Transforming Of the Past
(T. O. P)

"과거의 변형"이라는 뜻으로, 그간 공개 되었던 수능, 평가원 모의고사의 문제들의 변형 문제집입니다.

- 대표 저자 -
신희철 (인하대학교 수학과)

- 이 책을 검토해 주신 분들 -
구형모 (고려대학교 보건과학부)
성종하 (연세대학교 도시공학과)
허재원 (인하대학교 수학과)
김도현 (Orbis Optimus ID : 1992kimdh)
최광훈 (인하대학교 수학과)

Special Thanks to
JJH, HSH, JYE

대학수학능력시험 - 수리영역의 출제방식에 대하여

수리영역은 2, 3, 4점 문항들로 구성되어 있습니다.

1) 2점 문항
기본 개념서에서 볼 수 있는 문제들입니다. 보통 수리영역 1, 2, 3번을 담당합니다.

2) 3점 문항
기본 개념서 및 시중 문제집에서 흔히 볼 수 있는 문제들입니다. 간혹 좋은 소재로 만들어지긴 하나, 난이도가 많이 높지는 않습니다.

3) 4점 문항
수리영역의 등급을 좌우하는 문항들로써, 수험생 개인의 우열을 가리는 문제들입니다. 중위권 이상의 수험생은 4점 문항을 모두 맞겠단 목표로 공부하여야 합니다.

여기서 가장 중요한 4점 문항의 출제 방식을 소개하겠습니다. 아래 예시를 참고합시다.

예시1) 2011 수능 (가)형 24번 문항

> 최고차항의 계수가 1이고, $f(0)=3$, $f'(3)<0$인 사차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 집합 S를
>
> $S=\{\, a \mid$ 함수 $|f(x)-t|$가 $x=a$에서 <u>미분가능하지 않다.</u>$\}$
>
> 라 하고, 집합 S의 원소의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=3$과 $t=19$에서만 불연속일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

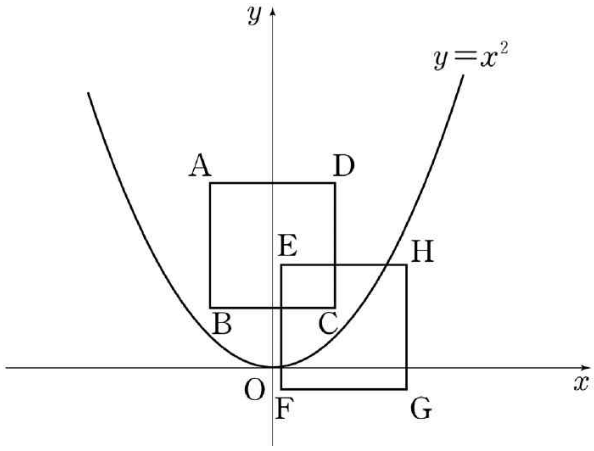
2010 6월 모의고사 (가)형 24번 문항

> 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\dfrac{f'(5)}{f'(3)}$의 값을 구하시오. [4점]
>
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖는다.
> (나) 함수 $|f(x)-f(1)|$은 오직 $x=a\,(a>2)$에서만 <u>미분가능하지 않다.</u>

두 문제 모두 소재가 똑같아서 재출제된 문항은 정답률이 높지 않을까 싶지만, 두 문항의 정답률은 각각 약 4%, 15%로 오히려 재출제된 문항의 정답률이 낮았습니다.

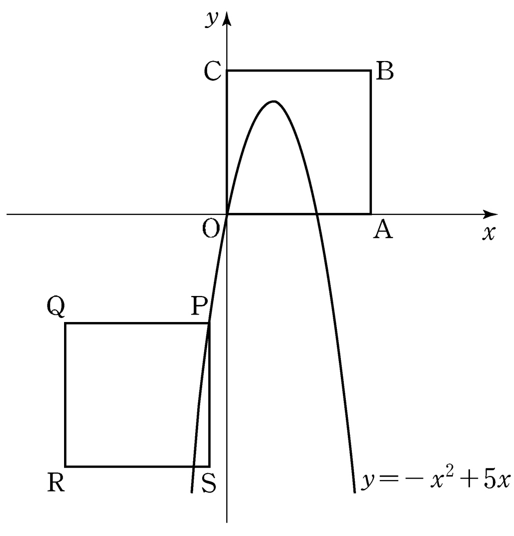
예시2) 2012 6월 모의고사 (나)형 21번 문항

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는 (0, 1)이고, 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점은 곡선 $y=x^2$ 위에 있다. 두 정사각형의 내부의 공통부분의 넓이의 최댓값은? [4점]



2008 6월 모의고사 (가)형 25번 문항

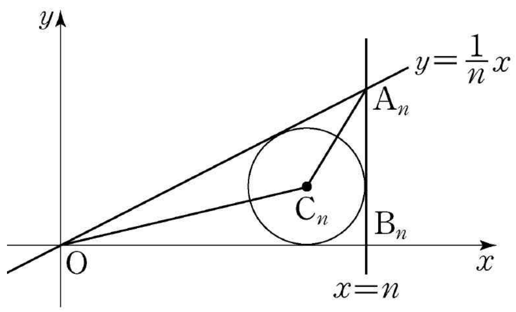
그림과 같이 좌표평면 위에 네 점 O(0, 0), A(8, 0), B(8, 8), C(0, 8)을 꼭지점으로 하는 정사각형 OABC와 한 변의 길이가 8이고 네 변이 좌표축과 평행한 정사각형 PQRS가 있다. 점 P가 점 (−1, −6)에서 출발하여 포물선 $y=-x^2+5x$ 를 따라 움직이도록 정사각형 PQRS를 평행이동시킨다. 평행이동시킨 정사각형과 정사각형 OABC가 겹치는 부분의 넓이의 최대값을 $\frac{q}{p}$라 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



예시 2) 역시 과거 평가원 모의고사 문항의 소재를 이용하여 재출제한 사례입니다. 두 문항 역시 정답률이 약 40%대로 낮은 편에 속했습니다.

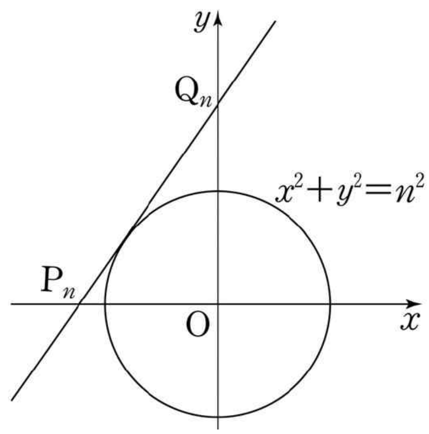
예시 3) 2011 수능 (나)형 14번 문항

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 A_n, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{B}_n$ 에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}\mathrm{C}_n$의 넓이를 S_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은? [4점]



2011 9월 모의고사 (나)형 8번 문항

좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은? [4점]



예시3)과 같이 9월 모의고사 문항의 소재가 그 해 수능에 이용되어 재출제 되는 경우도 있습니다. 두 문항의 정답률은 각각 약 50%, 80%로 재출제된 문항의 정답률이 더 낮았습니다.

이렇게, 위와 같이 수능은 과거 수능이나 평가원에 나왔던 소재가 그대로 이용 및 응용되어 재출제되는 경우가 흔합니다. 그래서 수능을 치룬 선배들이 “수능은 기출문제가 제일 중요하다” 라고 말합니다. 이 책은 수능의 출제방식과 똑같이 과거 수능 기출문제를 변형한 문제로 구성되어 있습니다.

변형 예시1) 2009 수능 (나)형 21번 문항

> $1<a<b$인 두 실수 a, b에 대하여
>
> $$\frac{3a}{\log_a b}=\frac{b}{2\log_b a}=\frac{3a+b}{3}$$
>
> 가 성립할 때, $10\log_a b$의 값을 구하시오. [3점]

기출 변형 문항 (T.O.P 수1+미적분과 통계 2단원 23번 문항)

> 함수 $y=\log_2 x$위의 두 점 $\mathrm{A}(a,\ \log_2 a)$, $\mathrm{B}(b,\ \log_2 b)$에 대하여
>
> $$\frac{\log_2 a}{a}=\frac{\log_2 b}{b}=\frac{3}{a+b}$$
>
> 이 성립하고, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 C, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라 하면 사각형 ABDC의 넓이가 3이다. 이 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. [4점] (단, $1<a<b$ 이다.)

수능에 출제되었던 3점 문항을 응용하여 4점 수준의 문항을 제작하여 구성하였습니다. 위와 같이 4점으로 사용될 수 있는 가치를 갖고 있는 3점 문항을 응용하여 4점짜리로 재구성한 문항이 이 책에 상당수 존재합니다.

변형 예시2) 2011 수능 (나)형 30번 문항

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

를 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{20} a_{2k} = p$라 할 때, 10^p의 값을 구하시오. [4점]

기출 변형 문항 (T.O.P 7단원 16번 문항)

수열 $\{a_n\}$가 자연수 n에 대하여

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = 2 \times {}_n\mathrm{H}_3$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

위 문항과 기출 문항은 서로 다른 문항인 듯 보이지만 풀이과정은 흡사합니다.

이런 방식으로 출제된 기출 문항은 얼핏보면 서로 상관이 없는 것 같지만, 풀고 나서 생각하면 알맹이는 똑같습니다. 우리는 이것을 보는 눈을 길러야 합니다. 처음 보는 문항과 예전에 풀어봤던 문항을 푸는 것은 분명한 차이가 있으므로 우리가 정복해야 할 이번해 수능 문제를 “예전에 봤던 것 같은 느낌”이 들도록 우리는 과거 수능 기출문제를 곱씹어 공부해야 합니다. 이 책은 “수능 기출문제를 곱씹는” 과정에 특화 되있습니다.

Transforming.Of.the Past (T.O.P)에 대하여

1) 수능, 평가원, 기출문제의 변형

이 책의 분량의 약 90%는 수능, 평가원의 기출문제들을 변형시켜 구성했습니다. 수능 문제 상당수가 평가원이나 이전 수능문제에서 변형시켜 나온다는 점에서 이 책은 당신이 올바른 수능 공부를 하는데 도움이 될 것입니다.

2) 창의적인 자작문제 수록

어떤 문제집에서도 볼 수 없는 창의적인 자작문제를 수록했습니다. 저자만의 참신함이 돋보일 것입니다. 다가올 신유형에 대비합니다.

3) 합당한 문제 난이도

문제를 억지스럽게 만들거나, 어렵게 구성하려 노력하지 않았습니다. 만약 당신이 어떠한 문제를 못푼다면, 그 문제가 어려운게 아니라 당신의 실력이 부족한 것입니다.

4) 적당한 분량 (수1+미적분과 통계 205p 수2+기하와벡터 114p)

분량이 너무 많아 구매하고 안보는 책이 많죠? 이 책은 적당한 분량으로 독자가 책을 다 보기 쉽도록 구성했습니다. 이 책은 당신의 실력이 오르는데 쓰여지는 드문 책들 중 한 권이 될 수 있을 것입니다.

5) Q & A?

이 책의 해설지를 보고도 이해가 안되는 문항은 메일 ivorkega@naver.com 이나 포만한의 수리연구소 http://pnmath.com 게시판 또는 오르비 아이디 fin9900으로 질문을 주시면 정성껏 답변해드립니다.

아무쪼록, 수험생 여러분의 건투를 빕니다.

목　　차

수학 Ⅰ

미적분과 통계

Slow and steady wins the race.
- 천천히, 꾸준히 해야 승리한다.

Put off for one day and ten days will pass.
- 오늘 할 일을 내일로 미루지 마라.

The beginning is half of the whole.
- 시작이 반이다.

1단원 : 행렬과 그래프

1단원에서 자주 출제되는 출제 Point 몇 개를 간단히 짚고 넘어가겠습니다.

1) $AB=BA$

행렬의 곱셈은 일반적으로 $AB=BA$가 성립하지 않습니다.
$(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2$이듯이 행렬을 곱할 때에 행렬들의 순서를 지켜야하는 불편함이 있죠. 하지만 $AB=BA$라면..? 행렬의 곱셈이 간단해집니다. 그래서 이것은 수능, 평가원에 자주 출제되는 요소입니다. 특히 ㄱ,ㄴ,ㄷ 문제에서 많이 나옵니다.

2) $AA^{-1}=A^{-1}A=E$

이것을 본 여러분의 반응은 "당연한것을 왜써놨지...?" 일 것입니다. 하지만, 실제로 많은 학생들의 이 개념 때문에 문제를 못푸는것을 봤습니다. 실제로 2005학년도 9월 평가원 모의고사 기출문제에서 이런 조건이 나온적이 있습니다.

$$AB+A=E$$

그리고, 묻는 것은 $AB=BA$가 성립하는지를 물었는데, 많은 학생들이 틀렸습니다. 실제로 이것의 풀이는, $A(B+E)=E$이므로, A의 역행렬은 $B+E$입니다. 따라서 ②에 의해 $(B+E)A=E$이고, $A(B+E)=(B+E)A$이므로 $AB=BA$입니다.

3) 행렬 A의 역행렬의 존재성

주로 행렬 A의 성분을 모두 주고 $ad-bc$를 이용하여 판단하거나 $A(A-E)=E$ 같은 수식을 주어 역행렬이 존재하는지, 존재한다면 무엇인지 판단케 합니다.

4) $A^n=E$에서 n의 값을 구하시오.

행렬의 거듭제곱에서 규칙을 발견해야 하는 유형에서 자주 쓰이는 수법입니다. 여기서 말하는 n을 구하는것이 관건이죠. 보통 $A^3=-E$가 나오도록 숫자를 설정해서, 결국 $A^6=E$으로 풀이를 전개하는 방향인 문제가 많습니다.

5) 행렬의 거듭 제곱의 규칙

다음 공식은 암기를 하기보단, 자신이 규칙을 알아낼 수 있으면 됩니다. 자연수 n과 실수인 모든 미지수에 대하여,

$$\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&an\\0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\an&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\0&b^n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a&b\\0&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}b\\0&a^n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&0\\b&a\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&0\\na^{n-1}b&a^n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a&b\\0&1\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}a^n&b\sum_{k=1}^{n}a^{k-1}\\0&1\end{pmatrix}$$

※) 이 공식들을 여러분이 한번 유도해 보세요.

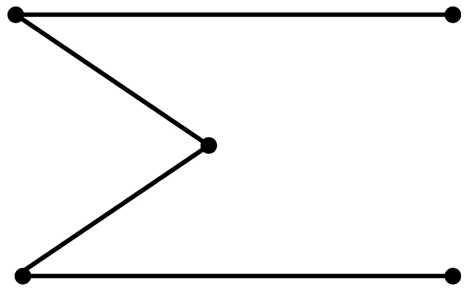
3점 문항

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a-2 & 8 \\ 2 & a+2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 $A+B$의 역행렬이 존재하지 않을 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix} a+1 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$가 $A^2=E$를 만족할 때, a의 값을 구하시오. [3점] (단, E는 단위행렬이다.)

3. 실수 a, b에 대하여 이차방정식 $x^2-ax+7a=0$의 두 근을 α, β라고 하자. 행렬 $A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \beta \end{pmatrix}$에 대하여 A^2의 모든 성분의 합이 0일 때, 가능한 모든 a값의 합을 구하시오. [3점]

4. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결관계를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]



5. 행렬 $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$에 대하여, $AB=B+E$를 만족하는 행렬 B에 대하여 행렬 B의 모든 성분의 합은? [3점] (단, E는 단위행렬이다.)

6. x, y에 대한 연립방정식

$$\begin{cases} ax+3y=0 \\ 5x+(a-2)y=0 \end{cases}$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 a값의 합을 구하시오. [3점]

7. 이차정사각행렬 A가 $A^2=2A$와 $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}$를 만족시킬 때, 행렬 A^2의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

8. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^{-1}-3A=O,\ B^2+B=O$$

를 만족시킬 때, 행렬 A^4B^{10}의 모든 성분의 합은? [3점] (단, O는 영행렬이다.)

① $-\frac{2}{9}$　② $-\frac{1}{9}$　③ 0　④ $\frac{1}{9}$　⑤ $\frac{2}{9}$

9. 모든 성분의 합이 15인 이차정사각행렬 A가 $A^2-2A=E$를 만족시킬 때, 행렬 A의 역행렬의 모든 성분의 합을 구하시오. (단, E는 단위행렬이다.) [3점]

4점 문항

10. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A+B=E,\ AB=2A$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

〈보　기〉

ㄱ. $A=2E$

ㄴ. $A^2+A=O$

ㄷ. B의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 이차정사각행렬 A의 $(i,\ j)$ 성분 a_{ij} 가

$$a_{ij}=(\text{이차방정식 } ix^2+jx+i-j=0\text{의 실근의 개수})$$

이다. 행렬 A^{64}의 $(1,\ 2)$ 성분이 k일 때, $\log_2 k$의 값을 구하시오. [4점]