^6, 2^9$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^{3m}}{\log_2 2^l}=\frac{3m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 3 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 $(l, 3m)$은
$(1, 3), (1, 6), (1, 9)$,
$(2, 6)$,
$(3, 3), (3, 6), (3, 9)$
로 그 개수는 7이다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 7이므로
조건을 만족시킨다.

(iv) $k=4$일 때
$b\in B$이고 $1\le b\le 1000$인 수는
$2^4, 2^8$
이때

$$\log_a b=\frac{\log_2 2^{4m}}{\log_2 2^l}=\frac{4m}{l}$$

(l은 3 이하의 자연수, m은 2 이하의 자연수)
이 수가 자연수가 되는 순서쌍 $(l, 4m)$은
$(1, 4), (1, 8)$,
$(2, 4), (2, 8)$
로 그 개수는 4이다.
이때 순서쌍 (a, b)의 개수도 4이므로
조건을 만족시키지 않는다.

(v) $k\ge 5$일 때
$b\in B$이고 $1\le b\le 1000$인 수는
1개 이하이다.
그러므로 위와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b)의 개수가 7이 될 수 없다.

(i)~(v)에서
$p=2^3=8$

답 8