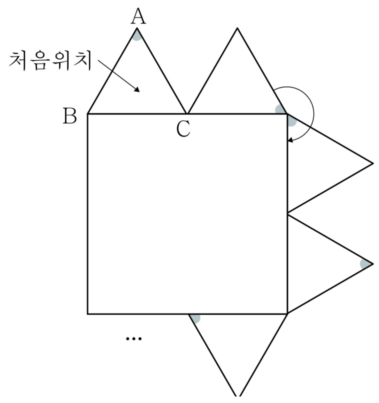
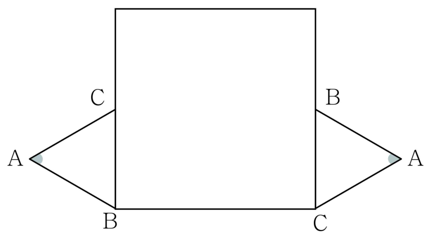
고지우의 난문현답

제 1 회

1. 2007년 6월 평가원
2. 2008년 10월 교육청
3. 2017년 9월 평가원
4. 2011년 9월 평가원
5. 2007년 7월 교육
6. 2014년 경찰대
7. 2015년 9월 교육청
8. 2015년 7월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2009년 경찰대

1. 한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]j과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC 가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자.
예를 들어 $n=1$일 때, [그림2] 와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?





① 8　② 10　③ 12　④ 14　⑤ 16

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$에 대하여 [보기]에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

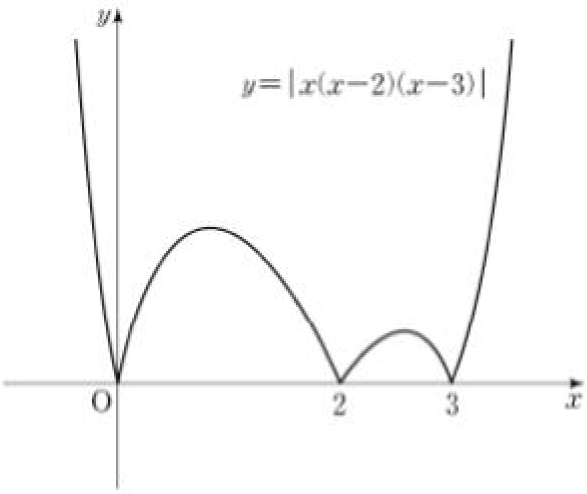
ㄱ. $f(x)=x^2$이면 $\lim_{h\to0}|f(2+h)-f(2-h)|=0$이다.
ㄴ. $f(x)=[x]$이면 $\lim_{h\to0}|f(2+h)-f(2-h)|=1$이다,
ㄷ. $\lim_{h\to0}|f(2+h)-f(2-h)|=0$이면 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은?

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
> (나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

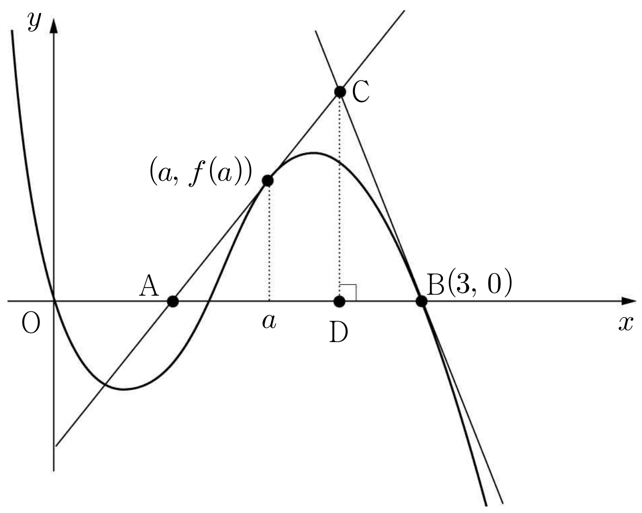
① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



4. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2\,(a>0)$과 실수 t에 대하여 $x \le t$에서 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하도록 하는 a의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 그림과 같이 삼차함수 $f(x)=-x^3+4x^2-3x$의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x축과 만나는 점을 A, 점 B$(3, 0)$에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:1$일 때, a의 값들의 곱은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

6. 학생 110명이 국어, 영어, 수학 시험을 보는데, 국어를 합격한 사람은 92명, 영어를 합격한 사람은 75명, 수학을 합격한 사람은 63명이고, 국어와 영어를 모두 합격한 사람은 65명, 국어와 수학을 모두 합격한 사람은 54명, 영어와 수학을 모두 합격한 사람은 48명이다. 세 과목 모두 합격한 학생 수의 최솟값은?

① 36 ② 37 ③ 38
④ 39 ⑤ 40

7. 두 실수 x, y에 대하여

$$xy>0,\ x+y=3$$

일 때, $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$의 최솟값은?

① 1 ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{5}{3}$

④ 2 ⑤ $\dfrac{7}{3}$

8. 검은 바둑돌 ● 과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타낼 수 있는 유형은 다음과 같이 4가지이다.

	●●	●○	○●	○○
	< A형 >	< B형 >	< C형 >	< D형 >

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 아래과 같이 5이다.

●●○○●●
○●●●○○
○○●●●○
●●●○○●
●○○●●●

10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오. (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

9. A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오.

10. 10보다 큰 자연수 n에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$의 두 부분집합 X와 Y를 택할 때, $n(X \cap Y) = 1$인 경우의 수는? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수)

① $\sum_{k=1}^{n} {}_{n}C_{k} 2^{n-k}$

② $\sum_{k=1}^{n} {}_{n}C_{k} 2^{n-k-1}$

③ $\sum_{k=1}^{n} n \cdot {}_{n}C_{k} 2^{n-k}$

④ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n}C_{k} 2^{n-k-1}$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} k \cdot {}_{n}C_{k} 2^{n-k}$

추가 과제

1. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 3,\ a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n+2}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty} na_n$의 값을 구하여라.

2. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+2}-4}{a_n}$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2
④ 4　　⑤ 8

3. $0<x<4$일 때, 함수 $f(x)=[x^2-4x+2]$가 불연속이 되는 모든 x의 값의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 4　　② 8　　③ 12
④ 16　　⑤ 18

4. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$가 있다.

(가) $-1 \le x \le 1$일 때,	$f(x)=3x^2-1$
(나) 모든 실수 x에 대하여	$f(1-x)=f(1+x)$
(다) 모든 실수 x에 대하여	$f(-x)=f(x)$

이때, $0 \le x \le 6$에서 함수 $y=[f(x)]$가 불연속이 되는 x의 값의 개수를 구하여라.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

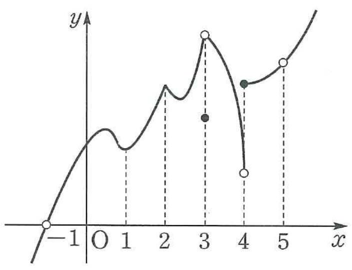
5. 다음 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는?

① $f(x)=3$　　② $f(x)=|x|^3$

③ $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$　　④ $f(x)=x+|x|$

⑤ $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & (x\ge 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}$

6. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 구간 $(-1,\ 5)$에서 함수 $f(x)$에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?



① 함수 $f(x)$가 불연속인 점은 2개다.
② 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 3개다.
③ $f'(x)=0$인 점은 2개다.
④ $f'(0)>0$이다.
⑤ $\lim_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재한다.

7. 함수 $f(x)=[x]\cdot(x^2+ax+b)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, 상수 a,b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하여라.
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

8. 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=2(x^2+2)$가 한 점에서 접할 때, 상수 a의 값은?

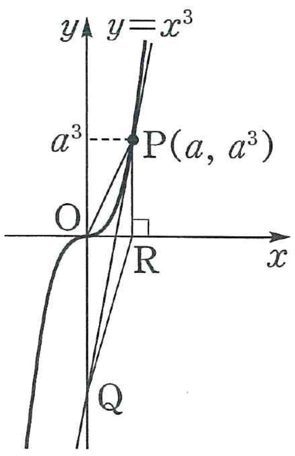
① -7　　② -5　　③ -3
④ 3　　⑤ 5

9. 두 곡선 $f(x)=x^3$, $g(x)=2ax^2-bx$가 점 $(1,\ 1)$에서 만나고, 이 점에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{5}{3}$

④ -1 ⑤ $-\frac{1}{3}$

10. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$ 에서의 접선과 y축이 만나는 점을 Q, x축에 내린 수선의 발을 R라 할 때, 삼각형 OPQ 와 삼각형 PQR 의 넓이의 비는? (단, $a>0$이고, O는 원점이다.)



① 2 : 1 ② 5 : 2 ③ 3 : 1

④ 3 : 2 ⑤ 4 : 3

11. 지우네 반 학생 35명 중에서 영어를 좋아하는 학생은 21명, 수학을 좋아하는 학생은 27명이다. 이때 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

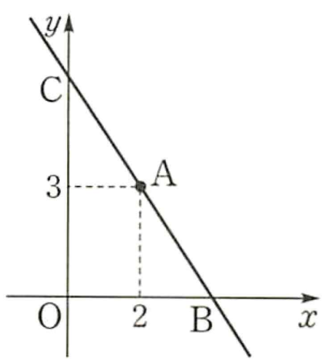
12. 두 집합 X, Y에 대하여 연산 $\triangle$를

$X\triangle Y=(X-Y)\cup(Y-X)$

로 약속할 때, 세 집합 A, B, C가 $n(A\cup B\cup C)=65$ $n(A\triangle B)=36$, $n(B\triangle C)=38$, $n(C\triangle A)=32$ 를 만족시킨다. 이 때 $n(A\cap B\cap C)$ 를 구하여라.

13. 양수 x, y에 대하여 $\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)$은 $xy=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. 이때 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라.

14. 아래 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, 삼각형 OBC의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, $a>0$, $b>0$이다.)

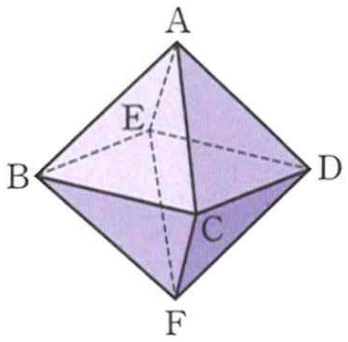


15. 두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여
$a\in A$, $b\in A$이고 $a<b$이면 $f(a)\le f(b)$를 만족시키는 함수
$f:A\rightarrow B$ 중에서 $f(1)f(4)=12$를 만족시키는 함수의 개수는?

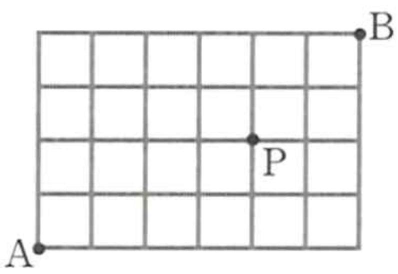
① 60 ② 65 ③ 70
④ 75 ⑤ 80

16. 다항식 $(a+b+c)^5$의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

17. 아래 그림과 같은 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 F에 도착하는 방법의 수를 구하여라. (단, 한 번 지나간 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.)



18. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



19. 원소가 6개인 집합을 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

20. 승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라. (단, 새로 타는 승객은 없다.)

21. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty} na_n = \frac{1}{2}$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2 a_n}$의 값을 구하여라.

22. 수열 $\{a_n\}$이 양의 무한대로 발산하고 $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = -2$일 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + b_n}{a_n - 2b_n}$의 값을 구하여라.

23. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n + a_{n+1} = n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{n+2}$의 값은?

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

24. 첫째항이 9인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1},\ \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{k+1} - a_k} = 2\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.

25. 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)-3xy$를 만족시키고 $f'(0)=-2$일 때, $f'(x)$를 구하면?

① $f'(x)=-2$ ② $f'(x)=-3x-2$
③ $f'(x)=2x-2$ ④ $f'(x)=x^2-2$
⑤ $f'(x)=-x^2-2$

26. 미분가능한 함수 $f(x)$가 임의의 실수 x, y에 대하여

$$f(x+y)=f(x)+f(y)-xy$$

를 만족시키고 $f'(1)=3$일 때, $f(-2)$의 값은?

① -15 ② -10 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

27. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x+3)=f(x),\ \int_1^4 f(x)dx=2$$

를 만족시킬 때, 정적분 $\int_1^{13} f(x)dx$의 값을 구하면?

① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

28. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$를 만족시킬 때, 다음 중 정적분 $\int_1^2 f(x)dx$와 그 값이 같은 것은?

① $\int_{2015}^{2016} f(x)dx$ ② $-\int_{2015}^{2016} f(x)dx$
③ $\int_{2016}^{2017} f(x)dx$ ④ $-\int_{2016}^{2017} f(x)dx$
⑤ $\int_{2017}^{2018} f(x)dx$

29. 함수 $f(x)=x+2$에 대하여

$$\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-2}^{2}f(x)dx\right)^2$$

일 때, 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{3}$　　② $\frac{2}{3}$　　③ $\frac{5}{4}$
④ $\frac{4}{3}$　　⑤ $\frac{3}{2}$

30. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3,\ \int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$$

가 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

31. 다음 중 정의역이 $\{x\,|\,-2\le x<1\}$인 함수 $y=x[x]$의 치역의 원소가 아닌 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① 0　　② 1　　③ 2
④ 3　　⑤ 4

32. 실수 전체의 집합의 부분집합A에 대하여 함수 f_A를

$$f_A(x)=\begin{cases}2 & (x\in A)\\ 1 & (x\notin A)\end{cases}$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]

ㄱ. 집합 A에 관계없이 함수 f_A의 치역은 $\{1,\ 2\}$이다.
ㄴ. $f_{A^c}(x)=3-f_A(x)$
ㄷ. $f_{A\cup B}(x)=f_A(x)+f_B(x)$

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ　　⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

33. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n \ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

으로 정의되고 $a_3=10$, $a_{10}=24$일 때, a_{15}의 값은?

① 29 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 35

34. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=50$, $a_{10}=23$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$의 값은? 34)

① 196 ② 234 ③ 478
④ 576 ⑤ 689

35. 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열할 때, C와 D가 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

① 60 ② 80 ③ 120
④ 200 ⑤ 300

36. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하여라.

(가) $f(3)$의 값은 홀수이다.
(나) $x<3$이면 $f(x)>f(3)$이다.
(다) $x>3$이면 $f(x)<f(3)$이다.

37. $\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$ 의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n의 최댓값을 구하여라.

38. $(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x의 계수는?

① 11 ② 22 ③ 33
④ 44 ⑤ 55

39. 빨간 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 집어넣는 것을 1회 시행이라 하자. 빨간 공이 나오면 1점, 노란 공이 나오면 2점을 얻을 때, 5회의 시행에서 7점을 얻을 확률은?

① ${}_5\mathrm{C}_1\left(\dfrac{3}{7}\right)\left(\dfrac{4}{7}\right)^4$ ② ${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{3}{7}\right)^2\left(\dfrac{4}{7}\right)^3$ ③ ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{3}{7}\right)^3\left(\dfrac{4}{7}\right)^2$
④ ${}_5\mathrm{C}_4\left(\dfrac{3}{7}\right)^4\left(\dfrac{4}{7}\right)$ ⑤ ${}_5\mathrm{C}_5\left(\dfrac{4}{7}\right)^5$

40. 3부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8개의 공이 들어있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 소수가 적힌 공이면 동전을 3번, 짝수가 적힌 공이면 동전을 4번 던진다. 이때 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구하여라.

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ①
2. ②
3. ②
4. ①
5. ⑤
6. ④
7. ②
8. 45
9. 14
10. ⑤

[추가 과제 정답]

1) **정답** 2

$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$에서 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$

$\therefore \dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$ • 30%

따라서 수열 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{3}$, 공차가 $\dfrac{1}{2}$인 등차수열이므로

$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{3}+(n-1)\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3n-1}{6}$

$\therefore a_n=\dfrac{6}{3n-1}$ • 50%

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} na_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n}{3n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{3-\dfrac{1}{n}}=2$ • 20%

2) **정답** ④

$a_{n+1}=a_n+2^n$의 양변에 n 대신 $1,2,3,\cdots,n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$\begin{aligned} a_2&=a_1+2^1\\ a_3&=a_2+2^2\\ a_4&=a_3+2^3\\ &\vdots\\ +)\ a_n&=a_{n-1}+2^{n-1} \end{aligned}$$

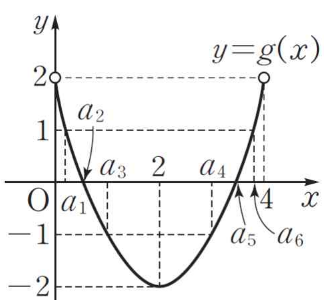
$$\begin{aligned} a_n&=a_1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}\\ &=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-4}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+2}-4}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\dfrac{4}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2^n}}=4$$

3) **정답** ③

$g(x)=x^2-4x+2$라 하면

$g(x)=(x-2)^2-2$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

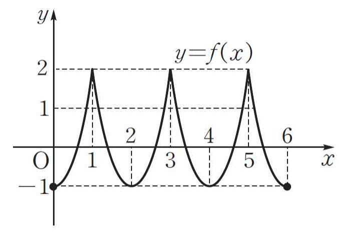


$g(x)=-1,\ 0,\ 1$을 만족시키는 x에서 $f(x)$가 불연속이므로 이때 x의 값을 차례대로 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,a_6\,(a_1<a_2<\cdots<a_6)$이라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$$\begin{aligned} &a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6\\ &=(a_1+a_6)+(a_2+a_5)+(a_3+a_4)\\ &=4+4+4=12 \end{aligned}$$

4) **정답** 15

함수 $y=f(x)$의 그래프는 조건 (나)에서 $x=1$에 대하여 대칭이고, 조건 (다)에서 y축에 대하여 대칭이므로 $0\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



이때 $f(x)=0,\ 1,\ 2$를 만족시키는 x에서 $y=[f(x)]$가 불연속이다. $f(x)=0$, $f(x)=1$을 만족시키는 x의 값은 각각 6개, $f(x)=2$를 만족시키는 x의 값은 3개이므로 구하는 x의 값의 개수는 15이다.

5) **정답** ④

① $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=3$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$f'(0)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{3-3}{h}=0$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

② $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned} f'(0)&=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|^3-0}{h}\\ &=\lim_{h\to0}\frac{h^2\cdot|h|}{h}=\lim_{h\to0}h|h|=0 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

③ $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{h+|h|-0}{h}\\ &=\lim_{h\to0+}\frac{h+h}{h}=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{h+|h|-0}{h}\\ &=\lim_{h\to0-}\frac{h-h}{h}=0 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=1$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0+}\frac{(h+1)^2-1}{h}\\ &=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+2)=2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to0-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}&=\lim_{h\to0-}\frac{(2h+1)-1}{h}\\ &=\lim_{h\to0-}\frac{2h}{h}=2 \end{aligned}$$

이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

6) **정답** ③

① 함수 $f(x)$는 $x=3$, $x=4$에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개다.

② 함수 $f(x)$가 미분가능하지 않은 점은 $x=2$, $x=3$, $x=4$일 때의 3개다.

③ $f'(x)=0$인 점은 구간 $(0,\ 2)$에서 2개 존재하고, 구간 $(2,\ 3)$에서 1개 존재하므로 모두 3개다.

④ $x=0$에서의 접선의 기울기는 양수이므로 $f'(0)>0$이다.

⑤ $\lim\limits_{x\to3+}f(x)=\lim\limits_{x\to3-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to3}f(x)$의 값이 존재한다.

7) **정답** 5

함수 $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+b & (1\le x<2)\\ 0 & (0\le x<1)\end{cases}$이 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $f(1)=\lim\limits_{x\to1}f(x)$에서

$1+a+b=0\qquad \therefore a+b=-1$ ……㉠

또, $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to0+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\\ &=\lim_{h\to0+}\frac{(1+h)^2+a(1+h)+b-(1+a+b)}{h}\\ &=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+(a+2)h}{h}=\lim_{h\to0+}(h+a+2)=a+2 \end{aligned}$$

$$\lim_{h\to0-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{0-0}{h}=0$$

에서 $a+2=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore a^2+b^2=5$

8) **정답** ①

$f(x)=x^3+ax,\ g(x)=2x^2+4$로 놓으면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=4x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^3+at=2t^2+4$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $3t^2+a=4t$

$\therefore a=4t-3t^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$t^3-t^2+2=0, \quad (t+1)(t^2-2t+2)=0$

$\therefore t=-1 \ (\because t^2-2t+2>0)$

$t=-1$을 ㉡에 대입하면 $a=-7$

9) **정답** ①

두 곡선 $f(x)=x^3,\ g(x)=2ax^2-bx$가 모두 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $f(1)=g(1)$에서 $\quad 1=2a-b$ …… ㉠

또 $f'(x)=3x^2,\ g'(x)=4ax-b$이고, 점 $(1,\ 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(x)g'(x)=-1$에서

$$3(4a-b)=-1 \quad \therefore 4a-b=-\frac{1}{3} \ \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{2}{3},\ b=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore a+b=-3$

10) **정답** ①

$f(x)=x^3$으로 놓으면 $f'(x)=3x^2$

$\therefore f'(a)=3a^2$

따라서 점 $\mathrm{P}(a,\ a^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a) \quad \therefore y=3a^2x-2a^3$

이때 점 Q의 좌표는 $(0,\ -2a^3)$이므로

$\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 2a^3\cdot a=a^4$

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\cdot a^3\cdot a=\dfrac{1}{2}a^4$

$\therefore \triangle\mathrm{OPQ} : \triangle\mathrm{PQR}=a^4 : \dfrac{1}{2}a^4=2:1$

11) [정답] 최댓값 : 21, 최솟값 : 13

영지네 반 학생 전체의 집합을 U, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 A, 수학을 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면

$n(U)=35,\ n(A)=21,\ n(B)=27$

영어와 수학을 모두 좋아하는 학생의 집합은 $A\cap B$이므로

$n(A\cap B)$의 최댓값은 M, 최솟값은 m이라 하면 $A\subset B$일 때,

$n(A\cap B)$가 최대이므로 $\quad M=21$

또 $A\cup B=U$일 때, $n(A\cap B)$가 최소이므로

$21+27-m=35 \quad \therefore m=13$

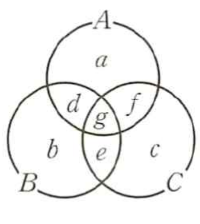
12) [정답] 12

오른쪽 그림과 같이 벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g$로 나타내면

$n(A\cup B\cup C)=65,\ n(A\triangle B)=36$

$n(B\triangle C)=38,\ \ n(C\triangle A)=32$

이므로



$a+b+c+d+e+f+g=65$ …… ㉠

$a+f+b+e=36$ …… ㉡

$b+d+c+f=38$ …… ㉢

$a+d+c+e=32$ …… ㉣

㉡ + ㉢ + ㉣ 을 하면

$2(a+b+c+d+e+f)=106$

$\therefore a+b+c+d+e+f=53$ …… ㉤

㉠ − ㉤ 을 하면 $\quad g=12$

$\therefore n(A\cap B\cap C)=12$

13) [정답] 22

$x>0,\ y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(x+\frac{2}{y}\right)\left(y+\frac{8}{x}\right)=xy+8+2+\frac{16}{xy}$$

$$\geq 10+2\sqrt{xy\cdot\frac{16}{xy}}$$

$$=10+2\cdot 4=18$$

등호는 $xy=\dfrac{16}{xy}$일 때 성립하므로 $(xy)^2=16$에서

$xy=4 \ (\because x>0,\ y>0)$

따라서 $a=4,\ b=18$이므로 $a+b=22$

14) [정답] 12

두 점 B, C의 좌표는 각각$(a,\ 0),\ (0,\ b)$이므로

$\triangle\mathrm{OBC}$의 넓이를 S라 하면

$S=\dfrac{1}{2}ab \quad \cdots$ ㉠

또 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$이 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$

$a>0,\ b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}\geq 2\sqrt{\dfrac{2}{a}\cdot\dfrac{3}{b}}=2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}$

그런데 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{b}=1$이므로

$1\geq 2\sqrt{\dfrac{6}{ab}}$ (단, 등호는 $3a=2b$일 때 성립)

양변을 제곱하면 $1\geq 4\cdot\dfrac{6}{ab}$

$\therefore ab\geq 24 \quad \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $S=\dfrac{1}{2}ab\geq\dfrac{1}{2}\cdot 24=12$

따라서 $\triangle\mathrm{OBC}$의 넓이의 최솟값은 12이다.

15) **정답** ④

(ⅰ) $f(1)=2,\ f(4)=6$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

2 또는 3 또는 4 또는 5 또는 6

이고, $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)$이어야 하므로

2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

6 또는 7

이고, $f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이어야 하므로 6, 7의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

따라서 $f(1)=2,\ f(4)=6$인 함수 f의 개수는

$15\cdot 3=45$

(ⅱ) $f(1)=3,\ f(4)=4$인 경우

$f(2)$와 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는

3 또는 4

이고, $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)$이어야 하므로 3, 4의 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

또 $f(5)$와 $f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6 또는 7

이고 $f(4)\leq f(5)\leq f(6)$이어야 하므로 4, 5, 6, 7의 4개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$\therefore {}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 $f(1)=3,\ f(4)=4$인 함수 f의 개수는

$3\cdot 10=30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$45+30=75$

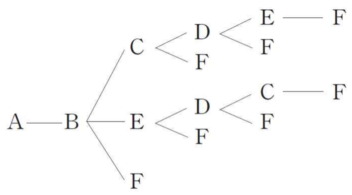
16) **정답** 21

구하는 항의 개수는 3개의 문자 $a,\ b,\ c$ 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

17) **정답** 28

주어진 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 B로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우를 구해 보면 다음과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 꼭짓점 C 또는 D또는 E로 움직인 후 꼭짓점 F에 도착하는 경우도 각각 7가지씩이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$7 \cdot 4 = 28$

18) **정답** 90

19) **정답** 81

(i) 4개의 집합으로 분할하는 경우

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 3개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{3!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 20$$

네 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 2개, 2개인 경우의 수는

$${}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2!} = 6 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 45$$

이므로 $S(6,\ 4) = 20 + 45 + 65$

(ii) 5개의 집합으로 분할하는 경우

다섯 집합의 원소가 각각 1개, 1개, 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$$S(6,\ 4) = {}_6C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot {}_2C_2 \cdot \frac{1}{4!}$$

$$= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{24} = 15$$

(iii) 6개의 집합으로 분할하는 경우

여섯 집합의 원소가 각각 1개씩이므로

$S(6,\ 6) = 1$

이상에서 구하는 방법의 수는

$65 + 15 + 1 = 81$

20) **정답** 186

세 정류장 A, B, C 중에서 승객이 내리는 2개의 정류장을 택하는 방법의 수는 ${}_3C_2 = 3$ • 20 %

6명을 2개의 조로 나눌 때, 각 조의 인원 수는

1, 5 또는 2, 4 또는 3, 3

(i) 승객을 1명, 5명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_1 \cdot {}_5C_5 = 6 \cdot 1 = 6$

(ii) 승객을 2명, 4명으로 나누는 방법의 수는

${}_6C_2 \cdot {}_4C_4 = 15 \cdot 1 = 15$

(iii) 승객을 3명, 3명으로 나누는 방법의 수는

$${}_6C_3 \cdot {}_3C_3 \cdot \frac{1}{2!} = 20 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

이상에서 승객을 2개의 조로 나누는 방법의 수는

$6 + 15 + 10 = 31$ • 40 %

2개의 조를 2개의 정류장에 분배하는 방법의 수는

$2! = 2$ • 20 %

따라서 구하는 방법의 수는 $3 \cdot 31 \cdot 2 = 186$ • 20 %

21) **정답** 4

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2 a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n a_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n a_n} = 2 \cdot 2 = 4$$

22) **정답** -3

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$이고 $a_n - b_n = c_n$으로 놓으면

$b_n = a_n - c_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = -2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{c_n}{a_n} = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + b_n}{a_n - 2b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2a_n + (a_n - c_n)}{a_n - 2(a_n - c_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{3a_n - c_n}{-a_n + 2c_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 - \dfrac{c_n}{a_n}}{-1 + 2 \cdot \dfrac{c_n}{a_n}} = -3$$

23) **정답** ⑤

$a_n + a_{n+1} = n^2$ …… ㉠

$a_{n+1} + a_{n+2} = (n+1)^2$ …… ㉡

㉡-㉠을 하면 $a_{n+2} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \dfrac{1}{n}}{1 + \dfrac{2}{n}} = 2$$

24) **정답** 11

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{k+1} - a_k} = 2\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$에서

(i) $n = 1$일 때, $\sqrt{a_2 - a_1} = \dfrac{4}{3}$

(ii) $n \ge 2$일 때,

$$\sqrt{a_{n+1} - a_n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_{k+1} - a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{a_{k+1} - a_k}$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - 2\left(1 - \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{4}{3^n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\sqrt{a_2 - a_1} = \dfrac{4}{3}$는 ㉠에서 $n = 1$을 대입한 것과 같으므로 모든 자연수 n에 대하여 $\sqrt{a_{n+1} - a_n} = \dfrac{4}{3^n}$

$$\therefore a_{n+1} = a_n + \frac{16}{9^n}$$

앞의 식의 양변에 n대신 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$a_2 = a_1 + \frac{16}{9}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{16}{9^2}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{16}{9^3}$$

$$\vdots$$

$$+\ \underline{a_n = a_{n-1} + \frac{16}{9^{n-1}}}$$

$$a_n = a_1 + \frac{16}{9} + \frac{16}{9^2} + \frac{16}{9^3} + \cdots + \frac{16}{9^{n-1}}$$

$$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{16}{9^k} = 9 + \frac{\dfrac{16}{9}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \dfrac{1}{9}} = 11 - 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{11 - 2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}\right\} = 11$$

25) **정답** ②

주어진 식에 $x = 0,\ y = 0$을 대입하면

$f(0) = f(0) + f(0) - 0 \qquad \therefore f(0) = 0$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x) + f(h) - 3xh - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - 3xh}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} - 3x$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - 3x$$

$$= f'(0) - 3x = -3x - 2$$

26) **정답** ②

$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$에 $x = 0,\ y = 0$을 대입하면

$f(0) = f(0) + f(0) - 0 \qquad \therefore f(0) = 0$

$f'(1) = 3$이므로

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)+f(h)-h-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-1=3$$

즉, $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}=4$이므로

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}-x$$
$$=4-x$$
$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)dx$$
$$=\int(4-x)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^2+4x+C$$

그런데 $f(0)=0$이므로 $\quad C=0$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x$이므로

$$f(-2)=-2-8=-10$$

27) **정답** ②

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_1^4 f(x)dx=\int_4^7 f(x)dx=\int_7^{10} f(x)dx=\int_{10}^{13} f(x)dx=2$$
$$\therefore\ \int_1^{13} f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx+\int_4^7 f(x)dx$$
$$+\int_7^{10} f(x)dx+\int_{10}^{13} f(x)dx$$
$$=4\cdot2=8$$

28) **정답** ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이므로

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_5^6 f(x)dx=\int_9^{10} f(x)dx$$
$$=\cdots=\int_{2013}^{2014} f(x)dx$$
$$=\int_{2017}^{2018} f(x)dx$$

29) **정답** ①

$$\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx=\int_{-2}^{2}(x+2)^2dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^2+4x+4)dx$$
$$=2\int_0^2(x^2+4)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$
$$\int_{-2}^{2} f(x)dx=\int_{-2}^{2}(x+2)dx$$
$$=2\int_0^2 2dx$$
$$=2\Big[2x\Big]_0^2=2\cdot4=8$$

따라서 $\int_{-2}^{2}\{f(x)\}^2dx=k\left(\int_{-2}^{2}f(x)dx\right)^2$에서

$$\frac{64}{3}=k\cdot8^2 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{3}$$

30) **정답** 6

일차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax+b$ ($a\neq0$이고, a, b는 상수)로 놓자.

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3$에서

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2a\int_0^1x^2dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2a\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a$$

즉 $\frac{2}{3}a=3$이므로 $a=\frac{9}{2}$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$에서

$$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_0^1x^2dx$$
$$=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2b\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}b$$

즉 $\frac{2}{3}b=-2$이므로 $\qquad b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x-3$이므로 $\qquad f(2)=\frac{9}{2}\cdot2-3=6$

31)답 ③

(ⅰ) $-2\le x<-1$일 때,

$[x]=-2$이므로 $y=-2x$

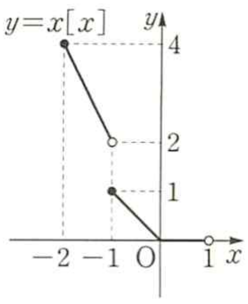
(ⅱ) $-1\le x<0$일 때,

$[x]=-1$이므로 $y=-x$

(ⅲ) $0\le x<1$일 때,

$[x]=0$이므로 $y=0$

따라서 $-2\le x<1$에서 함수 $y=x[x]$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 치역의 원소가 아닌 것은 2이다.



32) 답. ②

ㄱ. [반례] $A=\varnothing$이면 $f_A(x)=1$이다.

ㄴ. $x\in A$일 때, $f_A(x)+f_{A^c}(x)=2+1=3$

$x\notin A$일 때, $f_A(x)+f_{A^c}(x)=1+2=3$

따라서 $f_A(x)+f_{A^c}(x)=3$이므로

$f_{A^c}(x)=3-f_A(x)$

ㄷ. [반례]$x\in A\cap B$이면

$f_{A\cup B}(x)=2,\quad f_A(x)+f_B(x)=2+2=4$

$\therefore f_{A\cup B}(x)\neq f_A(x)+f_B(x)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

33) [정답] ④

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=10 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$a_{10}=a+9d=24 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $d=2$

$\therefore a_n=6+(n-1)\cdot2=2n+4$

$\therefore a_{15}=2\cdot15+4=34$

34) [정답] ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}=50+9d=23,\quad 9d=-27 \quad \therefore d=-3$

$\therefore a_n-50+(n-1)\cdot(-3)=-3n+53$

$a_n<0$에서 $\quad -3n+53<0 \quad \therefore n>\frac{53}{3}=17.\times\times\times$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 제17항까지 양수이고, 제18항부터 음수이다.

$a_{17}=2,\ a_{18}=-1,\ a_{30}=-37$이므로

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$$
$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17})-\underbrace{(a_{18}+a_{19}+a_{20}+\cdots+a_{30})}_{\text{제18항부터 제30항까지의 항수는 } 30-18+1=13}$$
$$=\frac{17(50+2)}{2}-\frac{13\{-1+(-37)\}}{2}$$
$$=442+247=689$$

35) **정답** ⑤

7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{3!\cdot2!}=420$$

C, D를 한 문자 T로 생각하여 6개의 문자 A, A, A, B, B, T를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3!\cdot2!}=60$$

이때 C와 D가 자리를 바꾸는 방법의 수는 $2!=2$이므로 C, D가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$$60\cdot2=120$$

따라서 구하는 방법의 수는 $420-120=300$

36) 정답 136

(ⅰ) $f(3)=1$인 경우

$f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값이 존재하지 않으므로 f는 함수가 아니다.

(ⅱ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는

4 또는 5 또는 6

$f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2

따라서 f의 개수는

${}_3\Pi_2 \cdot {}_2\Pi_3 = 3^2 \cdot 2^3 = 72$

(ⅲ) $f(3)=3$인 경우

$f(1)$과 $f(2)$가 될 수 있는 수는 6

$f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값이 될 수 있는 수는

1 또는 2 또는 3 또는 4

따라서 f의 개수는

$1 \cdot {}_4\Pi_3 = 1 \cdot 4^3 = 64$

이상에서 구하는 함수의 개수는

$72+64=136$

37) 정답 9

$\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

$${}_{10}\mathrm{C}_r x^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r x^{10-(n+1)r}$$

상수항은 $10-(n+1)r=0$일 때이므로 $(n+1)r=10$

이를 만족시키는 $r,\ n$의 순서쌍 $(r,\ n)$은

$(1,\ 9),\ (2,\ 4),\ (5,\ 1)$

따라서 n의 최댓값은 9이다.

38) 정답 ⑤

$$(1+x)+(1+x)^2+\cdots+(1+x)^{10} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠은 첫째항이 $1+x$, 공비가 $1+x$, 항의 개수가 10인 등비수열의 합이므로

$$\frac{(1+x)\{(1+x)^{10}-1\}}{(1+x)-1} = \frac{(1+x)^{11}-(1+x)}{x} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 전개식에서 x의 계수는 ㉡의 $(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x)^{11}$의 전개식의 일반항은 ${}_{11}\mathrm{C}_r x^r$

$x^r = x^2$에서 $r=2$

따라서 구하는 계수는 ${}_{11}\mathrm{C}_2 = 55$

39) 정답 ③

빨간 공이 x번, 노란 공이 y번 나온다고 하면

$x+y=5,\ x+2y=7$

두 식을 연립하여 풀면 $x=3,\ y=2$

따라서 7점을 얻으려면 빨간 공이 3번, 노란 공이 2번 나와야 하므로

구하는 확률은 ${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{3}{7}\right)^3\left(\dfrac{4}{7}\right)^2$

40) 정답 $\dfrac{11}{64}$

(ⅰ) 소수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 3번 던져서 3번 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{3}{8} \cdot {}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{3}{64}$$

(ⅱ) 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{4}{8} \cdot {}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{64}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{11}{64}$

제 2 회

1. 2012년 3월 교육청
2. 2013년 9월 평가원
3. 2006년 6월 평가원
4. 2001년 경찰대
5. 2014년 7월 교육청
6. 2015년 9월 교육청
7. 2012년 4월 교육청
8. 2010년 경찰대
9. 2006년 10월 교육청
10. 2011년 9월 평가원

1. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$
(나) $\lim_{n\to\infty}(2a_n - 5b_n) = 3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

2. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1},\ \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1} - a_k)^2 = 2\left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

3. 실수전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

> (가) 임의의 실수 x, y에 대하여
> $f(x-y)=f(x)-f(y)+xy(x-y)$
> (나) $f'(0)=8$

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖고 $x=b$에서 극솟값을 가질 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $f(x+2)=-f(x)$
> (나) $\int_0^2 f(x)dx=1$

이때, $\int_{-2}^4 f(x)dx$의 값은?

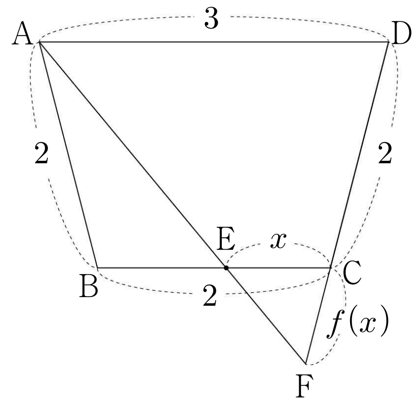
① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

5. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

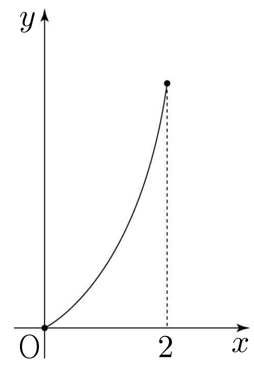
(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(x+2)^2 f(x)dx=50$, $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)dx=2$

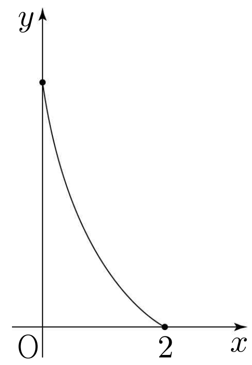
$\int_{-3}^{3}x^2 f(x)dx$의 값을 구하시오.

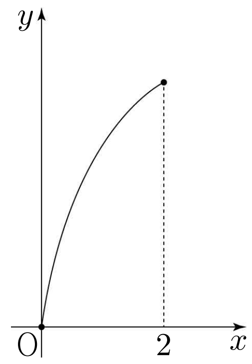
6. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2$, $\overline{AD}=3$인 등변사다리꼴 ABCD에서 선분 BC 위를 움직이는 점을 E, 직선 AE와 직선 CD의 교점을 F라 하자.

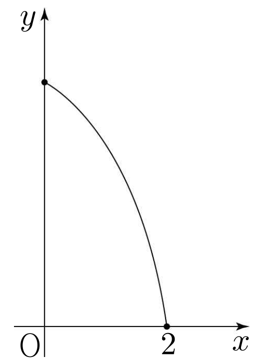


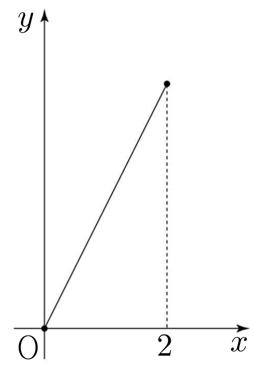
점 C와 점 E 사이의 거리를 $x(0 \le x \le 2)$, 점 C와 점 F 사이의 거리를 $f(x)$라 할 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양으로 알맞은 것은?

①


②


③


④


⑤


7. 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 부등식

$$|x-a_n| \geq |x-a_{n+1}|\ (n \geq 1)$$

을 만족시키는 x의 최솟값을 b_n이라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $b_1 = \dfrac{a_1+a_2}{2}$

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은 공차가 $\dfrac{3}{2}$인 등차수열이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} b_n = 160$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 어느 경찰관이 8월에 관할구역을 이틀 연이어 순찰하지 않으면서 5일 순찰하는 방법의 수는?

① ${}_{25}\mathrm{C}_5$ ② ${}_{27}\mathrm{C}_5$ ③ ${}_{28}\mathrm{C}_5$
④ ${}_{29}\mathrm{C}_5$ ⑤ ${}_{30}\mathrm{C}_5$

9. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ 을 전개하는 식에서 x^2항의 계수는?

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

10. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번을 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

추가 과제

1. 상수함수가 아닌 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $\lim_{x \to \infty}\{f(x)-2g(x)\}$가 존재할 때,

$\lim_{x \to \infty}\frac{3f(x)+2g(x)+1}{f(x)+2g(x)+3}$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

2. 함수 $f(x)=\frac{|x(x+2)|}{x(x+1)}$에 대하여 $\lim_{x \to -2+0}f(x)+\lim_{x \to +0}f(x)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

3. 다항함수 $f(x)$에 대하여

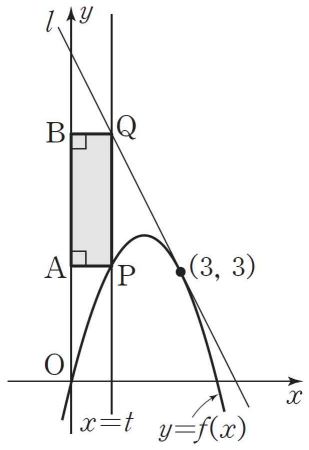
$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3$$

일 때, $\lim_{x \to -1}\frac{\{f(-x)\}^2-4}{x^2-1}$의 값은?

① -10　② -8　③ -6　④ -4　⑤ -2

4. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+k$는 임의의 두 양수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$일 때, $f(x_1)<f(x_2)$를 만족시킨다. 방정식 $f(x)=0$이 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오.

5. 함수 $f(x)=-x^2+4x$의 그래프 위의 점 $(3,\ 3)$에서의 접선을 l이라 하자. 직선 $x=t(0<t<2)$를 그어 곡선 $y=f(x)$, 접선 l과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 두 점 P, Q에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 직사각형 APQB의 넓이의 최댓값은?



① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

6. $-2\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 좌표평면 위의 두 점 A$(t+2,\ t-2)$, B$(2-t,\ 2t^2+t+2)$가 있다. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, $\overline{\mathrm{OM}}^2$의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

7. 지면으로부터 높이가 25 m인 지점에서 20 m/초의 속도로 지면과 수직으로 위로 던져 올린 물체의 시각 $t(t\ge 0)$에서의 높이 $h(t)$(m)는

$$h(t)=-5t^2+20t+25$$

이다. 지면에 도달하는 순간 물체의 속도는?

① -20 m/초 ② -25 m/초 ③ -30 m/초
④ -35 m/초 ⑤ -40 m/초

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $f(t)$가

$$f(t)=t^3-2t^2-4t$$

이다. $t>0$에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 가속도는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

9. 삼차함수 $f(x)=x(x-2)(x-a)$에 대하여

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_a^2 f(x)dx$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 상수 a의 값의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

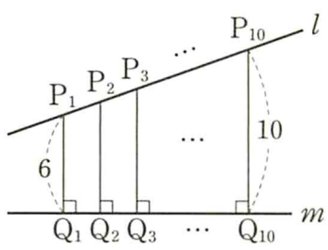
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이다.
(나) $\int_{-1}^{1} f(x)dx=6$

$f'(1)=8$일 때, $f(1)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

11. 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때, $a_{10}+b_{10}=42$, $S_{10}+T_{10}=160$이다. 이때 a_1+b_1의 값을 구하여라.

12. 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위에 같은 간격으로 10개의 점 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_{10}$을 잡고, 각 점에서 직선 m에 내린 수선의 발을 차례로 $Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_{10}$이라 하자. $\overline{P_1Q_1}=6$, $\overline{P_{10}Q_{10}}=10$일 때, $\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}+\cdots+\overline{P_9Q_9}$의 값은?



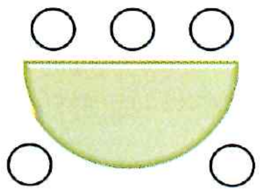
① 60 ② 61 ③ 62
④ 63 ⑤ 64

13. $3^x = 4^y = 12^z$일 때, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}$의 값을 구하여라.
(단, $xyz \neq 0$)

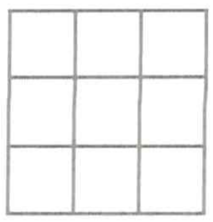
14. 양수 a, b에 대하여 $a^m = b^n = 5$일 때, $\log_{ab} b^2$을 m, n으로 나타내면? (단, $a \neq 1$, $b \neq 1$, $ab \neq 1$)

① $\frac{2m}{m+n}$　② $\frac{2n}{m+n}$　③ $\frac{mn}{m+n}$
④ $\frac{2mn}{m+n}$　⑤ $\frac{m-n}{m+n}$

15. 오른쪽 그림과 같은 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 9가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 $k \times 7!$이다. 이때 상수 k의 값을 구하여라.



17. 어느 음료수 회사에서 이벤트로 음료수 10병중에서 1병의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨를 새겨, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 음료수 한 병을 경품으로 준다고 한다. 이 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률이 $\dfrac{3^k}{10^4}$ 일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

18. 어느 호텔을 예약한 사람 중에서 실제로 그 호텔에 투숙하는 사람은 80%라 한다. 방이 20개인 이 호텔에서 같은 날 22개의 예약을 받은 경우 실제로 방이 부족할 확률을 구하여라.
(단, $0.8^{21}=0.009$, $0.8^{22}=0.007$로 계산한다.)

19. 확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{45}\mathrm{C}_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

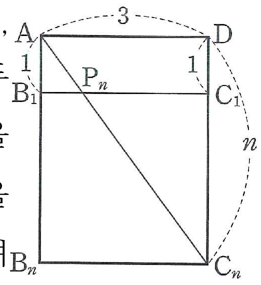
일 때, $\mathrm{E}(X)$와 $\mathrm{V}(X)$는?

① $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{V}(X)=1$
② $\mathrm{E}(X)=10,\ \mathrm{V}(X)=5$
③ $\mathrm{E}(X)=15,\ \mathrm{V}(X)=10$
④ $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=5$
⑤ $\mathrm{E}(X)=30,\ \mathrm{V}(X)=10$

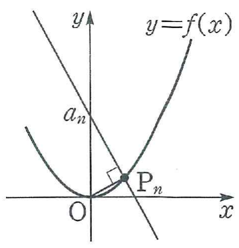
20. 한 번의 타석에서 안타칠 확률이 0.2인 야구 선수가 10번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X라 할 때, $\mathrm{P}(X\le 9)$는?

① $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{10}$ ② $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{11}$ ③ $1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{9}$
④ $1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{10}$ ⑤ $1-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{11}$

21. 오른쪽 그림과 같이 가로의 길이가 3, 세로의 길이가 n인 직사각형 $\mathrm{AB}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}$에서 두 변 AB_n, DC_n 위에 $\overline{\mathrm{AB}_1}=1$, $\overline{\mathrm{DC}_1}=1$인 점을 각각 $\mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1$이라 하고, $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1}$과 $\overline{\mathrm{AC}_n}$의 교점을 P_n이라 하자. 이때 $\lim_{n\to\infty}\overline{\mathrm{AP}_n}$의 값을 구하여라.(단, n은 $n\geq 2$인 자연수이다.)

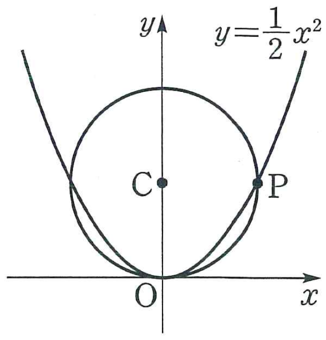


22. 오른쪽 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $f(x)=x^2$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}_n\left(\frac{1}{n}, f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$을 지나고 직선 OP_n에 수직인 직선의 y절편을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

23. 오른쪽 그림과 같이 이차함수 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 한 점 P와 원점 O를 지나며 중심이 y축 위에 있는 원 C가 있다. 점 P가 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프를 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 원의 중심 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표를 구하여라.



24. 일차함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{-1}^{1} xf(x)dx=3,\ \int_{-1}^{1} x^2f(x)dx=-2$$

가 성립할 때, $f(2)$의 값을 구하여라.[24)]

25. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=f(x),\ \int_{0}^{1}f(x)dx=5$$

일 때, 정적분 $\int_{-1}^{1}(2x^3-x-1)f(x)dx$의 값을 구하여라.

26. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이고

$$\int_{-2}^{3}f(x)dx=3k-1,\ \int_{0}^{2}f(x)dx=-5,\ \int_{0}^{3}f(x)dx=k$$

이다. 이때, 상수 k의 값을 구하여라.

27. 연속함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_{0}^{2}f(x)dx=A,\ \int_{1}^{3}f(x)dx=B,\ \int_{1}^{2}f(x)dx=C$$

일 때, $\int_{0}^{3}f(x)dx$를 A, B, C를 이용하여 나타내어라.

28. $f(x)=4x^3-x^2+3x-2$일 때, $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_{x}^{1}f(t)dt$의 값은?

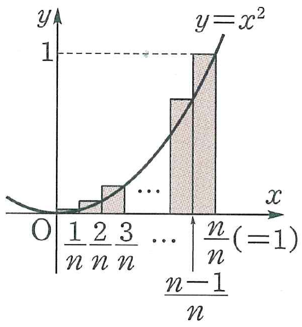
① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

29. 다음은 곡선 $y=x^2$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하는 과정이다.

구간 $[0,\ 1]$을 n등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x좌표는 앞에서부터 차례대로

$$0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ 1$$

이므로 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면 구하는 넓이 S는



$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\boxed{}=\frac{1}{3}$$

위의 과정에서 □ 안에 알맞은 식은?

① $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^2}$ ③ $\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$

④ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^3}{n^3}$ ⑤ $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^4}$

30. 정적분을 이용하여 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$ 의 값을 구하여라.

31. $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 중 0, 1, 2 의 값 중 어느 하나를 가진다. $\sum_{i=1}^{n}x_i=13$, $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=23$일 때, $\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 5}$의 값을 구하여라.

32. 첫째항부터 제 4 항까지의 합이 24 이고, 첫째항부터 제 10 항까지의 합이 0 인 등차수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제 p 항까지의 합이 최대이고, 그때의 수열의 합이 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

33. 연속하는 20개의 자연수의 합이 530일 때, 20개의 자연수 중에서 가장 큰 수는?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

34. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$b_{2k-1} = a_1 - 2a_3 + 3a_5 - \cdots + (-1)^{k+1} \cdot ka_{2k-1}$,

$b_{2k} = -a_2 + 2a_4 - 3a_6 + \cdots + (-1)^{k} \cdot ka_{2k}$

로 정의되는 수열 $\{b_n\}$이

$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 10$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$의 공차는?

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

35. 한 평면 위에 있는 6개의 직선 중에서 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때, 6개의 직선으로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

36. 지우와 혜리가 각각 오후 2시부터 오후 2시 30분 사이의 임의의 시간에 A지점에 가서 10분 동안 기다리기로 하였다. 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

37. 두 사건 A, B에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. A, B가 서로 배반사건이면 A, B는 서로 독립이다.
ㄴ. A, B가 서로 독립이면 A, B^c도 서로 독립이다.
ㄷ. A^c, B^c가 서로 독립이면 A, B도 서로 독립이다.

38. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 중에서 임의로 한 개의 문자를 뽑을 때, b를 뽑는 사건을 $[b]$, b 또는 c를 뽑는 사건을 $[b,\ c]$라 하자. 사건 $[a,\ b,\ c,\ d]$와 서로 독립인 사건인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보 기 |

ㄱ. $[d,\ f]$　　ㄴ. $[c,\ d,\ e]$　　ㄷ. $[c,\ d,\ e,\ f]$

39. 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 신뢰도 99%로 추정할 때, 모평균 m과 표본평균 $\overline{X}$의 값 $\overline{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하가 되도록 하려면 적어도 몇 개의 표본을 조사해야 하는가? (단, $\mathrm{P}(|Z| \leq 3) = 0.99$)

① 100개　② 225개　③ 400개
④ 625개　⑤ 900개

40. 어느 도시의 주민 525명을 임의추출하여 자전거 사용률을 조사했더니 16%이었다. 이 도시 주민의 자전거 사용률 p의 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, $\mathrm{P}(|Z| \leq 2) = 0.95$)

① $0.128 \leq p \leq 0.192$　② $0.132 \leq p \leq 0.188$
③ $0.136 \leq p \leq 0.184$　④ $0.140 \leq p \leq 0.180$
⑤ $0.144 \leq p \leq 0.176$

[난문현답 기출 정답]

1. 23
2. 12
3. 16
4. ②
5. 102
6. ①
7. ③
8. ②
9. ②
10. 11

[추가 과제 정답]

1) [정답] ②

$f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면

$2g(x)=f(x)-h(x)$

이때, $\lim_{x\to\infty}h(x)=\alpha$ (α는 실수)라 하면 상수함수가 아닌 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\pm\infty$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3f(x)+2g(x)+1}{f(x)+2g(x)+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)-h(x)+1}{2f(x)-h(x)+3}$$

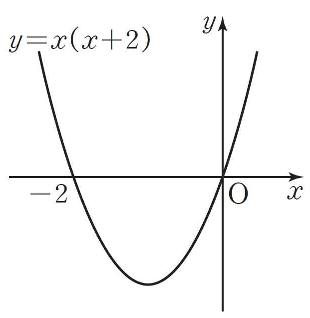
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{h(x)}{f(x)}+\frac{1}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}+\frac{3}{f(x)}}$$

$$=\frac{4-0+0}{2-0+0}$$

$$=2$$

2) [정답] ②

함수 $y=x(x+2)$의 그래프에서



$x\to-2+0$일 때 $y\to-0$이므로 $x(x+2)<0$이다.

즉, $|x(x+2)|=-x(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to-2+0}f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{-x(x+2)}{x(x+1)}$$

$$=\lim_{x\to-2+0}\frac{-(x+2)}{x+1}$$

$$=0$$

$x\to+0$일 때 $y\to+0$이므로 $x(x+2)>0$이다.

즉, $|x(x+2)|=x(x+2)$이므로

$$\lim_{x\to+0}f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x(x+2)}{x(x+1)}=\lim_{x\to+0}\frac{x+2}{x+1}=2$$

$$\lim_{x\to-2+0}f(x)+\lim_{x\to+0}f(x)=0+2=2$$

3) [정답] ③

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때, (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+2\}=0$에서 $f(x)$가 다항함수이므로

$f(1)+2=0\qquad\therefore\ f(1)=-2$

이때 $-x=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{\{f(-x)\}^2-4}{x^2-1}=\lim_{t\to1}\frac{\{f(t)\}^2-4}{t^2-1}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{\{f(t)+2\}\{f(t)-2\}}{(t-1)(t+1)}$$

$$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)+2}{t-1}\times\lim_{t\to1}\frac{f(t)-2}{t+1}$$

$$=3\times\frac{f(1)-2}{1+1}$$

$$=-6$$

4) [정답] 15

함수 $f(x)=x^3+3x^2+k$는 다항함수이므로 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이다.

또 주어진 조건으로부터 $x>0$에서 x의 값이 증가할 때, $f(x)$의 값도 증가하므로 방정식 $f(x)=0$이 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 하나의 실근을 가지려면 $f(1)=k+4<0$이고 $f(2)=k+20>0$이어야 한다.

따라서 $-20<k<-4$를 만족시키는 정수 k는

$-19,\ -18,\ -17,\cdots,\ -5$이고 그 개수는 15이다.

5) [정답] ④

$f(x)=-x^2+4x$에서

$f'(x)=-2x+4$

$f'(3)=-2$이므로 접선 l의 방정식은

$y-2=-2(x-3)\qquad\therefore\ y=-2x+9$

$\mathrm{P}(t,\ -t^2+4t)$, $\mathrm{Q}(t,\ -2t+9)$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=t^2-6t+9$

직사각형 APQB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$\quad=t(t^2-6t+9)=t^3-6t^2+9t\ \ (0<t<2)$

$S'(t)=3t^2-12t+9$

$\quad=3(t^2-4t+3)=3(t-1)(t-3)$

$t=1$의 좌우에서 $S'(t)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $S(t)$는 $t=1$에서 극대이면서 최댓값을 갖는다.

따라서 직사각형 APQB의 넓이의 최댓값은

$S(1)=1-6+9=4$

6) [정답] ②

$$\mathrm{M}\left(\frac{(t+2)+(2-t)}{2},\ \frac{(t-2)+(2t^2+t+2)}{2}\right)$$

즉, $\mathrm{M}(2,\ t^2+t)$이므로

$\overline{\mathrm{OM}}^2=2^2+(t^2+t)^2=t^4+2t^3+t^2+4$

따라서 $f(t)=t^4+2t^3+t^2+4$라 하면

$f'(t)=4t^3+6t^2+2t=2t(2t^2+3t+1)$

$\quad=2t(2t+1)(t+1)$

이므로 $f'(t)=0$에서

$t=-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=0$

$-2\le t\le1$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	8	↘	4	↗	$\frac{65}{16}$	↘	4	↗	8

$f(-2)=f(1)=8$,

$f(-1)=f(0)=4$,

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^4+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4=\frac{65}{16}$$

따라서 $\overline{\mathrm{OM}}^2$의 최솟값은 $t=-1$ 또는 $t=0$일 때, 4이다.

7) [정답] ③

지면에 도달하는 순간 물체의 높이는 0, 즉 $h(t)=0$이므로

$-5t^2+20t+25=0$

$t^2-4t-5=0,\quad(t-5)(t+1)=0$

$\therefore\ t=5\ \ (\because\ t\ge0)$

따라서 $t=5$일 때 물체가 지면에 도달한다.

이때, 물체의 속도는 $h'(t)=-10t+20$이므로

$h'(5)=-50+20=-30$

8) [정답] ④

점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=f'(t)=3t^2-4t-4$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$3t^2-4t-4=0$, $(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)$

점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=6t-4$

따라서 $t=2$일 때 점 P의 가속도는 $a(2)=8$

9) [정답] ④

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_a^2 f(x)dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\left\{\int_0^a f(x)dx+\int_a^2 f(x)dx\right\}-\int_a^2 f(x)dx=0$$

$$\therefore\ \int_0^a f(x)dx=0$$

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a \{x^3-(2+a)x^2+2ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2+a}{3}x^3+ax^2\right]_0^a$$

$$=\frac{a^4}{4}-\frac{(2+a)a^3}{3}+a^3$$

$$=\frac{a^3(4-a)}{12}=0$$

$a^3(4-a)=0 \quad \therefore\ a=0$ 또는 $a=4$

따라서 ㉠을 만족시키는 서로 다른 모든 상수 a의 값의 합은 4이다.

10) [정답] ①

함수 $f(x)$는 삼차항의 계수가 1인 삼차함수이고, 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$이므로 $f'(x)=3x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$$f(x)=\int f'(x)dx$$

$$=\int (3x^2+a)dx$$

$$=x^3+ax+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이므로 조건 (나)에 의하여

$$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 (x^3+ax+C)dx$$

$$=\int_{-1}^1 (x^3+ax)dx+\int_{-1}^1 Cdx$$

$$=0+\Big[Cx\Big]_{-1}^1$$

$$=2C=6$$

$\therefore\ C=3$

$f'(1)=8$이므로

$3+a=8 \qquad \therefore\ a=5$

따라서 $f(x)=x^3+5x+3$이므로

$f(1)=1+5+3=9$

11) [정답] -10

$$S_{10}+T_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}+\frac{10(b_1+b_{10})}{2}$$

$$=5(a_1+a_{10})+5(b_1+b_{10})$$

$$=5\{(a_1+b_1)+(a_{10}+b_{10})\}$$

$$=5\{(a_1+b_1)+42\}=160$$

이므로 $(a_1+b_1)+42=32$

$\therefore a_1+b_1=-10$

12) [정답] ⑤

오른쪽 그림에서 색칠한 직각삼각형은 모두 합동이므로

$\overline{P_2Q_2}-\overline{P_1Q_1}$

$=\overline{P_3Q_3}-\overline{P_2Q_2}$

$\vdots$

$=\overline{P_{10}Q_{10}}-\overline{P_9Q_9}$

즉 $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$, $\cdots$, $\overline{P_{10}Q_{10}}$의 길이는 이 순서대로 등차수열을 이루므로 이 수열의 공차를 d라 하면

$\overline{P_2Q_2}=6+d$, $\overline{P_9Q_9}=10-d$

$$\overline{P_2Q_2}+\overline{P_3Q_3}+\overline{P_4Q_4}+\cdots+\overline{P_9Q_9}=\frac{8\{(6+d)+(10-d)\}}{2}=64$$

13) [정답] 0

$3^x=4^y=12^z=k\ (k>0)$로 놓으면 $xyz\neq0$에서 $k\neq1$

밑을 k로 통일한다. $x\neq0,\ y\neq0,\ z\neq0$

$3^x=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{x}} \quad \cdots\cdots ㉠$

$4^y=k$에서 $\quad 4=k^{\frac{1}{y}} \quad \cdots\cdots ㉡$

$12^z=k$에서 $\quad 12=k^{\frac{1}{z}} \quad \cdots\cdots ㉢$

㉠×㉡÷㉢을 하면

$3\times4\div12=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\div k^{\frac{1}{z}} \quad \therefore\ k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$

14) [정답] ①

$a^m=b^n=5$에서 $\quad \log_a5=m,\ \log_b5=n$

$\therefore\ \log_5a=\frac{1}{m},\ \log_5b=\frac{1}{n}$

$$\therefore\ \log_{ab}b^2=\frac{\log_5b^2}{\log_5ab}=\frac{2\log_5b}{\log_5a+\log_5b}$$

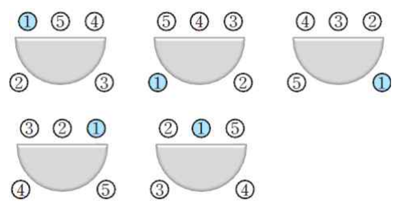
$$=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}=\frac{\frac{2}{n}}{\frac{m+n}{mn}}=\frac{2m}{m+n}$$

15) **정답** 120

5명을 원형으로 배열하는 방법의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이때 주어진 모양의 탁자에서는 원형으로 배열하는 한 가지 방법에 대하여 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 5가지씩 존재한다.



따라서 구하는 방법의 수는 $\quad 24\cdot5=120$

16) **정답** 18

가운데 정사각형을 칠하는 방법의 수는 9이고, 나머지 8개의 정사각형을 칠하는 방법의 수는

$(8-1)!=7!$

이때 8개의 정사각형을 칠하는 한 가지 방법에 대하여 주어진 도형에서는 다음 그림과 같이 서로 다른 경우가 2가지씩 존재한다.

②	③	④
⑨	①	⑤
⑧	⑦	⑥

⑨	②	③
⑧	①	④
⑦	⑥	⑤

따라서 구하는 방법의 수는 $9\cdot7!\cdot2=18\cdot7!$

$\therefore\ k=18$

17) **정답** 7

경품을 받을 확률이 $\frac{1}{10}$이므로 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^2\cdot\frac{9}{10}=\frac{3\cdot9^3}{10^4}=\frac{3^7}{10^4}$$

따라서 $\frac{3^7}{10^4}=\frac{3^k}{10^4}$이므로 $k=7$

18) [정답] 0.0466

실제로 호텔에 투숙하는 사람 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(22,\ 0.8)$을 따르므로

$$P(X=x)={}_{22}C_x0.8^x\times0.2^{22-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 22)$$

방이 부족하려면 $X>20$이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X>20)=P(X=21)+P(X=22)$$
$$={}_{22}C_{21}0.8^{21}\times0.2+{}_{22}C_{22}0.8^{22}\times0.2^{0}$$
$$=22\times0.009\times0.2+1\times0.007\times1$$
$$=0.0466$$

19) [정답] ⑤

$$P(X=x)={}_{45}C_x\cdot\frac{2^x}{3^{45}}$$
$$={}_{45}C_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{45-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 45)$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(45,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$$E(X)=45\cdot\frac{2}{3}=30,\ V(X)=45\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=10$$

20) [정답] ④

확률변수 X가 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{10-x}\quad(x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X\le 9)=1-P(X=10)$$
$$=1-{}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{0}$$
$$=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

21) 정답 1

$\triangle AB_1P_n \backsim \triangle AB_nC_n$이고 닮음비가 $1:n$이므로

$$\overline{AP_n}:\overline{AC_n}=1:n$$
$$\therefore \overline{AP_n}=\frac{\overline{AC_n}}{n}=\frac{\sqrt{3^2+n^2}}{n}=\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\overline{AP_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+n^2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9}{n^2}+1}=1$$

22) 정답 ②

$P_n\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2}\right)$이므로 직선 OP_n의 기울기는 $\frac{1}{n}$이다.

즉 점 P_n을 지나고 직선 OP_n에 수직인 직선의 방정식은

$$y=-n\left(x-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n^2}=-nx+1+\frac{1}{n^2}$$

따라서 이 직선의 y절편이 $1+\frac{1}{n^2}$이므로

$$a_n=1+\frac{1}{n^2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{n^2}\right\}=1$$

23) 정답 1

점 C의 좌표를 $(0,\ y)$, 점 P의 좌표를 $\left(x,\ \frac{1}{2}x^2\right)$으로 놓으면

$\overline{CO}=\overline{CP}$, 즉 $\overline{CO}^2=\overline{CP}^2$이므로

$$y^2=x^2+\left(\frac{1}{2}x^2-y\right)^2,\quad y^2=x^2+\frac{1}{4}x^4-x^2y+y^2$$
$$\therefore\ y=1+\frac{1}{4}x^2\ (\because x\neq 0)$$

$P\to O$이면 $x\to 0$이므로 점 C가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)=1$$

24) 정답 6

일차함수 $f(x)$를 $f(x)=ax+b$ ($a\neq 0$이고, a, b는 상수)로 놓자.

$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=3$에서

$$\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^2+bx)dx=2a\int_0^1x^2dx$$
$$=2a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2a\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}a$$

즉 $\frac{2}{3}a=3$이므로 $a=\frac{9}{2}$

$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=-2$에서

$$\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{1}(ax^3+bx^2)dx=2b\int_0^1x^2dx$$
$$=2b\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=2b\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}b$$

즉 $\frac{2}{3}b=-2$이므로 $b=-3$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x-3$이므로 $f(2)=\frac{9}{2}\cdot 2-3=6$

25) 정답 -10

$f(-x)=f(x)$에서 $f(x)$는 우함수이므로 $x^3f(x)$, $xf(x)$는 모두 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-1}^{1}(2x^3-x-1)f(x)dx$$
$$=2\int_{-1}^{1}x^3f(x)dx-\int_{-1}^{1}xf(x)dx-\int_{-1}^{1}f(x)dx$$
$$=0-\int_{-1}^{1}f(x)dx=-2\int_0^1f(x)dx$$
$$=-2\cdot 5=-10$$

26) 정답 3

$f(x)=-f(-x)$에서 $f(-x)=-f(x)$이므로 $f(x)$는 기함수이다.

$$\therefore\ \int_{-2}^{3}f(x)dx=\int_{-2}^{2}f(x)dx+\int_2^3f(x)dx$$
$$=0+\int_2^3f(x)dx$$
$$=\int_0^3f(x)dx-\int_0^2f(x)dx$$
$$=k-(-5)$$

이때 $\int_{-2}^{3}f(x)dx=3k-1$이므로

$$k-(-5)=3k-1,\quad 2k=6$$
$$\therefore\ k=3$$

27) 정답 $A+B-C$

$$\int_0^3f(x)dx=\int_0^1f(x)dx+\int_1^3f(x)dx$$
$$=\left\{\int_0^2f(x)dx-\int_1^2f(x)dx\right\}+\int_1^3f(x)dx$$
$$=(A-C)+B=A+B-C$$

28) 정답 ①

$F'(t)=f(t)$로 놓으면

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_x^1f(t)dt=\lim_{x\to 1}\frac{-1}{x-1}\int_1^xf(t)dt$$
$$=-\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$$
$$=F'(1)=-f(1)$$
$$=-4$$

29) 정답 ③

S_n은 밑변의 길이가 $\frac{1}{n}$이고, 높이가 각각 $\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n}{n}\right)^2$인 직사각형의 넓이의 합이므로

$$S_n=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=\frac{1}{3}$$

30) 정답 $\frac{85}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{2}{n}$$
$$=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^3\cdot\frac{3}{n}$$

$$= \frac{2}{3}\int_1^4 x^3dx = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^4$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{255}{4} = \frac{85}{2}$$

31) [정답] 163
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_n$ 중 1이 a개, 2가 b개 있다고 하면
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\cdot a + 2\cdot b = 13$$
$\therefore a+2b=13$ …… ㉠
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1^2\cdot a + 2^2\cdot b = 23$$
$\therefore a+4b=23$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3,\ b=5$
$$\therefore \sum_{i=1}^{n} x_i^5 = 1^5\cdot 3 + 2^5\cdot 5 = 163$$

32) [정답] 30
주어진 등차수열의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$$\frac{4(2a+3d)}{2}=24,\quad \frac{10(2a+9d)}{2}=0$$
$2a+3d=12,\ 2a+9d=0$
$\therefore\ a=9,\ d=-2$
따라서 첫째항부터 제 n항까지의 합은
$$\frac{n\{2\cdot 9+(n-1)\cdot(-2)\}}{2}=-n^2+10n$$
$$=-(n-5)^2+25$$
이므로 $p=5,\ q=25$ $\quad\therefore\ p+q=30$

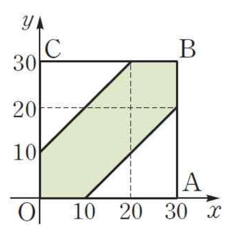
33) [정답] ④
연속하는 20개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a라 하면 20개의 자연수는 첫째항이 a, 공차가 1인 등차수열을 이루므로
$$\frac{20\{2a+(20-1)\cdot 1\}}{2}=530,\quad 2a+19=53$$
$2a=34$ $\quad\therefore\ a=17$
따라서 구하는 가장 큰 수는 $17+19=36$

34) [정답] ①

$b_1+b_3+b_5$
$=a_1+(a_1-2a_3)+(a_1-2a_3+3a_5)$
$=3a_1-4a_3+3a_5$
$b_2+b_4+b_6$
$=3a_1-4a_3+3a_5-3a_2+4a_4-3a_6$
$=-3(a_2-a_1)+4(a_4-a_3)-3(a_6-a_5)$
$=-3d+4d-3d$
$=-2d$
따라서 $-2d=10$이므로 $\quad d=-5$

35) **정답** 20
어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않으므로 6개의 직선 중에서 3개의 직선을 택하면 삼각형이 결정된다.
따라서 구하는 삼각형의 개수는
$${}_6\mathrm{C}_3=20$$

36) **정답** $\frac{5}{9}$
양규가 도착한 시각을 오후 2시 x분, 은경이가 도착한 시각을 오후 2시 y분이라 하면
$0\le x\le 30,\ 0\le y\le 30$ …… ㉠
두 사람이 만나려면 $|x-y|\le 10$이어야 하므로
$-10\le x-y\le 10$
$\therefore\ x-10\le y\le x+10$ …… ㉡
오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 영역은 □OABC의 내부(경계선 포함)이고, 부등식 ㉠, ㉡의 공통인 영역은 색칠한 부분(경계선 포함)과 같다.
따라서 구하는 확률은



$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\text{OABC 의 넓이})}$$
$$=\frac{30\cdot 30-2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 20\cdot 20\right)}{30\cdot 30}=\frac{5}{9}$$

37) **정답** ㄴ, ㄷ
ㄱ. 두 사건 $A,\ B$가 서로 배반사건이면 $\quad \mathrm{P}(A\cap B)=0$
이때 $\mathrm{P}(A)\neq 0,\ \mathrm{P}(B)\neq 0$이면
$\mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
이므로 $A,\ B$는 서로 독립이 아니다.
ㄴ. 두 사건 $A,\ B$가 서로 독립이면 $\quad \mathrm{P}(A\,|\,B^c)=\mathrm{P}(A)$
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A\,|\,B^c)\mathrm{P}(B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c)$
따라서 $A,\ B^c$도 서로 독립이다.
ㄷ. $A^c,\ B^c$가 서로 독립이면 $\quad \mathrm{P}(A^c\cap B^c)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)$
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=1-\mathrm{P}((A\cap B)^c)$
$=1-\mathrm{P}(A^c\cup B^c)$
$=1-\{\mathrm{P}(A^c)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A^c\cap B^c)\}$
$=1-\{\mathrm{P}(A^c)+\mathrm{P}(B^c)-\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B^c)\}$
$=\{1-\mathrm{P}(A^c)\}\{1-\mathrm{P}(B^c)\}$
$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
따라서 $A,\ B$도 서로 독립이다.
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

38) **정답** ㄴ
사건 $[a,\ b,\ c,\ d]$를 A라 하면 $\quad \mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$
ㄱ. 사건 $[d,\ f]$를 B라 하면 $A\cap B=[d]$이므로
$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3},\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
따라서 A와 B는 서로 종속이다.
ㄴ. 사건 $[c,\ d,\ e]$를 C라 하면 $A\cap C=[c,\ d]$이므로
$\mathrm{P}(C)=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$
따라서 A와 C는 서로 독립이다.
ㄷ. 사건 $[c,\ d,\ e,\ f]$를 D라 하면 $A\cap D=[c,\ d]$이므로
$\mathrm{P}(D)=\frac{2}{3},\ \mathrm{P}(A\cap D)=\frac{1}{3}$
$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap D)\neq \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(D)$
따라서 A와 D는 서로 종속이다.
이상에서 $[a,\ b,\ c,\ d]$와 서로 독립인 사건은 ㄴ뿐이다.

39) [정답] ⑤
모표준편차가 5이므로 표본의 크기를 n이라 하면 모평균 m의 신뢰도 99%의 신뢰구간은
$$\bar{x}-3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le \bar{x}+3\cdot\frac{5}{\sqrt{n}}$$
$$\frac{-15}{\sqrt{n}}\le m-\bar{x}\le\frac{15}{\sqrt{n}}$$
$$\therefore\ |m-\bar{x}|\le\frac{15}{\sqrt{n}}$$
모평균 m과 표본평균 $\bar{x}$의 차가 $\frac{1}{2}$ 이하이어야 하므로
$$\frac{15}{\sqrt{n}}\le\frac{1}{2},\quad \sqrt{n}\ge 30 \qquad \therefore\ n\ge 900$$
따라서 적어도 900개의 표본은 조사해야 한다.

40) [정답] ①
표본의 크기가 525, 표본비율이 $\hat{p}=0.16$이므로 자전거 사용률 p를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$0.16-2\sqrt{\dfrac{0.16\times0.84}{525}} \le p \le 0.16+2\sqrt{\dfrac{0.16\times0.84}{525}}$

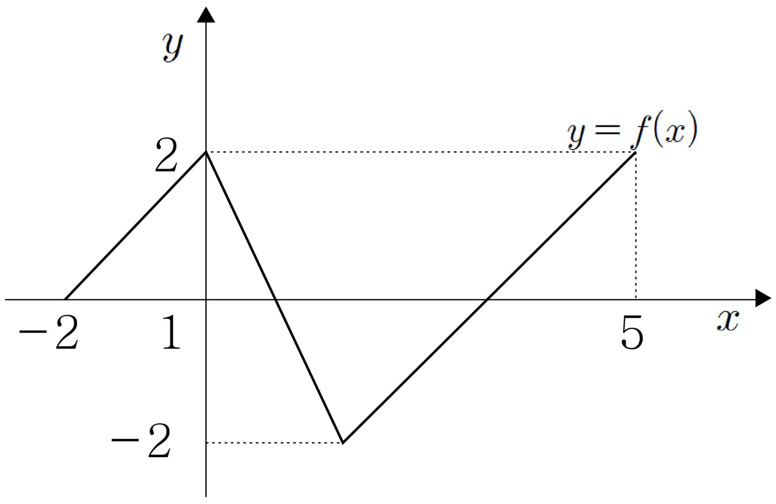
$0.16-2\times0.016 \le p \le 0.16+2\times0.016$

$\therefore\ 0.128 \le p \le 0.192$

제 3 회

1. 2012년 3월 교육청
2. 2013년 9월 평가원
3. 2006년 6월 평가원
4. 2001년 경찰대
5. 2014년 7월 교육청
6. 2015년 9월 교육청
7. 2012년 4월 교육청
8. 2010년 경찰대
9. 2006년 10월 교육청
10. 2011년 9월 평가원

1. 닫힌 구간 $[-2, 5]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{n\to\infty}\frac{|nf(a)-1|-nf(a)}{2n+3}=1$을 만족시키는 상수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 다항함수 $f(x)$와 두 자연수 m, n이

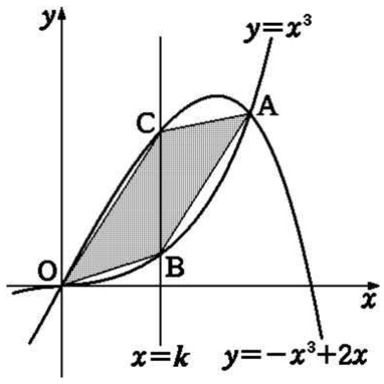
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^m}=1,\ \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{x^{m-1}}=a$$
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^n}=b,\ \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x^{n-1}}=9$$

를 모두 만족시킬 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.)

ㄱ. $m \geq n$
ㄴ. $ab \geq 9$
ㄷ. $f(x)$가 삼차함수이면 $am=bn$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$의 교점 중 제 1사분면에 있는 점을 A라 하고, 두 곡선 $y=x^3$, $y=-x^3+2x$와 직선 $x=k$ $(0<k<1)$의 교점을 각각 B, C 라 하자. 사각형 OBAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 실수 k의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 원점 O를 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 t분 후의 좌표를 각각 x_1, x_2라 하면

$$x_1=2t^3-9t^2,\ x_2=t^2+8t$$

이다. 선분 PQ의 중점을 M이라 할 때, 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 4분 동안 세 점 P, Q, M이 움직이는 방향을 바꾼 횟수를 각각 a, b, c라고 하자. 이때 $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

5. 세 다항함수 $f(x), g(x), h(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(1)=1$, $g(1)=2$
(나) 모든 실수 x, y에 대하여 $f(xy+1)=xg(y)+h(x+y)$

이때, $\int_0^3 \{f(x)+g(x)+h(x)\}dx$의 값을 구하시오.

6. n개의 항으로 이루어진 등차수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$이 다음 조건을 만족한다.

(가) 처음 4개 항의 합은 26이다.
(나) 마지막 4개 항의 합은 134이다.
(다) $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=260$

이때 n의 값을 구하시오.

7. 등식 $2^a = 5^b$을 만족시키는 양의 실수 a, b에 대하여 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

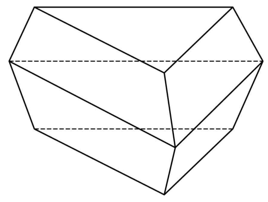
ㄱ. $b = \frac{1}{2}$이면 $a = \log_4 5$이다.

ㄴ. $2 < \frac{a}{b} < 3$

ㄷ. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$은 무리수이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 아래 그림과 같이 합동인 정삼각형 2개와 합동인 등변사다리꼴 6개로 이루어진 팔면체가 있다. 팔면체의 각 면에는 한 가지의 색을 칠한다고 할 때, 서로 다른 8개의 색을 모두 사용하여 팔면체의 각 면을 칠하는 경우의 수는?
(단, 팔면체를 회전시켰을 때 색의 배열이 일치하면 같은 경우로 생각한다.)



① 6520 ② 6620 ③ 6720
④ 6820 ⑤ 6920

9. 좌석의 수가 50인 어느 식당에서 예약한 사람이 예약을 취소하는 경우가 10명 중 1 명꼴이라고 한다. 52명이 예약을 했을 때, 좌석이 부족하게 될 확률은 $p \times 0.9^{52}$이다. p의 값은?

① $\frac{61}{9}$ ② 7 ③ $\frac{56}{9}$
④ $\frac{67}{9}$ ⑤ $\frac{23}{3}$

10. 표는 $k=0, 1, 2, 3, 4$일 때, $p_k = {}_{30}\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{30-k}$의 값을 소수점 아래 셋째자리까지 나타낸 것이다.

k	0	1	2	3	4
p_k	0.004	0.025	0.073	0.137	0.185

주사위를 30번 던져 1의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 할 때, 위의 표를 이용하여 $\sum_{r=3}^{30} r\mathrm{P}(\mathrm{X}=r)$의 값을 구한 것은?

① 4.765 ② 4.829 ③ 4.902
④ 4.946 ⑤ 4.971

추가 과제

1. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-2}{2a_n+1}=3$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{2}{3}$
④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

2. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=7,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3\ (n=1,2,3,\cdots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

3. 자연수 n에 대하여 수직선 위의 점 A_n의 좌표를 x_n이라 하자. $\mathrm{A}_1(2)$, $\mathrm{A}_2(7)$이고, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점을 A_{n+2}라 할 때, $\lim_{n\to\infty}x_n$의 값은?

① 4 ② $\frac{19}{4}$ ③ 5
④ $\frac{41}{8}$ ⑤ $\frac{21}{4}$

4. 어느 공원의 잔디는 일주일에 4cm씩 자라고 매주 월요일 오전 10시에 잔디의 길이의 $\frac{3}{4}$을 잘라낸 다음 남은 잔디의 길이를 측정한다고 한다. 최초로 측정한 잔디의 길이가 12cm이고 n번째 측정한 잔디의 길이를 $a_n$cm라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

5. $\lim_{x\to 0}\frac{|3x-a|-b}{2x}=\alpha$일 때, 상수 α의 값은?
(단, a, b는 상수이고, $a>0$이다.)

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ 1
④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

6. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$을 $f(a)$, $f'(a)$를 이용하여 나타내면?

① $-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$ ② $\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$ ③ $\frac{f'(a)}{f(a)}$
④ $-\frac{f'(a)}{f(a)}$ ⑤ $\frac{f(a)}{f'(a)}$

7. 구간 $[-3,\ 0]$에서 함수 $f(x)=-x^4+6x^2-8x+3$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은?

① 24 ② 25 ③ 26
④ 27 ⑤ 28

8. 곡선 $y=-x^2+3x\ (0<x<3)$위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OPH의 넓이의 최댓값은?
(단, O는 원점이다.)

① $\frac{2}{3}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. 함수 $f(x)=x^3-3x+1$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프에서 극대가 되는 점을 A, 극소가 되는 점을 B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표를 구하여라.

10. 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+3}{x-1}=0,\ \lim_{x\to5}\frac{f(x)-4}{x-5}=0$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

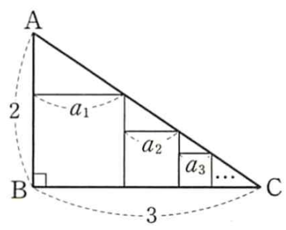
ㄱ. $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가하다가 감소한다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. A 도시의 인구는 매년 일정한 비율로 증가하여 10 년 후에는 36 만 명, 20 년 후에는 81 만 명이 될 것으로 예상된다. 이때 A 도시의 15년 후의 인구는 얼마가 될 것으로 예상할 수 있는가?

① 51 만 명 ② 53 만 명 ③ 54 만 명
④ 55 만 명 ⑤ 57 만 명

12. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$이고 $\angle\mathrm{B}=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형의 한 변의 길이를 차례대로 a_1, a_2, a_3, $\cdots$이라 할 때, $\frac{1}{2}a_9$의 값을 구하여라.



추가 과제

13. 세 수 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}$ 중에서 가장 작은 수를 a, 가장 큰 수를 b라 할 때, 부등식 $a < \sqrt[6]{n} < b$를 만족시키는 자연수 n의 개수는?

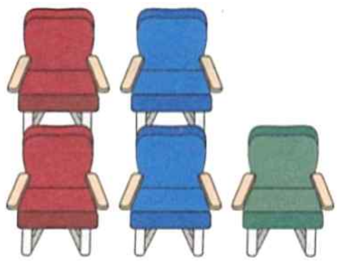
① 42　② 43　③ 44
④ 45　⑤ 46

14. 두 실수 x, y에 대하여

$$M(x,\ y) = \begin{cases} x & (x \geq y) \\ y & (x < y) \end{cases}, \quad m(x,\ y) = \begin{cases} y & (x > y) \\ x & (x \leq y) \end{cases}$$

로 정의하자. $a = \sqrt[4]{\sqrt{5}}$, $b = \sqrt[6]{3} \times \sqrt[12]{2}$, $c = \sqrt{\sqrt[3]{4}}$ 일 때, $M(a,\ m(b,\ c))$의 값을 구하여라.

15. 아래쪽 그림과 같은 좌석에 다섯 명의 학생이 앉아 발레 공연의 일부를 관람했다. 10분간의 휴식 시간 후 2부 공연을 관람하기 위해 임의로 좌석에 앉을 때, 한 사람만 1부 공연에 앉은 열과 같은 열의 좌석에 앉게 되는 방법의 수를 구하여라.



16. 각 자리의 숫자의 합이 4인 자연수를 작은 수부터 순서대로 나열했을 때, 가장 작은 다섯 자리 자연수는 몇 번째 수인지 구하여라.

추가 과제

17. 지우와 혜리가 각각 정답이 한 개인 오지선다형 문제 5개를 풀었는데 혜리는 1번 문제부터 5번 문제까지의 답을 각각 1, 2, 3, 4, 5로 택했고, 지우는 답을 모두 3으로 택했다. 이때 지우와 혜리 둘 다 3문제씩 맞히는 경우의 수를 구하여라.

18. 전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 두 부분집합 A, B에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는?

> (가) $A\cap B=\varnothing$
> (나) $n(A)=n(B)=2$
> (다) 집합 A의 원소 중 가장 큰 수는 집합 B의 원소 중 가장 큰 수보다 크다.

① 70 ② 84 ③ 90
④ 96 ⑤ 105

19. 10명의 회원으로 구성된 동아리에서 각 회원이 동아리 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{2}$이다. 구성원의 $\frac{4}{5}$ 이상이 참석할 때 동아리 활동을 진행할 수 있다고 하면 동아리 활동이 진행될 확률이 $\frac{n}{2^7}$이다. 이때 자연수 n의 값을 구하여라.

20. 한 개의 주사위를 60번 던질 때, 6의 약수가 k번 나올 확률을 $\mathrm{P}(k)$라 하자. 이때 $\sum_{k=1}^{30}\{\mathrm{P}(2k-1)-\mathrm{P}(2k)\}$의 값을 구하여라.

추가 과제

21. 구간 $[0,\ 4]$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+b & (0 \le x < 3)\\ 3(x-3) & (3 \le x \le 4)\end{cases}$$

으로 정의되고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=f(x+4)$$

를 만족시키는 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(10)$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

22. 모든 실수 x에서 연속인 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$$

의 최댓값이 $\frac{5}{4}$일 때, 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라. (단, $a>0$이고 n은 자연수이다.)

23. 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}$$

으로 정의될 때, $\lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값을 구하여라.

24. 구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)=-x^3+27x+k$의 최댓값과 최솟값의 합이 50일 때, 상수 k의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 0 ⑤ 1

25. 함수 $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax^2-a$일 때, 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하도록 하는 모든 실수 a의 값을 구하여라.(단, $a\neq 0$)

26. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 정적분 $\int_{-6}^{6} f(x)dx$의 값을 구하면?

(가) $-1\leq x\leq 1$일 때, $f(x)=x^2$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$

① 2 ② 3 ③ $\frac{10}{3}$
④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

27. 자연수 n에 대하여 $f(n)=\int_0^{2n}|x-n|dx$ 일 때,

$$\frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}$$

의 값을 구하여라.

28. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$ 을 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^{2-a}(a+x)^2dx$

ㄴ. $\int_a^2 x^2dx$

ㄷ. $\int_{a-2}^{0}(x-2)^2dx$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

추가 과제

29. 곡선 $y=x^2+1$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$
④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

30. 곡선 $y=x^3$과 이 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는?

① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{21}{4}$
④ 6 ⑤ $\frac{27}{4}$

31. 함수 $f(x)=\begin{cases}1-\sqrt{x} & (x \geq 0) \\ \sqrt{1-x} & (x<0)\end{cases}$에 대하여

$(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하여라.

32. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f, g를 각각
$f(n)=2n-1$, $g(n)=(7n$을 9로 나누었을 때의 나머지$)$
라 할 때, $(f\circ g)^{-1}(5)+(g\circ f)^{-1}(7)$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

33. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=9,\ a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수})\\ a_n+1 & (a_n\text{이 홀수})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의될 때, a_{18}의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

34. $\log 60.4=1.7810$일 때, $\log x=-0.2190$을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

35. 7개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 짝수 번째에는 짝수를 나열하는 방법의 수를 구하여라.

36. 좌표평면 위의 점들의 집합 $S=\{(x,\ y)\,|\,x,\ y\text{는 정수}\}$가 있다. 집합 S에 속하는 한 점에서 S에 속하는 다른 점으로 이동하는 '점프'는 다음 규칙을 만족시킨다.

점 P에서 한 번의 점프로 점 Q로 이동할 때, 선분 PQ의 길이는 1 또는 $\sqrt{2}$이다.

점 A$(-3,\ 0)$에서 점 B$(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하는 방법의 수를 구하여라.
(단, 이동하는 과정에서 지나는 점이 다르면 다른 경우이다.)

추가 과제

37. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$중에서 $f(2) \neq 2$인 함수의 개수는?

① 64 ② 96 ③ 100
④ 124 ⑤ 125

38. 빨간색, 파란색, 흰색의 세 깃발이 있다. 이 깃발들을 다섯 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는? (단, 깃발은 한 번 이상 올려야 하고, 두 개 이상의 깃발을 동시에 올리지 않는다.)

① 351 ② 354 ③ 357
④ 360 ⑤ 363

39. 집합 $A=\{x | x$는 한 자리의 자연수$\}$에 대하여 집합 A의 부분집합 중에서 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수를 구하여라.

40. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$ 중에서 치역의 원소가 3개인 함수의 개수를 구하여라.

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ②
2. ⑤
3. ⑤
4. ③
5. 18
6. 13
7. ③
8. ③
9. ①
10. ②

[추가 과제 정답]

1) **정답** ①

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n-2}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면

$3a_n-2=2a_nb_n+b_n$, $(3-2b_n)a_n=b_n+2$

$\therefore a_n=\dfrac{b_n+2}{3-2b_n}$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n+2}{3-2b_n}=\dfrac{3+2}{3-2\cdot3}=-\dfrac{5}{3}$

2) **정답** ③

$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+3$에서 $a_{n+1}-6=\dfrac{1}{2}(a_n-6)$

따라서 수열 $\{a_n-6\}$은 첫째항이 $a_1-6=1$, 공비가 $\dfrac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n-6=1\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\quad\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+6$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+6\right\}=6$

3) **정답** ④

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$을 $2:3$으로 내분하는 점 A_{n+2}의 좌표는

$\dfrac{2x_{n+1}+3x_n}{5}$

즉 $x_{n+2}=\dfrac{2x_{n+1}+3x_n}{5}$이므로

$5x_{n+2}=2x_{n+1}+3x_n$, $5(x_{n+2}-x_{n+1})=-3(x_{n+1}-x_n)$

$\therefore x_{n+2}-x_{n+1}=-\dfrac{3}{5}(x_{n+1}-x_n)$

$x_{n+1}-x_n=y_n$으로 놓으면

$y_{n+1}=-\dfrac{3}{5}y_n$, $y_1=x_2-x_1=5$

따라서 수열 $\{y_n\}$은 첫째항이 5, 공비가 $-\dfrac{3}{5}$인 등비수열이므로

$y_n=5\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$, 즉 $x_{n+1}=x_n+5\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}$

위의 식의 양변에 n 대신 $1,2,3,\cdots,n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$$x_2=x_1+5$$
$$x_3=x_2+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$x_4=x_3+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^2$$
$$\vdots$$
$$+\;)\;x_n=x_{n-1}+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$

$$x_n=x_1+5+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)+\cdots+5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-2}$$
$$=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}=2+\frac{5\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}$$
$$=2+\frac{25}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}=\frac{41}{8}-\frac{25}{8}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{41}{8}-\dfrac{25}{8}\left(-\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\right\}=\dfrac{41}{8}$

4) **정답** ②

주어진 조건에서

$a_1=12$, $\quad a_{n+1}=\dfrac{1}{4}(a_n+4)=\dfrac{1}{4}a_n+1$

$\therefore a_{n+1}-\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{4}\left(a_n-\dfrac{4}{3}\right)$

따라서 수열 $\left\{a_n-\dfrac{4}{3}\right\}$는 첫째항이 $a_1-\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{3}$, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$a_n-\dfrac{4}{3}=\dfrac{32}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n=\dfrac{32}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{4}{3}$

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{32}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}+\dfrac{4}{3}\right\}=\dfrac{4}{3}$

5) **정답** ①

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to0}(|3x-a|-b)=0$이므로 $|-a|-b=0$

$\therefore\ b=a\,(\because a>0)$ $\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{|3x-a|-a}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(|3x-a|-a)(|3x-a|+a)}{2x(|3x-a|+a)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{9x^2-6ax}{2x(|3x-a|+a)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{9x-6a}{2(|3x-a|+a)}$$
$$=\frac{-6a}{4a}=-\frac{3}{2}$$

6) **정답** ①

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{f(a+h)}-\frac{1}{f(a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\left\{\frac{f(a)-f(a+h)}{f(a+h)f(a)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{-\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\cdot\frac{1}{f(a+h)f(a)}\right\}=-\frac{f'(a)}{\{f(a)\}^2}$$

7) **정답** ④

$f(x)=-x^4+6x^2-8x+3$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x-1)^2(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2\,(\because -3\le x\le 0)$

따라서 함수 $f(x)$는
$x=-2$일 때 최댓값 27
$x=-3$일 때 최솟값 0을
가지므로

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	27	↘	3

$M=27$, $m=0$ $\quad\therefore M-m=27$

8) **정답** ②

점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+3a)$ $(0<a<3)$로 놓으면
$\mathrm{H}(a,\ 0)$이므로 $\triangle\mathrm{OPH}$의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\dfrac{1}{2}a(-a^2+3a)=\dfrac{1}{2}(-a^3+3a^2)$

$\therefore S'(a)=\dfrac{1}{2}(-3a^2+6a)=-\dfrac{3}{2}a(a-2)$

$S'(a)=0$에서 $a=2$ $(\because 0<a<3)$

a	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $a=2$일 때 $S(a)$는 극대이면서 최대이므로 $\triangle\mathrm{OPH}$의 최댓값은

$S(2)=\frac{1}{2}(-8+12)=2$

9) 정답 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

$f(x)=x^3-3x+1$

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$또는 $x=1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 극댓값 3, $x=1$일 때, 극솟값 -1을 가지므로 $A(-1,\ 3)$, $B(1,\ -1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗

따라서 $\overline{AB}$를 $1:2$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\cdot 1+2\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{1\cdot(-1)+2\cdot 3}{1+2}\right)$,즉 $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{5}{3}\right)$

10) 정답 ④

<전략>

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$ (α는 실수)이고, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이면 $\lim_{x\to a}f(x)=0$이다.

<풀이>

$f(x)$는 삼차함수이므로 모든 실수 x에 대하여 미분가능하고 연속이다.

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=0$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉 $\lim_{x\to 1}\{f(x)+3\}=0$이므로 $f(1)=-3$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=0$

또 $\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-4}{x-5}=0$에서 $x\to 5$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

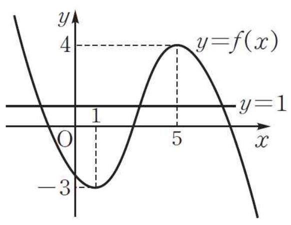
즉 $\lim_{x\to 5}\{f(x)-4\}=0$이므로 $f(5)=4$

$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-4}{x-5}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(5)}{x-5}=f'(5)$이므로

$f'(5)=0$

$f'(1)=0$, $f'(5)=0$이고 $f(x)$는 삼차함수 이므로 $f(x)$는 $x=1$, $x=5$에서 극값을 갖는다. 이때 $f(1)<f(5)$이므로 극솟값은 $f(1)$, 극댓값은 $f(5)$이다.

따라서 $f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$는 $x=3$의 좌우에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 극댓값 4를 갖는다.

ㄷ. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=1$은 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=1$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ

11) [정답] ③

A 도시의 올해 인구를 a, 인구의 증가율을 r라 하면 n년 후의 인구는

$a(1+r)^n$ (명)

10년 후의 인구가 36만 명이므로

$a(1+r)^{10}=3.6\times10^5$ ······ ㉠

20년 후의 인구가 81만 명이므로

$a(1+r)^{20}=8.1\times10^5$ ······ ㉡

㉡÷㉠을 하면 $(1+r)^{10}=\frac{9}{4}$ ······ ㉢

$\therefore\ (1+r)^5=\frac{3}{2}$

㉢을 ㉠에 대입하면 $\frac{9}{4}a=3.6\times10^5$

$\therefore\ a=1.6\times10^5$

따라서 15년 후의 인구는

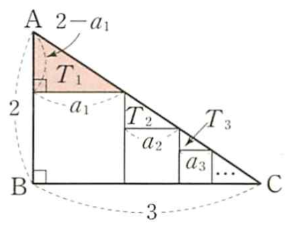
$a(1+r)^{15}=1.6\times10^5\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=5.4\times10^5$ (명)

이므로 54만 명으로 예상할 수 있다.

12) [정답] $2\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^9$

[전략] 삼각형의 닮음비를 이용하여 수열 $\{a_n\}$이 등비수열임을 알고 공비를 구한다.

[풀이] 오른쪽 그림의 색칠한 삼각형 T_1과 삼각형 ABC는 닮음이므로



$(2-a_1):a_1=\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

$6-3a_1=2a_1$

$\therefore\ a_1=\frac{6}{5}$ [30%]

삼각형 T_2와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$(a_1-a_2):a_2=2:3$에서 $3a_1-3a_2=2a_2$

$\therefore\ a_2=\frac{3}{5}a_1=\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{5}$

같은 방법으로 $(a_2-a_3):a_3=2:3$에서

$3a_2-3a_3=2a_3\quad\therefore\ a_3=\frac{3}{5}a_2=\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{6}{5}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{6}{5}$, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비수열이므로

$a_n=\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$ [60%]

$\therefore\ \frac{1}{2}a_9=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^8=\left(\frac{3}{5}\right)^9$ [10%]

13) [정답] ⑤

참고 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times3}}=\sqrt[6]{81}$, $\sqrt{4\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{4^3\times2}}=\sqrt[6]{128}$, $\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^2\times5}}=\sqrt[6]{125}$에서 $\sqrt{3\sqrt[3]{3}}<\sqrt[3]{5\sqrt{5}}<\sqrt{4\sqrt[3]{2}}$이므로

$a=\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{81}$, $b=\sqrt{4\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{128}$

따라서 부등식 $\sqrt[6]{81}<\sqrt[6]{n}<\sqrt[6]{128}$에서 $81<n<128$이므로 자연수 n은 82, 83, 84, ⋯, 127의 46개다.

14) [정답] $\sqrt[3]{2}$

참고 $a=\sqrt[4]{\sqrt{5}}=\sqrt[8]{5}=\sqrt[24]{5^3}=\sqrt[24]{125}$

$b=\sqrt[6]{3}\times\sqrt[12]{2}=\sqrt[12]{3^2}\times\sqrt[12]{2}=\sqrt[12]{18}=\sqrt[24]{18^2}=\sqrt[24]{324}$

$c=\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[24]{4^4}=\sqrt[24]{256}$

따라서 $\sqrt[24]{125}<\sqrt[24]{256}<\sqrt[24]{324}$이므로 $a<c<b$

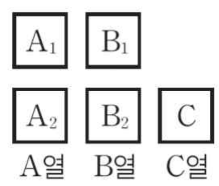
$\therefore\ M(a, m(b,\ c))=M(a,\ c)=c=\sqrt{\sqrt[3]{4}}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

15) 정답 36

[전략] 1부 공영의 좌석을 지정하고 2부 공연 때 같은 열에 앉는 경우를 나눈다.

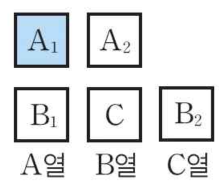
[풀이]

오른쪽 그림과 같이 1부 공연에 다섯 명의 학생이 앉은 좌석을 각각 A_1, A_2, B_1, B_2, C라 하자.



(ⅰ) 1부 공연 때 A열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 A열에 앉는 경우

A_1에 앉았던 학생이 A열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.



이때 A_1과 A_2, B_1는 자리를 바꿀 수 있고, 같은 열에 앉은 학생들끼리도 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한 방법의 수는

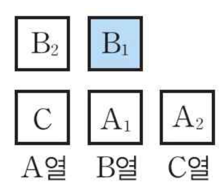
$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$

(ⅱ) 1부 공연 때 B열에 앉은 학생 중에서 한 명이 2부 공연에서도 B열에 앉는 경우

B_1에 앉았던 학생이 B열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

따라서 가능한 방법의 수는 (ⅰ)과 같이

$2!\cdot2!\cdot2!\cdot2!=16$



(ⅲ) 1부 공연 때 C열에 앉은 학생 한 명이 2부 공연에서도 C열에 앉는 경우

C에 앉았던 학생이 C열에 앉으면 나머지 학생들은 오른쪽 그림과 같이 앉을 수 있다.

이때 A_1과 A_2, B_1과 B_2는 자리를 바꿀 수 있으므로 가능한

방법의 수는

$2!\cdot 2!=4$

이상에서 구하는 방법의 수는

$16+16+4=36$

A열	B열	C열
B_1	A_1	
B_2	A_2	C

16) **정답** 36번째

[전략] 각 자리의 숫자의 합이 4가 되는 네 자리 자연수의 각 자리의 숫자의 순서쌍을 찾는다.

[풀이]

각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수는 다음의 숫자들을 나열하여 만들 수 있다.

4, 0, 0, 0 또는 3, 1, 0, 0 또는 2, 2, 0, 0 또는 2, 1, 1, 0 또는 1, 1, 1, 1

(i) 4, 0, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

(ii) 3, 1, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(iii) 2, 2, 0, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$$

(iv) 2, 1, 1, 0으로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

(v) 1, 1, 1, 1로 만들 수 있는 네 자리 이하의 자연수의 개수는

1

이상에서 각 자리의 숫자의 합이 4인 네 자리 이하의 자연수의 개수는

$4+12+6+12+1=35$

따라서 구하는 자연수는 36번째 수이다.

17) **정답** 6

[전략] 재석이와 명수가 푼 문제 중에서 3번 문제만 답이 3으로 일치함을 이용한다.

[풀이]

재석이과 명수 둘 다 3문제씩 맞히기 위해서는 3번의 정답은 반드시 3이어야 한다.

따라서 재석이는 3번 문제를 제외한 나머지 4개의 문제 중에서 2문제를 맞히고, 명수는 3번 문제와 재석이가 맞힌 2문제를 제외한 나머지 2문제 중에서 2문제를 맞혀야 하므로 구하는 경우의 수는

$${}_4C_2\cdot{}_2C_2=6\cdot 1=6$$

18) **정답** ⑤

[전략] 집합 U의 원소 7개 중에서 4개를 뽑으면 가장 큰 수는 집합 A의 원소이다.

[풀이]

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개의 수 중에서 4개를 뽑으면 그 중에 가장 큰 수는 집합 A의 원소가 된다.

나머지 3개의 수 중에서 집합 A의 다른 한 원소를 택하면 집합 B의 두 원소가 정해지므로 구하는 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$${}_7C_4\cdot{}_3C_1=35\cdot 3=105$$

19) **정답** 7

$10\times\frac{4}{5}=8$(명)이므로 8명 이상 참석해야 동아리 활동을 진행할 수 있다. • 20 %

(i) 8명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{45}{2^{10}}$ • 20 %

(ii) 9명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_9\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{10}{2^{10}}$ • 20 %

(iii) 10명이 참석할 확률은 ${}_{10}C_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{2^{10}}$ • 20 %

이상에서 동아리 활동이 진행될 확률은

$$\frac{45}{2^{10}}+\frac{10}{2^{10}}+\frac{1}{2^{10}}=\frac{56}{2^{10}}=\frac{7}{2^7}$$

$\therefore\ n=7$ • 20 %

20) **정답** 0

[전략] 독립시행의 확률을 이용하여 $P(k)$를 구한 다음 이항정리를 이용한다.

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수가 나올 확률이 $\frac{2}{3}$이므로

$$P(k)={}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{60-k}\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 60)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ &\sum_{k=1}^{30}\{P(2k-1)-P(2k)\}\\
&=\{P(1)-P(2)\}+\{P(3)-P(4)\}+\cdots+\{P(59)-P(60)\}\\
&=\left\{{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}-{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}\right\}\\
&\qquad+\left\{{}_{60}C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^{57}-{}_{60}C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^{56}\right\}\\
&\qquad+\cdots+\left\{{}_{60}C_{59}\left(\frac{2}{3}\right)^{59}\left(\frac{1}{3}\right)^1-{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}\\
&={}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left\{{}_{60}C_0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-{}_{60}C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^{59}\right.\\
&\qquad\left.+{}_{60}C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{58}-\cdots+{}_{60}C_{60}\left(\frac{2}{3}\right)^{60}\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\}\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\sum_{k=0}^{60}{}_{60}C_k\left(\frac{2}{3}\right)^k\left(-\frac{1}{3}\right)^{60-k}\\
&=\left(\frac{1}{30}\right)^{60}-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{60}\\
&=\left(\frac{1}{3}\right)^{60}-\left(\frac{1}{3}\right)^{60}=0
\end{aligned}$$

[SSEN **보충학습] 이항정리**

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r a^{n-r}b^r$

21) **정답** ④

$f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 3}f(x)$의 값이 존재한다.

즉, $\lim_{x\to 3+}f(x)=\lim_{x\to 3-}f(x)$이므로

$$\lim_{x\to 3+}3(x-3)=\lim_{x\to 3-}(-x^2+ax+b)$$

$\therefore\ -9+3a+b=0$ …… ㉠

이때 $f(x)=f(x+4)$이므로 $f(0)=f(4)$

$\therefore\ b=3(4-3)=3$

$b=3$을 ㉠에 대입하면

$-9+3a+3=0$ $\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x+3 & (0\le x<3)\\ 3(x-3) & (3\le x\le 4)\end{cases}$이므로

$f(10)=f(6)=f(2)=-4+4+3=3$

22) **정답** 3

(i) $|x|<1$일 때, $f(x)=-x^2+bx+c$

(ii) $x=1$일 때, $f(1)=\frac{a-1+b+c}{2}$

(iii) $|x|>1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{x}-\frac{1}{x^{2n-2}}+\frac{b}{x^{2n-1}}+\frac{c}{x^{2n-2}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{a}{x}$$

(iv) $x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{-a-1-b+c}{2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$$-1+b+c=a=\frac{a-1+b+c}{2}$$

$\therefore\ a-b-c=-1$ …… ㉠

또, $x=-1$에서 연속이어야 하므로

$$-1-b+c=-a=\frac{-a-1-b+c}{2}$$

$\therefore\ a-b+c=1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $c=1,\ b=a$

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}-x^2+ax+1=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+1+\dfrac{a^2}{4} & (|x|\le 1)\\ \dfrac{a}{x} & (|x|>1)\end{cases}$$

$0<a\le 2$이면 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=1+\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{5}{4}$

$4+a^2=5,\ a^2=1$ $\qquad\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

$a>2$이면 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=a=\dfrac{5}{4}$

그런데 $a>2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a=1,\ b=1,\ c=1$이므로 $a+b+c=3$

23) **정답** 0

$x^2-(x-2)^2=4(x-1)$에서

(ⅰ) $x<1$일 때, $x^2<(x-2)^2$, 즉 $0\le\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{2n}+(x-2)}{\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^{2n}+1}$$

$$=x-2$$

(ⅱ) $x=1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}=\frac{1-1}{1+1}=0$$

(ⅲ) $x>1$일 때, $x^2>(x-2)^2$, 즉 $0\le\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^2<1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+(x-2)^{2n+1}}{x^{2n}+(x-2)^{2n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x+(x-2)\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2n}}$$

$$=x$$

$\therefore\ \lim_{x\to 1+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=1+(-1)=0$

24) **정답** ②

$f(x)=-x^3+27x+k$에서

$f'(x)=-3x^2+27=-3(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=3\ (\because\ 0\le x\le 4)$

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	k	↗	$54+k$	↘	$44+k$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 $54+k$, $x=0$일 때 최솟값 k를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 50이므로

$54+k+k=50$ $\quad\therefore k=-2$

25) **정답** $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$

$f(x)=-\dfrac{2}{3}x^3+ax^2-a$에서

$f'(x)=-2x^2+2ax=-2x(x-a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$또는 $x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 $f(0)=0$ 또는 $f(a)=0$ 그런데, $f(0)=-a\ne 0$이므로 $f(a)=0$

$f(a)=\dfrac{1}{3}a^3-a=0,\qquad \dfrac{1}{3}a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$

$\therefore\ a=-\sqrt{3}$ 또는 $a=\sqrt{3}$

26) **정답** ④

$$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_0^1x^2dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

이때, 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이므로

$$\int_{-6}^{6}f(x)dx=6\int_{-1}^{1}f(x)dx=6\cdot\frac{2}{3}=4$$

27) **정답** 46

$|x-n|=\begin{cases}x-n & (x\ge n)\\ -x+n & (x<n)\end{cases}$이므로

$$f(n)=\int_0^{2n}|x-n|dx$$

$$=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}$$

$$=\frac{n^2}{2}+\frac{n^2}{2}=n^2$$

$$\therefore\ \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(11)}{11}=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}f(k)$$

$$=\frac{1}{11}\sum_{k=1}^{11}k^2$$

$$=\frac{1}{11}\cdot\frac{11\cdot 12\cdot 23}{6}$$

$$=46$$

28) **정답** ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2-a}{n}\left\{a+\frac{(2-a)k}{n}\right\}^2$$

$$=\int_0^{2-a}(a+x)^2dx=\int_a^2x^2dx$$

$$=\int_{a-2}^{0}(x+2)^2dx$$

이상에서 정적분으로 나타낸 것으로 옳은 것은 ㄱ,ㄴ이다.

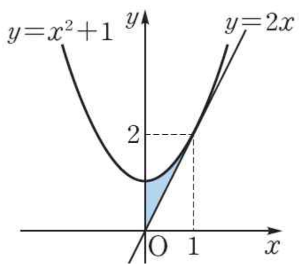
29) **정답** ①

$y=x^2+1$에서 $y'=2x$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 기울기는 $2\cdot 1=2$이고, 접선의 방정식은

$y-2=2(x-1)$

$\therefore\ y=2x$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_0^1\{(x^2+1)-2x\}dx=\int_0^1(x^2-2x+1)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

30) **정답** ⑤

$y=x^3$에서 $y'=3x^2$이므로 곡선 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $3\cdot 1^2=3$이고, 접선의 방정식은 $y-1=3(x-1)$

$\therefore\ y=3x-2$

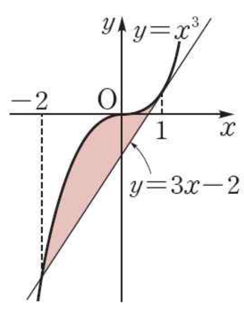
곡선 $y=x^3$과 직선 $y=3x-2$의 교점의 x좌표는

$x^3=3x-2$에서

$x^3-3x+2=0,\ (x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 넓이는



$$\int_{-2}^{1}\{x^3-(3x-2)\}dx=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$$

31) [정답] 2

$(f^{-1}\circ f^{-1})^{-1}=f\circ f$이므로 $(f^{-1}\circ f^{-1})(a)=16$에서

$(f\circ f)(16)=a$

이때 $f(16)=1-\sqrt{16}=1-4=-3$이고, $16\ge 0$ 이므로 $f(x)=1-\sqrt{x}$

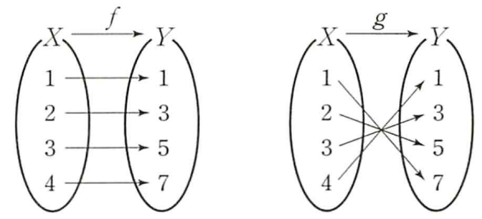
$f(-3)=\sqrt{1-(-3)}=\sqrt{4}=2$이므로 $\quad -3<0$ 이므로 $f(x)=\sqrt{1-x}$

$a=(f\circ f)(16)=f(f(16))=f(-3)=2$

32) [정답] ②

풀이

두 함수 $f,\ g$의 대응 관계를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ (f\circ g)^{-1}(5)+(g\circ f)^{-1}(7)$

$=(g^{-1}\circ f^{-1})(5)+(f^{-1}\circ g^{-1})(7)$

$=g^{-1}(f^{-1}(5))+f^{-1}(g^{-1}(7))$

$=g^{-1}(3)+f^{-1}(1)$

$=3+1=4$

33) [정답]②

$a_1=9$에서

$a_2=a_1+1=10,\ a_3=\dfrac{1}{2}a_2=5,$

$a_4=a_3+1=6,\ a_5=\dfrac{1}{2}a_4=3,$

$a_6=a_5+1=4,\ a_7=\dfrac{1}{2}a_6=2,$

$a_8=\dfrac{1}{2}a_9=1,\ a_9=a_8+1=2,$

$a_{10}=\dfrac{1}{2}a_9=1,\ a_{10}=a_9+1=2,\ \cdots$

따라서 $n\geq 8$ 일 때, $a_n=\begin{cases}1 & (n\text{은 짝수})\\ 2 & (n\text{은 홀수})\end{cases}$ 이므로

$a_{18}=1$

34) [정답] 0.604

$\log x=-0.2190=-1+0.7810$에서 $\log x$와 $\log 60.4$의 소수부분이 같으므로 x는 60.4와 숫자의 배열이 같다. 또 정수 부분이 -1이므로 소수점아래 첫째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타난다.

$\therefore x=0.604$

35) **정답** 12

다음 그림에서 짝수 2, 2, 4는 △에, 홀수 1, 3, 3, 3은 ○에 놓이게 된다.

○ △ ○ △ ○ △ ○

이때 3개의 숫자 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

4개의 숫자 1, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$

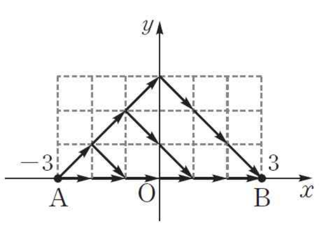
따라서 구하는 방법의 수는 $3\cdot 4=12$

36) **정답** 141

[전략] 점프하는 방향을 정한 다음 점프하는 방향의 개수로 경우를 나누어 생각한다.

[풀이]

점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 6번만 점프하여 이동하려면 오른쪽 그림과 같이 길이가 1인 점프의 방향은 →, 길이가 $\sqrt{2}$ 인 점프의 방향은 ↗ 또는 ↘이어야 한다. • 10 %



이때 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$에서 점 $\mathrm{B}(3,\ 0)$까지 이동하는 방법은 다음과 같다.

(ⅰ) →, →, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

1 • 20 %

(ⅱ) ↗, ↘, →, →, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{4!}=30$ • 20 %

(ⅲ) ↗, ↗, ↘, ↘, →, →로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=90$ • 20 %

(ⅳ) ↗, ↗, ↗, ↘, ↘, ↘로 점프하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!\cdot 3!}=20$ • 20 %

이상에서 구하는 방법의 수는

$1+30+90+20=141$ • 10 %

37) **정답** ③

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

X에서 Y로의 함수 중 $f(2)=2$인 함수의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는 $125-25=100$

[다른 풀이]

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 5개, $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 2를 제외한 4개, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 5개이므로 구하는 함수의 개수는

$5\cdot 4\cdot 5=100$

38) **정답** ⑤

깃발을 한 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_1=3$

깃발을 두 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_3\Pi_2=3^2$

같은 방법으로 깃발을 세 번, 네 번, 다섯 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_3$, ${}_3\Pi_4$, ${}_3\Pi_5$이므로 구하는 신호의 개수는

$3+3^2+3^3+3^4+3^5=\dfrac{3(3^5-1)}{3-1}=363$

39) **정답** (1) 28

(1) 2를 제외한 8개의 수 중에서 2개를 택하는 방법의 수와 같으므로 구하는 부분집합의 개수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$ • 40%

40) **정답** 1500

[전략] 치역의 원소가 3개이려면 함숫값이 같은 X의 원소가 2개 또는 3개 존재해야 함을 이용한다.

[풀이]

집합 X의 5개의 원소 중에서 치역의 원소가 되는 3개를 택하는 방법의 수는

${}_5\mathrm{C}_3=10$ • 20 %

이때 치역의 원소를 $a,\ b,\ c$라 하면 $a,\ b,\ c$ 중에서 함숫값을 택하는 경우는

$a,\ a,\ a,\ b,\ c$ 또는 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$

의 2가지이다.

(ⅰ) 함숫값이 $a,\ a,\ a,\ b,\ c$인 함수의 개수는

${}_3\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{5!}{3!}=60$ • 30 %

(ⅱ) 함숫값이 $a,\ a,\ b,\ b,\ c$인 함수의 개수는

${}_3\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{5!}{2!2!}=90$ • 30 %

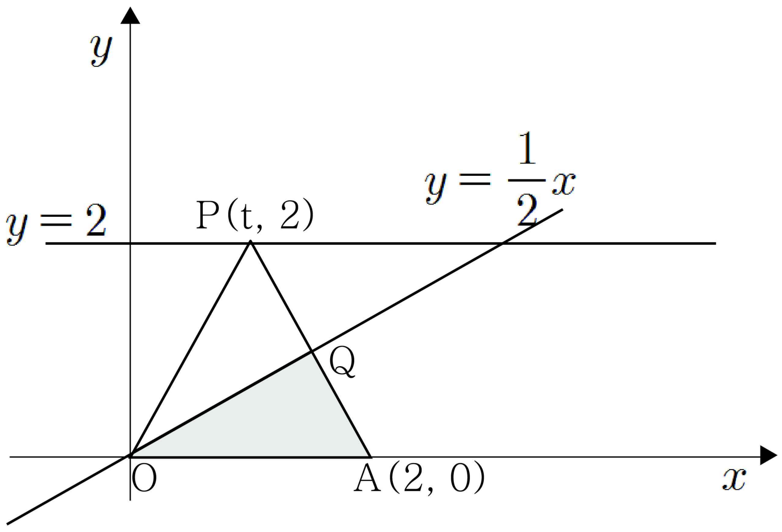
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$10\cdot(60+90)=1500$

제 4 회

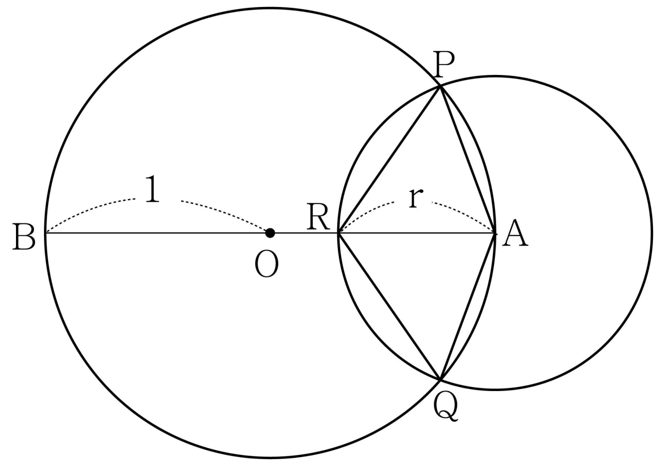
1. 1995년 수능
2. 2006년 4월 교육청
3. 2016년 수능
4. 2009년 사관학교
5. 2007년 9월 평가원
6. 2015년 11월 교육청
7. 2010년 수능
8. 2016년 경찰대
9. 2005년 9월 평가원
10. 2009년 수능

1. 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{O}(0,0), \mathrm{A}(2,0)$과 직선 $y=2$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(t,2)$가 있다. 선분 AP와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점을 Q라고 하자. △QOA의 넓이가 △POA의 넓이의 $\frac{1}{3}$일 때, t의 값을 t_1, $\frac{1}{2}$일 때, t의 값을 t_2, $\cdots$, $\frac{n}{n+2}$일 때 t의 값을 t_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty} t_n$의 값은?



① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

2. 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 한 점 A가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원이 원 O와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 원 O의 지름 AB와 만나는 점을 R이라 하자. 사각형 APRQ의 넓이를 $\mathrm{S}(r)$라 할 때, $\lim_{r\to 2-}\frac{\mathrm{S}(r)}{\sqrt{2-r}}$의 값은? (단, $0<r<2$)



① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

3. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=g(x)$$

를 만족시킨다. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\int_{-3}^{3}(x+5)h'(x)dx=10$$

일 때, $h(3)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

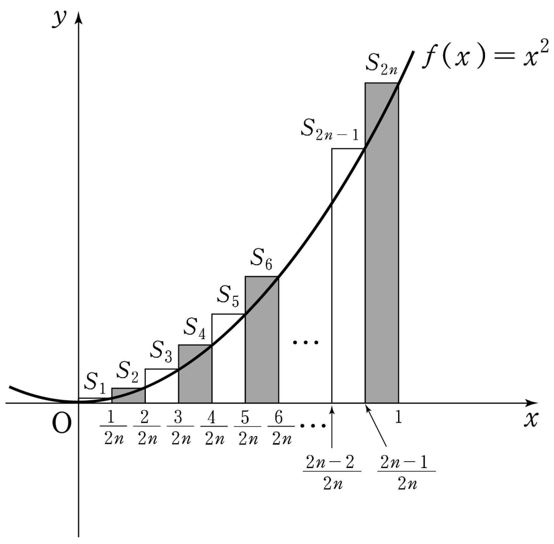
4. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_{n}^{n+1}f(x)dx=\frac{1}{n^2+2n}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}n\left(\int_{1}^{n}f(x)dx-\frac{3}{4}\right)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

5. 함수 $f(x)=x^2$에 대하여 그림과 같이 구간 $[0,1]$을 $2n$등분 한 후, 구간 $\left[\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}\right]$를 밑변으로 하고 높이가 $f\left(\frac{k}{2n}\right)$인 직사각형의 넓이를 S_k라 하자. (단, n은 자연수이고 $k=1, 2, 3, \cdots, 2n$이다.)



ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_k = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} (S_{2k} - S_{2k-1}) = 0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} S_{2k} = \frac{1}{2}\int_0^{1} x^2 dx$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

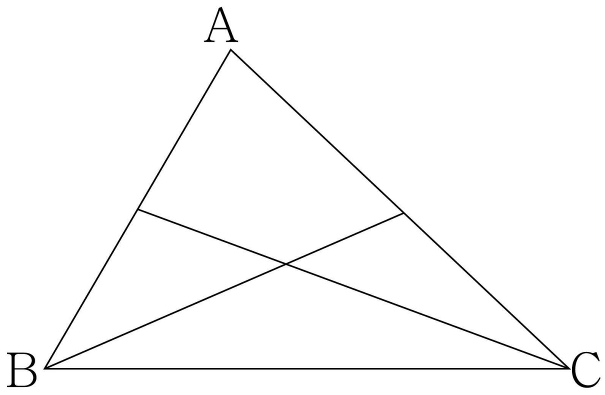
6. 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

집합 $A_n = \{x \mid (x-n)(x-2n+1)\}$에 대하여 $25 \in A_n$이면 $a_n = 1$이고, $25 \notin A_n$이면 $a_n = -1$이다.

$\sum_{k=1}^{m} a_k = -20$을 만족시키는 자연수 m의 값을 구하시오.

7. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 수열 $\{S_{2n-1}\}$은 공차가 -3인 등차수열이고, 수열 $\{S_{2n}\}$은 공차가 2인 등차수열이다. $a_2=1$일 때, a_8의 값을 구하시오.

8. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}$의 n등분점과 꼭짓점 C를 잇고, $\overline{AC}$의 n등분점과 꼭짓점 B를 잇는다. 이때, 만들어지는 삼각형(△ABC도 포함)의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=2$인 다음 그림에서 $a_2=8$이다. a_5의 값을 구하여라.



9. 표본공간 S는 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이고 모든 근원사건의 확률은 같다. 사건 A가 $A=\{4, 8, 12\}$일 때, 사건 A와 독립이고 $n(A\cap X)=2$인 사건 X의 개수를 구하시오.
(단, $n(B)$는 집합 B의 원소의 개수를 나타낸다.)

10. 어떤 모집단에서 임의로 100명을 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{10}-c, \frac{1}{10}+c\right]$이었다. 같은 모집단에서 n명을 임의로 추출하여 구한 모비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $\left[\frac{1}{9}-s(n), \frac{1}{9}+s(n)\right]$이고 $s(n)=\frac{50}{81}c$이다. n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따를 때, $P(|Z|\le 1.96)=0.95$이다.)

추가 과제

1. 수렴하는 수열 $\{a_n\}$의 일반항이
$a_n = \sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn$일 때 $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하여라.
(단, k는 상수이다.)

2. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}-2n)=2$를 만족시키는 실수 x, y의 순서쌍 (x,y)를 좌표평면 위에 나타낼 때, 점 (x,y)가 나타내는 도형의 넓이는?

① 4π ② 6π ③ 8π
④ 10π ⑤ 12π

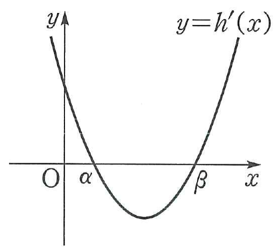
3. x에 대한 방정식 $2x^3+3x^2-12x+p=0$이 한 개의 양근과 서로 다른 두 개의 음근을 갖도록 하는 실수 p의 값의 범위는?

① $-20<p<0$ ② $-20<p<7$ ③ $-7<p<20$
④ $0<p<7$ ⑤ $0<p<20$

4. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4+4k^3x+3\geq 0$이 성립하도록 하는 정수 k의 개수를 구하여라.

추가 과제

5. 두 삼차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$로 정의할 때, 함수 $y=h'(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 다음 중 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나기 위한 필요충분조건인 것은?

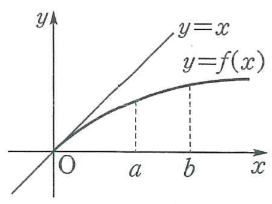


① $h(\alpha)>0$
② $h(\beta)<0$
③ $h(\alpha)h(\beta)=0$
④ $h(\alpha)>0$, $h(\beta)<0$
⑤ $h(\alpha)=0$, $h(\beta)<0$

6. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(2)=4$이고
$\lim_{h\to0}\frac{f(2+mh)-f(2-nh)}{h}=8$일 때, $m+n$의 값을 구하여라.

7. 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(a)=3$일 때, $\lim_{h\to0}\frac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$의 값을 구하여라.

8. 오른쪽 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $0<a<b$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $f(b)-f(a)>b-a$　　ㄴ. $\frac{f(a)}{a}>\frac{f(b)}{b}$

ㄷ. $f'(a)<f'(b)$　　ㄹ. $f'(\sqrt{ab})>f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄹ　③ ㄷ, ㄹ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

9. 정적분 $\int_0^3 \frac{|x^2-1|}{x+1}dx$ 의 값을 구하여라.

10. $\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-\frac{1}{3}$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

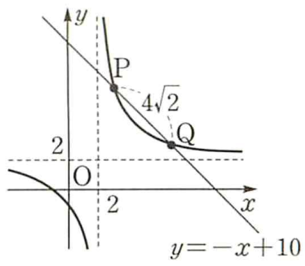
<보 기>

ㄱ. $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
ㄷ. $f(0)=2$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

11. 두 집합 $A=\left\{(x,\ y)\middle|y=\frac{2x-1}{x}\right\}$, $B=\{(x,\ y)|y=ax+2\}$에 대하여 $A\cap B=\varnothing$일 때, 실수 a의 값의 범위를 구하여라.

12. 오른쪽 그림과 같이 $y=\frac{k}{x-2}+2$의 그래프와 직선 $y=-x+10$이 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=4\sqrt{2}$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.
(단, 점 P는 점 Q보다 왼쪽에 있다.)



13. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=2,\ a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

로 정의될 때, $a_{30}-a_5$의 값은?

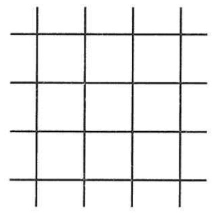
① $\frac{1}{30}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

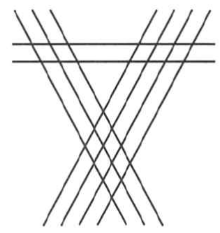
14. 수열 $\{a_n\}$이

$a_1=3,\ a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\ (n=1,\ 2.\ 3.\ \cdots)$로 정의될 때, a_{100}의 값을 구하여라.

15. 오른쪽 그림과 같이 가로 방향의 평행한 직선 4개와 세로 방향의 평행한 직선 4개가 각각 수직으로 만나고 있다. 직선 사이의 간격이 일정하다고 할 때, 이 직선으로 만들 수 있는 정사각형이 아닌 직사각형의 개수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 2개의 평행선, 3개의 평행선, 4개의 평행선이 만나고 있다. 이들 평행선으로 만들어지는 평행사변형이 아닌 사다리꼴의 개수를 구하여라.



추가 과제

17. 10 미만의 자연수 중에서 서로 다른 5개의 숫자를 뽑을 때, 홀수와 짝수를 각각 적어도 2개씩 뽑는 방법의 수를 구하여라.

18. 1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 택하여 네 자리의 비밀번호를 만들려고 한다. 홀수 2개와 짝수 2개로 이루어진 비밀번호의 개수를 구하여라.

19. 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열하여 네 자리 정수 $a_1a_2a_3a_4$를 만들 때, $a_i \neq i$를 만족시키는 정수의 개수는? (단, $i=1,\ 2,\ 3,\ 4$)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

20. 1, 2, 3, 4, 5가 각각 하나씩 적힌 5개의 농구공을 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5라 쓰여진 가방에 각각 1개씩 넣을 때, 2번 공은 A_1에 넣고, k번 공은 A_k에 넣지 않는 방법의 수는? (단, $k=3,\ 4,\ 5$)

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

21. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$a_n = \sqrt{9n^2+2n+1} - [\sqrt{9n^2+2n+1}]$

일때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

22. $\lim_{n\to\infty} \frac{5}{n+2}\left[\frac{n}{5}\right]$의 값을 구하여라.

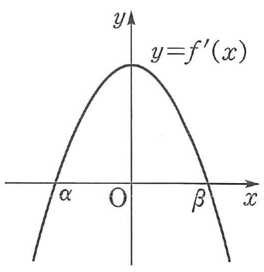
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

23. x에 대한 삼차방정식 $x^3-3x^2-9x+3+k=0$이 구간 $[-2,\ 1]$에서 적어도 한 개의 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 19

24. 오른쪽 그림은 삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 그래프이다. x에 대한 삼차방정식 $f(x)=k$의 실근의 개수에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, $f(0)=0$)



<보 기>

ㄱ. $k=f(\alpha)$이면 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(\alpha)<k<0$이면 서로 다른 두 개의 음근과 한 개의 양근을 갖는다.

ㄷ. $0<k<f(\beta)$이면 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ

④ ㄱ,ㄷ ⑤ ㄴ,ㄷ

25. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f(-2)=a-2$, $f(3)=a+4$이다. 방정식 $f(x)=0$이 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가질 때, 이 실근이 구간 $(-2,\ 3)$에 존재하도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.

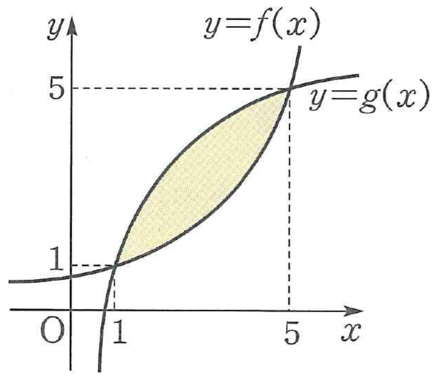
26. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 네 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 10)$, $(4,\ 20)$을 지날 때, 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^2$의 그래프는 구간 $(1,\ 4)$에서 적어도 몇 개의 교점을 갖는가?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

27. 함수 $f(x)=x^3+2(x\geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $\int_0^2 f(x)dx+\int_2^{10} g(x)dx$의 값은?

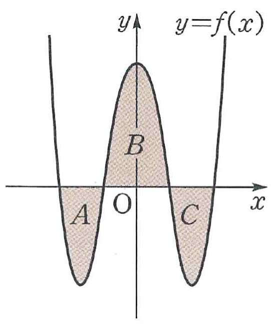
① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

28. 오른쪽 그림은 함수 $y=f(x)$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프이다. 두 그래프가 두 점 $(1,\ 1)$, $(5,\ 5)$에서 만나고 $\int_1^5 f(x)dx=9$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.



29. 곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 이 곡선 위의 점 $(-2,\ 0)$에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 할 때, $3S$의 값을 구하여라.

30. 오른쪽 그림과 같이 함수 $f(x)=(x^2-4)(x^2-k)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 세 도형의 넓이를 각각 A, B, C 라 하자.
A+C=B일 때, 상수 k의 값을 구하여라. (단, $0<k<4$)



31. $\sqrt{x^2}=x$일 때, $x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$의 최솟값은? (단, $x\neq 0$)

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{3}$
④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

32. $a>0,\ b>0,\ c>0$일 때, $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)$의 최솟값을 구하여라.

33. 두 곡선 $y=x^3+a^2x+2a$, $y=6x^2+8$이 서로 다른 세 점에서 만나고, 교점의 x좌표가 등차수열을 이룰 때, 공차 d는? (단, a는 상수이고, $d>0$이다.)

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2
④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

34. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=2^{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의할 때, 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 모두 만족시킨다.

(가) $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=124$
(나) $b_1=\dfrac{1}{16}b_5$

이 때, a_9의 값을 구하여라.

35. 7개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5를 일렬로 나열할 때, 3, 4, 5는 크기가 작은 것부터 순서대로 나열하는 방법의 수는?

① 90 ② 105 ③ 210
④ 420 ⑤ 1260

36. 7개의 문자 A, B, C, D, E, F, G 중에서 A, B를 포함하여 5개를 뽑아 일렬로 나열할 때, A와 B가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 360 ② 480 ③ 540
④ 600 ⑤ 720

37. 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르고 $\mathrm{P}(12 \le X \le 16) = \mathrm{P}(24 \le Y \le k)$일 때, 상수 k의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30
④ 32 ⑤ 34

38. 확률변수 W, X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(62,\ 6^2)$, $\mathrm{N}(64,\ 7^2)$을 따를 때,

$$a = \mathrm{P}(W \ge 65),\ b = \mathrm{P}(X \le 56),\ c = \mathrm{P}(Y \ge 70)$$

이라 하자. a, b, c의 대소를 비교하면?

① $a<b<c$ ② $a=b<c$ ③ $b<a<c$
④ $c<a=b$ ⑤ $c=b<a$

39. 모집단의 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. 이 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$의 평균을 구하여라.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	a	$\frac{1}{4}$	1

40. 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 4)$를 따르는 모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X}^2)$을 구하여라.

[난문현답 기출 정답]

1. ④
2. ④
3. ①
4. ①
5. ⑤
6. 125
7. 252
8. 288
9. 46
10. 16

[추가 과제 정답]

1) **정답** $-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

$k \geq 0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$이므로 $k<0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn\}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}+kn\}\{\sqrt{(n-2)(2n+1)}-kn\}}{\sqrt{(n-2)(2n+1)}-kn}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-k^2)n^2-3n-2}{\sqrt{2n^2-3n-2}-kn}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2-k^2)n-3-\dfrac{2}{n}}{\sqrt{2-\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}}-k}$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$2-k^2=0,\quad k^2=2 \quad \therefore k=-\sqrt{2}\ (\because k<0)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{-3}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

2) **정답** ③

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}-2n)$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}-2n)(\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}+2n)}{\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}+2n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(x^2+y^2)}{\sqrt{nx^2+ny^2+4n^2}+2n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{\dfrac{x^2}{n}+\dfrac{y^2}{n}+4}+2}$

$= \dfrac{x^2+y^2}{4} = 2$

$\therefore x^2+y^2=8$

따라서 점 (x,y)가 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{8}$인 원이므로 구하는 도형의 넓이는 8π이다.

3) **정답** ①

$2x^3+3x^2-12x+p=0$ 에서

$p=-2x^3-3x^2+12x$

$f(x)=-2x^3-3x^2+12x$ 로 놓으면

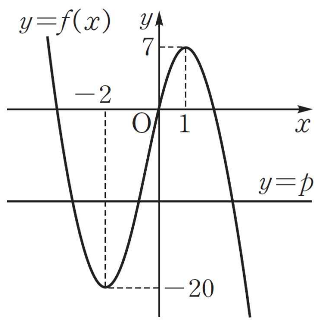
$f'(x)=-6x^2-6x+12=-6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$ 에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-20	↗	7	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $y=p$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 다른 두 개는 음수가 되는 실수 p 의 값의 범위는

$-20<p<0$



4) **정답** 3

(i) $k=0$일 때, 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(ii) $k\neq 0$일 때,

$f(x)=x^4+4k^3x+3$으로 놓으면

$f'(x)=4x^3+4k^3=4(x+k)(x^2-kx+k^2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-k\ (\because x^2-kx+k^2>0)$

함수 $f(x)$는 $x=-k$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-3k^4+3$이다.

x	$\cdots$	$-k$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-3k^4+3$	↗

모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이려면 $f(-k)\geq 0$이어야 하므로

$f(-k)=-3k^4+3\geq 0$

$k^4-1\leq 0,\ (k+1)(k-1)(k^2+1)\leq 0$

$\therefore -1\leq k<0$ 또는 $0<k\leq 1\ (\because k\neq 0)$

(i),(ii)에서 $-1\leq k\leq 1$이므로 구하는 정수 k는 $-1,\ 0,\ 1$의 3개다.

5) **정답** 4

주어진 그림에서 $h'(\alpha)=h'(\beta)=0$이고 $x=\alpha,\ x=\beta$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $h(x)$는 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소이다.

이때 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $h(\alpha)>0,\ h(\beta)<0$

6) **정답** 2

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+mh)-f(2-nh)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(2+mh)-f(2)\}-\{f(2-nh)-f(2)\}}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+mh)-f(2)}{mh}\cdot m+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-nh)-f(2)}{-nh}\cdot n$

$=mf'(2)+nf'(2)=(m+n)f'(2)$

$f'(2)=4$이므로 $4(m+n)=8 \qquad \therefore m+n=2$

7) **정답** 12

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a+h^2)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\{f(a+4h)-f(a)\}-\{f(a+h^2)-f(a)\}}{h}$

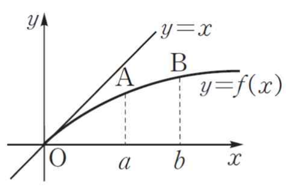
$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\cdot 4-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2}\cdot h$

$=4f'(a)-0\cdot f'(a)=4f'(a)$

$=4\cdot 3=12$

8) **정답** ②

오른쪽 그림과 같이



$\mathrm{A}(a,\ f(a)),\ \mathrm{B}(b,\ f(b))$라 하자.

ㄱ. 직선 AB의 기울기는 1보다 작으므로

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}<1$

이때 $b-a>0$이므로

$f(b)-f(a)<b-a$

ㄴ. $\dfrac{f(a)}{a}$는 원점과 점 A를 지나는 직선의 기울기이고, $\dfrac{f(b)}{b}$는 원점과 점 B를 지나는 직선의 기울기이므로

$\dfrac{f(a)}{a}>\dfrac{f(b)}{b}$

ㄷ. $f'(a)$는 점 A에서의 접선의 기울기이고, $f'(b)$는 점 B에서의 접선의 기울기이므로

$f'(a)>f'(b)$

ㄹ. $0<a<b$에 대하여 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$이고, x의 값이 클수록 곡선 $y=f(x)$의 접선의 기울기는 작아진다.

$\therefore f'(\sqrt{ab})>f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ 이다.

9) **정답** $\frac{5}{2}$

$|x^2-1|=\begin{cases} x^2-1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ -x^2+1 & (-1<x<1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_0^3 \frac{|x^2-1|}{x+1}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{-x^2+1}{x+1}dx+\int_1^3 \frac{x^2-1}{x+1}dx$$
$$=-\int_0^1 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx+\int_1^3 \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}dx$$
$$=-\int_0^1 (x-1)dx+\int_1^3 (x-1)dx$$
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_0^1+\left[\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^3=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

10) **정답** ③

ㄱ. 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^2-2x+1$
$f'(x)=2x-2$이므로
$f'(x)=0$에서 $x=1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 최솟값이 $f(1)=0$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$

ㄷ. $f(0)=1$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다

11) [정답] $a\ge 0$

$A\cap B=\varnothing$이므로 $y=\frac{2x-1}{x}$의 그래프와 직선 $y=ax+2$가 만나지 않는다.

$y=\frac{2x-1}{x}=-\frac{1}{x}+2$의 그래프는

$y=-\frac{1}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

이때 직선 $y=ax+2$는 a의 값에 관계없이 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 위의 그림에서 실수 a의 값의 범위는 $a\ge 0$

12) [정답] 5

함수 $y=\frac{k}{x}$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $y=\frac{k}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 함수 $y=\frac{k}{x-2}+2$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 직선 $y=x$, $y=-x+10$은 서로 수직이므로 두 점 P, Q도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 즉 점 P의 좌표를 $(a,\ -a+10)$이라 하면 점 Q의 좌표는 $(-a+10,\ a)$이다. • 30%

$\overline{PQ}=4\sqrt{2}$에서 $\sqrt{2(2a-10)^2}=4\sqrt{2}$

$(2a-10)^2=16,\qquad 2a-10=\pm 4$

$\therefore a=3$ 또는 $a=7$

그런데 $a<-a+10$이므로 $a=3$ • 40%

즉 P$(3,\ -7)$, Q$(7,\ 3)$이고 점 Q$(7,\ 3)$은 $y=\frac{k}{x-2}+2$의 그래프위의 점이므로

$3=\frac{k}{7-2}+2,\qquad \frac{k}{5}=1\qquad \therefore k=5$ • 30%

13) [정답] ②

$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$의 n에 1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2-a_1=1-\frac{1}{2}$

$a_3-a_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$a_4-a_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\vdots$

$+\big)\ a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$

$a_n-a_1=1-\frac{1}{n}$

$\therefore a_n=a_1+\left(1-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}$

$\therefore a_{20}-a_5=\left(3-\frac{1}{30}\right)-\left(3-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{6}$

14) [정답] 12

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$
$$=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=a_n+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$의 n에

1, 2, 3, $\cdots$, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 더하면

$a_2=a_1+\sqrt{2}-\sqrt{1}$

$a_3=a_2+\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$a_4=a_3+\sqrt{4}-\sqrt{3}$

$\vdots$

$+\big)\ a_n=a_{n-1}+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

$a_n=a_1+\sqrt{n}-\sqrt{1}=3+\sqrt{n}-1=\sqrt{n}+2$

$\therefore a_{100}=\sqrt{100}+2=12$

15) **정답** (1) 22

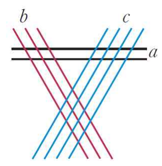
가로 방향의 평행한 직선 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 직사각형의 총 개수는

$_4C_2\cdot{}_4C_2=6\cdot 6=36$ • 40 %

따라서 정사각형이 아닌 직사각형의 개수는

$36-14=22$ • 20 %

16) **정답** 72



오른쪽 그림과 같이 2개의 평행선, 3개의 평행선, 4개의 평행선을 각각 a, b, c라 하면 평행사변형이 아닌 사다리꼴이 결정되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) a에서 2개, b, c에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

$_2C_2\cdot{}_3C_1\cdot{}_4C_1=1\cdot 3\cdot 4=12$

(ⅱ) b에서 2개, a, c에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

$_3C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_4C_1=3\cdot 2\cdot 4=24$

(ⅲ) c에서 2개, a, b에서 각각 1개씩을 택하는 경우의 수는

$_4C_2\cdot{}_2C_1\cdot{}_3C_1=6\cdot 2\cdot 3=36$

이상에서 구하는 사다리꼴의 개수는

$12+24+36=72$

17) **정답** 100

홀수와 짝수를 각각 적어도 2개씩 뽑을 때, 홀수의 개수를 a, 짝수의 개수를 b라 하면 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 3)$, $(3,\ 2)$

10 미만의 자연수 중에서 홀수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개, 짝수는 2, 4, 6, 8의 4개이므로

(ⅰ) 홀수 2개, 짝수 3개를 뽑는 방법의 수는

$_5C_2\cdot{}_4C_3=10\cdot 4=40$

(ⅱ) 홀수 3개, 짝수 2개를 뽑는 방법의 수는

$_5C_3\cdot{}_4C_2=10\cdot 6=60$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$40+60=100$

18) **정답** 1440

홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 2개를 선택하는 방법의 수는

$_5C_2=10$

짝수 2, 4, 6, 8의 4개 중에서 2개를 선택하는 방법의 수는

$_4C_2=6$

홀수 2개와 짝수 2개를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$4!=24$

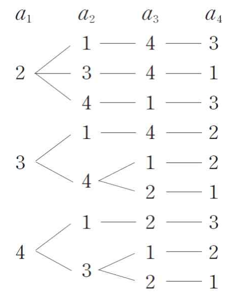
따라서 비밀 번호의 개수는

$10\cdot 6\cdot 24=1440$

19) **정답** ①

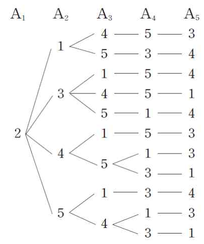
$a_1\ne 1$이므로 a_1이 2, 3, 4인 경우에 대하여 a_2, a_3, a_4를 각각 구해보면 오른쪽과 같다.

따라서 구하는 정수의 개수는 9이다.



20) **정답** ④

2번 공은 A_1에 넣고 k번 공은 A_k에 넣지 않는 경우를 구해 보면 오른쪽과 같다.
따라서 구하는 방법의 수는 11이다.



21) **정답** ③

$\sqrt{9n^2} < \sqrt{9n^2+2n+1} < \sqrt{9n^2+6n+1}$ 이므로

$3n < \sqrt{9n^2+2n+1} < 3n+1$

$\therefore \left[\sqrt{9n^2+2n+1}\right] = 3n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n^2+2n+1}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+2n+1}+3n\right)}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{\sqrt{9n^2+2n+1}+3n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}$$

$$= \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}$$

22) **정답** 1

$\frac{n}{5}-1 < \left[\frac{n}{5}\right] \le \frac{n}{5}$ 이므로

$$\frac{5}{n+2}\left(\frac{n}{5}-1\right) < \frac{5}{n+2}\left[\frac{5}{n}\right] \le \frac{5}{n+2}\cdot\frac{n}{5}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+2}\left(\frac{n}{5}-1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+2}\cdot\frac{n}{5} = 1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+2}\left[\frac{n}{5}\right] = 1$$

23) **정답** 4

$x^3-3x^2-9x+3+k=0$에서 $-x^3+3x^2+9x-3=k$

$f(x) = -x^3+3x^2+9x-3$으로 놓으면

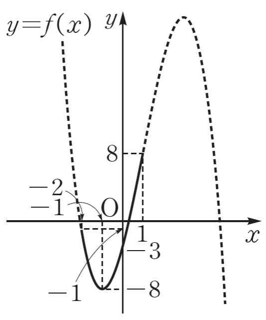
$f'(x) = -3x^2+6x+9 = -3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1 (\because -2 \le x \le 1)$

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	↘	-8	↗	8

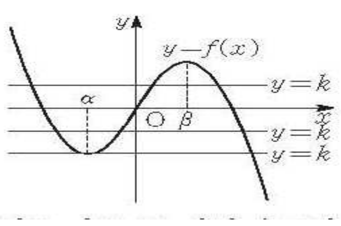
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 방정식 $f(x)=k$가 구간 $[-2,\ 1]$에서 적어도 한 개의 실근을 가지려면 $-8 \le k \le 8$

따라서 정수 k는 $-8,\ -7,\ -6,\ \cdots,\ 8$의 17개이다.



24) **정답** ⑤

주어진 그래프에서 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대이고 $f(0)=0$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $k=f(\alpha)$이면 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(\alpha)<k<0$이면 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 개의 음근과 한 개의 양근을 갖는다.

ㄷ. $0<k<f(\beta)$이면 방정식 $f(x)=k$는 서로 다른 두 개의 양근과 한 개의 음근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ,ㄷ이다.

25) **정답** 5

사이값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$이 구간 $(-2,\ 3)$에서 실근을 가지려면 $f(-2)f(3)<0$이어야 하므로

$(a-2)(a+4)<0 \ \therefore\ -4<a<2$

따라서 구하는 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1$의 5개이다.

26) **정답** ②

$g(x)=f(x)-x^2$으로 놓으면 함수 $g(x)$는 연속함수이고

$g(1)=f(1)-1=2-1=1>0$,

$g(2)=f(2)-4=3-4=-1<0$

$g(3)=f(3)-9=10-9=1>0$

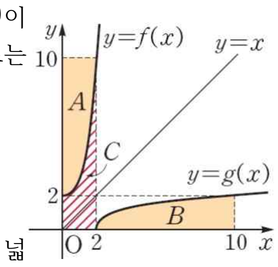
$g(4)=f(4)-16=20-16=4>0$

이므로 사이값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 구간 $(1,\ 2)$, $(2,\ 3)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=x^2$의 그래프는 구간 $(1,\ 4)$에서 적어도 2개의 교점을 갖는다.

27) **정답** ⑤

함수 $f(x)=x^3+2\ (x \ge 0)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



오른쪽 그림에서

$(A$의 넓이$)=(B$의 넓이$)$

이므로

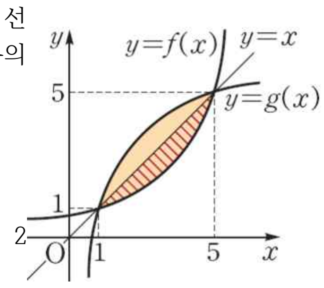
$\int_0^2 f(x)dx + \int_2^{10} g(x)dx =$(C의 넓이)+(B의 넓이)

=(C의 넓이)+(A의 넓이)

$=2\cdot 10=20$

28) **정답** 6

오른쪽 그림과 같이 구하는 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되고, 빗금친 부분의 넓이는



$\frac{1}{2}\cdot(5^2-1^2)-\int_1^5 f(x)dx$

$=12-9=3$

따라서 구하는 넓이는 빗금친 부분의 넓이의 2배이므로 $2\cdot 3=6$이다.

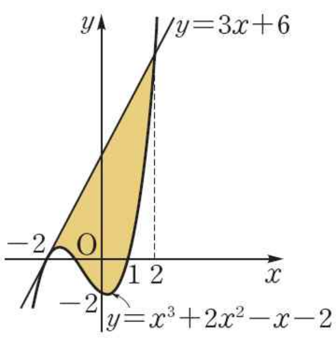
29) **정답** 64

$y=x^3+2x^2-x-2$에서 $y'=3x^2+4x-1$이므로 곡선 위의 점$(-2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)-1=3$이고, 접선의 방정식은

$y-0=3(x+2)$

$\therefore\ y=3x+6$



곡선 $y=x^3+2x^2-x-2$와 직선 $y=3x+6$의 교점의 x좌표는

$x^3+2x^2-x-2=3x+6$에서

$x^3+2x^2-4x-8=0$, $(x+2)^2(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

따라서 위의 그림의 색칠한 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-2}^{2}\{(3x+6)-(x^3+2x^2-x-2)\}dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(-x^3-2x^2+4x+8)dx$$

$$=2\int_0^2(-2x^2+8)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2$$

$$=2\cdot\frac{32}{3}=\frac{64}{3}$$

$$\therefore\ 3S=3\cdot\frac{64}{3}=64$$

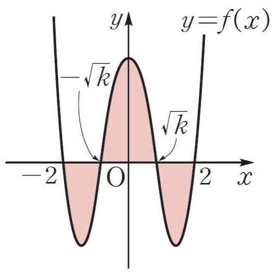
30) **정답** $\frac{4}{5}$

$f(x)$는 우함수이고, $A+C=B$이므로

$\frac{B}{2}=A=C$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축, y축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 (x^2-4)(x^2-k)dx=0$$
$$\int_0^2 \{x^4-(4+k)x^2+4k\}dx=0$$
$$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{4+k}{3}x^3+4kx\right]_0^2=0$$
$$\frac{32}{5}-\frac{8}{3}(4+k)+8k=0$$
$$80k=64 \qquad \therefore\ k=\frac{4}{5}$$



31) [정답] ④

$\sqrt{x^2}=x$, $x\neq 0$ 에서 $x>0$, $x^2+1>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$x+\frac{1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}=\frac{x^2+1}{x}+\frac{4x}{x^2+1}$$
$$\geq 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}\cdot\frac{4x}{x^2+1}}$$
$=4$ (단, 등호는 $x=1$일 때 성립)

따라서 $x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{4x}{x^2+1}$ 의 최솟값은 4 이다.

32) [정답] 4

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)=\{a+(b+c)\}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}\right)$$
$$=1+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}+1$$
$$=2+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}$$

$a>0,\ b>0,\ c>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2+\frac{a}{b+c}+\frac{b+c}{a}\geq 2+2\sqrt{\frac{a}{b+c}\cdot\frac{b+c}{a}}=4$$
(단, 등호는 $a=b+c$ 일 때 성립)

따라서 주어진 식의 최솟값은 4 이다.

33) [정답] ②

두 곡선 $y=x^3+a^2x+2a,\ y=6x^2+8$의 교점의 x좌표는 방정식 $x^3+a^2x+2a=6x^2+8$, 즉 $x^3-6x^2+a^2x+2(a-4)=0$의 세 실근과 같다.

이 방정식의 세 실근을 $\alpha-d,\ \alpha,\ \alpha+d$로 놓으면 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=6$ …… ㉠

$(\alpha-d)\alpha+\alpha(\alpha+d)+(\alpha+d)(\alpha-d)=a^2$ …… ㉡

$(\alpha-d)\alpha(\alpha+d)=-2(a-4)$ …… ㉢

㉠에서 $3\alpha=6 \quad \therefore \alpha=2$

$\alpha=2$를 ㉡에 대입하면

$(2-d)\cdot 2+2(2+d)+(2+d)(2-d)=a^2$

$\therefore 12-d^2=a^2$ …… ㉣

또 $\alpha=2$를 ㉢에 대입하면

$(2-d)\cdot 2\cdot(2+d)=-2(a-4)$

$\therefore a=d^2$ …… ㉤

㉤을 ㉣에 대입하면 $12-d^2=d^4$

$d^4+d^2-12=0,\quad (d^2+4)(d^2-3)=0$

$d^2+4>0$이므로 $d^2=3 \quad \therefore d=\sqrt{3}\ (\because d>0)$

34) [정답] 10

[전략] $b_n=2^{a_n}$임을 이용하여 조건 (가)의 주어진 식을 a_n에 대한 식으로 나타낸다.

[풀이] $b_n=2^{a_n}$이므로 조건 (나)에서

$2^{a_1}=\dfrac{1}{16}\cdot 2^{a_5},\ 16\cdot 2^{a_1}=2^{a_5}$

즉 $a_1+4=a_5$이므로 $a_5-a_1=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_1+4d)-a_1=4,\ 4d=4 \quad \therefore\ d=1$

따라서 $a_n=a_1+(n-1)\cdot 1$이므로 조건 (가)에서

$2^{a_1}+2^{a_2}+2^{a_3}+2^{a_4}+2^{a_5}=124$

$2^{a_1}+2^{a_1+1}+2^{a_1+2}+2^{a_1+3}+2^{a_1+4}=124$

$2^{a_1}(1+2^1+2^2+2^3+2^4)=124$

$2^{a_1}\cdot\dfrac{1\cdot(2^5-1)}{2-1}=124,\ 2^{a_1}=4 \quad \therefore\ a_1=2$

$\therefore\ a_9=a_1+8d=2+8=10$

35) **정답** ③

3, 4, 5의 순서가 정해져 있으므로 3, 4, 5를 모두 x로 생각하여 7개의 문자 1, 1, 2, 2, x, x, x를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 3, 두 번째 x는 4, 세 번째 x는 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 3!}=210$$

36) **정답** ⑤

[전략] A, B를 제외한 문자를 먼저 나열한 후 A, B를 나열한다.

[풀이]

A, B를 제외한 5개의 문자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

일렬로 나열한 문자들 사이사이 및 양 끝의 4개의 자리에 A, B를 나열하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\cdot 12=720$

37) [정답] ④

확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(10,\ 2^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따르므로

$$Z_X=\frac{X-10}{2},\ Z_Y=\frac{Y-20}{4}$$

으로 놓으면 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(12\leq X\leq 16)=\mathrm{P}(24\leq Y\leq k)$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{12-10}{2}\leq Z_X\leq\frac{16-10}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{24-20}{4}\leq Z_Y\leq\frac{k-20}{4}\right)$$
$$\therefore\ \mathrm{P}(1\leq Z_X\leq 3)=\mathrm{P}\left(1\leq Z_Y\leq\frac{k-20}{4}\right)$$

따라서 $\dfrac{k-20}{4}=3$이므로

$k-20=12\ \therefore\ k=32$

38) [정답] ②

$Z_W=\dfrac{W-60}{5},\ Z_X=\dfrac{X-62}{6},\ Z_Y=\dfrac{Y-64}{7}$ 로 놓으면

Z_W, Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$$a=\mathrm{P}(W\geq 65)=\mathrm{P}\left(Z_W\geq\frac{65-60}{5}\right)=\mathrm{P}(Z_W\geq 1),$$
$$b=\mathrm{P}(X\leq 56)=\mathrm{P}\left(Z_X\leq\frac{56-62}{6}\right)$$
$$=\mathrm{P}(Z_X\leq -1)=\mathrm{P}(Z_X\geq 1),$$
$$c=\mathrm{P}(Y\geq 70)=\mathrm{P}\left(Z_Y\geq\frac{70-64}{7}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\geq\frac{6}{7}\right)$$

이때 $\mathrm{P}(Z_W\geq 1)=\mathrm{P}(Z_X\geq 1)<\mathrm{P}\left(Z_Y\geq\dfrac{6}{7}\right)$이므로

$a=b<c$

39) [정답] 2

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore\ a=\frac{1}{2}$$

이때 모집단의 평균은

$$\mathrm{E}(X)=1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{4}=2$$

따라서 표본평균 $\overline{X}$의 평균은

$$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=2$$

40) [정답] 102

모평균이 10, 모분산이 4, 표본의 크기가 2이므로

$$\mathrm{E}(\overline{X})=10,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{2}=2$$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X}^2) = \mathrm{V}(\overline{X}) + \{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2 = 2 + 10^2 = 102$

제 5 회

1. 2009년 3월 교육청
2. 2014년 6월 평가원
3. 2016년 9월 평가원
4. 2015년 11월 교육청
5. 2013년 경찰대
6. 2007년 3월 교육청
7. 2009년 6월 평가원
8. 2011년 경찰대
9. 2006년 수능
10. 2006년 10월 교육청

1. 수열 $\{a_n\}$이

$$a_1=1,\ pa_{n+1}=qa_n+1\ \ (n=1, 2, 3, \cdots)$$

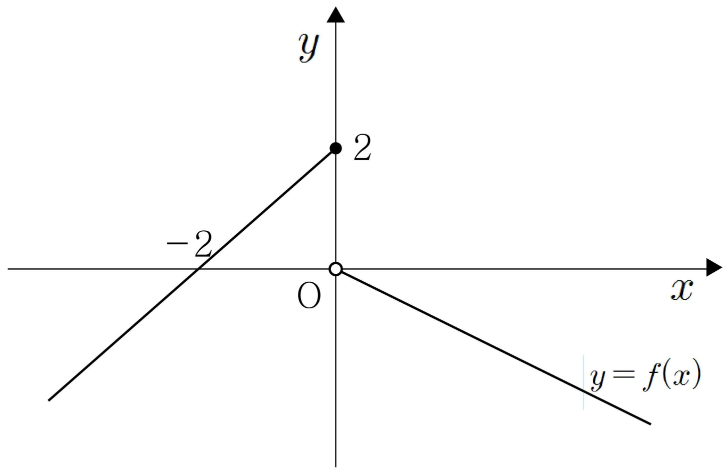
일 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 0이 아닌 실수이다.)

ㄱ. $p=q$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.
ㄴ. $p\neq q$일 때, 수열 $\left\{a_n-\dfrac{1}{p-q}\right\}$은 등비수열이다.
ㄷ. $-1<\dfrac{q}{p}<1$일 때, 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+2 & (x\leq 0) \\ -\dfrac{1}{2}x & (x>0)\end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 $a_{n+1}=f(f(a_n))(n\geq 1)$을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?



① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ 1
④ $\dfrac{4}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{3}$

3. 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 함수

$$y=x^4-4x^3+10x-30,\ \ y=2x+2$$

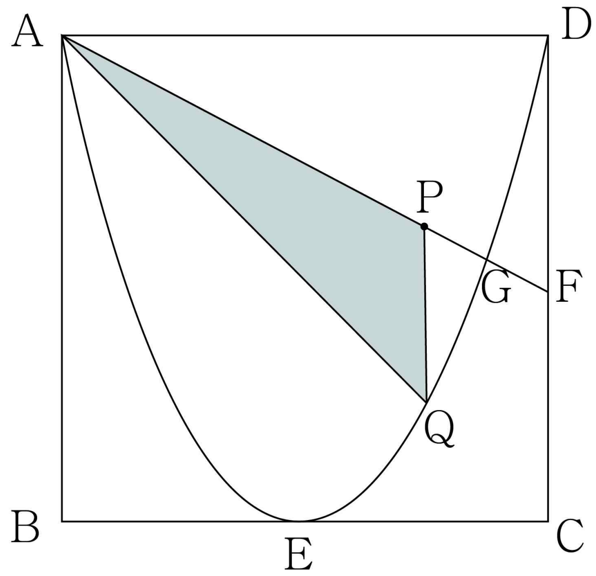
의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 점 A와 점 B 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$$\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\times\lim_{h\to 0+}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\le 0$$

을 만족시키는 모든 실수 t의 값의 합은?

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

4. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD에서 선분 BC와 선분 CD의 중점을 각각 E, F라 하자. 점 E를 꼭짓점으로 하고, 두 점 A, D를 지나는 포물선과 선분 AF가 만나는 점을 G라 하자. 선분 AG 위를 움직이는 점 P를 지나고 직선 AB와 평행한 직선이 포물선과 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 AQP의 넓이의 최댓값은? (단, 점 P는 점 A와 점 G가 아니다.)



① $\frac{85}{27}$ ② $\frac{343}{108}$ ③ $\frac{173}{54}$
④ $\frac{349}{108}$ ⑤ $\frac{88}{27}$

5. 다음을 만족시키는 한 자리 자연수 a의 개수는?

방정식 $x^3-x^2-ax-3=0$이 서로 다른 세 실근을 가진다.

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

6. 그림과 같이 각 단의 부피가 일정한 비율로 감소하는 8단 케이크를 만들었다. 이 케이크의 제 2단의 부피를 p, 제 4단의 부피를 q라 할 때, 제 8단의 부피를 p와 q로 나타낸 것은?

① $\dfrac{q^3}{p^2}$　② $\dfrac{q^2}{p^2}$　③ $\dfrac{p^3}{q^2}$　④ $\dfrac{p^3}{q}$　⑤ $\dfrac{p^2}{q}$

7. 부등식 $1 < m^{n-5} < n^{m-8}$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여

$$A = m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

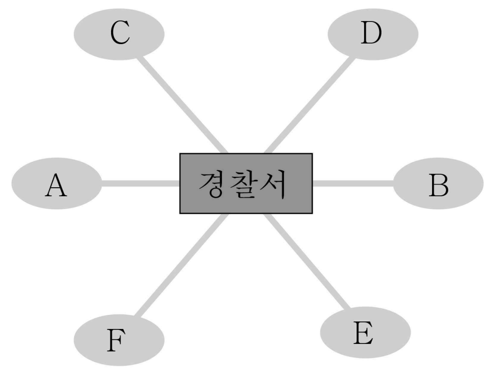
$$B = m^{-\frac{1}{m-8}} \cdot n^{\frac{1}{n-5}}$$

$$C = m^{\frac{1}{m-8}} \cdot n^{-\frac{1}{n-5}}$$

이라고 할 때, A, B, C의 대소 관계로 옳은 것은?

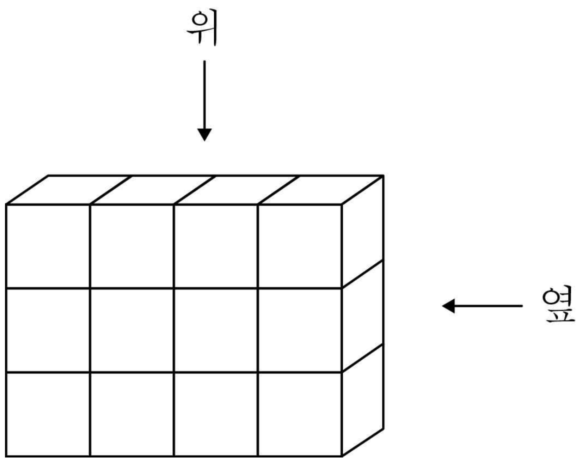
① $A > B > C$
② $A > C > B$
③ $B > A > C$
④ $B > C > A$
⑤ $C > A > B$

8. 아래 그림과 같이 A, B, C, D, E, F의 6개의 구역이 경찰서를 중심으로 하여 길로 연결되어 있다. A와 B의 넓이는 각각 4km^2이고 C, D, E, F의 넓이는 각각 2km^2이다.
2명의 경찰관이 이 6개의 구역을 넓이의 합이 같아지도록 2부분으로 나누어 1부분씩을 맡고, 각자 맡은 모든 구역을 순서를 정하여 순찰하는 방법의 수는?
(단, 1개의 구역을 나누지는 않는다.)

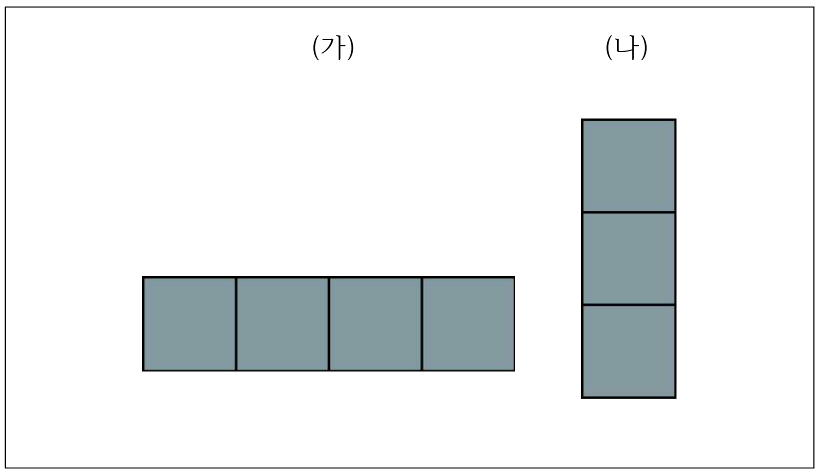


① 524 ② 528 ③ 532
④ 536 ⑤ 540

9. 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



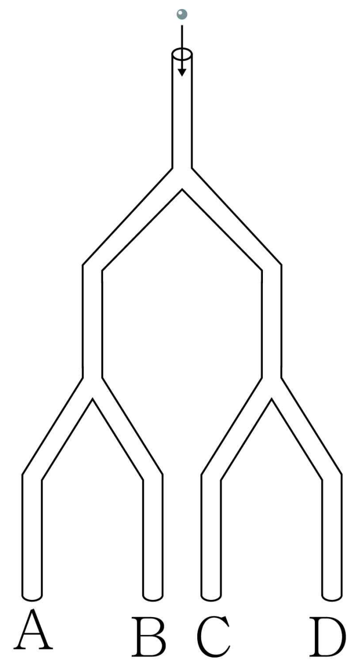
이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는?



① 30 ② 36 ③ 42
④ 48 ⑤ 54

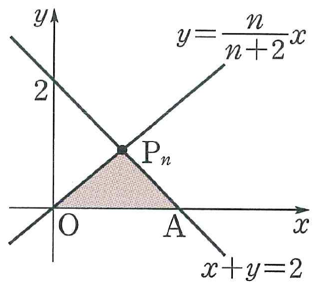
10. 아래 그림은 어떤 오락기를 단순화하여 그린 것이다. 이 오락기는 입구에서 공을 넣으면 A, B, C, D 중 어느 한 곳을 지나면서 그 위치의 꺼져 있는 전등은 켜지고, 켜져 있는 전등은 꺼지도록 되어 있다.

예를 들어 전구가 모두 꺼진 상태에서 공을 두 번 넣어 두 번 모두 A를 지나면 A위치의 전등은 켜졌다 꺼지고, 각각 A, B를 지나면 A, B 두 위치에 있는 전등은 모두 켜지게 된다. 이와 같이 공이 지날 때마다 전등이 켜지거나 꺼지기를 반복하다가 A, B, C, D 네 곳 모두 전등이 켜지면 게임은 끝난다. 여섯 번째 공을 넣었을 때 이 게임이 끝나게 될 확률을 $\frac{a}{b}$라고 하자. (a, b는 서로소인 자연수). 이때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, 처음 상태는 전등이 모두 꺼져 있으며, 갈림길에서 양쪽 방향으로 공이 지나갈 확률은 서로 같다.)



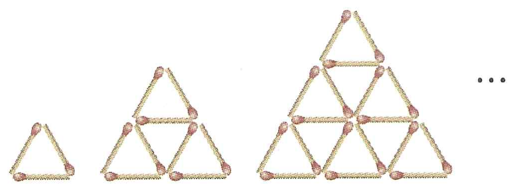
추가 과제

1. 자연수 n에 대하여 오른쪽 그림과 같이 두 직선 $x+y=2$와 $y=\frac{n}{n+2}x$의 교점을 P_n이라 하고, 직선 $x+y=2$가 x축과 만나는 점을 A라 하자. 삼각형 OAP_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{7}{4}$ ⑤ 2

2. 길이가 1인 성냥개비를 이용하여 다음 그림과 같이 정삼각형을 만들어 나가려고 한다.



한 변의 길이가 n인 정삼각형에서 한 변의 길이가 1인 정삼각형의 개수를 a_n, 성냥개비의 총 개수를 b_n이라 하자.

이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{a_n}$의 값을 구하여라.

3. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, $g(x)$의 치역은 $f(x)$의 정의역에 포함된다.)

<보 기>

ㄱ. $f(x)$와 $f(x)+g(x)$가 연속함수이면 $g(x)$도 연속함수이다.
ㄴ. $f(x)$와 $f(x)g(x)$가 연속함수이면 $g(x)$도 연속함수이다.
ㄷ. $f(x)$와 $g(x)$가 연속함수이면 $f(g(x))$도 연속함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 두 함수

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases},\quad g(x)=2x^2-1$$

에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$가 불연속이 되는 모든 x의 값의 곱은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

5. 함수 $f(x)=|x-1|(x+a)$가 $x=1$에서 미분가능할 때, $a+f'(1)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

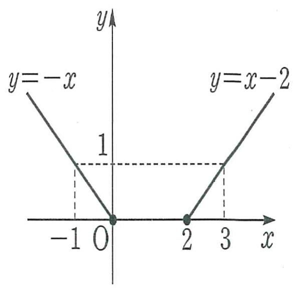
6. 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$(x-5)f(x)=2x^2+ax+5$$

를 만족시킬 때, $f'(5)$의 값은?

① 2 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

7. 오른쪽 그림은 $x \le 0$에서 정의된 함수 $y=-x$와 $x \ge 2$에서 정의된 함수 $y=x-2$의 그래프이다. $0 \le x \le 2$에서 정의된 함수 $y=a(x-1)^2+b$의 그래프를 이용하여 연결한 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 미분가능하도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$의 값을 구하여라.



8. 함수 $f(x)=x^2+x+1$이 모든 실수 x에 대하여
$f(x+h)=f(x)+hf'(x+kh)$
를 만족시킬 때, 상수 k의 값은? (단, $h \ne 0$)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ 1 ⑤ 2

9. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+ax^2+bx+2$가 $x<1$또는 $x>3$에서 증가하고, $1<x<3$에서 감소할 때, 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하여라.

10. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+1$이 구간 $(1,\ 2)$에서 감소하고, 구간 $(3,\ \infty)$에서 증가하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11. 실수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B가

$A=\{x|f(x)>0\}$, $B=\{x|g(x)>0\}$

일 때, 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} f(x)\le 0 \\ g(x)\le 0 \end{cases}$ 의 해의 집합을 A, B로 나타낸 것은?

① $A\cup B$ ② $A\cap B^C$ ③ $A^C\cap B$
④ $(A\cup B)^C$ ⑤ $(A\cap B)^C$

12. 집합 $A=\{x\,|\,x$는 n 이하의 자연수$\}$이고 집합 B는 집합 A의 모든 부분집합만을 원소로 갖는 집합이다. 집합 B의 부분집합의 개수가 256일 때, 자연수 n의 값을 구하여라.

추가 과제

13. 자연수 n에 대하여 등식

$$1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot 1$$
$$=\frac{n(n+1)(an+b)}{6}$$

가 성립할 때, $a+2b$의 값은?(단, a, b는 자연수)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

14. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_n=\dfrac{n^3+n^2+3}{n^2+n}$일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{10}a_k$의 값은?

① $\dfrac{615}{11}$ ② $\dfrac{625}{11}$ ③ $\dfrac{635}{11}$
④ $\dfrac{291}{5}$ ⑤ $\dfrac{293}{5}$

15. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f를 a는 e보다 앞에 오고, b는 d보다 앞에 오도록 일렬로 나열하는 방법의 수는?

① 150 ② 180 ③ 210
④ 240 ⑤ 270

16. 6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3중 4개를 택하여 만들 수 있는 3의 배수의 개수를 구하여라.

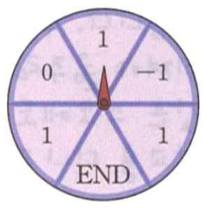
17. 똑같은 장미 8송이와 똑같은 국화 6송이를 A, B, C 세 사람에게 나누어 주려고 한다. 이때 세 사람이 장미와 국화를 모두 한 송이 이상씩은 받도록 나누어 주는 방법의 수를 구하여라.

18. 프로 농구 챔피언 결정전은 7번 경기를 해서 먼저 4번을 이기면 우승을 한다. 실력이 같은 정도로 기대되는 두 팀 H, K가 프로 농구 챔피언 결정전에서 맞붙게 되었을 때, 여섯 번째 경기에서 우승팀이 결정될 확률은? (단, 비기는 경우는 없다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{5}{16}$ ③ $\frac{3}{8}$
④ $\frac{7}{16}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

19. 이길 확률이 같은 두 사람 A, B가 게임을 하여 먼저 5번 이기는 사람이 상금을 모두 갖기로 하였다. 5번의 게임에서 A가 3번, B가 2번 이겼을 때, A가 상금을 모두 가질 확률을 구하여라. (단, 비기는 경우는 없다.)

20. 오른쪽 그림과 같이 6등분된 원판에 -1, 0, 1, END가 적혀 있다. 이 원판을 회전시켜 다음 규칙에 따라 수직선 위의 원점에 있는 점 P를 움직이는 시행을 최대 4번 할 수 있다.



(가) 화살표가 1을 가리키면 점 P는 양의 방향으로 1만큼 움직인다.
(나) 화살표가 -1을 가리키면 점 P는 음의 방향으로 1만큼 움직인다.
(다) 화살표가 0을 가리키면 점 P는 움직이지 않는다.
(라) 화살표가 END를 가리키면 시행을 멈춘다.

점 P의 좌표가 2인 상황에서 시행이 끝났을 때, 마지막 시행에서 화살표가 END를 가리켰을 확률은?
(단, 화살표는 경계선에서 멈추지 않는다.)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{9}{48}$ ③ $\frac{7}{27}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

추가 과제

21. 2 이상의 자연수 n에 대하여 다항식 x^n을 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 $R_n(x)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{R_n(0)}{R_n(1)}$의 값을 구하여라.

22. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n=2^n+3^n$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}$의 값을 구하여라.

23. 두 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^2+2$일 때, 다음 중 실수 전체의 집합에서 연속인 함수는?

① $f(x)+g(x)$ ② $f(x)g(x)$ ③ $g(f(x))$
④ $f(g(x))$ ⑤ $\frac{f(x)}{g(x)}$

24. 두 함수

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x+2)^{n-1}},\ g(x)=2ax+1$$

에 대하여 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=-1$에서 연속일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

25. 다항함수 $f(x)$에 대하여

$$\int_1^4 \{3f'(x)-2x\}dx=3,\ f(1)=3$$

일 때, $f(4)$의 값은?

① -7 ② -3 ③ 1
④ 5 ⑤ 9

26. 등식

$$\int_0^a |3x^2-6x|dx=24$$

를 만족시키는 실수 a의 값은? (단, $a>2$)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

27. $0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt$의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ 3

28. 함수 $f(x)=x+2n$에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x tf(t)dt$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

추가 과제

29. 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=x(x+1),\ y=-x\left(x+\frac{1}{n}\right)$$

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\mathrm{S}_n$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{6}$

④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{24}$

30. 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이다. $F'(x)=f(x)$인 함수 $F(x)$에 대하여 곡선 $y=F(x)$와 두 직선 $x=1$, $x=5$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 A에서 직선 $x=5$에 내린 수선의 발을 C라 할 때, 다음 중 삼각형 ABC의 넓이와 값이 같은 것은? (단, $F(1)>0$)

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$ ② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{2}{n}$ ④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{8}{n}$

31. 함수 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 1) \\ -2x+4 & (x>1)\end{cases}$에 대하여

$f=f^1$, $f\circ f=f^2$, $f\circ f^2=f^3$, $\cdots$, $f\circ f^n=f^{n+1}$ 과 같이 정의할 때, $f^{100}\left(\frac{3}{2}\right)$의 값을 구하여라. (단, n은 자연수이다.)

32. 함수 $f(x)=-x+2$에 대하여

$f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=(f\circ f)(x)$,

$f_3(x)=(f\circ f\circ f)(x)$, $\cdots$

와 같이 정의할 때, $f_n(x)$를 구하여라. (단, n은 자연수이다.)

추가 과제

33. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = n^2 - 6n$일 때, $1 \le a_n \le 40$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 18　② 19　③ 20
④ 21　⑤ 22

34. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때,

$$S_n : T_n = (3n-4) : (n+2)$$

이다. 이때 $a_6 : b_6$을 가장 작은 자연수의 비로 나타내어라.

35. 서울의 어떤 지역에서는 국번 4자리를 포함하여 8자리의 전화번호를 사용하고 있다. 국번에 사용할 수 있는 숫자가 0, 2, 4, 6, 8일 때, 이 지역에서 사용할 수 있는 전화번호의 개수를 구하여라. (단, 국번의 첫 번째 자리의 숫자는 0이 아니고, 숫자를 중복하여 사용할 수 있다.)

36. 0, 0, 1, 2, 2, 2의 숫자가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드를 모두 이용하여 만들 수 있는 여섯 자리 정수 중에서 짝수의 개수는?

① 16　② 18　③ 28
④ 34　⑤ 36

37. 자연수 N에 대하여

$$N=9^2\cdot{}_5\mathrm{C}_1+9^3\cdot{}_5\mathrm{C}_2+9^4\cdot{}_5\mathrm{C}_3+9^5\cdot{}_5\mathrm{C}_4+9^6\cdot{}_5\mathrm{C}_5$$

일 때, N의 각 자리의 숫자의 합은?

① 45 ② 46 ③ 47
④ 48 ⑤ 49

38. $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+{}_8\mathrm{C}_1a_2+{}_8\mathrm{C}_2a_3+\cdots+{}_8\mathrm{C}_8a_9=3^p$일 때, 자연수 p의 값을 구하여라.

39. 표본공간 $S=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 사건 A, B가 $A=\{3,\ 4,\ 8\}$, $B=\{4,\ 5,\ 6\}$일 때, 사건 A, B와 모두 배반인 사건의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

40. 집합 $S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9\}$의 부분집합 중에서 임의로 한 집합 X를 택할 때,

$$2\in X,\ 4\in X,\ 6\notin X,\ 8\notin X$$

일 확률을 구하여라.

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. ⑤
2. ④
3. ④
4. ②
5. ④
6. ①
7. ①
8. ②
9. ②
10. 35

[추가 과제 정답]

1) **정답** ②

$y=\dfrac{n}{n+2}x$에서 $x=\dfrac{n+2}{n}y$이므로 이것을 $x+y=2$에 대입하면

$\dfrac{n+2}{n}y+y=2,\ \dfrac{2n+2}{n}y=2$

$\therefore\ y=\dfrac{n}{n+1}$

따라서 점 P_n의 y좌표가 $\dfrac{n}{n+1}$이므로

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot$(점 P_n의 y좌표)

$=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\dfrac{n}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=1$

2) **정답** 3

$a_1=1,\ a_2=1+3=4,\ a_3=1+3+5=9,\ \cdots$ 에서

$a_n=1+3+5+\cdots+(2n-1)$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}(2k-1)=2\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$b_1=3,\ b_2=3+6=9,\ b_3=3+6+9=18,\ \cdots$에서

$b_n=3+6+9+\cdots+3n$

$=\sum\limits_{k=1}^{n}3k=3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{3n^2+3n}{2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2b_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+3n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{3}{n}\right)=3$

3) **정답** ④

ㄱ. $f(x)+g(x)=h(x)$로 놓으면 $g(x)=h(x)-f(x)$ 이때 $f(x)$와 $h(x)$가 연속함수이므로 $g(x)$도 연속함수이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=0,\ g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge 0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$ 이면 $f(x)$와 $f(x)g(x)$는 연속함수이지만 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$로 놓으면 $g(x)$가 연속이므로 $b=g(a)$ 또 $f(x)$가 연속함수이므로

$\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=f(g(a))=f(b)$

따라서 $f(g(x))$도 연속함수이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

4) **정답** ②

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x^2-1)$이므로

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-1}{|2x^2-1|} & (2x^2-1\neq 0)\\ 0 & (2x^2-1=0)\end{cases}$$

$$\therefore\ (f\circ g)(x)=\begin{cases}1 & (2x^2-1>0)\\ 0 & (2x^2-1=0)\\ -1 & 0\,(2x^2-1<0)\end{cases}$$

즉 $(f\circ g)(x)$는 $2x^2-1=0$인 x값에서 불연속이므로

$2x^2=1,\ x^2=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 모든 x의 값의 곱은 $-\dfrac{1}{2}$이다.

5) **정답** ②

$f(x)=\begin{cases}(x-1)(x+a) & (x\ge 1)\\ -(x-1)(x+a) & (x<1)\end{cases}$ 이므로

$\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0+}(1+h+a)=1+a$

$\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim\limits_{h\to 0-}(-1-h-a)=-1-a$

$f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하므로 $1+a=-1-a$에서

$a=-1$

$\therefore\ f'(1)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$

$\therefore\ a+f'(1)=-1$

[참고] 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)=|x-k|g(x)$가 $x=k$에서 미분가능하면 $f'(k)=0$이다.

6) **정답** ①

$x\neq 5$일 때, $f(x)=\dfrac{2x^2+ax+5}{x-5}$

함수 $f(x)$는 $x=5$에서 미분가능하므로 $x=5$에서 연속이다.

즉 $f(5)=\lim\limits_{x\to 5}f(x)=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2+ax+5}{x-5}$의 값이 존재한다.

$x\to 5$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이다.

즉 $\lim\limits_{x\to 5}(2x^2+ax+5)=0$에서

$50+5a+5=0$ $\quad\therefore a=-11$

따라서 $x\neq 5$일 때,

$f(x)=\dfrac{2x^2-11x+5}{x-5}=\dfrac{(2x-1)(x-5)}{x-5}=2x-1$

$f(5)=\lim\limits_{x\to 5}f(x)=\lim\limits_{x\to 5}(2x-1)=9$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=2x-1$

이때 $f'(x)=2$이므로 $f'(5)=2$

7) **정답** 8

$f(x)=\begin{cases}-x & (x\le 0)\\ a(x-1)^2+b & (0\le x\le 2)\\ x-2 & (x\ge 2)\end{cases}$로 놓고 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 미분가능하려면 $x=0,\ x=2$에서 연속이어야 하므로

$f(0)=0,\ f(2)=0$

$a+b=0$ $\cdots\cdots$㉠ 30%

$f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 2a(x-1) & (0<x<2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$이고, $x=0,\ x=2$에서 미분계수가 존재해야 하므로

$f'(0)=-2a=-1,\ f'(2)=2a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$a=\dfrac{1}{2}$을 **㉠에 대입하면** $b=-\dfrac{1}{2}$ 50%

$\therefore \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=8$ 20%

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 6

8) **정답** ③

$f(x)=x^2+x+1$에서 $f'(x)=2x+1$

$f(x+h)=f(x)+hf'(x+kh)$에서

$(x+h)^2+(x+h)+1=x^2+x+1+h\{2(x+kh)+1\}$

$x^2+(2h+1)x+h^2+h+1=x^2+(2h+1)x+2kh^2+h+1$

위의 등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$h^2=2kh^2$

정답 & 해설

$h \neq 0$이므로 $\quad 1=2k \quad \therefore k=\dfrac{1}{2}$

9) **정답** -5

$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+ax^2+bx+2$에서

$f'(x)=x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 이차방정식 $f'(x)=0$의 두근은 1,3이다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-2a,\ 1\cdot 3=b$

$\therefore a=-2\ ,b=3$

$\therefore a-b=-5$

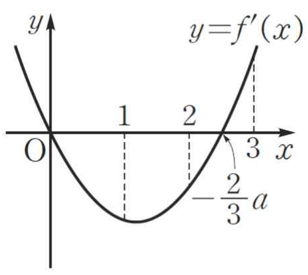
10) **정답** ②

$f(x)=x^3+ax^2+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$함수 $f(x)$가 구간 $(1,\ 2)$에서 감소하고, 구간 $(3,\infty)$에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\leq 0$, $x>3$일 때, $f'(x)\geq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$2\leq -\dfrac{2}{3}a\leq 3 \ \therefore -\dfrac{9}{2}\leq a\leq -3$

따라서 정수 a 는 $-4,\ -3$의 2개다.



11) [정답] ④

$A=\{x|f(x)>0\},\ B=\{x|g(x)>0\}$이므로

$A^C=\{x|f(x)\leq 0\},\ B^C=\{x|g(x)\leq 0\}$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} f(x)\leq 0 \\ g(x)\leq 0 \end{cases}$ 의 해의 집합은

$$\begin{aligned}\{x|f(x)\leq 0\text{이고}\,g(x)\leq 0\}&=\{x|f(x)\leq 0\}\cap\{x|\,g(x)\leq 0\}\\&=A^C\cap B^C\\&=(A\cup B)^C\end{aligned}$$

12)[정답] 3

집합 B의 부분집합의 개수가 256이고 $256=2^8$이므로 B의 원소의 개수는 8이다.

즉 집합 A의 부분집합의 개수가 8이고 $8=2^3$이므로 A의 원소의 개수는 3이다. 따라서 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$이므로 $n=3$

13) [정답] ②

수열 $1\cdot(2n-1),\ 2\cdot(2n-3),\ 3\cdot(2n-5),\ \cdots,\ n\cdot 1$의 제 k항을 a_k라 하면

$a_k=k\{2n-(2k-1)\}=(2n+1)k-2k^2$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}(\text{좌변})&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-2k^2\}\\&=(2n+1)\sum_{k=1}^{n}k-2\sum_{k=1}^{n}k^2\\&=(2n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

따라서 $a=2,\ b=1$이므로 $a+2b=4$

14) [정답] ③

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{n^3+n^2+3}{n^2+n}=\frac{n^2(n+1)+3}{n(n+1)}\\&=n+\frac{3}{n(n+1)}=n+3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\sum_{k=1}^{10}a_k&=\sum_{k=1}^{10}k+3\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\&=\frac{10\cdot 11}{2}+3\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}\\&=55+3\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{635}{11}\end{aligned}$$

15) **정답** ②

a, e와 b, d의 순서가 각각 정해져 있으므로 a, e를 모두 x로, b, d를 모두 y로 생각하여 6개의 문자 x, y, c, y, x, f를 일렬로 나열한 후 첫 번째 x는 a, 두 번째 x는 e로, 첫 번째 y는 b, 두 번째 y는 d로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$$

16) **정답** 10

각 자리의 숫자의 합이 3의 배수일 때 3의 배수가 된다.

6개의 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개를 택하여 그 합이

6이 되는 경우는 1, 1, 2, 2

9가 되는 경우는 2, 2, 2, 3 ● 30 %

(ⅰ) 4개의 숫자 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ ● 30 %

(ⅱ) 4개의 숫자 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\dfrac{4!}{3!}=4$ ● 30 %

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 3의 배수의 개수는

$6+4=10$ ● 10 %

17) **정답** 210

먼저 A, B, C 세 사람에게 장미와 국화를 각각 한 송이씩 나누어 주면 장미 5송이, 국화 3송이가 남는다.

이때 장미 5송이를 A, B, C 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

국화 3송이를 A, B, C 세 사람에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 방법의 수는

$21\cdot 10=210$

18) **정답** ②

여섯 번째 경기에서 우승팀이 결정되려면 우승팀은 5번의 경기에서 3번 이기고 마지막 여섯 번째 경기에서도 이겨야 한다. 이때 두 팀 H, K는 실력이 같은 정도로 기대되므로 H팀과 K팀이 이길 확률은 각각 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}$이다.

(ⅰ) H팀이 우승할 확률은 ${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{32}$

(ⅱ) K팀이 우승할 확률은 ${}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{32}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은 $\dfrac{5}{32}+\dfrac{5}{32}=\dfrac{5}{16}$

19) **정답** $\dfrac{11}{16}$

(ⅰ) 7번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째 게임과 7번째 게임에서 모두 이겨야 하므로 확률은

${}_2C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=\dfrac{1}{4}$ • 30 %

(ⅱ) 8번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째 게임과 7번째 게임 중에서 1번 이기고 8번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

${}_2C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$ • 30 %

(ⅲ) 9번째 게임에서 A가 상금을 모두 가지는 경우

A가 6번째 게임, 7번째 게임, 8번째 게임 중에서 1번 이기고 9번째 게임에서 이겨야 하므로 확률은

${}_3C_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$ • 30 %

이상에서 구하는 확률은 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{16}=\dfrac{11}{16}$ • 10 %

20) **정답** ④

점 P의 좌표가 2일 때 시행을 멈추는 경우의 확률은 다음과 같다.

(ⅰ) 첫 번째와 두 번째는 1을 가리키고, 세 번째는 END를 가리킬 확률은

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{24}$

(ⅱ) 세 번째까지는 1을 2번, 0을 1번 가리키고 네 번째에 END를 가리킬 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{48}$$

(ⅲ) 1을 3번, -1을 1번 가리킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{12}$$

(ⅳ) 1을 2번, 0을 2번 가리킬 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{24}$$

이상에서 모든 시행이 끝났을 때 점 P의 좌표가 2인 사건을 A, 마지막 시행에서 화살표가 END를 가리키는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}=\frac{9}{48}$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{24}+\frac{1}{48}=\frac{1}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{48}}=\frac{1}{3}$$

21) **정답** 2

x^n을 $(x-2)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_n(x)$라 하고, $R_n(x)=ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$x^n=(x-2)(x-3)Q_n(x)+ax+b$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2^n=2a+b$ ······ ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n=3a+b$ ······ ㉢

㉢$-$㉡을 하면 $a=3^n-2^n$

이것을 ㉡에 대입하면 $2^n=2(3^n-2^n)+b$

$\therefore\ b=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$

따라서 $R_n(x)=(3^n-2^n)x+3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$

$R_n(0)=3\cdot 2^n-2\cdot 3^n$, $R_n(1)=2\cdot 2^n-3^n$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{R_n(0)}{R_n(1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^n-2\cdot 3^n}{2\cdot 2^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=2$$

22) **정답** $\frac{2}{3}$

$n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n+3^n)-(2^{n-1}+3^{n-1})$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 2^n+\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot 3^n=\frac{1}{2}\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot 3^n$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot 2^n+\frac{2}{3}\cdot 3^n}{2^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2}{3}$$

23) **정답** ④

① $f(x)+g(x)=\frac{1}{x}+x^2+2$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② $f(x)g(x)=\frac{1}{x}(x^2+2)=x+\frac{2}{x}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ $g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+2$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ $f(g(x))=f(x^2+2)=\frac{1}{x^2+2}$이므로 $f(g(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x(x^2+2)}$

이 함수는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

24) **정답** 0

$$f(x)=(x+1)^2+\frac{(x+1)^2}{x^2+2x+2}+\frac{(x+1)^2}{(x^2+2x+2)^2}+\cdots$$

(ⅰ) $x=-1$일 때, $f(-1)=0$

(ⅱ) $x\neq -1$일 때,

함수 $f(x)$는 첫째항이 $(x+1)^2$, 공비가 $\frac{1}{x^2+2x+2}$인 무한등비급수의 합이다. 이때 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1>1$이므로

$$0<\frac{1}{x^2+2x+2}<1$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{(x+1)^2}{1-\frac{1}{x^2+2x+2}}=x^2+2x+2$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x+2 & (x\neq -1)\\ 0 & (x=-1)\end{cases}$

함수 $(g\circ f)(x)$가 $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to -1}g(f(x))=g(f(-1))$이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to -1}g(f(x))=\lim_{x\to -1}g(x^2+2x+2)$$

$$=\lim_{x\to -1}\{2a(x^2+2x+2)+1\}=2a+1$$

이고 $g(f(-1))=g(0)=1$이므로 $2a+1=1$

$\therefore\ a=0$

25) **정답** ⑤

$$\int_1^4\{3f'(x)-2x\}dx=\Big[3f(x)-x^2\Big]_1^4$$

$$=\{3f(4)-16\}-\{3f(1)-1\}$$

$$=3f(4)-24\ (\because f(1)=3)$$

즉, $3f(4)-24=3$이므로 $f(4)=9$

26) **정답** ②

$|3x^2-6x|=\begin{cases}3x^2-6x & (x\leq 0\text{또는}x\geq 2)\\ -3x^2+6x & (0<x<2)\end{cases}$이므로

$$\int_0^a|3x^2-6x|dx$$

$$=\int_0^2(-3x^2+6x)dx+\int_2^a(3x^2-6x)dx$$

$$=\Big[-x^3+3x^2\Big]_0^2+\Big[x^3-3x^2\Big]_2^a$$

$$=a^3-3a^2+8$$

이때 $a^3-3a^2+8=24$, 즉 $a^3-3a^2-16=0$에서

$(a-4)(a^2+a+4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because$ a는 실수)

27) **정답** ②

$f(x)=\int_{-1}^x(1-|t|)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=1-|x|$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ ($\because$ $0\leq x\leq 3$)

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(1)=\int_{-1}^1(1-|t|)dt$$

$$=2\int_0^1(1-|t|)dt$$

$$=2\int_0^1(1-t)dt$$

$$=2\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

28) **정답** ⑤

$F'(t)=tf(t)$로 놓으면

$$a_n=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x tf(t)dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\cdot\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{2}f(2)=1+n$$
$$\therefore\ \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(1+k)=8+\frac{8\cdot9}{2}=44$$

29) **정답** ⑤

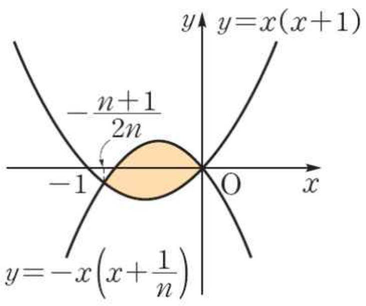
두 곡선 $y=x(x+1)$,

$y=-x\left(x+\frac{1}{n}\right)$의 교점의 x좌표는

$x(x+1)=-x\left(x+\frac{1}{n}\right)$에서

$2x^2+\left(1+\frac{1}{n}\right)x=0$

$x\left(2x+1+\frac{1}{n}\right)=0$



$\therefore\ x=0$ 또는 $x=-\frac{n+1}{2n}$

자연수 n에 대하여 $-\frac{n+1}{2n}<0$이므로

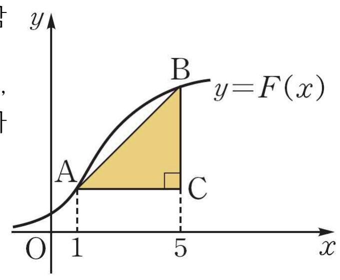
$$S_n=\int_{-\frac{n+1}{2n}}^{0}\left\{-x\left(x+\frac{1}{n}\right)-x(x+1)\right\}dx$$
$$=\int_{-\frac{n+1}{2n}}^{0}\left\{-2x^2-\left(1+\frac{1}{n}\right)x\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-\frac{n+1}{2n}x^2\right]_{-\frac{n+1}{2n}}^{0}$$
$$=-\frac{2}{3}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3+\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^3=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{24}$$

30) **정답** ⑤

$F'(x)=f(x)>0$이므로 $F(x)$는 증가함수이다.

$F(1)>0$이므로 세 점 $A(1,\ F(1))$, $B(5,\ F(5))$, $C(5,\ F(1))$은 모두 제 1사분면 위의 점이다.

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot4\{F(5)-F(1)\}=2\{F(5)-F(1)\}$$
$$=2\int_1^5 f(x)dx$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{4}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{4k}{n}\right)\cdot\frac{8}{n}$$

31) [정답] 1

$f\left(\frac{3}{2}\right)=-2\cdot\frac{3}{2}+4=1$이므로

$f^2\left(\frac{3}{2}\right)=(f\circ f)\left(\frac{3}{2}\right)=f(1)=2$

$f^3\left(\frac{3}{2}\right)=(f\circ f^2)\left(\frac{3}{2}\right)=f(2)=0$

$f^4\left(\frac{3}{2}\right)=(f\circ f^3)\left(\frac{3}{2}\right)=f(0)=1$

$f^5\left(\frac{3}{2}\right)=(f\circ f^4)\left(\frac{3}{2}\right)=f(1)=2$

⋮

즉 $f^n\left(\frac{3}{2}\right)$은 1, 2, 0이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100=3\cdot33+1$이므로

$\therefore\ f^{100}\left(\frac{3}{2}\right)=f^1\left(\frac{3}{2}\right)=1$

32) [정답] $f_n(x)=\begin{cases}-x+2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$

$f(x)=-x+2$에서 $f_1(x)=f(x)=-x+2$

$f_2(x)=(f\circ f)(x)=-(-x+2)+2=x$ • 40%

따라서 $f_3(x)=f(x)$, $f_4(x)=f_2(x)$, $\cdots$ 이므로

$f_n(x)=\begin{cases}-x+2 & (n\text{은 홀수})\\ x & (n\text{은 짝수})\end{cases}$ • 60%

33) [정답] ③

$S_n=n^2-6n$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2-6\cdot1=-5$

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-6n-\{(n-1)^2-6(n-1)\}$

$=2n-7$ ……………………… ㉠

이 때, $a_1=-5$는 ㉠에 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_n=2n-7$

$1\leq a_n\leq40$에서 $1\leq2n-7\leq40$

$8\leq2n\leq47$ $\quad\therefore\ 4\leq n\leq23.5$

따라서 자연수 n은 4, 5, $\cdots$, 23의 20개다.

34) [정답] 29 : 13

$S_n:T_n=(3n-4):(n+2)$이므로

$S_n=kn(3n-4)$, $T_n=kn(n+2)$ $(k\neq0)$

로 놓을 수 있다. [50%]

$a_6=S_6-S_5$

$=k\cdot6(3\cdot6-4)-k\cdot5(3\cdot5-4)=29k$

$b_6=T_6-T_5$

$=k\cdot6(6+2)-k\cdot5(5+2)=13k$ [40%]

$\therefore\ a_6:b_6=29k:13k=29:13$ [10%]

35) **정답** 5000000

국번의 첫 번째 자리에는 0을 제외한 2, 4, 6, 8이 올 수 있고 나머지 자리에는 0, 2, 4, 8을 중복하여 사용할 수 있으므로 만들 수 있는 국번의 개수는

$4\cdot{}_5\Pi_3=4\cdot5^3=500$

또 전화 번호의 뒷자리 4개에는 0에서 9까지의 숫자를 중복하여 사용할 수 있으므로

${}_{10}\Pi_4=10^4=10000$

따라서 구하는 전화번호의 개수는

$500\cdot10000=5000000$

36) **정답** ④

일의 자리의 숫자가 0 또는 2일 때 짝수가 된다.

(ⅰ) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

0, 1, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

$\therefore\ 20-4=16$

(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot2!}=30$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

$\therefore\ 30-12=18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 짝수의 개수는

$16+18=34$

[다른 풀이]

주어진 6장의 카드를 이용하여 만들 수 있는 여섯 자리 정수의 맨 앞 자리의 숫자는 1 또는 2이다.

(ⅰ) 맨 앞자리의 숫자가 1인 경우

0, 0, 2, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$

(ⅱ) 맨 앞자리의 숫자가 2인 경우

0, 0, 1, 2, 2가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$

이때 일의 자리의 숫자가 1인 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\cdot 2!}=6$

$\therefore\ 30-6=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 여섯 자리 정수 중에서 짝수의 개수는

$10+24=34$

37) **정답** ①

$9^2\cdot {}_5C_1+9^3\cdot {}_5C_2+9^4\cdot {}_5C_3+9^5\cdot {}_5C_4+9^6\cdot {}_5C_5$

$=9(1+9\cdot {}_5C_1+9^2\cdot {}_5C_2+9^3\cdot {}_5C_3+9^4\cdot {}_5C_4+9^5\cdot {}_5C_5)-9$

$=9(1+9)^5-9=9\cdot 10^5-9$

$=899991$

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$8+9+9+9+9+1=45$

38) **정답** 8

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$a_n=2^{n-1}$ • 40 %

$\therefore\ a_1+{}_8C_1a_2+{}_8C_2a_3+\cdots+{}_8C_8a_9$

$=1+{}_8C_1\cdot 2+{}_8C_2\cdot 2^2+\cdots+{}_8C_8\cdot 2^8$

$={}_8C_0+{}_8C_1\cdot 2+{}_8C_2\cdot 2^2+\cdots+{}_8C_8\cdot 2^8$

$=(1+2)^8=3^8$ • 40 %

$\therefore\ p=8$ • 20 %

39) **정답** ④

사건 A와 배반인 사건은 사건 A^c의 부분집합이고, 사건 B와 배반인 사건은 사건 B^c의 부분집합이므로 사건 A, B와 모두 배반인 사건은 $A^c\cap B^c$의 부분집합이다. 이때

$A^c\cap B^c=\{5,\ 6,\ 7,\ 9\}\cap\{3,\ 7,\ 8,\ 9\}=\{7,\ 9\}$

이므로 구하는 사건의 개수는 $2^2=4$

40) **정답** $\frac{1}{16}$

S의 부분집합 X가 될 수 있는 모든 경위 수는

$2^9=512$

2와 4를 반드시 원소로 갖고 6과 8을 반드시 원소로 갖지 않는 S의 부분집합의 개수는 $2^{9-4}=2^5=32$

따라서 구하는 확률은 $\frac{32}{512}=\frac{1}{16}$

제 6 일

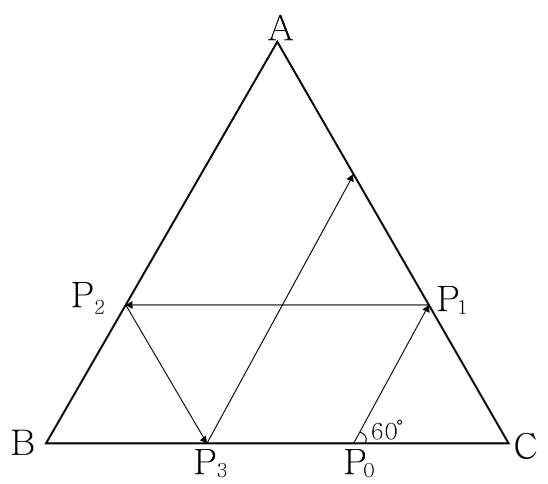
1. 2012년 10월 교육청
2. 2010년 6월 평가원
3. 1997년 수능
4. 2013년 3월 교육청
5. 2014년 9월 평가원
6. 1997년 수능
7. 2013년 경찰대
8. 2005년 7월 교육청
9. 2011년 6월 평가원
10. 2014년 사관학교

1. 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위에 양 끝점이 아닌 한 점 P_0을 잡는다. 그림과 같이 P_0을 지나고 변 AB와 평행한 직선을 그어 변 AC와 만나는 점을 P_1, 점 P_1을 지나고 변 BC와 평행한 직선을 그어 변 AB와 만나는 점을 P_2, 점 P_2를 지나고 변 AC와 평행한 직선을 그어 변 BC와 만나는 점을 P_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 점을 P_n이라 하고, 점 P_0을 출발하여 점 P_n까지 이동한 거리 l_n을

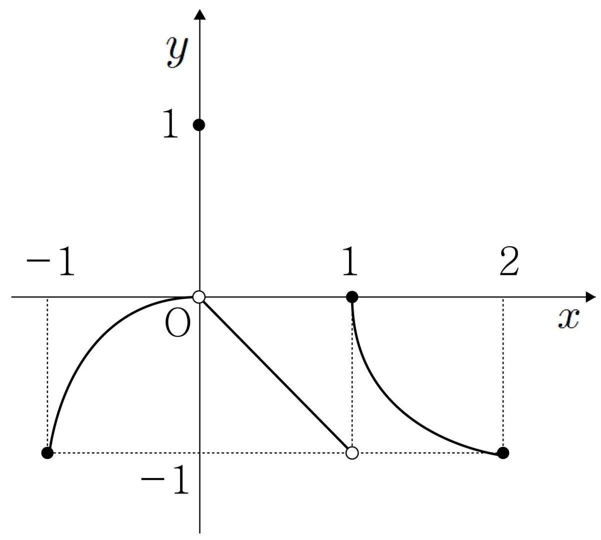
$$l_n = \overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} + \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} + \overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3} + \cdots + \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이라 하자.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{l_{2n}}{2n+1} = \dfrac{b}{a}$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 서로소인 자연수이다.)



2. 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 정의된 함수 $y = f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

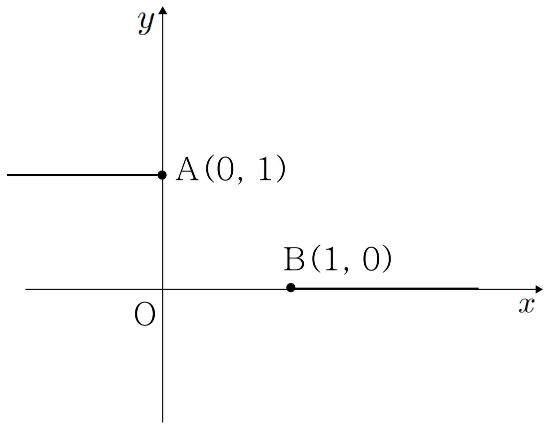
$$g(x) = \frac{f(x) + |f(x)|}{2}, \quad h(x) = \frac{f(x) - |f(x)|}{2}$$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$는 존재한다.
ㄴ. 함수 $(h \circ g)(x)$는 닫힌 구간 $[-1, 2]$에서 연속이다.
ㄷ. $\lim\limits_{x\to 0} (g \circ h)(x) = (g \circ h)(0)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

3. 다음 그림은 함수 $y=1$과 함수 $y=0$의 그래프의 일부이다. 두 점 $\mathrm{A}(0,1)$, $\mathrm{B}(1,0)$ 사이를 $0 \le x \le 1$에서 정의된 함수 $y=ax^3+bx^2+cx+1$의 그래프를 이용하여 연결하였다. 이렇게 연결된 그래프 전체를 나타내는 함수가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 미분 가능하도록 상수 a, b, c의 값을 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.



4. 함수 $f(x)=x^2(x-2)^2$이 있다. $0 \le x \le 2$인 모든 실수 x에 대하여

$$f(x) \le f'(t)(x-t)+f(t)$$

를 만족시키는 실수 t의 집합은 $\{t \mid p \le t \le q\}$이다. $36pq$의 값을 구하시오.

5. 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$$

이다. 함수 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, 0)$에서 감소하고 구간 $(2, \infty)$에서 증가하도록 하는 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. M$+m$의 값은?

① $\frac{21}{4}$ ② $\frac{43}{8}$ ③ $\frac{11}{2}$
④ $\frac{45}{8}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

6. 두 방정식 $\mathrm{P}(x)=0$, $\mathrm{Q}(x)=0$은 서로 다른 실근의 개수는 7개, 9개이고, 집합

$$\mathrm{A}=\{(x,y) \mid \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(y)=0\text{이고 } \mathrm{Q}(x)\mathrm{P}(y)=0,\ x\text{와 } y\text{는 실수}\}$$

는 무한집합이다. 집합 A의 부분집합

$$\mathrm{B}=\{(x,y) \mid (x,y)\in A\text{이고 } x=y\}$$

의 원소의 개수를 $n(\mathrm{B})$라고 하면 이것은 $\mathrm{P}(x), \mathrm{Q}(x)$에 따라 변한다. $n(\mathrm{B})$의 최댓값을 구하시오.

7. $\sum_{k=1}^{20}(2k+1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{20}\right)$의 값은?

① 250 ② 254 ③ 258
④ 262 ⑤ 266

8. 철수는 국가대표팀의 축구 경기를 시청하고 있었다. 그런데 우리나라 국가대표팀이 전반전 경기를 1:0 으로 이기고 난 후 중간 휴식 시간에 갑자기 철수네 집이 정전이 되어 후반전 경기를 시청할 수 없었다.

다음날 친구들로부터 후반전 경기까지 마친 결과 5:3 으로 우리나라 국가대표팀이 승리하였다는 사실을 알게 되었지만, 두 팀이 골을 넣는 순서는 알 수 없었다. 철수는 <표1>과 같은 표를 만들어 후반전 경기에서 두 팀이 골을 넣어 가는 상황 중 한 가지를 <표2>와 같이 적어 보았다.

구 분	국가대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전		
최종득점 결과	5	3

구 분	국가대표팀	상대팀
전반전	1	0
후반전	2	0
	2	1
	2	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	3
최종득점 결과	5	3

이와 같이 철수가 <표1>의 어두운 부분을 완성할 수 있는 모든 경우의 수를 구하시오.

9. A,B 두 사람이 탁구 시합을 할 때, 한 사람이 먼저 세 세트를 이기거나 연속하여 두 세트를 이기면 승리하기로 한다. 각 세트에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이고, B가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다. 첫 세트에서 A가 이겼을 때, 이 시합에서 A가 승리할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

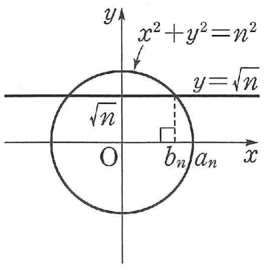
10. 지호와 영수는 가위바위보를 한 번 할 때마다 다음과 같은 규칙으로 사탕을 받는 게임을 한다.

(가) 이긴 사람은 2개의 사탕을 받고, 진 사람은 1개의 사탕을 받는다. (나) 비긴 경우에는 두 사람 모두 1개의 사탕을 받는다.

게임을 시작하고 나서 지호가 받은 사탕의 총 개수가 5인 경우가 생길 확률은 $\frac{k}{243}$이다. 자연수 k의 값을 구하시오
(단, 두 사람이 각각 가위, 바위, 보를 낼 확률은 같다.)

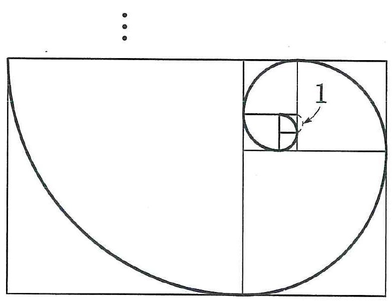
추가 과제

1. 오른쪽 그림과 같이 2 이상의 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=n^2$이 x축과 만나는 점의 x좌표 중 양수인 값을 a_n이라 하자. 또 원 $x^2+y^2=n^2$이 직선 $y=\sqrt{n}$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$의 값은?[1)]



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

2. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형에 반지름의 길이가 1인 사분원이 그려져 있다. 이 정사각형에 한 변의 길이가 1인 정사각형을 이어 붙인 후 반지름의 길이가 1인 사분원을 그린다. 또 한 변의 길이가 2인 정사각형을 이어 붙인 후 반지름의 길이가 2인 사분원을 그린다. 이와 같은 시행을 한없이 계속할 때, n번째 그려지는 사분원의 호의 길이를 a_n이라 하면 $a_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=\pi$, $a_3=\frac{3\pi}{2}$, $\cdots$ 이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=c$일 때, c의 값을 구하여라.



3. 수열 $\{(x-1)(3x-1)^n\}$과 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$이 모두 수렴하도록 하는 실수 x의 값의 범위를 구하여라.

4. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $3a_n=2S_n+1$이 성립한다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{4^n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

추가 과제

5. 곡선 $y=x^3-ax^2+2ax+2$는 실수 a의 값에 관계없이 항상 두 점을 지난다. 이 두 점에서의 접선이 서로 수직이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 곱은?

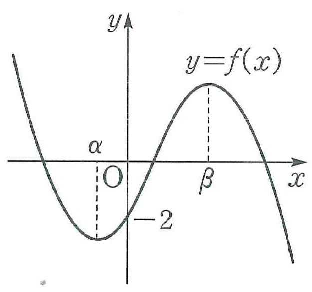
① $-\frac{1}{2}$　② $-\frac{1}{4}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

6. 두 함수 $f(x)=x^2-2x+2$, $g(x)=-x^2+6$의 그래프는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이때 제1사분면 위에서 만나는 점을 P라 하고, 점 P에서 두 곡선에 그은 접선을 각각 l, m이라 할 때, 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

7. 두 곡선 $y=x^3-4x$, $y=ax^2+bx$가 $x=-1$에서 공통인 접선을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 $\frac{a}{b}$의 값은?

① -1　② $-\frac{4}{5}$　③ $\frac{2}{5}$
④ 2　⑤ $\frac{7}{3}$

8. 함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 그 값이 항상 양인 것은? (단, a, b, c, d는 상수이고 $|\beta|>|\alpha|$이다.)

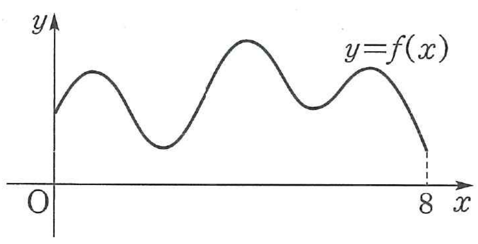


① a　② ab　③ abc
④ $a-c$　⑤ $bc-a$

9. 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(2)=g(2)$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>g'(x)$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $f(-2)>g(-2)$
② $f(0)>g(0)$
③ $f(1)>g(1)$
④ $f(3)>g(3)$
⑤ $f(5)=g(5)$

10. 미분가능한 함수$y=f(x)$ $(0\le x\le 8)$의 그래프가 다음 그림과 같다.



이때 충분히 작은 양수 h에 대하여

$m-h<x<m$이면 $\dfrac{f(x)-f(m)}{x-m}<0$,

$m<x<m+h$이면 $\dfrac{f(x)-f(m)}{x-m}>0$

을 만족시키는 실수 m의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

11. 함수 $y=\dfrac{bx+2}{x+a}$의 그래프가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-2$에 대하여 대칭일 때, $2b-a$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $-\dfrac{3}{2}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{3}{2}$

12. $1\le x\le 3$인 임의의 실수 x에 대하여

$ax+2\le\dfrac{2x+4}{x+1}\le bx+2$

가 항상 성립할 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{6}$
④ 1 ⑤ $\dfrac{7}{6}$

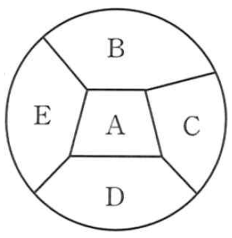
추가 과제

13. 첫째항이 112, 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. S_8의 값이 임의의 다른 S_n의 값보다 클 때, 공차를 구하여라.

14. 첫째항과 공차가 같은 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 자연수 k에 대하여 $S_m = ka_m$을 만족시키는 m의 값을 b_k라 할 때, $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15}$의 값을 구하여라. (단, $a_1 \neq 0$)

15. A, B, C 세 나라에서 각각 대표 3명씩을 뽑아 총 9명이 원탁에 앉아 회의를 하려고 한다. A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 구하여라.

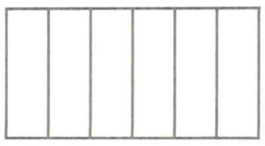
16. 서로 다른 5가지 색으로 오른쪽 그림을 칠하려고 한다. A, B, C, D, E의 영역에 같은 색을 중복하여 이용해도 좋으나 인접한 영역은 서로 다른 색으로 칠할 때, 칠하는 방법의 수를 구하여라.



① 160 ② 270 ③ 360
④ 420 ⑤ 540

추가 과제

17. 오른쪽 그림과 같은 6개의 영역을 빨강, 파랑, 노랑 3가지 색을 모두 사용하여 칠하려고 한다. 이때 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠할 확률을 구하여라.



18. 두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{4,\ 5\}$에 대하여 A에서 B로의 함수 f를 만들 때, 이 함수가

$$f(1)+f(2)+f(3)=14$$

를 만족시킬 확률은?

① $\frac{1}{8}$　② $\frac{1}{6}$　③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{3}{8}$

19. 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 임의의 두 원소 m, n에 대하여 3^m+4^n이 5로 나누어떨어질 확률은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{10}$　③ $\frac{2}{5}$
④ $\frac{3}{25}$　⑤ $\frac{6}{25}$

20. 서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a, b, c라 할 때, $(a-b)(b-c)(c-a)=0$일 확률을 구하여라.

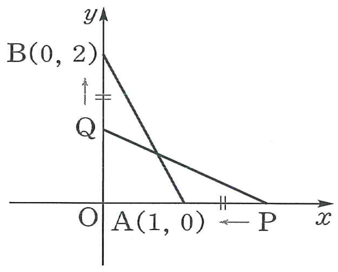
21. 함수 $f(x)=|x-1|$에 대하여 두 함수 $y=f^n(x)$, $y=f^{n+1}(x)$의 그래프의 교점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$의 값을 구하여라.

(단, $f^1(x)=f(x)$, $f^{n+1}(x)=(f\circ f^n)(x)$, $n=1, 2, 3, \cdots$)[21)]

22. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $a_1=2$, $na_{n+1}=2S_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

이 성립한다. 이때 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$의 값을 구하여라.[22)]

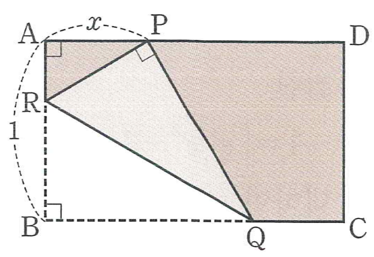
23. 좌표평면 위에 두 점 A$(1, 0)$, B$(0, 2)$가 있다. 오른쪽 그림과 같이 두 점 P$(p, 0)$, Q$(0, q)$가 $\overline{\text{AP}}=\overline{\text{BQ}}$를 만족시키면서 각각 점 A, B에 한없이 가까워질 때, 두 직선 PQ와 AB의 교점이 한없이 가까워지는 점의 좌표는? (단, $p>1$, $q<2$)[23)]



① $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ② $\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ ③ $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$
④ $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ⑤ $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$

24. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{\text{AB}}=1$인 직사각형 모양의 종이 ABCD를 $\overline{\text{RQ}}$를 접는 선으로 하여 꼭짓점 B가 $\overline{\text{AD}}$ 위의 점 P에 오도록 접었다. $\overline{\text{AP}}=x$, 삼각형 PRQ의 넓이를 $S(x)$라 할 때, $\lim_{x\to 0}xS(x)$의 값은?

(단, 종이의 가로의 길이는 충분히 길다.)[24)]



① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

25. 곡선 $y=x^2+1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2+1)\ (t \neq 0)$을 중심으로 하고, 점 $(0,\ 1)$을 지나는 원이 있다. 이 원 위의 점과 x축 사이의 거리의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to\infty} f(t)$의 값을 구하여라.[25)]

26. 사차함수 $f(x)$가

$$f(-x)=f(x),\ f'(1)=0,\ f(0)=-4$$

를 만족시키고 $\int_0^1 f(x)dx=3$일 때, $f(1)$의 값은?[26)]

① 7 ② 9 ③ 11
④ 13 ⑤ 15

27. 연속함수 $f(x)$가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, $\int_{-3}^{1} f(x)dx$를 $a,\ b,\ c$를 이용하여 나타내면?[27)]

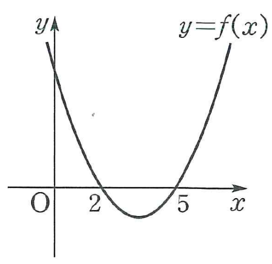
(가) $f(-x)=f(x)$	(나) $\int_0^2 f(x)dx=a$
(다) $\int_{-2}^1 f(x)dx=b$	(라) $\int_1^3 f(x)dx=c$

① $a+b-c$ ② $a-b+2c$
③ $a+4c$ ④ $2a-2b-c$
⑤ $-2a+2b+c$

28. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때,

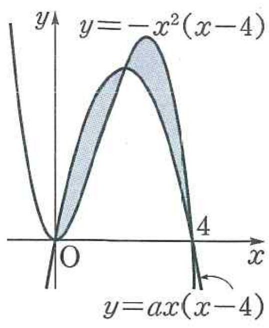
$$g(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$$

는 $x=a$에서 최솟값을 갖는다. 이때 실수 a의 값은?[28)]



① 1 ② 2 ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

29. 오른쪽 그림과 같이 두 곡선 $y=-x^2(x-4)$, $y=ax(x-4)$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값은? (단, $a<0$) 29)



① -1 ② $-\sqrt{2}$
③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\sqrt{3}$
⑤ -2

30. 곡선 $y=x^2(x-2)$와 직선 $x=a(a>2)$ 및 x축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라. 30)

31. 함수 $f(x)=[x]$에 대하여

$f(a)=-1,\ f(b)=3,\ f(c)=4$

일 때, $f(a+b-c)$의 최댓값과 최솟값의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)31)

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

32. 두 함수 $f(x)=x+3, g(x)=[x]$에 대하여 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하자. $-1\le x\le 1$에서 함수 $y=h(x)$의 치역의 모든 원소의 합은?
(단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)32)

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

33. $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수일 때,

$$[\sqrt{121}]+[\sqrt[3]{121}]+[\sqrt[4]{121}]+\cdots+[\sqrt[10]{121}]$$

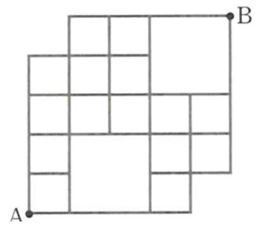
의 값을 구하여라.33)

34. $abc\neq0$ 인 세 실수 a, b, c 에 대하여

$$2^a=3^b=6^c,\ (a-4)(b-4)=16$$

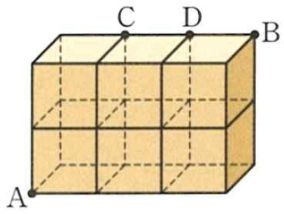
일 때, c의 값을 구하여라.34)

35. 오른쪽 그림과 같은 도로망이 있다. A를 출발하여 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는?35)



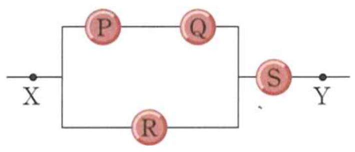
① 5 ② 15 ③ 50
④ 65 ⑤ 72

36. 오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 6개를 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법 중 모서리 CD를 지나지 않는 방법의 수를 구하여라.36)



37. 어떤 축구팀은 비가 내릴 때 경기에서 이길 확률이 0.7이고, 비가 내리지 않을 때 경기에서 이길 확률이 0.5라 한다. 내일 비가 내릴 확률이 0.2일 때, 이 팀이 내일 경기에서 이길 확률을 구하여라.37)

38. 오른쪽 그림과 같이 독립적으로 작동하는 네 개의 스위치 P, Q, R, S를 포함하는 회로가 있다. 각 스위치가 ON일 확률이 $\frac{1}{2}$일 때, X에서 Y로 전류가 흐를 확률을 구하여라.38)



39. 어느 학급 학생들을 대상으로 실시한 지능 검사 결과 학생들의 지능 지수는 평균 100, 분산 25인 정규분포를 따른다고 한다. 이때 상위 $10\,\%$이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수는? (단, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.3) = 0.4$)39)

① 105.5 ② 106 ③ 106.5
④ 107 ⑤ 107.5

40. 어떤 학생이 [정답]이 한 개인 오지선다형 문제 100개에 임의로 답을 할 때, a개 이상의 문제를 맞힐 확률이 0.01이라 한다. 이때 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 실수 a의 값을 구하면?40)

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
1.5	0.43
2.0	0.48
2.5	0.49

① 10 ② 15 ③ 20
④ 25 ⑤ 30

추가 과제

[난문현답 기출 정답]

1. 3
2. ①
3. 13
4. 32
5. ③
6. 15
7. ①
8. 35
9. 118
10. 182

[추가 과제 정답]

1) **정답** ①

$n \ge 2$일 때, 원 $x^2+y^2=n^2$과 x축이 만나는 점의 좌표는 $(n,0)$, $(-n,0)$이므로

$a_n=n(\therefore a_n>0)$

$y=\sqrt{n}$을 $x^2+y^2=n^2$에 대입하여 정리하면

$x^2+n=n^2,\quad x^2=n^2-n$

$\therefore x=\sqrt{n^2-n}\,(\therefore x>0)\qquad \therefore b_n=\sqrt{n^2-n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

2) **정답** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

[전략]

각 사분원의 호의 길이를 구하여 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 사이의 관계식을 구한다.

[풀이]

이어 붙이는 정사각형의 한 변의 길이는 차례대로 1, 2, 3, 5, 8, $\cdots$ 이므로 a_n은

$\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, 4π, $\cdots$

이때

$a_1=\frac{\pi}{2}$, $a_2=\pi$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이므로

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_n}=1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=c$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\right)$$

에서 $c=1+\frac{1}{c}$, $c^2-c-1=0$

$\therefore\ c=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $(\because\ c>0)$

3) **정답** $0<x\le\frac{2}{3}$

(i) 수열$\{(x-1)(3x-1)^n\}$의 첫째항이 $(x-1)(3x-1)$, 공비가 $3x-1$이므로 수렴하려면

$(x-1)(3x-1)=0$ 또는 $-1<3x-1\le 1$

$\therefore\ x=1$ 또는 $0<x\le\frac{2}{3}$

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$의 공비가 x^2-x+1이므로 수렴하려면

$-1<x^2-x+1<1$

$x^2-x+1>-1$에서 $x^2-x+2>0$

이때 $x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$x^2-x+1<1$에서 $x^2-x<0,\quad x(x-1)<0$

$\therefore\ 0<x<1$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x^2-x+1)^n$이 수렴하려면 $0<x<1$

(i),(ii)에서 $0<x\le\frac{2}{3}$

[참고]

수열 $\{ar^{n-1}\}$의 수렴 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r\le 1$이고,

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$의 수렴 조건은 $a=0$ 또는 $-1<r<1$이다.

4) **정답** ⑤

$a_1=S_1$이므로 $3a_1=2S_1+1$에서

$3S_1=2S_1+1\qquad\therefore\ S_1=1$

또 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$이므로

$3(S_n-S_{n-1})=2S_n+1\quad S_n=3S_{n-1}+1$

$\therefore\ S_n+\frac{1}{2}=3\left(S_{n-1}+\frac{1}{2}\right)$ $(n\ge 2)$

따라서 수열 $\left\{S_n+\frac{1}{2}\right\}$이 첫째항이 $S_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, 공비가 3인 등비수열이므로 $S_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$

$\therefore\ S_n=\frac{3^n-1}{2}$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-1}{4^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{3}\right)$$
$$=\frac{4}{3}$$

5) **정답**

$y=x^3-ax^2+2ax+2$를 a에 대하여 정리하면

$x^3-y+2-ax(x-2)=0$ 위의 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x^3-y+2=0,\ x(x-2)=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=0,\ y=2$ 또는 $x=2,\ y=10$

즉 곡선 $y=x^3-ax^2+2ax+2$는 a의 값에 관계없이 항상 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 10)$을 지난다.

$y'=3x^2-2ax+2a$이고, 두 점 $(0,\ 2)$, $(2,\ 10)$에서의 접선이 서로 수직이므로

$2a(12-2a)=-1\ \therefore 4a^2-24a-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 이차방적식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 곱은 $-\frac{1}{4}$이다.

6) **정답** $\frac{3}{2}$

제1사분면 위에 있는 두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^2-2t+2=-t^2+6$, $t^2-t-2=0$

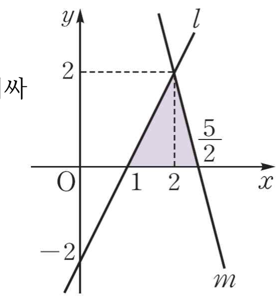
$(t+1)(t-2)=0\quad\therefore\ t=2\ (\because\ t>0)\quad\therefore\ \mathrm{P}(2,\ 2)$

$f'(x)=2x-2$, $g'(x)=-2x$이므로 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$에서 두 곡선에 그은 접선 l, m의 기울기는 각각 $f'(2)=2$, $g'(2)=-4$

따라서, 직선 l의 방정식은 $y-2=2(x-2)$에서

$y=2x-2$

직선 m의 방정식은 $y-2=-4(x-2)$에서
$y=-4x+10$
른쪽 그림에서 두 직선 l, m과 x축으로 둘러싸
도형의 넓이는
$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{5}{2}-1\right)\cdot 2=\frac{3}{2}$



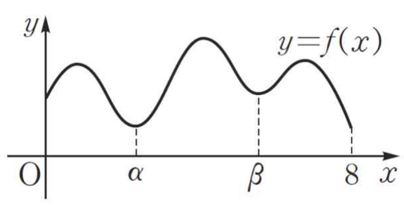
오
인

7) **정답** ③
$f(x)=x^3-4x$, $g(x)=ax^2+bx$로 놓으면
$f'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=2ax+b$
두 곡선이 $x=-1$에서 공통인 접선을 가지므로
$f(-1)=g(-1)$에서 $3=a-b$ ……㉠
$f'(-1)=g'(-1)$에서 $-1=-2a+b$ ……㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=-5$
$\therefore\ \frac{a}{b}=\frac{2}{5}$

8) **정답** ⑤
함수 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$의 그래프에서 $x\to\infty$일 때, $f(x)\to-\infty$이므로 $a<0$
$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근은 α, β이고 $\alpha<0$, $\beta>0$, $|\beta|>|\alpha|$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-\frac{2b}{3a}>0$, $\alpha\beta=\frac{c}{3a}<0$
$a<0$이므로 $b>0$, $c>0$
따라서 그 값이 항상 양인 것은 ⑤이다.

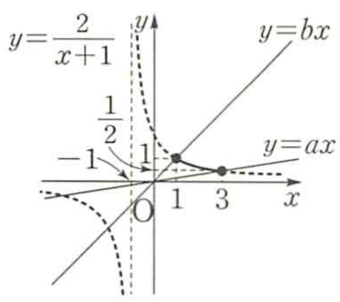
9) **정답** ④
<전략>
$F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면
$F'(x)=f'(x)-g'(x)$이다.
<풀이>
$F(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면
$F'(x)=f'(x)-g'(x)$이고 모든 실수 x에 대하여
$f'(x)>g'(x)$이므로 $F'(x)>0$
즉 실수 전체의 집합에서 함수 $F(x)$는 증가한다.
이때 $F(2)=f(2)-g(2)=0$이므로
$x<2$일 때, $F(x)<0$ $\therefore f(x)<g(x)$
$x>2$일 때, $F(x)>0$ $\therefore f(x)>g(x)$
따라서 옳은 것은 ④이다.

10) **정답** ②
(ⅰ) $m-h<x<m$에서 $x-m<0$이므로
$\frac{f(x)-f(m)}{x-m}<0$이면 $f(x)-f(m)>0$
즉 $f(x)>f(m)$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.
(ⅱ) $m<x<m+h$에서 $x-m>0$이므로
$\frac{f(x)-f(m)}{x-m}>0$ 이면 $f(x)-f(m)>0$
즉 $f(x)>f(m)$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다.
따라서 오른쪽 그림에서 함수 $f(x)$가 감소하다가 증가하는 x의 값은 α, β의 2개이므로 구하는 m의 개수는 2이다.



11) [정답] ①
$y=\frac{bx+2}{x+a}=\frac{b(x+a)-ab+2}{x+a}=\frac{-ab+2}{x+a}+b$
이므로 점근선의 방정식은
$x=-a$, $y=b$
이때 점 $(-a,\ b)$가 두 직선 $y=x+3$, $y=-x-2$의 교점이므로
$b=-a+3$, $b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{1}{2}$
$\therefore 2b-a=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{3}{2}$

12) [정답] ⑤
$\frac{2x+4}{x+1}=\frac{2(x+1)+2}{x+1}=\frac{2}{x+1}+2$ 이므로 주어진 부등식에서
$ax\le\frac{2}{x+1}\le bx$ …㉠
$1\le x\le 3$에서 $y=\frac{2}{x+1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 ㉠을 만족시키는 실수 a, b의 범위는
$a\le\frac{1}{6}$, $b\ge 1$
따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{6}$, b의 최솟값은 1이므로 구하는 합은
$\frac{1}{6}+1=\frac{7}{6}$



13) [정답] -15
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_n=112+(n-1)d$
이때 S_8의 값이 임의의 S_n의 값보다 크려면 $a_8>0$, $a_9<0$이어야 한다.
$a_8=112+7d>0$에서 $d>-16$
$a_9=112+8d<0$에서 $d<-14$
$\therefore\ -16<d<-14$
이때 d는 정수이므로 $d=-15$

14) [정답] 225
전략 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차를 한 문자로 놓고 a_n과 S_n의 식을 구한다.
풀이 등차수열 $\{a_n\}$공차를 d라 하면 $a_1=d$이므로
$a_n=d+(n-1)d=dn$,
$S_n=\frac{n\{2d+(n-1)d\}}{2}=\frac{n(n+1)d}{2}$
즉 $S_m=ka_m$에서 $\frac{m(m+1)d}{2}=kdm$
$\frac{m+1}{2}=k$ $\therefore m=2k-1$
$\therefore b_k=2k-1=1+(k-1)\cdot 2$
따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로
$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15}=\frac{15(2\cdot 1+14\cdot 2)}{2}$
$=225$

15) **정답** 432
[전략] A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수에서 세 나라의 대표들이 모두 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수를 뺀다.
[풀이]
A, B 두 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 5명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는
$(5-1)!=4!=24$
같은 나라 대표끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는
$3!\cdot 3!=36$
이므로 A, B 두 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는
$24\cdot 36=864$ • 40 %
A, B, C 세 나라의 대표를 각각 한 사람으로 생각하여 3명이 원탁에 둘러앉는 방법의 수는
$(3-1)!=2!=2$
같은 나라 대표들끼리 자리를 바꾸는 방법의 수는
$3!\cdot 3!\cdot 3!=216$
이므로 A, B, C 세 나라의 대표들이 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는
$2\cdot 216=432$ • 40 %
따라서 A, B 두 나라의 대표들만 자국의 대표끼리 이웃하게 앉는 방법의 수는
$864-432=432$ • 20 %

16) **정답** ④
A, B, C, D, E의 순서로 칠할 때, A에 칠할 수 있는 색은 5가지, B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 4가지, C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 3가지이다.
(ⅰ) B와 D가 같은 색인 경우
D에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지, E에 칠할 수 있는 색은 A와 B(D)에 칠한 색을 제외한 3가지이므로 경우의 수는
$5\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 3=180$

(ⅱ) B와 D가 다른 색인 경우

D에 칠할 수 있는 색은 A, B, C에 칠한 색을 제외한 2가지, E에 칠할 수 있는 색은 A, B, D에 칠한 색을 제외한 2가지이므로 경우의 수는 $5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot2=240$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방법의 수는

$180+240=420$

[다른 풀이] (ⅰ) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$

(ⅱ) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

(ⅲ) E와 C에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3\cdot2=120$

(ⅳ) B와 D, E와 C에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$5\cdot4\cdot3=60$

이상에서 구하는 방법의 수는 $120+120+120+60=420$

17) **정답** $\dfrac{1}{6}$

[전략] 3가지 색을 1번, 1번, 4번 또는 1번, 2번, 3번 또는 2번, 2번, 2번 칠하는 방법의 수를 각각 구한다.

[풀이]

3가지 색을 적어도 한 번씩은 이용하여 칠하므로 6개의 영역을 3가지 색을 모두 이용하여 칠하는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 3가지 색을 1번, 1번, 4번 칠하는 경우

3가지 색 중에서 4번 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 ${}_3C_1=3$이므로 6개의 영역을 칠하는 방법의 수는

$${}_3C_1\cdot\frac{6!}{4!}=90$$

(ⅱ) 3가지 색을 1번, 2번, 3번 칠하는 경우

3가지 색 중에서 1번, 2번, 3번 칠하는 색을 정하는 방법의 수는 $3!=6$이므로 6개의 영역을 칠하는 방법의 수는

$$3!\cdot\frac{6!}{2!\cdot3!}=360$$

(ⅲ) 3가지 색을 2번, 2번, 2번 칠하는 경우

6개의 영역을 칠하는 방법의 수는 $\dfrac{6!}{2!\cdot2!\cdot2!}=90$

이상에서 3가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는

$90+360+90=540$

한편 이웃하는 영역을 서로 다른 색으로 칠하는 방법의 수는

$3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=96$

이 중에서 이웃하는 영역을 2가지 색으로만 칠하는 방법의 수는

${}_3C_2\cdot2=6$

이므로 구하는 확률은 $\dfrac{96-6}{540}=\dfrac{90}{540}=\dfrac{1}{6}$

[다른 풀이]

3가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 3가지 색으로 칠할 수 있는 방법의 수에서 2가지 색만을 이용하는 방법의 수와 1가지 색만을 이용하는 방법의 수를 빼면 된다.

$$\therefore\ {}_3\Pi_6-\{{}_3C_2\cdot({}_2\Pi_6-2)+3\}=729-(186+3)=540$$

18) **정답** ⑤

집합 A에서 집합 B로의 함수 f의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

$f(1)+f(2)+f(3)=14$를 만족시키는 함수 f의 개수는 4, 5, 5를 일렬로 나열하는 방법의 수와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{8}$

19) **정답** ①

[전략] 어떤 수가 5로 나누어떨어지려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

[풀이]

집합 $\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$에서 두 원소 m, n을 택하는 모든 경우의 수는 $10\cdot10=100$

3^m+4^n이 5로 나누어떨어지려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

이때 3^m의 일의 자리 숫자는 3, 9, 7, 1이 이 순서대로 반복되고, 4^n의 일의 자리 숫자는 4, 6이 이 순서대로 반복되므로 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 4^n의 일의 자리 숫자가 6인 경우

3^m의 일의 자리 숫자는 9이어야 하므로 n의 값은 2, 4, 6, 8, 10의 5개, m의 값은 2, 6, 10의 3개이다.

$\therefore\ 5\cdot3=15$

(ⅱ) 4^n의 일의 자리 숫자가 4인 경우

3^m의 일의 자리 숫자는 1이어야 하므로 n의 값은 1, 3, 5, 7, 9의 5개, m의 값은 4, 8의 2개이다.

$\therefore\ 5\cdot2=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 3^m+4^n이 5로 나누어떨어지는 경우의 수는

$15+10=25$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{25}{100}=\dfrac{1}{4}$

20) **정답** $\dfrac{4}{9}$

[전략] $(a-b)(b-c)(c-a)=0$**인 사건을** A**라 하고** $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)$**임을 이용한다.**

[풀이]

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$에서

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ • 20 %

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$인 사건을 A라 하면 A^c는 $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$, 즉 세 개의 주사위의 눈의 수가 모두 다른 사건이므로

$\mathrm{P}(A^c)=\dfrac{{}_6P_3}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ • 40 %

따라서 구하는 확률은

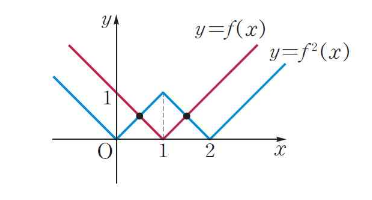
$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^c)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

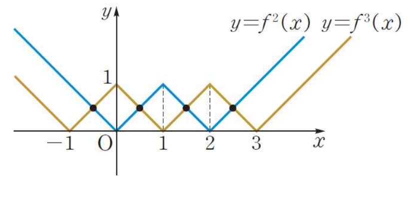
• 40 %

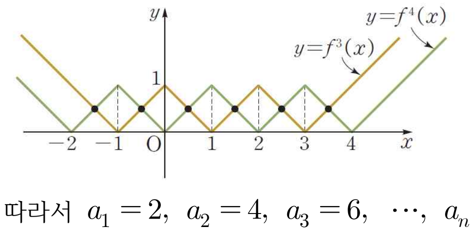
21) **정답** $\dfrac{1}{4}$

$y=f^2(x)=(f\circ f)(x)=|f(x)-1|$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 후, x축의 아랫부분을 x축에 대하여 대칭이동시킨 그래프이다.

마찬가지 방법으로 $y=f^3(x)$, $y=f^4(x)$의 그래프를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.







따라서 $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=6$, $\cdots$, $a_n=2n$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\cdot2(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}$

22) **정답** 1

$na_{n+1}=2S_n$ ……… ㉠

$(n-1)a_n=2S_{n-1}$ ……… ㉡

㉠−㉡을 하면 $na_{n+1}-(n-1)a_n=2a_n$

$na_{n+1}=(n+1)a_n$

∴ $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n\ (n\ge 2)$ ……… ㉢

㉠에서 $a_2=2S_1=2a_1=4$

이는 ㉢에서 $n=1$을 대입한 것과 같으므로

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$

위의 식의 양변에 n 대신 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$a_2=\frac{2}{1}a_1$

$a_3=\frac{3}{2}a_2$

$a_4=\frac{4}{3}a_3$

$\cdots$

$a_n=\frac{n}{n-1}a_{n-1}$

$a_n=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{n-1}=na_1=2n$

따라서 $S_n=\frac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

23) **정답** ③

직선 AB의 방정식은 $y=-2x+2$ …… ㉠

직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{q}{p}x+q$ …… ㉡

$\overline{\mathrm{AP}}=p-1,\ \overline{\mathrm{BQ}}=2-q$이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BQ}}$에서

$p-1=2-q$ ∴ $q=3-p$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $y=\frac{p-3}{p}x+3-p$이므로 두 직선 PQ와 AB의 교점의 좌표는 $-2x+2=\frac{p-3}{p}x+3-p$에서

$\frac{3p-3}{p}x=p-1$

∴ $x=\frac{p(p-1)}{3(p-1)}=\frac{p}{3},\quad y=-\frac{2}{3}p+2$ (∵ ㉠)

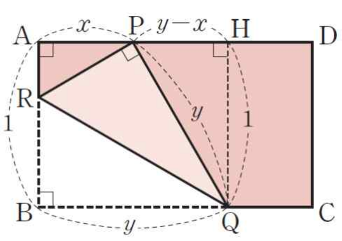
두 점 P, Q가 각각 A, B에 한없이 가까워질 때 $p\to 1+$이므로

$\lim\limits_{p\to1+}x=\lim\limits_{p\to1+}\frac{p}{3}=\frac{1}{3},$

$\lim\limits_{p\to1+}y=\lim\limits_{p\to1+}\left(-\frac{2}{3}p+2\right)=\frac{4}{3}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$

24) **정답** ⑤



오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 $\overline{\mathrm{AD}}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{BQ}}=y$라 하면 $\overline{\mathrm{PH}}=y-x,\ \overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BQ}}=y$이므로 직각삼각형 PQH에서

$y^2=(y-x)^2+1^2$

$y^2=y^2-2xy+x^2+1$

∴ $y=\frac{x^2+1}{2x}$

△RPA와 △PQH에서

∠A = ∠H = 90°, ∠APR = ∠HQP

이므로 △RPA∽△PQH (AA 닮음)

이때 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{HQ}}=\overline{\mathrm{PR}}:\overline{\mathrm{PQ}}$에서

$x:1=\overline{\mathrm{PR}}:y$

∴ $\overline{\mathrm{PR}}=xy$

따라서 $S(x)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{PR}}\cdot\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\cdot xy\cdot y=\frac{1}{2}xy^2$이므로

$$\lim_{x\to0}xS(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2y^2}{2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2}{2}\ (\because ㉠)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2+1}{8}=\frac{1}{8}$$

25) **정답** $\frac{1}{2}$

점 $\mathrm{P}(t,\ t^2+1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식은 $(x-t)^2+(y-t^2-1)^2=r^2$

이 원이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $(0-t)^2+(1-t^2-1)^2=r^2$

∴ $r^2=t^2+t^4$

원 위의 점과 x축 사이의 거리의 최솟값은 원의 중심 P와 x축 사이의 거리에서 반지름의 길이를 뺀 것과 같으므로

$f(t)=t^2+1-\sqrt{t^2+t^4}$

∴ $\lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(t^2+1-\sqrt{t^2+t^4}\right)$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(t^2+1)^2-(t^2+t^4)}{t^2+1+\sqrt{t^2+t^4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+1}{t^2+1+\sqrt{t^2+t^4}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}=\frac{1}{2}$$

26) **정답** ③

사차함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=ax^4+bx^2+c$($a,\ b,\ c$는 상수) …㉠

로 놓을 수 있다.

$f(0)=-4$에서 $c=-4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4ax^3+2bx$

$f'(1)=0$에서 $4a+2b=0$ ∴ $b=-2a$

즉 $f(x)=ax^4-2ax^2-4$이므로

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(ax^4-2ax^2-4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{5}ax^5-\frac{2}{3}ax^3-4x\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{5}a-\frac{2}{3}a-4=-\frac{7}{15}a-4$$

즉 $-\frac{7}{15}a-4=3$이므로 $a=-15$

따라서 $f(x)=-15x^4+30x^2-4$이므로

$f(1)=11$

27) **정답** ⑤

함수 $f(x)$가 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$$\int_{-2}^{1}f(x)dx=\int_{-2}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^2 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

즉 $b=a+\int_0^1 f(x)dx$이므로 $\int_0^1 f(x)dx=b-a$

$$\therefore\ \int_{-3}^{1}f(x)dx=\int_{-3}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx$$

$$=2\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx$$

$$=2(b-a)+c$$

$= -2a+2b+c$

28) **정답** ③

주어진 그래프에서

$f(x)=k(x-2)(x-5)\quad(k>0)$

로 놓을 수 있다.

이때 $g(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x+2)-f(x)$

$=kx(x-3)-k(x-2)(x-5)$

$=k(x^2-3x-x^2+7x-10)$

$=2k(2x-5)$

$g'(x)=0$ 에서 $x=\frac{5}{2}$

x	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 $g(x)$는 $x=\frac{5}{2}$에서 극소이면서 최소이므로

$a=\frac{5}{2}$

29) **정답** ⑤

색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^4\{-x^2(x-4)-ax(x-4)\}dx=0$

즉 $\int_0^4\{-x^3+(4-a)x^2+4ax\}dx=0$이므로

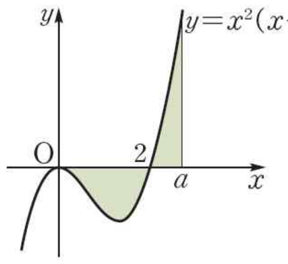
$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4-a}{3}x^3+2ax^2\right]_0^4=0$

$-64+\frac{64(4-a)}{3}+32a=0$

$32a=-64\qquad\therefore\ a=-2$

30) **정답** $\frac{8}{3}$

오른쪽 그림에서 색칠한 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$\int_0^a x^2(x-2)dx=0$

즉 $\int_0^a(x^3-2x^2)dx=0$이므로

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_0^a=0,\quad \frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^3=0$

$3a^4-8a^3=0,\quad a^3(3a-8)=0$

$\therefore\ a=\frac{8}{3}\quad(\because a>2)$

31) 답 ③

$f(a)=-1$이므로 $-1\le a<0$ …… ㉠

$f(c)=4$이므로 $3\le b<4$ …… ㉡

$f(c)=4$이므로 $4\le c<5$ $\quad\therefore -5<-c\le -4$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 각 변을 더하면 $-3<a+b-c<0$

따라서 $f(a+b-c)=[a+b-c]$의 최댓값은 -1, 최솟값은 -3

이므로 구하는 값은 $-1+(-3)=-4$

32) 답 9

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

$=g(x+3)=[x+3]$

(ⅰ) $-1\le x<0$일 때, $2\le x+3<3$이므로 $[x+3]=2$

(ⅱ) $0\le x<1$일 때, $3\le x+3<4$이므로 $[x+3]=3$

(ⅲ) $x=1$일 때, $x+3=4$이므로 $[x+3]=4$

이상에서 함수 $h(x)$치역은 $\{2,3,4\}$ 이므로 치역의 모든 원소의 합은

$2+3+4=9$

33) [정답] 26

전략 $n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\ ,10$일 때, $a^n<121<(a+1)^n$을 만족시키는 a의 값을 각각 구한다.

풀이 $11^2=121$이므로 $\left[\sqrt{121}\right]=[11]=11$

$64=4^3<121<5^3=125$이므로

$4<\sqrt[3]{121}<5\quad\therefore\left[\sqrt[3]{121}\right]=4$

$81=3^4<121<4^4=256$이므로

$3<\sqrt[4]{121}<4\quad\therefore\left[\sqrt[4]{121}\right]=3$

$32=2^5<121<3^5=243$이므로

$2<\sqrt[5]{121}<3\quad\therefore\left[\sqrt[5]{121}\right]=2$

$64=2^6<121<3^6=729$이므로

$2<\sqrt[6]{121}<3\quad\therefore\left[\sqrt[6]{121}\right]=2$

$2^7=128$이므로 $\left[\sqrt[7]{121}\right]=\left[\sqrt[8]{121}\right]=\left[\sqrt[9]{121}\right]=\left[\sqrt[10]{121}\right]=1$

$\therefore\left[\sqrt{121}\right]+\left[\sqrt[3]{121}\right]+\left[\sqrt[4]{121}\right]+\cdots+\left[\sqrt[10]{121}\right]$

$=11+4+3+2\cdot2+4\cdot1=26$

34) [정답] 4

전략 $2^a=3^b=6^c=k\ (k>0)$로 놓고 k와 $a,\ b,\ c$ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 $2^a=3^b=6^c=k\ (k>0)$로 놓으면 $abc\neq0$에서 $k\neq1$

$2^a=k$에서 $\quad 2=k^{\frac{1}{a}}$ …… ㉠

$3^b=k$에서 $\quad 3=k^{\frac{1}{b}}$ …… ㉡

$6^c=k$에서 $\quad 6=k^{\frac{1}{c}}$ …… ㉢

㉠×㉡÷㉢을 하면 $2\times3\div6=k^{\frac{1}{a}}\times k^{\frac{1}{b}}\div k^{\frac{1}{c}}$

$\therefore\ k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}=1$

그런데 $k\neq1$이므로 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0$ …… ㉣

이 때 $(a-4)(b-4)=16$에서

$ab-4a-4b+16=16,\quad ab-4a-4b=0$

$ab\neq0$이므로 양변을 ab로 나누면

$1-\frac{4}{b}-\frac{4}{a}=0,\quad \frac{4}{a}+\frac{4}{b}=1$

즉 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{4}$이므로 이를 ㉣에 대입하면

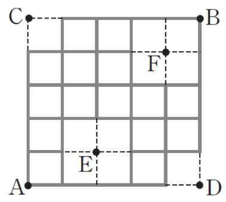
$\frac{1}{4}-\frac{1}{c}=0\quad\therefore c=4$

35) **정답** ④

[전략] 전체 방법의 수에서 지나갈 수 없는 길을 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수는 뺀다.

[풀이]

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하고 네 지점 C, D, E, F를 잡으면 구하는 방법의 수는 A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수에서 C 또는 D 또는 E 또는 F를 거쳐 최단 거리로 가는 방법의 수를 뺀 것과 같다.



A에서 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는

$\frac{10!}{5!\cdot5!}=252$

(ⅰ) A → C → B의 경우의 수는

$1\cdot1=1$

(ⅱ) A → D → B의 경우의 수는

$1\cdot1=1$

(ⅲ) A → E → B의 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot4!}=3\cdot35=105$

(ⅳ) A → F → B의 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\cdot4!}\cdot2!=70\cdot2=140$

(ⅴ) A → E → F → B의 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\cdot\frac{5!}{2!\cdot3!}\cdot2!=3\cdot10\cdot2=60$

이상에서 구하는 방법의 수는

$252-(1+1+105+140-60)=65$

36) **정답** 48

꼭짓점 A에서 꼭짓점 B로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 3번, 1번, 2번 이동해야 하므로 최단거리로 가는 방법의 수는

$\frac{6!}{3!\cdot2!}=60$ • 40%

또 꼭짓점 A에서 모서리 CD를 거쳐 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $\frac{4!}{2!}\cdot1\cdot1=12$ • 40%

따라서 구하는 방법의 수는 $60-12=48$ • 20%

37) 정답 0.54

내일 비가 내리는 사건을 A, 내일 경기에서 이기는 사건을 E라 하면 내일 비가 내리지 않는 사건은 A^c이므로

$$\mathrm{P}(A)=0.2,\ \mathrm{P}(A^c)=0.8,$$
$$\mathrm{P}(E|A)=0.7,\ \mathrm{P}(E|A^c)=0.5$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E)&=\mathrm{P}(A\cap E)+\mathrm{P}(A^c\cap E)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(E|A)+\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(E|A^c)\\&=0.2\times0.7+0.8\times0.5\\&=0.54\end{aligned}$$

38) 정답 $\frac{5}{16}$

[전략] 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이다.

[풀이]

스위치 P, Q, S를 통하여 전류가 흐르는 사건을 A, 스위치 R, S를 통하여 전류가 흐르는 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},\ \mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$ • 60 %

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{5}{16}\end{aligned}$$ • 40 %

39) [정답] ③

학생들의 지능 지수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100,\ 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-100}{5}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

상위 10 %이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수를 a라 하면

$$\mathrm{P}(X\geq a)=0.1,\ \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$
$$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.1$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-100}{5}\right)=0.4$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.3)=0.4$이므로

$$\frac{a-100}{5}=1.3,\ a-100=6.5$$
$$\therefore\ a=106.5$$

따라서 상위 10 %이내에 속하는 학생의 최저 지능 지수는 106.5이다.

40) [정답] ⑤

맞히는 문제의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(X)=100\cdot\frac{1}{5}=20,\ \mathrm{V}(X)=100\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}=16$$

따라서 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 4^2)$을 따른다.

이때 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\geq a)=0.01$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$$
$$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$$
$$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.01$$
$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{a-20}{4}\right)=0.49$$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq2.5)=0.49$이므로

$$\frac{a-20}{4}=2.5,\quad a-20=10$$
$$\therefore\ a=30$$

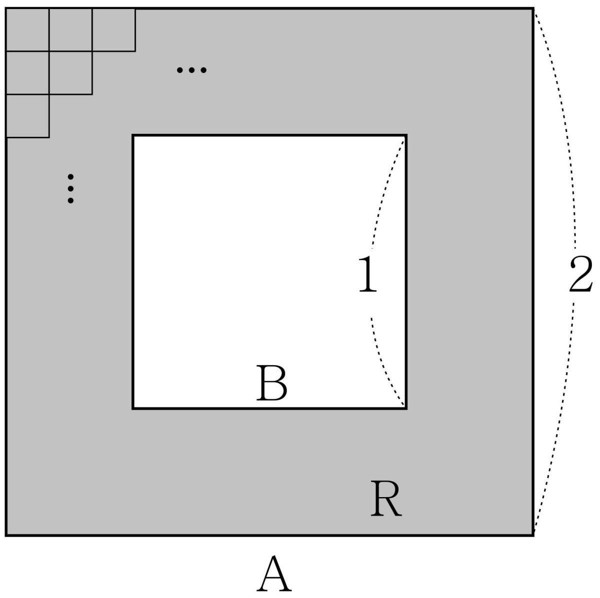
제 7 회

1. 2010년 수능
2. 2013년 3월 교육청
3. 2007년 7월 교육청
4. 2012년 사관학교
5. 2011년 9월 평가원
6. 2008년 3월 교육청
7. 2009년 6월 평가원
8. 2007년 경찰대
9. 2010년 4월 교육청
10. 2007년 6월 평가원

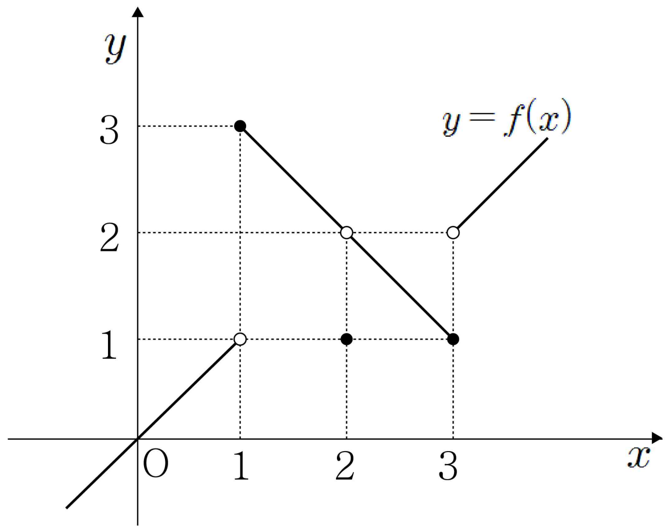
1. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 A와 한 변의 길이가 1인 정사각형 B는 변이 서로 평행하고, A의 두 대각선의 교점과 B의 두 대각선의 교점이 일치하도록 놓여있다. A와 A의 내부에서 B의 내부를 제외한 영역을 R이라 하자.
2이상인 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 정사각형을 다음 규칙에 따라 R에 그린다.

(가) 작은 정사각형의 한 변은 A의 한 변에 평행한다. (나) 작은 정사각형들의 내부는 서로 겹치지 않도록 한다.

이와 같은 규칙에 따라 R에 그릴 수 있는 한 변의 길이가 $\frac{1}{n}$인 작은 정사각형의 최대 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=12$, $a_3=20$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}-a_{2n}}{a_{2n}-a_{2n-1}}=c$ 라 할 때, $100c$의 값을 구하시오.



2. 그림은 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프이다.



함수 $f(x)$는 $x=1, x=2, x=3$에서만 불연속이다.
이차함수 $g(x)=x^2-4x+k$에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$가 $x=2$에서 불연속이 되도록 하는 모든 실수 k의 합을 구하시오.

3. 함수 $f_n(x)=\left(nx-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$가 $\int_0^1 f_n'(x)dx=-n^3$을 만족할 때, [보기]중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$은 상수)

> ㄱ. $\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n(n+1)}{2}$
> ㄴ. $f_2(2)=3$
> ㄷ. $\int_0^{n+1}f_n(x)dx=2\int_0^{\frac{n+1}{2}}f_n(x)dx$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

4. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}-x(x-1) & (0\le x<1)\\ -\frac{1}{4^n}(x-n)(x-n-1) & (n\le x<n+1)\end{cases}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

이라 정의하자. $S_n=\int_0^{n+1}f(x)dx$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?
(단, $\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{a(\beta-\alpha)^3}{6}$)

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

5. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례대로

$$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$$

이라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$이다.

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} \le \int_0^1 f(x)dx \le \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

6. 함수 f에 대하여 $f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f^2(x))$, $\cdots$이라 정의하자. 이때 집합 $X=\{1,2,3\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 두 조건을 만족한다.

(가) $f(1)=3$
(나) $f^3=I$ (I는 항등함수)

함수 f의 역함수를 g라 할 때, $g^{10}(2)+g^{11}(3)$의 값은?

① 6 ② 5 ③ 4
④ 3 ⑤ 2

7. 공차가 d_1, d_2인 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_nT_n = n^2(n^2-1)$$

일 때, [보기]에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?

ㄱ. $a_n = n$이면 $b_n = 4n-4$이다.
ㄴ. $d_1 d_2 = 4$
ㄷ. $a_1 \neq 0$ 이면 $a_n = n$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 무승부가 없고, 두 사람의 승패를 겨루는 게임이 있다. 게임에서 지는 사람은 그 다음 게임에 참가하지 않기로 하고, A, B, C 세 사람이 이 게임을 15회 실시한 후, 결과를 다음과 같은 게임성적표에 작성하려고 한다.

회 / 선수	1	2	…	15	승 : O 패 : X 불참 : △
A			…		
B			…		
C			…		

아래의 세 조건을 만족하는 서로 다른 게임성적표의 개수는?

(가) 첫 게임은 B와 C가 실시하여 B가 이겼다.
(나) 마지막 게임에서는 A가 졌다.
(다) A는 11승, B는 1승을 하였다.

① 4 ② 5 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

9. $\sum_{k=0}^{5} {}_5\mathrm{C}_k \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{13}{8}\right)^{5-k}$의 값을 구하시오.

10. 표본공간 S는 $S=\{1,2,3,4,5\}$이고 모든 근원사건의 확률은 같다. 표본공간 S의 두 사건 A,B가 서로 배반사건이고 $0<P(B)<P(A)$가 되도록 두 사건 A,B를 선택하는 경우의 수는?

① 45 ② 50 ③ 55
④ 60 ⑤ 65

추가 과제

1. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6 = 27a_3$이고, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{3^{n-1}+2^n}=3$일 때, a_1의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1
④ 2 ⑤ 3

2. $a_1 = 2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = 3a_n$을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^{n+1}+a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{11}$ ② $\frac{2}{11}$ ③ $\frac{3}{11}$
④ $\frac{4}{11}$ ⑤ $\frac{5}{11}$

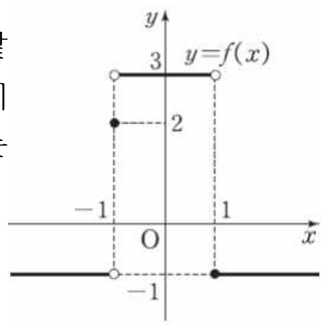
3. 두 함수 $f(x)=x^2-4x+k$, $g(x)=(x-1)(x-3)$에 대하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 정수 k의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

4. 방정식 $\sqrt{x}=\frac{3}{x}+1$이 오직 하나의 실근을 갖는다. 다음 열린 구간 중 이 방정식의 실근이 존재하는 것은?

① $(1,\ 2)$ ② $(2,\ 3)$ ③ $(3,\ 4)$
④ $(4,\ 5)$ ⑤ $(5,\ 6)$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $g(x)=f(x)\{f(x)+k\}$가 $x=1$에서 연속일 때, $g(-1)$의 값은? (단, k는 상수이다.)

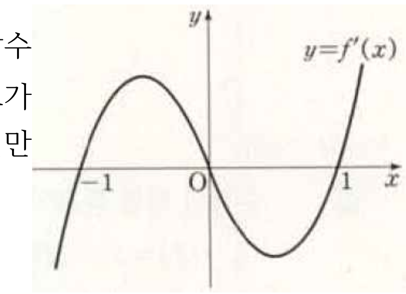


① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

6. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x^2+2a & (x \le 2) \\ -x^2+ax & (x>2) \end{cases}$의 $x=t$ $(t \neq 2)$에서의 미분계수를 $g(t)$라 할 때, $\lim_{t \to b-} g(t) - \lim_{t \to b+} g(t) = 3$이 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

7. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $f(0) > f(1)$
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. 방정식 $f(x)=0$ 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 할 때, $f(t)=t^4-2t^3$, $g(t)=pt^2$ 이다. $t>0$에서의 두 점 P, Q의 가속도가 같게 되는 순간이 2번 있을 때, 정수 p의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

9. 직선 철로 위를 매초 60m의 속도로 달리는 열차가 있다. 이 열차의 기관사가 제동을 건 순간부터 t초 후 열차의 속도 $v(t)$는 $v(t)=60-40t$ (m/초)이다. 기관사가 제동을 건 순간부터 열차가 정지할 때까지 이 열차가 움직인 거리는?

① $39m$ ② $41m$ ③ $43m$
④ $45m$ ⑤ $47m$

10. 점 $A\left(\frac{16}{3}\right)$을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=t(2-t)$$

일 때, 점 P가 출발 후 원점을 지날 때까지 움직인 거리는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

11. 집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$와 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 집합 $X=\{B \mid B\subset U,\ B-A\neq B\}$의 원소의 개수를 구하시오.

12. 자연수 전체의 집합의 두 부분집합 A, B가
$A=\{x \mid x$는 20 이하의 소수$\}$, $B=\{x \mid x=ab-1,\ a\in A,\ b\in A\}$
일 때, 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합은?

① 17 ② 19 ③ 21
④ 23 ⑤ 25

추가 과제

13. 정의역이 실수 전체의 집합이고 역함수가 존재하는 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하고 함수 $f(x+2)+1$의 역함수를 $h(x)$라 하자. 곡선 $y=h(x)$는 곡선 $y=g(x)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시킨 것과 같을 때, $m-n$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

14. 세 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $Z=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$에 대하여 일대일 대응인 두 함수 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=g(3)$
(나) $(g \circ f)(1)=5$
(다) $f^{-1}(3)>1$
(라) $f(4)=g(f(4))-2$

$f(4)+g(6)$의 값은?

① 10　② 11　③ 12
④ 13　⑤ 15

15. A, B, C를 포함한 7명을 원형의 탁자에 앉힐 때, A의 양 옆에 B와 C가 앉는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)

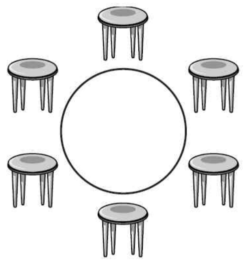
① 40　② 42　③ 44
④ 46　⑤ 48

16. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수는?

(가) $f(1) \neq f(2)$이고 $f(2) \neq f(3)$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

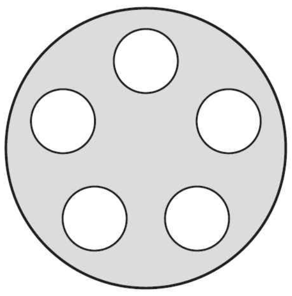
① 800　② 810　③ 820
④ 830　⑤ 840

17. 1번부터 6번까지의 학생 6명이 모두 그림과 같은 원형의 탁자에 일정한 간격으로 앉으려고 할 때, 서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합의 최댓값이 10이상이 되도록 앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① 40 ② 42 ③ 44
④ 46 ⑤ 48

18. 서로 다른 접시 5개와 같은 종류의 박하맛 사탕 3개, 같은 종류의 딸기맛 사탕 2개가 있다. 각 접시에 사탕을 한 개씩 담아 그림과 같은 원형의 식탁의 5곳에 배치하는 경우의 수는? (단, 회전시켜 일치하는 경우는 같은 것으로 본다.)



① 210 ② 220 ③ 230
④ 240 ⑤ 250

19. 서로 다른 영화 5편 가운데 A는 영화를 3편, B는 영화를 2편 선택하려고 한다. A와 B가 같은 영화를 1편만 선택하는 경우의 수는?

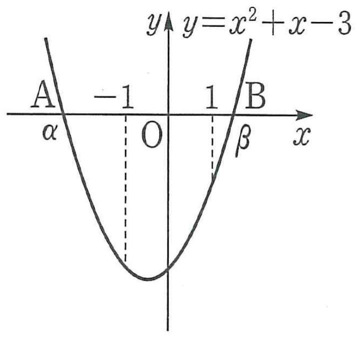
① 50 ② 55 ③ 60
④ 65 ⑤ 70

20. 빨강, 파랑, 주황, 녹색의 볼펜이 각각 같은 종류로 5개씩 있다. 이 볼펜 중 5개를 선택할 때, 2가지 색으로만 선택하는 경우의 수는?

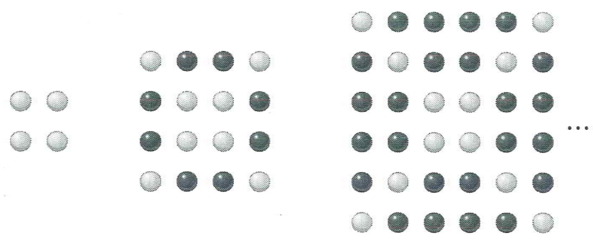
① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

추가 과제

21. 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+x-3$의 그래프가 x축과 두 점 A, B에서 만난다. 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 할 때, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)$의 합을 구하여라.



22. 다음 그림과 같이 대각선 방향에는 흰색 바둑돌을, 나머지에는 검은색 바둑돌을 정사각형 모양으로 놓는다.



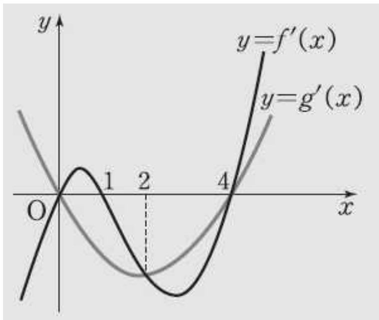
이와 같은 방법을 계속하여 바둑돌을 놓을 때, [n단계]에 놓인 검은색 바둑돌의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

23. 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값을 구하시오.

(가) 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하다.
(나) $0<c<1$인 모든 c에 대하여 $|f'(c)|\le 5$이다.
(다) $f(0)=3$

24. 사차함수 $f(x)$와 삼차함수 $g(x)$에 대하여 두 함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프는 그림과 같다. 함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. 방정식 $h'(x)=0$의 모든 실근의 합은 6이다.
ㄴ. $1<x<2$에서 함수 $h(x)$는 증가한다.
ㄷ. 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 극대이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

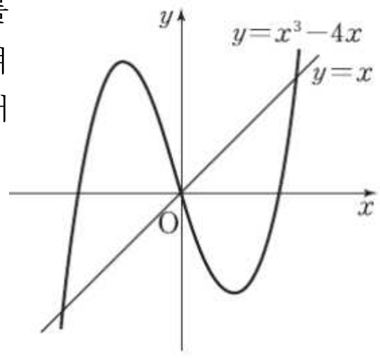
추가 과제

25. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=x^3-3ax^2+a$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

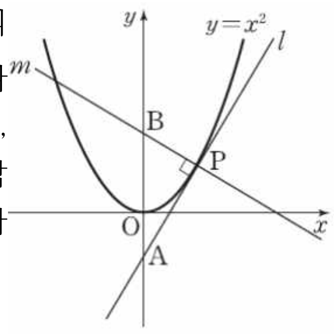
> (가) 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소이다.
> (나) $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=f'(1)-3$

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

26. 함수 $f(x)=x^3-4x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시켜 직선 $y=x$에 접하도록 하는 m에 대하여 $27m^2$의 값을 구하시오.
(단, m은 상수이다.)



27. 양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P(a,\ a^2)$에서의 접선을 l, 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선을 m이라 할 때, 두 직선 l, m이 y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 두 점 A, B 사이의 거리가 1이 되도록 하는 a의 값은?



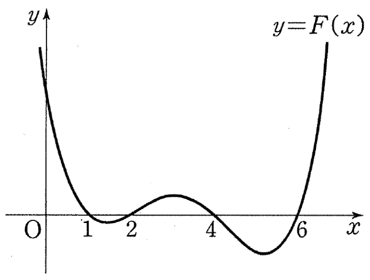
① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{2}{3}$
④ $\dfrac{3}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{6}$

28. 다항함수 $f(x)$가
$$\int_0^2 2xf(x)dx+\int_0^2 (x^2+1)f'(x)dx=8,\ f(0)=2$$
를 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

29. 삼차함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때, 함수 $y=F(x)$의 그래프가 그림과 같다. 부등식

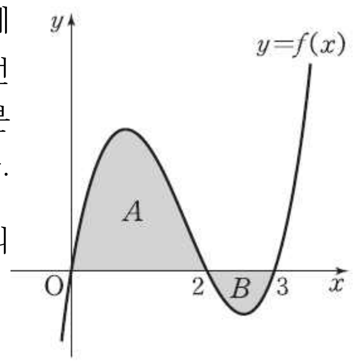
$$\int_{m}^{m+1} f(x)dx < 0$$

을 만족시키는 모든 자연수 m의 값의 합은?



① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

30. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0, 3]$에서 연속일 때, 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 두 부분 A, B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. $S_1 = \frac{8}{3}$, $\int_{0}^{3} f(x)dx = \frac{9}{4}$ 일 때, S_2의 값은?



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{5}{12}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{7}{12}$

31. 함수 $f(x)=2x+|x|+4$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(1)+g^{-1}(1)$의 값을 구하시오.

32. 두 집합 $X=\{2, 4, 6, 8\}$, $Y=\{4, 6, 8, 10\}$에 대하여 함수 f는 X에서 Y로의 일대일 대응이고

$$f(x)=\begin{cases} f(x+2)+2 & (x=2, 4) \\ 6 & (x=6) \\ a & (x=8) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a+f(2)$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

33. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킬 때, a_4의 값은?

① $\frac{14}{5}$ ② $\frac{29}{10}$ ③ 3
④ $\frac{31}{10}$ ⑤ $\frac{16}{5}$

34. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1=99,\ a_2=103$
(나) $a_{n+2}=a_n-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_k+a_{k+1}<0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값을 구하시오.

35. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는?

(가) $f(1)<f(2)<f(3)$
(나) $f(4)\le f(5)$

① 110 ② 120 ③ 130
④ 140 ⑤ 150

36. 서로 다른 5개의 사탕을 A, B, C 세 사람에게 각 사람이 적어도 한 개씩 받도록 남김없이 나누어 줄 때, A가 받은 사탕의 개수가 B, C가 각각 받은 사탕의 개수보다 많거나 같은 경우의 수는?

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

추가 과제

37. 서로 다른 5가지 음식을 파는 식당이 있다. 갑이 이 식당에서 아침, 점심, 저녁에 각각 하나씩의 음식을 서로 다르게 주문하고 같은 날 을도 이 식당에서 아침, 점심, 저녁에 각각 하나씩의 음식을 서로 다르게 주문하려고 한다. 아침, 점심, 저녁 중 한 번만 두 사람이 주문한 음식이 같고 갑과 을이 주문한 음식의 종류가 총 4가지가 되도록 주문하는 경우의 수는?

① 700 ② 710 ③ 720
④ 730 ⑤ 740

38. 집합 $X=\{1,2,3\}$에서 X로의 함수 중 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$라 할 때, $f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수일 확률은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{10}{27}$ ③ $\frac{11}{27}$
④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{13}{27}$

39. 1층에서 5층까지 운행하는 엘리베이터에 1층에서 탑승한 6명의 탑승객이 2층, 3층, 4층, 5층 중 3개의 층에서 모두 내리는 경우의 수는? (단, 새로 타는 탑승객은 없다.)

① 2080 ② 2120 ③ 2160
④ 2200 ⑤ 2240

40. 집합 $X=\{1,2,3,4\}$에서 집합 $Y=\{-2,-1,0,1\}$로의 함수 중에서 임의로 선택한 한 함수를 $f(x)$라 할 때, $f(1)f(2)f(3)=0$ 또는 $f(4)\geq 0$이 성립할 확률은?

① $\frac{95}{128}$ ② $\frac{97}{128}$ ③ $\frac{99}{128}$
④ $\frac{101}{128}$ ⑤ $\frac{103}{128}$

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. 50
2. 13
3. ④
4. ②
5. ②
6. ②
7. ③
8. 3
9. 32
10. ⑤

[추가 과제 정답]

1) 답 ③
[해설]
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면
$a_6=27a_3$에서 $a_1r^5=27a_1r^2$이므로 $r^3=27, r=3$
따라서 $a_{n+1}=a_1\times 3^n$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{3^{n-1}+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times 3^n}{\frac{1}{3}\times 3^n+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{a_1}{\frac{1}{3}+0}=3a_1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{3^{n-1}+2^n}=3$이므로
$3a_1=3$에서 $a_1=1$

2) 답 ③
[해설]
$a_{n+1}=3a_n$이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열이다.
$a_n=2\times 3^{n-1}$, $S_n=\dfrac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$이므로

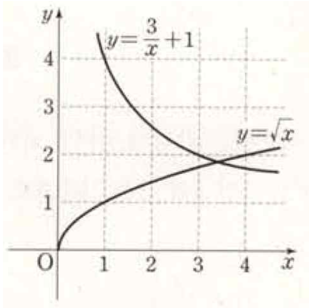
$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^{n+1}+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^{n+1}+2\times 3^{n-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{3^n}}{3+\frac{2}{3}}=\frac{3}{11}$$

3) 답 ③
[해설] 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
따라서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\neq 0$이어야 한다.
즉, 모든 실수 x에 대하여 $x^2-4x+k\neq 0$이어야 한다.
이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=4-k<0$에서 $k>4$
따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 5이다.

[참고]
예를 들어 $k=3$인 경우 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는
$\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{x^2-4x+3}=1\ (x\neq 1,\ x\neq 3)$이므로
$x=1$, $x=3$에서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$가 정의되지 않는다.
따라서 함수 $\dfrac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$, $x=3$에서 불연속이다.

4) 답 ③
[해설] $f(x)=\sqrt{x}-\dfrac{3}{x}-1$이라 하면
$f(1)=-3$, $f(2)=\sqrt{2}-\dfrac{5}{2}$, $f(3)=\sqrt{3}-2$,
$f(4)=\dfrac{1}{4}$, $f(5)=\sqrt{5}-\dfrac{8}{5}$, $f(6)=\sqrt{6}-\dfrac{3}{2}$
이때 $f(3)=\sqrt{3}-2<0$, $f(4)=\dfrac{1}{4}>0$이다.
함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[3,\ 4]$에서 연속이고 $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(3,\ 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

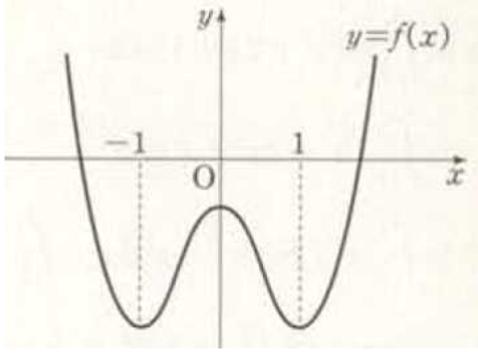
[참고]
두 함수 $y=\sqrt{x}$, $y=\dfrac{3}{x}+1$의 그래프는 다음과 같다.



5) 답 ③
[해설] $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=3$, $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=-1$, $f(1)=-1$이므로
$\displaystyle\lim_{x\to 1-}g(x)=3(3+k)$
$\displaystyle\lim_{x\to 1+}g(x)=-(-1+k)=1-k$
$g(1)=-(-1+k)=1-k$
이때 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로
$\displaystyle\lim_{x\to 1-}g(x)=\lim_{x\to 1+}g(x)=g(1)$
즉, $3(3+k)=1-k=1-k$이므로 $k=-2$
따라서 $g(x)=f(x)\{f(x)-2\}$, $f(-1)=2$이므로
$g(-1)=f(-1)\times\{f(-1)-2\}$
$=2\times(2-2)$
$=0$

6)답 ④
[해설] 실수 t에 대하여 $g(t)$는 함수 $f(x)$의 $x=t\ \ (t\neq 2)$에서의 미분계수이므로
$$g(t)=\begin{cases}3t^2-6t & (t<2)\\ -2t+a & (t>2)\end{cases}$$
(i) $b\neq 2$일 때
함수 $g(t)$는 $t=b$에서 연속이므로
$\displaystyle\lim_{t\to b-}g(t)=\lim_{t\to b+}g(t)$, 즉, $\displaystyle\lim_{t\to b-}g(t)-\lim_{t\to b+}g(t)=0$
(ii) $b=2$일 때
$\displaystyle\lim_{t\to b-}g(t)=\lim_{t\to 2-}g(t)=\lim_{t\to 2-}(3t^2-6t)=12-12=0$
$\displaystyle\lim_{t\to b+}g(t)=\lim_{t\to 2+}g(t)=\lim_{t\to 2+}(-2t+a)=-4+a$
$\displaystyle\lim_{t\to b-}g(t)-\lim_{t\to b+}g(t)=3$에서 $0-(-4+a)=3$, $a=1$
(i), (ii)에서 $a=1$, $b=2$이므로 $a+b=3$

7) 답 ③
[해설] 사차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d$는 상수) 로 놓을 수 있다.
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$ …… ㉠
ㄱ. 열린 구간 $(0,1)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.
따라서 $f(0)>f(1)$ (참)
ㄴ. $f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$이므로
$f'(x)=4(x+1)x(x-1)=4x^3-4x$ …… ㉡
㉠과 ㉡의 계수를 비교하면 $a=0, b=-2, c=0$이므로
$f(x)=x^4-2x^2+d$
모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. (참)
ㄷ. ㄴ에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고
$f(0)=d, f(-1)=f(1)=-1+d$
이므로 $f(0)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ,ㄴ 이다.

8) 답 ②

[해설] $f(t)=t^4-2t^3, g(t)=pt^2$ 에서
두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면
$v_P=f'(t)=4t^3-6t^2,\ v_Q=g'(t)=2pt$
두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_P, a_Q 라 하면
$a_P=v_P'=12t^2-12t,\ a_Q=v_Q'=2p$
$t>0$에서 두 점 P, Q의 가속도가 같게 되는 순간이 2번 있으므로 방정식 $12t^2-12t=2p,\ 6t^2-6t-p=0$이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.
$6t^2-6t-p=0$ …… ㉠
에서 방정식 ㉠의 두 양의 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면
(i) $D>0$에서 $\frac{D}{4}=9-6\times(-p)>0,\ p>-\frac{3}{2}$
(ii) $\alpha+\beta=\frac{6}{6}=1>0$
(iii) $\alpha\beta>0$에서 $-\frac{p}{6}>0,\ p<0$
(i),(ii),(iii)에서 $-\frac{3}{2}<p<0$
따라서 구하는 정수 p의 값은 -1이다.

$q(t)=-2t^3+4t^2-1$이므로 시각 t에서의 점 Q의 속도를
$v_Q(t)=q'(t)=-6t^2+8t$
$v_P(t)=v_Q(t)$ 에서 $3t^2-1=-6t^2+8t$

9) 답 ④

[해설]
열차가 정지할 때의 속도는 0이므로
$60-40t=0,\ t=\frac{3}{2}$
즉, 기관사가 제동을 건 순간부터 $\frac{3}{2}$초 후 열차가 정지할 때까지 이 열차가 움직인 거리는
$\int_0^{\frac{3}{2}}|v(t)|\,dt=\int_0^{\frac{3}{2}}(60-40t)dt$
$=\left[60t-20t^2\right]_0^{\frac{3}{2}}$
$=90-45=45(m)$

10) 답 ③

[해설]
점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면
$x(0)=\frac{16}{3}$
$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$
$=\frac{16}{3}+\int_0^t t(2-t)dt$
점 P가 $t=a$ 에서 원점을 지나면 $x(a)=0$
$x(0)=\frac{16}{3}+\int_0^a t(2-t)dt$
$=\frac{16}{3}+\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^a$
$=-\frac{1}{3}a^3+a^2+\frac{16}{3}$
이므로 $-\frac{1}{3}a^3+a^2+\frac{16}{3}=0,\ a^3-3a^2-16=0$
$(a-4)(a^2+a+4)=0$
이 때 $a^2+a+4>0$이므로 $a=4$
따라서 점 P가 출발 후 원점을 지날때까지 움직인 거리는
$\int_0^4|t(2-t)|\,dt=\int_0^2 t(2-t)dt+\int_2^4\{-t(2-t)\}dt$
$=\left[t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^4$
$=\left(4-\frac{8}{3}\right)+\left\{\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\}$
$=\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=8$

11) 답 28

[해설]
집합 U 부분집합의 개수는 $2^5=32$
$B-A\not\subset B$ 이려면 집합 B는 집합 A의 원소인 1, 2, 3 중 적어도 하나를 원소로 가져야 한다.
집합 U의 부분집합 중에서 1, 2, 3 중 어떤 것도 원소로 갖지 않는 집합의 개수는
$2^{5-3}=2^2=4$
이므로 집합 B의 개수는
$32-4=28$
따라서 집합 X의 원소의 개수는 28이다.

12) 답 ③

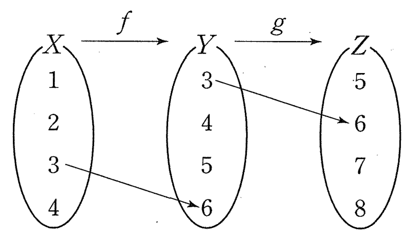
[해설]
$A=\{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$이므로 집합 A의 원소 중 2 를 제외한 나머지 원소는 모두 홀수이다.
$B=\{x|x=ab-1,\ a\in A,\ b\in A\}$이므로
$a=2$ 또는 $b=2$ $ab-1$은 홀수이고,
$a\neq 2$이고 $b\neq 2$이면 $ab-1$은 짝수이다.
(i) $ab-1$이 홀수인 동시에 20이하의 소수가 되도록 하는
집합 A의 두 원소 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)(a\le b)$는
$(2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 7)$
이때 $ab-1$의 값은 $2\times2-1,\ 2\times3-1,\ 2\times7-1$, 즉
3, 5, 13이므로
$A\cap B=\{3,\ 5,\ 13\}$
(ii) $ab-1$이 짝수인 동시에 20이하의 소수가 되려면
$ab-1=2$, 즉 $ab=3$이어야 하는데 이러한 $a,\ b$는 존재하지 않는다.
따라서 집합 $A\cap B=\{3,\ 5,\ 13\}$의 모든 원소의 합은
$3+5+13=21$

13) 답 ③

함수 $f(x+2)+1$의 역함수 $h(x)$를 구해 보자.
$y=f(x+2)+1$에서 $y-1=f(x+2)$ …… ㉠
함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $b=f(a)$이면
$a=g(b)$이다.
㉠에서
$x+2=g(y-1),\ x=g(y-1)-2$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=g(x-1)-2$
따라서 $h(x)=g(x-1)-2$
이때 함수 $y=h(x)$의 그래프는 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동시킨 것과 같으므로
$m-n=l-(-2)=3$

14) 답 ④

[해설]
조건 (가)에서 $f(3)=g(3)$이고
$f(3)\in Y,\ g(3)\in Z,\ Y\cap Z=\{5,\ 6\}$이므로
$f(3)=g(3)=5$ 또는 $f(3)=g(3)=6$
(i) $f(3)=g(3)=5$일 때
조건 (나)에서 $g(f(1))=5$이고함수 $g(x)$는 일대일 대응이므로
$f(1)=3$
그런데 조건 (다)에서 $f(1)\neq3$이므로 모순이다.
(ii) $f(3)=g(3)=6$일 때 ([그림 1])



[그림 1]

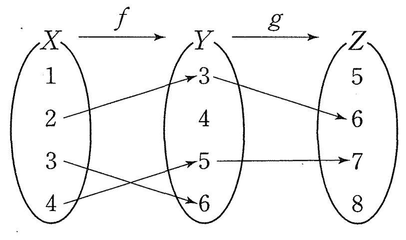
조건 (다)에서 $f^{-1}(3)>1$이므로
$f(2)=3$ 또는 $f(4)=3$ …… ㉠
한편 조건 (라)에서 $f(4)=g(f(4))-2$이므로
$f(4)=p$라 하면 $p=g(p)-2$

따라서 $g(p)=p+2$ …… ㉡

이때 $p\in Y$이고 $p+2\in Z$이어야 하므로 [그림 1]에서 ㉡을 만족시키는 p의 값은 5뿐이다.

따라서 $f(4)=5$

㉠, ㉡에서 $f(2)=3$, $g(5)=7$



[그림 2]

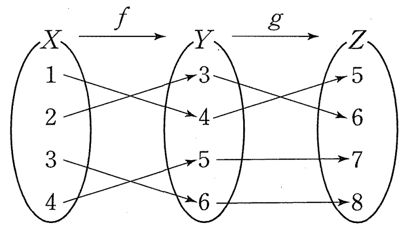
[그림 2]에서 함수 f는 일대일 대응이므로

$f(1)=4$ …… ㉢

조건 (나)에서 $(g\circ f)(1)=g(f(1))=5$이므로 ㉢에서

$g(4)=5$

이때 함수 g는 일대일 대응이므로 $g(6)=8$



[그림 3]

이상에서 두 함수 f, g는 [그림 3]과 같다.

따라서 $f(4)+g(6)=5+8=13$

15) 답 ⑤

[해설]

A, B, C를 하나로 보고 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 A의 양 옆에 B와 C가 있어야 하므로 경우의 수는

2

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$24\times 2=48$

16) 답 ⑤

[해설]

조건 (가)에서 $f(1)\neq f(2)$이고 $f(2)\neq f(3)$이므로 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(1)\neq f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 정하는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

이 각각에 대하여 조건 (나)에서 치역의 원소의 개수가 3이므로 나머지 $f(4)$, $f(5)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값이므로 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$60\times 9=540$

(ⅱ) $f(1)=f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_5P_2=20$

이 각각에 대하여 $f(4)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우 $f(5)$는 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외하고 가져야 한다.

$f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 값 중 하나를 가지는 경우도 마찬가지이다.

또, $f(4)=f(5)$인 경우는 $f(4)$와 $f(5)$가 $f(1)$, $f(2)$의 두 값을 제외한 한 값을 가져야 한다.

이때 경우의 수는

$2\times 3+2\times 3+3=15$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$20\times 15=300$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$540+300=840$

17) 답 ⑤

[해설]

서로 마주 보는 두 학생의 번호의 합의 최댓값이 10이상이 되기 위해서는 6번과 5번, 6번과 4번이 서로 마주 보고 앉아야 한다.

(ⅰ) 6번과 5번이 서로 마주 보고 앉는 경우

6번 앞에는 5번이 항상 앉아야 한다. 즉, 1번, 2번, 3번, 4번, 6번을 원형으로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

(ⅱ) 6번과 4번이 서로 마주 보고 앉는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는

24

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$24+24=48$

18) 답 ④

[해설]

접시를 원형으로 배열하는 경우의 수는

$(5-1)!=4!=24$

이 각각에 대하여 박하맛 사탕 3개, 딸기맛 사탕 2개를 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$24\times 10=240$

19) 답 ③

A와 B가 같은 영화를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_5C_1=5$

이 각각에 대하여 A가 B와 같이 선택한 영화 1편을 제외한 4편 중에서 2편을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_4C_2=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$

이 각각에 대하여 B가 앞에서 선택된 3편의 영화를 제외한 2편의 영화 중에서 1편을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_2C_1=2$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $5\times 6\times 2=60$

20) 답 ④

4가지 색 중 2가지 색을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 선택하는 조합의 수이므로 ${}_4C_2=\dfrac{4\times 3}{2\times 1}=6$

이 각각에 대하여 2가지 색의 볼펜은 적어도 하나씩 있어야 하므로 우선 하나씩 선택한 후 나머지 3개만을 선택하면 된다. 그러므로 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수이므로 ${}_2H_3={}_{2+3-1}C_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $6\times 4=24$

21) 정답 3

α, β는 이차방정식 $x^2+x-3=0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-3$

또 주어진 그래프에서 $\alpha<-1$, $\beta>1$

$-1<\dfrac{1}{\alpha}<0$, $0<\dfrac{1}{\beta}<1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha^n}+\frac{1}{\beta^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^n$$

$$=\frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}}+\frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}}$$

$$=\frac{1}{\alpha-1}+\frac{1}{\beta-1}$$

$$=\frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{-1-2}{-3-(-1)+1}=3$$

22) 정답 ②

[n단계] 에 놓인 전체 바둑돌의 개수는 $(2n)^2$이므로

$a_n=(2n)^2-2\cdot 2n=4n^2-4n=4n(n-1)$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n(n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{4}$$

23) 답 8

[해설]

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[0,\ 1]$에서 연속이고 열린 구간 $(0,\ 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)\ (0<c<1)$

을 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건 (나)에서 $|f'(c)|\le 5$이므로

$\left|\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}\right|\le 5$

$|f(1)-3|\le 5$ (조건 (다)에 의해)

$-5 \le f(1)-3 \le 5,\ -2 \le f(1) \le 8$

따라서 $f(1)$의 최댓값은 8이다.

참고

$f(x)=5x+3$이면 함수 $f(x)$는 주어진 조건을 만족시키고 $f(1)=8$이다.

24) 답 ③

[해설]

ㄱ. $h(x)=f(x)-g(x)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

방정식 $h'(x)=0$, 즉 방정식 $f'(x)=g'(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표이므로 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$

따라서 방정식 $h'(x)=0$의 모든 실근의 합은 $0+2+4=6$이다. (참)

ㄴ. $1<x<2$에서 $f'(x)>g'(x)$이므로 $h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$

따라서 함수 $h(x)$는 $1<x<2$에서 증가한다. (참)

ㄷ. 주어진 그래프를 이용하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=4$에서 극소이다.(거짓)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

25) 답 ①

[해설]

$f(x)=x^3-3ax^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2a\,(a>0)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 $f(0)=a$,

$x=2a$에서 극솟값 $f(2a)=8a^3-12a^3+a=-4a^3+a$를 갖는다.

조건 (가)에서 $\alpha=0,\ \beta=2a$이므로

$\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\dfrac{f(2a)-f(0)}{2a-0}$

$=\dfrac{(-4a^3+a)-a}{2a}=-2a^2$

$f'(1)=3-6a$이므로

조건 (나)에서 $-2a^2=(3-6a)-3$

$a^2=3a,\ a(a-3)=0$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(0)=a=3$이다.

26) 답 500

[해설]

함수 $f(x)=x^3-4x$의 그래프를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동시킨 것을 함수 $y=g(x)$의 그래프라 하면

$g(x)=f(x)+m\equiv x^3-4x+m$

$g'(x)=3x^2-4$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 접하는 접점의 좌표를 $(t,\ g(t))$라 하면 접선의 기울기가 $3t^2-4$이므로 접선의 방정식은

$y=(3t^2-4)(x-t)+t^3-4t+m$

즉, $y=(3t^2-4)x-2t^3+m$ ······ ㉠

직선 ㉠이 직선 $y=x$와 일치해야 하므로

$3t^2-4=1,\ m=2t^3$

$3t^2-4=1$에서 $t^2=\dfrac{5}{3}$

따라서 $m^2=(2t^3)^2=4(t^2)^3=4\times\left(\dfrac{5}{3}\right)^3=\dfrac{500}{27}$이므로

$27m^2=27\times\dfrac{500}{27}=500$

27) 답 ②

[해설]

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$이므로 $f'(a)=2a$

따라서 점 $P(a,\ a^2)$에서의 접선 l의 기울기가 $2a$이므로 접선 l의 방정식은

$y=2a(x-a)+a^2,\ y=2ax-a^2$

직선 l과 y축이 만나는 점 A의 좌표는 $A(0,\ -a^2)$

점 $P(a,\ a^2)$을 지나고 접선 l과 수직인 직선 m의 기울기는 $-\dfrac{1}{2a}$이므로 직선 m의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2,\ y=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$

직선 m과 y축이 만나는 점 B의 좌표는 $B\left(0,\ a^2+\dfrac{1}{2}\right)$

따라서 두 점 $A,\ B$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=a^2+\dfrac{1}{2}-(-a^2)=2a^2+\dfrac{1}{2}$

$\overline{AB}=1$에서 $2a^2+\dfrac{1}{2}=1,\ 2a^2=\dfrac{1}{2},\ a^2=\dfrac{1}{4}$

이때 $a>0$이므로 $a=\dfrac{1}{2}$

28) 답 2

[해설] $\dfrac{d}{dx}\{(x^2+1)f(x)\}=2xf(x)+(x^2+1)f'(x)$이므로

$\displaystyle\int_0^2 2xf(x)dx+\int_0^2(x^2+1)f'(x)dx$

$\displaystyle=\int_0^2\{2xf(x)+(x^2+1)f'(x)\}dx$

$=\Big[(x^2+1)f(x)\Big]_0^2=5f(2)-f(0)=0$

$5f(2)=8+f(0)=8+2=10$

따라서 $f(2)=2$

29) 답 ②

[해설] $\displaystyle\int_m^{m+1}f(x)dx=F(m+1)-F(m)$

$F(1)=F(2)=F(4)=F(6)=0$이므로

$m=1$일 때, $F(2)-F(1)=0$

$m=2$일 때, $F(3)-F(2)=F(3)>0$

$m=3$일 때, $F(4)-F(3)=-F(3)<0$

$m=4$일 때, $F(5)-F(4)=F(5)<0$

$m\ge5$일 때, $F(m+1)-F(m)>0$

따라서 부등식 $\displaystyle\int_m^{m+1}f(x)dx<0$,

즉 $F(m+1)<F(m)$을 만족시키는 자연수 m은 $m=3$ 또는 $m=4$이므로 구하는 모든 자연수 m의 값의 합은

$3+4=7$

30) 답 ③

[해설]

닫힌구간 $[0,2]$에서 $f(x)\ge0$이고, 닫힌구간 $[2,3]$에서 $f(x)\le0$이다.

따라서 $S_1=\displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\dfrac{8}{3},\ S_2=\int_2^3\{-f(x)\}dx$ 이다.

한편,

$\displaystyle\int_0^3 f(x)dx=\int_0^2 f(x)dx+\int_2^3 f(x)dx$

$\displaystyle\dfrac{9}{4}=\dfrac{8}{3}+\int_2^3 f(x)dx$

$\displaystyle\int_2^3 f(x)dx=\dfrac{9}{4}-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{5}{12}$

따라서

$\displaystyle S_2=\int_2^3\{-f(x)\}dx=-\int_2^3 f(x)dx=-\left(-\dfrac{5}{12}\right)=\dfrac{5}{12}$

31) 답 4

[해설]

$g=f^{-1}$이므로 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이다.

$f(a)=2a+|a|+4=1$에서

$a\ge0$이면 $2a+a+4=1$이므로 $a=-1$ (모순)

$a<0$이면 $2a-a+4=1$이므로 $a=-3$

따라서 $g(1)=-3$

한편 $g^{-1}=(f^{-1})^{-1}=f$이므로

$g^{-1}(1)=f(l)=2+|1|+4=7$

따라서 $g(1)+g^{-1}(1)=-3+7=4$

32) 답 ④

[해설]

$$f(x)=\begin{cases} f(x+2)+2 & (x=2,\ 4) \\ 6 & (x=6) \\ a & (x=8) \end{cases} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(6)=6$이므로 ㉠에 $x=4$를 대입하면
$f(4)=f(4+2)+2=f(6)+2=6+2=8$
다시 ㉠에 $x=2$를 대입하면
$f(2)=f(2+2)+2=f(4)+2=8+2=10$
이때 함수 f는 X에서 Y로의 일대일 대응이므로
$a=f(8)=4$
따라서 $a+f(2)=4+10=14$

33) 답 ⑤

[해설] $a_{n+1}=\dfrac{2a}{a_n-1}$ 에서 n에 1,2,3을 차례로 대입하면

$a_2=\dfrac{2a_1}{a_1-1}=\dfrac{2\times2}{2-1}=4$

$a_3=\dfrac{2a_2}{a_2-1}=\dfrac{2\times4}{4-1}=\dfrac{8}{3}$

$a_4=\dfrac{2a_3}{a_3-1}=\dfrac{2\times\frac{8}{3}}{\frac{8}{3}-1}=\dfrac{16}{5}$

34) 답 52

[해설] 조건 (나) 에서 $a_{n+2}=a_n-4$이므로 두 수열 $\{a_{2n-1}\}$, $\{a_{2n}\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.
조건 (가)에서 $a_1=99, a_2=103$이므로
$a_{2n-1}=99+(n-1)\times(-4)=-4n+103$
$a_{2n}=103+(n-1)\times(-4)=-4n+107$
$a_{2n-1}<0$에서 $-4n+103<0, n>\dfrac{103}{4}=25.75$
또, $a_{2n}<0$ 에서 $-4n+107<0, n>\dfrac{107}{4}=26.75$
이때 $a_{2n+1}<a_{2n-1}$, $a_{2n+2}<a_{2n}$이고
$a_{49}=3, a_{51}=-1, a_{53}=-5, a_{50}=7, a_{52}=3, a_{54}=-1$
이므로
$a_{51}+a_{52}>0, a_{52}+a_{53}<0$이다.
따라서 $a_k+a_{k+1}<0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 52이다.

35) 답 ⑤

조건 (가)를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$을 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로
${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
이 각각에 대하여 조건 (나)를 만족시키도록 $f(4)$, $f(5)$를 결정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수이므로
${}_5H_2={}_{5+2-1}C_2={}_6C_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$
따라서 구하는 함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의해 $10\times15=150$

36) 답 ④

사탕의 개수의 총합이 5이고 모든 사람은 적어도 하나의 사탕을 받으며 A가 받은 사탕의 개수가 B, C가 각각 받은 사탕의 개수보다 많거나 같아야 하므로 각 경우로 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) 2개, 2개, 1개로 나누어 주는 경우
A가 2개를 받아야 하므로 2명 중 사탕 2개를 받는 한 사람을 선택하는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_2C_1=2$
이 각각에 대하여 A에게 2개의 사탕을 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
이 각각에 대하여 사탕 2개를 받는 사람에게 나머지 사탕 3개 중 2개를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
이 각각에 대하여 나머지 사탕 1개는 나머지 한 사람에게 나누어 주면 되므로 경우의 수는 1
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $2\times10\times3\times1=60$
(ⅱ) 3개, 1개, 1개로 나누어 주는 경우
A가 서로 다른 사탕 5개 중 3개의 사탕을 받아야 하므로 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_5C_3={}_5C_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$
이 각각에 대하여 나머지 사탕 2개를 두 사람에게 하나씩 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로 ${}_2P_2=2!=2$
그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $10\times2=20$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해
$60+20=80$

37) 답 ③

[해설]
갑이 아침, 점심, 저녁에 서로 다르게 음식을 주문하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 3개를 택하는 순열의 수이므로
${}_5P_3=5\times4\times3=60$
서로 다른 5가지 음식을 a, b, c, d, e라 하자.

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을			

이 각각에 대하여 아침, 점심, 저녁 중 주문한 음식이 한 번만 같으므로 경우의 수는
3

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		

이 각각에 대하여 갑과 을이 주문한 음식의 종류가 4가지이므로 갑이 주문한 음식 중 갑과 을이 같이 주문한 음식을 제외한 두 가지 음식 중 하나를 을이 주문해야 하므로 경우의 수는
2

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a		b

이 각각에 대하여 갑과 을이 주문한 3가지 음식을 제외한 나머지 2가지 중 을이 하나를 주문하면 되므로 경우의 수는
2

	아침	점심	저녁
갑	a	b	c
을	a	d	b

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$60\times3\times2\times2=720$

38) 답 ④

[해설] 집합 X에서 X로의 함수의 개수는
${}_3\Pi_3=3^3$
$f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $f(1)f(2)f(3)=6$인 경우
$6=1\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 1, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$3\neq6$
(ⅱ) $f(1)f(2)f(3)=12$인 경우
$12=2\times2\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{3!}{2!}=3$
(ⅲ) $f(1)f(2)f(3)=18$인 경우
$18=2\times3\times3$이므로 이 경우를 만족시키는 함수 $f(x)$의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로
$\dfrac{3!}{2!}=3$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(1)f(2)f(3)$의 값이 6의 배수인 경우의 수는
$6+3+3=12$
따라서 구하는 확률은 $\dfrac{12}{3^3}=\dfrac{4}{9}$

39) 답 ③

[해설]
4개의 층 중 3개의 층을 택하는 경우의 수는
${}_4C_3+{}_4C_1=4$
6명을 3개의 조로 1명 이상씩 분할하는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) (4명, 1명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는
${}_6C_4\times{}_2C_1\times{}_1C_1\times\dfrac{1}{2!}=15$
(ⅱ) (3명, 2명, 1명) 으로 분할하는 경우의 수는
${}_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60$
(ⅲ) (2명, 2명, 2명)으로 분할하는 경우의 수는
${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\dfrac{1}{3!}=15$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 분할하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해
$15+60+15=90$
3개의 조를 3개의 층에 분배하는 경우의 수는 $3!=6$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해
$4\times90\times6=2160$

40) 답 ④

[해설] 집합 X에서 집합 Y로의 함수의 개수는
${}_4\Pi_4=4^4$
함수 f가 $f(1)f(2)f(3)=0$ 또는 $f(4)\geq0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은

$f(1)f(2)f(3) \neq 0$이고 $f(4) < 0$

(ⅰ) $f(1)f(2)f(3) \neq 0$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 0이 될 수 없으므로 집합 $\{-2,\ -1,\ 1\}$의 원소 중에서 결정되어야 한다.

따라서 $f(1)f(2)f(3) \neq 0$을 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3 = 3^3$

(ⅱ) $f(4) < 0$인 경우

$f(4)$의 값은 집합 $\{-2,\ -1\}$의 원소 중에서 결정되어야 하므로 $f(4) < 0$을 만족시키도록 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$$P(A^C) = \frac{3^3 \times 2}{4^4} = \frac{27}{128}$$

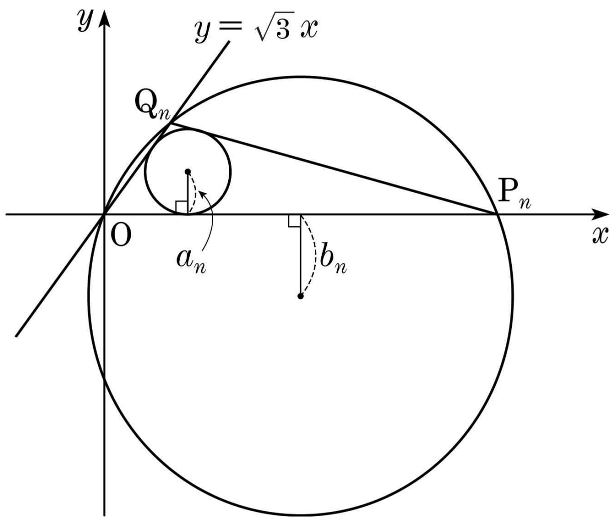
따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{27}{128} = \frac{101}{128}$$

제 8 회

1. 2015년 3월 교육청
2. 2012년 사관학교
3. 2007년 6월 평가원
4. 2015년 9월 평가원
5. 2010년 수능
6. 2005년 경찰대
7. 2007년 수능
8. 2005년 6월 평가원
9. 2012년 10월 교육청
10. 2004년 12월 평가원

1. 좌표평면 위에 직선 $y=\sqrt{3}x$가 있다. 자연수 n에 대하여 x축 위에 점 중에서 x좌표가 n인 점을 P_n, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 x좌표가 $\frac{1}{n}$인 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 내접원의 중심에서 x축까지의 거리를 a_n, 삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 외접원의 중심에서 x축까지의 거리를 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\mathrm{L}$이다 $100\mathrm{L}$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)



2. 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9^n x^{18}}{(9+x^{2p})^n}$에 대하여 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위한 자연수 p의 개수는?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

3. 두 다항함수 $f_1(x), f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$

(나) $f_i{}'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}\ (i=1, 2)$

(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0

④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

4. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은?

(가) $f(0)=-3$

(나) 모든 양의 실수 x 에 대하여 $6x-6 \le f(x) \le 2x^3-2$이다.

① 36 ② 38 ③ 40

④ 42 ⑤ 44

5. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $-1 \le x < 1$일 때, $g(x)=f(x)$이다
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(-1)=f(1)$이고, $f'(-1)=f'(1)$이면, $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면, $f'(0)f'(1)<0$이다.
ㄷ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f'(1)>0$이면, 구간 $(-\infty, -1)$에 $f'(c)=0$인 c가 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 함수 $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$가 점 $(2,1)$에 대하여 대칭이고 점 $(3,3)$을 지난다. 구간 $-1 \le x \le 1$에서 이 함수의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면 $3\mathrm{M}-m$의 값은?

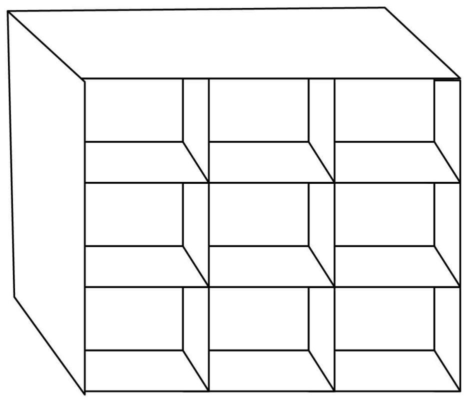
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

7. 첫째항이 0이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$a_{n+1}b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 만족시킬 때, b_{27}의 값을 구하시오.

8. 세 종류의 상품이 3개씩 있다. 이 상품을 그림과 같은 진열장에 한 칸에 하나씩 모두 진열하고자 한다. 가로줄에는 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하고 세로줄에는 같은 종류의 상품을 진열하고 세로줄에는 같은 종류의 상품이 이웃하지 않게 진열하는 방법의 수는?

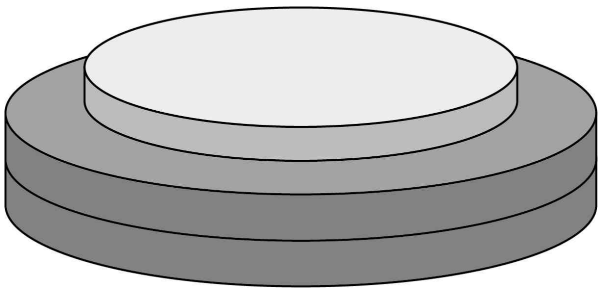


① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

9. 반지름의 길이가 서로 다른 여섯 종류의 원판이 각각 3개씩 18개가 있다. 원판을 다음과 같은 규칙으로 쌓으려고 한다.

(가) 원판 3개를 택하여 원판의 중심이 일치하도록 쌓는다.
(나) 반지름의 길이가 작은 원판은 반지름의 길이가 큰 원판 위에 쌓는다.
(다) 반지름의 길이가 같은 원판은 구별하지 않으면서 쌓는다.

그림은 반지름의 길이가 같은 두 개의 원판과 반지름의 길이가 작은 한 개의 원판을 규칙에 따라 쌓은 예이다.



이와 같은 쌓는 방법의 수를 구하시오.

10. 상훈이를 포함한 5명의 학생이 쪽지시험을 본 후, 5장의 답안지를 섞은 다음에 임의로 하나씩 뽑는다. 상훈이만 자신의 답안지를 뽑고 나머지 4명은 다른 학생의 답안지를 뽑을 확률을 기약분수 $\frac{q}{p}$로 나타낼 때, $p+q$의 값을 구하시오.

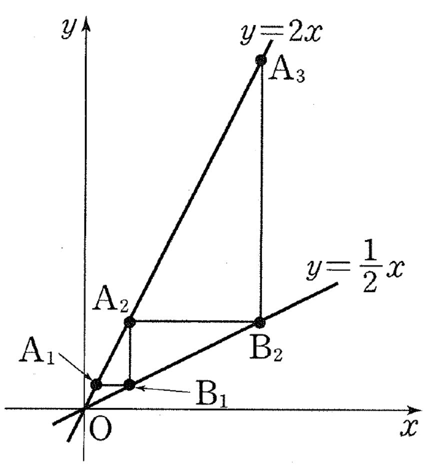
추가 과제

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2n}}$ 의 값은?

① $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ 1

④ $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$　⑤ $1+\sqrt{2}$

2. 좌표평면에서 직선 $y=2x$ 위의 점 $\mathrm{A}_1(1,\ 2)$가 있다. 점 A_1을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 B_1, 점 B_1을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 A_2, 점 A_2를 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 만나는 점을 B_2, 점 B_2를 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=2x$와 만나는 점을 A_3이라 하자. 이와 같은 방법으로 B_3, A_4, B_4, $\cdots$, A_n, B_n, $\cdots$을 정할 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}$의 값은?



① $\frac{4}{9}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{5}{9}$

④ $\frac{11}{18}$　⑤ $\frac{2}{3}$

3. 수열 $\{a_n\}$이 a_1이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=2n+1$$

을 만족시킬 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{a_n a_{n+1}}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1

④ 2　⑤ 4

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=x^2f(x)$라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선과 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선이 서로 수직일 때, 두 접선의 교점의 좌표는 $(a,\ b)$이다. $a+b$의 값은?

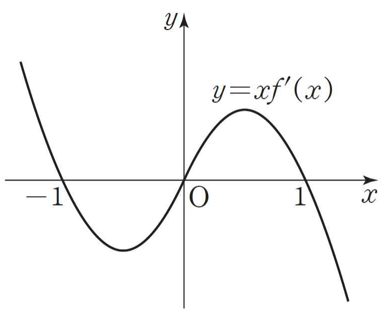
① $\frac{6}{5}$　② $\frac{8}{5}$　③ 2

④ $\frac{12}{5}$　⑤ $\frac{14}{5}$

5. 함수 $f(x)=x^4-4x^3-8x^2+a$의 극댓값이 3일 때, $f(x)$의 모든 극솟값의 합은? (단, a는 상수이다.)

① -110 ② -115 ③ -120
④ -125 ⑤ -130

6. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $y=xf'(x)$의 그래프가 그림과 같이 x축과 만나는 세 점의 x좌표가 -1, 0, 1이다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



보기

ㄱ. $f(x)$는 $x>1$에서 감소한다.
ㄴ. $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^4-4x^3+a\geq 0$을 만족시키는 실수 a의 최솟값은?

① 18 ② 27 ③ 36
④ 45 ⑤ 54

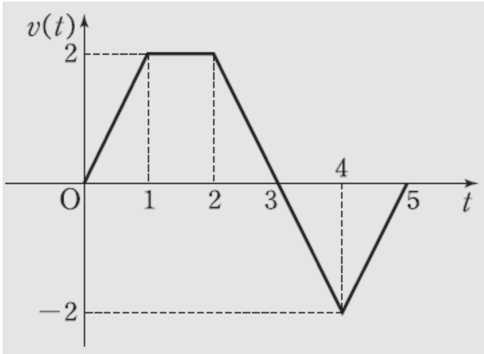
8. 삼차함수 $f(x)=x^3+x^2+ax+3$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_b^x f'(t)dt=-2$$

를 만족시키는 두 실수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

9. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각t $(0 \le t \le 5)$ 에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P의 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 위치의 변화량을 a, 움직인 거리를 b라 할 때, $a+b$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

10. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도 $f(t)$와 점Q의 시각 t에서의 속도 $g(t)$는

$f(t) = 12t(t-1)(t-3)$, $g(t) = at$

이다. 두 점 P, Q가 원점을 동시에 출발한 후 한번만 만나도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① 32　　② 34　　③ 36
④ 38　　⑤ 40

11. 좌표평면 위의 점 A$(-1,\ 1)$과 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프 위의 점 P에 대하여 두 점 A와 P 사이의 거리의 최솟값은?

① $\sqrt{6}$　　② $\sqrt{7}$　　③ $2\sqrt{2}$
④ 3　　⑤ $\sqrt{10}$

12. 두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{kx}$에 대하여 서로 다른 두 실수 a, b는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(b)=4,\ f(b)=g(a)$
(나) $g(b)-g(a)=\sqrt{2}\{f(b)-f(a)\}$

$f(a) \le x \le g(b)$에서 함수 $y=g(x)$의 최댓값 M과 최솟값 m의 곱 Mm의 값은? (단, k는 1보다 큰 상수이다.)

① $\sqrt{2}$　　② $2\sqrt{2}$　　③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$　　⑤ $5\sqrt{2}$

13. 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은?

(가) $a_8 = 6a_3$
(나) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{12} = a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{11} + 30$

① 20 ② 25 ③ 30
④ 35 ⑤ 40

14. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_n = 3n^2 + kn$ $(n \geq 1)$이고 $a_1 + a_2 + a_3 = 21$일 때, S_5의 값은? (단, k는 상수이다.)

① 55 ② 60 ③ 65
④ 70 ⑤ 75

15. 부등식

$$127 < {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} < 1023$$

을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은?

① 26 ② 27 ③ 28
④ 29 ⑤ 30

16. $\log_2({}_{11}\mathrm{C}_0 + {}_{11}\mathrm{C}_1 + {}_{11}\mathrm{C}_2 + {}_{11}\mathrm{C}_3 + {}_{11}\mathrm{C}_4 + {}_{11}\mathrm{C}_5)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

17. ${}_6\mathrm{C}_0+7\times{}_6\mathrm{C}_1+7^2\times{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+7^6\times{}_6\mathrm{C}_6$의 값은?

① 2^{12} ② 2^{14} ③ 2^{16}
④ 2^{18} ⑤ 2^{20}

18. $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+\cdots+8(1+x)^8$의 전개식에서 x^2의 계수는?

① 546 ② 556 ③ 566
④ 576 ⑤ 586

19. 확률변수 X의 확률질량함수가 다음과 같다.

$$P(X=x)={}_{25}C_x p^x(1-p)^{25-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 25)$$

확률변수 X의 평균이 5일 때, $E(X^2)$의 값은?
(단, $0<p<1$이다.)

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

20. 첫째항이 2이고, 공차가 3인 등차수열의 첫째항부터 제21항까지의 값을 가지는 확률변수 X에 대하여 X의 확률분포는 다음 표와 같다.

X	2	5	8	$\cdots$	62	계
$\mathrm{P}(X=x)$	${}_{20}\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$	${}_{20}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{19}$	${}_{20}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^{18}$	$\cdots$	${}_{20}\mathrm{C}_{20}\left(\frac{1}{4}\right)^{20}$	1

$\mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(2X)$의 값을 구하시오.

21. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

(가) $\lim_{x\to 1} f(x)=0$

(나) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)-x^2}{2x}=1$

22. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$(x-2)f(x)=x^3-8$

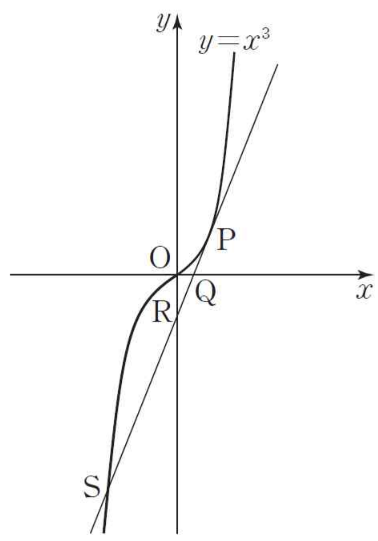
을 만족시킨다. $f(2)$의 값을 구하시오.

23. 다항함수 $f(x)$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 연속인 함수 $g(x)$를 $g(x)=\begin{cases} \dfrac{xf(x)+2}{x^2}-1 & (0<x<1,\ x>1) \\ k & (x=1) \end{cases}$로 정의하자. $\lim_{x\to\infty} g(x)=1$일 때, 상수 k의 값은?

① $-\dfrac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\dfrac{3}{2}$

④ $-\dfrac{1}{2}$ ⑤ -1

24. 곡선 $y=x^3$ 위의 제1사분면에 있는 점 P에서의 접선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하고 이 접선이 곡선과 만나는 또 다른 한 점을 S라 하자. $\dfrac{\overline{QR}\times\overline{RS}}{\overline{PQ}^2}$의 값을 구하시오.



25. 함수 $f(x)=a^2x^3-9ax^2+48$에 대하여 $f'(1)=f(0)$을 만족시키는 양수 a의 값을 구하시오.

26. 곡선 $y=x^4 (x>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 PQH의 넓이가 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

27. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x<2) \\ -x+4 & (x \geq 2) \end{cases}$의 모든 극값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

28. 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)dt$$

를 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은?

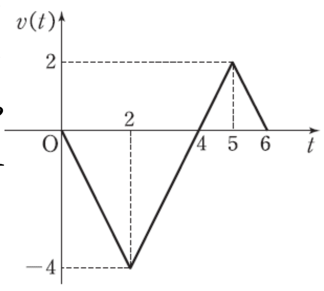
① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

29. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_{1}^{x} f(t)\,dt = x^3 - 2x^2 + a$$

를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다)

30. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (0 \le t \le 6)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다. 점 P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있을 때, 원점과 점 P사이의 거리는?



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

31. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = 5,\ a_5 - a_3 = 8$$

일 때, a_7의 값은?

① 27 ② 29 ③ 31
④ 33 ⑤ 35

32. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$$

을 만족시킨다. $a_1 = -3$, $a_3 = 5$일 때, $a_k = 85$를 만족시키는 k의 값은?

① 19 ② 21 ③ 23
④ 25 ⑤ 27

추가 과제

33. -2와 58 사이에 n개의 정수를 넣어 만든 등차수열

$$-2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 58$$

의 공차가 소수일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$의 최솟값을 구하시오.

34. 자연수 n에 대하여 다항식 $f(x)=x^2-2x+5$를 $x-n$으로 나눈 나머지를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{10}\left(9k^2-a_{3k}\right)$의 값은?

① 260 ② 280 ③ 300
④ 320 ⑤ 340

35. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는?

$f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)\times f(5)=4$

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

36. 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수는?

(가) $f(4)$는 홀수이다.
(나) $x<4$이면 $f(x)\le f(4)$이다.
(다) $x>4$이면 $f(x)>f(4)$이다.

① 388 ② 393 ③ 398
④ 403 ⑤ 408

추가 과제

37. $f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에 대하여
$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_{10}t^{10}$ (a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{10}은 상수)일 때, a_7의 값은?

① 159 ② 161 ③ 163
④ 165 ⑤ 167

38. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+\left(x-\frac{1}{x}\right)^4+\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는?

① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

39. 자연수 n에 대하여 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 X가 $P(X=1)=12P(X=n)$을 만족시킬 때, $E(X)+V(X)$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

40. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수 중 작지 않은 수를 확률변수 X라 하자. $E(36X)$의 값을 구하시오.

[난문현답 기출 정답]

1. 25
2. ④
3. ①
4. ①
5. ③
6. ②
7. 13
8. ①
9. 56
10. 43

[추가 과제 정답]

1) [정답] ④

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+2n}}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+2)}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+2}}\right)$$
$$=1+\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) 답 ①

$A_1(1,\ 2)$, $B_1(4,\ 2)$이므로 $\overline{A_1B_1}=3$

직선 $y=2x$ 의 기울기가 2 이므로

$$\frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{B_2A_3}}{\overline{A_2B_2}}=\cdots=\frac{\overline{B_nA_{n+1}}}{\overline{A_nB_n}}=2 \quad \cdots ㉠$$

직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{\overline{B_1A_2}}{\overline{A_2B_2}}=\frac{\overline{B_2A_3}}{\overline{A_3B_3}}=\cdots=\frac{\overline{B_nA_{n+1}}}{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}=\frac{1}{2} \quad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{A_2B_2}}=\cdots=\frac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\overline{A_nB_n}}=4$$

즉 $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=4\,\overline{A_nB_n}$ 이므로

$\overline{A_nB_n}=\overline{A_1B_1}\times 4^{n-1}=3\times 4^{n-1}$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{A_nB_n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\times 4^{n-1}}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$$

3) [정답] ③

$n\ge 2$일 때,

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)$$
$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)$$
$$=1+2\times\frac{(n-1)n}{2}+n-1$$
$$=n^2$$

$\therefore\ a_n=n^2\ (n\ge 2)$

이때, $a_1=1^2=1$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=n^2$이 성립한다.

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{a_ka_{k+1}}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{k^2\times(k+1)^2}}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}$$
$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{a_na_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{1}{a_ka_{k+1}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1$$

4) [정답] ④

점 $(2,\ 1)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2)=1$

$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$이므로

$g'(2)=4f(2)+4f'(2)=4+4f'(2)$

두 접선이 서로 수직이고 $f(x)$와 $g(x)$는 다항함수이므로

$f'(2)\times g'(2)=-1 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(2)\times\{4+4f'(2)\}=-1$

$\{2f'(2)+1\}^2=0$

$\therefore\ f'(2)=-\frac{1}{2}$

이것을 ㉠에 대입하면

$g'(2)=2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{2}(x-2)$

$\therefore\ y=-\frac{1}{2}x+2 \quad \cdots\cdots ㉡$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은 $y-4=2(x-2)$

$\therefore\ y=2x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢에서

$-\frac{1}{2}x+2=2x \quad \therefore\ x=\frac{4}{5}$

$x=\frac{4}{5}$를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{8}{5}$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$이므로

$a+b=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

5) [정답] ④

$f(x)=x^4-4x^3-8x^2+a$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2-16x$

$\quad =4x(x^2-3x-4)$

$\quad =4x(x+1)(x-4)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값이 3이므로 $f(0)=a=3$

$\therefore\ f(x)=x^4-4x^3-8x^2+3$

이때, 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(-1)$과 $f(4)$이고

$f(-1)=1+4-8+3=0$

$f(4)=256-256-128+3=-125$

이므로 모든 극솟값의 합은 -125이다.

6) [정답] ①

ㄱ. $x>1$에서 $xf'(x)<0$이므로 $f'(x)<0$이다.

그러므로 $f(x)$는 $x>1$에서 감소한다. (참)

ㄴ. $x=-1$일 때, $xf'(x)=0$이므로 $f'(-1)=0$

또한 $x=-1$의 좌우에서 $xf'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f'(x)$의 부호는 음에서 양으로 바뀐다.

그러므로 $f(x)$는 $x=-1$ 에서 극솟값을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $x=1$ 일 때, $xf'(x)=0$이므로 $f'(1)=0$

또한 $x=1$ 의 좌우에서 $xf'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 $f'(x)$의 부호는 양에서 음으로 바뀐다.

그러므로 $f(x)$는 $x=1$ 에서 극댓값을 갖는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

7) [정답] ②

$f(x)=x^4-4x^3+a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=3$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.

$x=3$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값이면서 최솟값인 $f(3)=81-108+a=a-27$을 갖는다.

주어진 부등식을 만족시키려면 $a-27\geq 27$이어야 한다.

$\therefore\ a\geq 27$

따라서 실수 a의 최솟값은 27이다.

8) [정답] ③

$f(x)$는 $f'(x)$의 한 부정적분이므로

$$\int_b^x f'(t)dt=f(x)-f(b)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_b^x f'(t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(b)}{x}=-2$$

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-f(b)\}=0$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\{f(x)-f(b)\}=f(0)-f(b)=0$

$\therefore\ f(b)=f(0)$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(b)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=-2$$

$f(x)=x^3+x^2+ax+3$에서 $f'(x)=3x^2+2x+a$이므로

$f'(0)=a=-2$

$\therefore\ f(x)=x^3+x^2-2x+3$

또한 $f(0)=3$이므로

$f(0)=f(b)=b^3+b^2-2b+3=3$

$b^3+b^2-2b=0$, $b(b+2)(b-1)=0$

$\therefore\ b=-2$ 또는 $b=0$ 또는 $b=1$

따라서 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(-2,\ -2)$, $(-2,\ 0)$, $(-2,\ 1)$이므로 그 개수는 3이다.

9) 답 ③

[해설]

점 P의 시각 $t=0$ 에서 $t=5$까지 위치의 변화량 a는

$$a=\int_0^5 v(t)\,dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5 v(t)dt$$

$$=\frac{1}{2}\times(3+1)\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 2=4-2=2$$

점 P의 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리 b는

$$b=\int_0^5 |v(t)|\,dt=\int_0^3 v(t)dt+\int_3^5\{-v(t)\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\times(3+1)\times 2+\frac{1}{2}\times 2\times 2=4+2=6$$

따라서 $a=2$, $b=6$ 이므로 $a+b=2+6=8$

10) 답 ③

[해설]

원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P,Q의 시각 t에서의 속도가 각각 $f(t)$, $g(t)$일 때, 두 점 P,Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $F(t)$, $G(t)$라 하면

$$F(t)=F(0)+\int_0^t f(t)dt=\int_0^t f(t)dt$$

$$G(t)=G(0)+\int_0^t g(t)dt=\int_0^t g(t)dt$$

두 점 P,Q가 시각 $t=x$ $(x>0)$에서 만나면 $F(x)=G(x)$

즉,

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x g(t)dt$$

$$\int_0^x\{12t(t-1)(t-3)\}dt=\int_0^x at\,dt$$

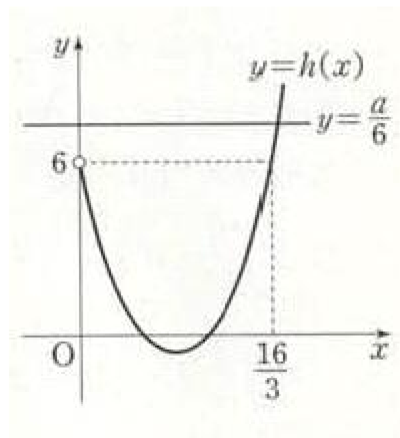
$$\left[3t^4-16t^3+18t^2\right]_0^x=\left[\frac{1}{2}at^2\right]_0^x$$

$$3x^4-16x^3+18x^2=\frac{1}{2}ax^2$$

$$3x^2\left(x^2-\frac{16}{3}x+6-\frac{1}{6}a\right)=0$$

이 때 $x>0$이므로

$$x^2-\frac{16}{3}x+6-\frac{1}{6}a=0\quad\cdots㉠$$



㉠ 이 양수P,Q인 중근을 갖거나 양의 실근을 한 개만 가지면 두 점 P,Q가 원점을 동시에 출발한 후 한번만 만나게 된다.

이 때, $h(x)=x^2-\frac{16}{3}x+6$ 이라 하면 함수

$h(x)=x^2-\frac{16}{3}x+6$이라 하면 함수

$y=h(x)$ $(x>0)$의 그래프는 그림과 같고 ㉠의 실근은 곡선 $y=h(x)$ $(x>0)$과 직선 $y=\frac{a}{6}$ $(a>0)$의 교점의 x좌표이다.

그림에서 곡선 $y=h(x)$ $(x>0)$과 직선 $y=\frac{a}{6}(a>0)$이 접할 수 없으므로 ㉠이 양수인 중근을 갖는 경우는 존재하지 않는다. 따라서 ㉠이 양의실근을 한 개만 가져야 하므로 곡선 $y=h(x)$ $(x>0)$ 과 직선 $y=\frac{a}{6}$ $(a>0)$이 한점에서 만나야 한다. 즉,

$\frac{a}{6}\geq 6$에서 $a\geq 36$

따라서 양수 a의 최솟값은 36이다.

11) 답 ③

[해설] 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t-3}{t+1}\right)$이라 하면

$\dfrac{t-3}{t+1}=\dfrac{-4}{t+1}+1$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(\mathrm{t}+1)^2+\dfrac{(-4)^2}{(\mathrm{t}+1)^2}}$

그런데 $(t+1)^2>0,\ \dfrac{4^2}{(t+1)^2}>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(t+1)^2+\frac{4^2}{(t+1)^2}\ \geq\ 2\sqrt{(t+1)^2\times\frac{4^2}{(t+1)^2}}$$
$$=2\times4=8$$

(단, 등호는 $(t+1)^2=\dfrac{4^2}{(t+1)^2}$, 즉 $t=1$ 또는 $t=-3$일 때 성립)

에서 $\overline{\mathrm{AP}}\geq\ \sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 두 점 A와 P 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt{2}$이다.

[다른 풀이]

$y=\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{(x+1)-4}{x+1}=-\dfrac{4}{x+1}+1$

에서

$y-1=-\dfrac{4}{x+1}\ \ \cdots$ ㉠

유리함수 ㉠의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-1,\ y=1$이므로 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$은 유리함수 ㉠의 그래프의 두 점근선의 교점이다.

유리함수 ㉠의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프가 된다.

따라서 점 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$과 함수 $y=\dfrac{x-3}{x+1}$의 그래프 위의 점 P 사이의 거리의 최솟값은 원점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프 위의 점 P_1 사이의 거리의 최솟값과 같다.

함수 $y=-\dfrac{4}{x}$의 그래프 위의 점 P_1을 $\mathrm{P}_1\left(t,\ -\dfrac{4}{t}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+\left(-\dfrac{4}{t}\right)^2}=\sqrt{t^2+\dfrac{16}{t^2}}$

그런데 $t^2>0,\ \dfrac{16}{t^2}>0$이므로

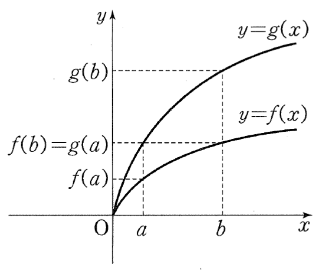
$t^2+\dfrac{16}{t^2}\ \geq\ 2\sqrt{t^2\times\dfrac{16}{t^2}}=8$

(단, 등호는 $t^2=\dfrac{16}{t^2}$, 즉, $t=2$ 또는 $t=-2$일 때 성립)

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}\ \geq\ \sqrt{8}=2\sqrt{2}$

12) 답 ④

[해설] $k>1$이고 조건 (가)에서 두 함수 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{kx}$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (가)에서

$g(b)=4$이므로 $\sqrt{kb}=4\ \ \cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$g(b)-g(a)=\sqrt{2}\{f(b)-f(a)\}$이므로

$\sqrt{k}(\sqrt{b}-\sqrt{a})=\sqrt{2}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$

$\sqrt{k}=\sqrt{2}$에서 $k=2$

따라서 $g(x)=\sqrt{2x}$

㉠에서 $\sqrt{2b}=4$이므로 $b=8$

그러므로 $f(b)=f(8)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

또한, 조건 (가)에서 $g(a)=f(b)=2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}a=2\sqrt{2}$에서 $a=4$

따라서 $f(a)=2,\ g(b)=4$이므로

$2\ \leq\ x\ \leq\ 4$에서 함수 $y=g(x)$는

$x=2$일 때, 최솟값 $m=g(2)=2$

$x=4$일 때, 최댓값 $M=g(4)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

따라서 $Mm=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$

13) 답 ⑤

[해설] 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

조건 (가)에서 $a_8=6a_3$이므로 $a_1+7d=6(a_1+2d)$

$a_1+7d=6a_1+12d,\ 5a_1=-5d$

$a_1=-d\qquad\cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{12}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}+30$

$(a_2-a_1)+(a_4-a_3)+(a_6-a_5)+\cdots+(a_{12}-a_{11})=30$

$6d=30,\ d=5$

㉠에서 $a_1=-5$이므로

$a_{10}=-5+9\times5=40$

14) 답 ③

[해설] $a_1+a_2+a_3=S_3$이므로 $S_3=21$

$S_n=3n^2+kn$에서

$S_3=27+3k=21$이므로 $k=-2$

따라서 $S_n=3n^2-2n$이므로

$S_5=3\times5^2-2\times5=65$

15) 답 ②

[해설]

${}_n\mathrm{C}_0=1,\ \ {}_n\mathrm{C}_n=1$이고

${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}+{}_n\mathrm{C}_n=2^n$

이므로

${}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}=2^n-2$

따라서 주어진 부등식은

$127<2^n-2<1023,\ \ 129<2^n<1025$

$2^7=128,\ \ 2^8=256,\ \ {}^9=512,\ \ 2^{10}=1024,\ \ 2^{11}=2048$이므로

$n=8$ 또는 $n=9$ 또는 $n=9$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$8+9+10=27$

16) 답 ②

[해설]

${}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{11}\mathrm{C}_{11}=2^{11}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$에서

${}_{11}\mathrm{C}_0={}_{11}\mathrm{C}_{11}$

${}_{11}\mathrm{C}_1={}_{11}\mathrm{C}_{10}$

${}_{11}\mathrm{C}_2={}_{11}\mathrm{C}_9$

${}_{11}\mathrm{C}_3={}_{11}\mathrm{C}_8$

${}_{11}\mathrm{C}_4={}_{11}\mathrm{C}_7$

${}_{11}\mathrm{C}_5={}_{11}\mathrm{C}_6$

이므로 ㉠

$2({}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_5)=2^{11}$

${}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_5=2^{10}$

$\log_2({}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_5)=\log_2 2^{10}=10$

17) 답 ④

[해설]

이항정리에 의하여

$(1+x)^6={}_6\mathrm{C}_0+{}_6\mathrm{C}_1x+{}_6\mathrm{C}_2x^2+\cdots+{}_6\mathrm{C}_6x^6\ \ \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

${}_6\mathrm{C}_0+7\times{}_6\mathrm{C}_1+7^2\times{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+7^6\times{}_6\mathrm{C}_6$

$=(1+7)^6=(2^3)^6=2^{18}$

18) 답 ①

[해설]

x^2의 계수는

$2\times{}_2\mathrm{C}_2+3\times{}_3\mathrm{C}_2+4\times{}_4\mathrm{C}_2+\cdots+8\times{}_8\mathrm{C}_2$

$$=\sum_{k=2}^{8}(k\times{}_k\mathrm{C}_2)=\sum_{k=2}^{8}\left\{k\times\frac{k(k-1)}{2}\right\}$$

$$=\sum_{k=2}^{8}\frac{k^3-k^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}(k^3-k^2)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}$$

$=648-102=546$

[다른 풀이]

$f(x)=(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3$

$+4(1+x)^4+\cdots+8(1+x)^8\qquad\cdots\cdots$ ㉠

이라 하면

$(x+1)f(x)=(1+x)^2+2(1+x)^3+3(1+x)^4$
$+4(1+x)^5+\cdots+7(1+x)^8+8(1+x)^9$ …… ㉡

㉠−㉡에서

$-xf(x)=(1+x)+(1+x)^2+(1+x)^3$
$+(1+x)^4+\cdots+(1+x)^8-8(1+x)^9$

$=\dfrac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{x}-8(1+x)^9$

$f(x)=-\dfrac{(1+x)^9-(1+x)\}}{x}+\dfrac{8(1+x)^9}{x}$ …… ㉢

따라서 $(1+x)+2(1+x)^2+3(1+x)^3+4(1+x)^4+\cdots+8(1+x)^8$ 의 전개식에서 x^2의 계수는 ㉢의 $-(1+x)^9$의 전개식에서 x^4의 계수와 $8(1+x)^9$의 전개식에서 x^3의 계수의 합과 같으므로

$-{}_9C_4+8\times{}_9C_3=-\dfrac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}+8\times\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$
$=\dfrac{9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}(-6+32)=546$

19) 답 ②

[해설] 확률변수 X의 확률질량함수가

$P(X=x)={}_{25}C_x p^x(1-p)^{25-x}$이므로 X는 이항분포 $B(25,\ p)$를 따른다.

$E(X)=5$이므로 $25\times p=5$에서 $p=\dfrac{1}{5}$

따라서

$V(X)=25\times\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}=4$

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+25=29$

20) 답 152

[해설] 확률변수 X가 가지는 값은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열을 이루므로 확률변수 Y를 $X=3Y+2$, 즉

$Y=\dfrac{X-2}{3}$로 놓으면 Y는 이항분포 $B\left(20,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때

$E(Y)=20\times\dfrac{1}{4}=5$

$V(Y)=20\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{4}$

따라서

$E(X)=E(3Y+2)=3E(Y)+2=3\times5+2=17$

$V(2X)=4V(X)=4V(3Y+2)$
$=4\times9\times V(Y)=4\times9\times\dfrac{15}{4}=135$

이므로

$E(X)+V(2X)=17+135=152$

21) [정답] 5

조건 (나)에서 $\lim\limits_{x\to\infty}2x=\infty$이고 극한값이 1이므로

$f(x)-x^2=2x+a$ (a는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+2x+a$

조건 (가)에서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2+2x+a)$
$=3+a$
$=0$

$\therefore\ a=-3$

따라서 $f(x)=x^2+2x-3$이므로

$f(2)=2^2+2\times2-3=5$

22) [정답] 12

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$f(2)=\lim\limits_{x\to2}f(x)$
$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$
$=\lim\limits_{x\to2}(x^2+2x+4)=12$

23) [정답] ④

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xf(x)+2}{x^2-1}=1$에서 $xf(x)+2$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이여야 하므로

$f(x)=x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

또, 주어진 조건에서 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$g(1)=\lim\limits_{x\to1}g(x)$에서

$k=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)+2}{x^2-1}$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x+a)+2}{x^2-1}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때, (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{x(x+a)+2\}=0$에서

$a+3=0$ $\therefore\ a=-3$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$k=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x(x-3)+2}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$
$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-2}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$

24) [정답] 12

점 P의 좌표를 $(a,\ a^3)$ $(a>0)$이라 하면 $y'=3x^2$이므로 접선의 방정식은

$y-a^3=3a^2(x-a)$

$y=3a^2x-2a^3$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{2}{3}a,\ 0\right)$, 점 R의 좌표는 $(0,\ -2a^3)$이다.

또한 점 S의 x좌표는

$x^3=3a^2x-2a^3$

$x^3-3a^{2x}+2a^3=0$

$(x-a)^2(x+2a)=0$

$\therefore\ x=-2a$

즉, $S(-2a,\ -8a^3)$이고 네 점 P, Q, R, S는 같은 직선 위의 점이므로

$\overline{PQ}:\overline{QR}:\overline{RS}=\left|a-\dfrac{2}{3}a\right|:\left|\dfrac{2}{3}a-0\right|:|0-(-2a)|=1:2:6$

따라서 $\overline{PQ}=k$ $(k\neq0)$라 하면 $\overline{QR}=2k$, $\overline{RS}=6k$이므로

$\dfrac{\overline{QR}\times\overline{RS}}{\overline{PQ}^2}=\dfrac{2k\times6k}{k^2}=12$

25) [정답] 8

$f'(x)=3a^2x^2-18ax$이므로

$f'(1)=3a^2-18a$이고 $f(0)=48$이다.

이때, $f'(1)=f(0)$에서

$3a^2-18a=48$

$a^2-6a-16=0$

$(a+2)(a-8)=0$

$\therefore\ a=8$ $(\because\ a>0)$

26) [정답] 18

점 $P(a,\ b)$는 곡선 $y=x^4$ $(x>0)$ 위의 점이므로

$a>0,\ b=a^4$

$y'=4x^3$이므로 점 $P(a,\ a^4)$에서의 접선의 방정식은

$y-a^4=4a^3(x-a)$

$\therefore\ y=4a^3x-3a^4$

$4a^3x-3a^4=0$에서 $x=\dfrac{3}{4}a$이므로 이 접선이 x축과 만나는

점 Q의 좌표는 $Q\left(\frac{3}{4}a,\ 0\right)$이고, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발인 점 H의 좌표는 $H(a,\ 0)$이다.

삼각형 PQH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{3}{4}a\right)\times a^4=\frac{1}{8}a^5=4$$

$a^5=32$

$\therefore\ a=2\ (\because a>0)$

따라서 $a=2,\ b=16$이므로

$a+b=2+16=18$

27) [정답] ①

(i) $x<2$일 때

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x=-1$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극댓값 $f(-1)=2$를 갖는다.

(ii) $x=2$일 때

$\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x^3-3x)=2$

$f(2)=\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}(-x+4)=2$

즉, $\lim_{x\to 2-0}f(x)=\lim_{x\to 2+0}f(x)=f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

$x=2$의 좌우에서 $f(x)$는 증가하다가 감소하므로 극댓값 $f(2)=2$를 갖는다.

(iii) $x>2$일 때

$f'(x)=-1<0$이므로 극값을 갖지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 극값의 합은

$2+(-2)+2=2$

28) [정답] ②

$$f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)dt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(x)=\int_0^2(t-1)(t-2)dt$$

$$=\int_0^2(t^2-3t+2)dt$$

$$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2+2t\right]_0^2$$

$$=\frac{8}{3}-6+4=\frac{2}{3}$$

29) [정답] 2

주어진 식에 $x=1$을 대입하면

$$\int_1^1 f(t)dt=1-2+a$$

이때, $\int_1^1 f(t)dt=0$이므로

$a-1=0$

$\therefore\ a=1$

주어진 식을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-4x$

다시 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x-4$

$\therefore\ f'(a)=f'(1)=2$

30) 답 ③

[해설]

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x'(t)=v(t)$이므로 함수 $x(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다

t	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$x'(t)$		−	0	+	
$x(t)$	$x(0)$	↘	극소	↗	$x(6)$

$x(0)=0$이고, 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$는

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$$

이므로

$$x(4)=x(0)+\int_0^4 v(t)dt=0-\frac{1}{2}\times4\times4=-8$$

$$x(6)=x(0)+\int_0^6 v(t)dt$$

$$=x(0)+\int_0^4 v(t)dt+\int_4^6 v(t)dt$$

$$=0-8+\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)$$

$$=-8+2=-6$$

따라서 $t=4$일 때 점 P는 원점으로부터 가장 멀리 떨어져있는 -8에 위치한다. 즉, 점P가 원점으로부터 가장 멀리 떨어져있을 때, 원점과 점 P사이의 거리는 8이다.

31) [정답] ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_5-a_3=2d=8$

$\therefore\ d=4$

따라서 $a_n=5+(n-1)\times4=4n+1$이므로

$a_7=4\times7+1=29$

32) [정답] ③

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n$을 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=-3,\ a_3=5$이고

$a_3-a_1=2d$이므로

$5-(-3)=2d$

$\therefore\ d=4$

이때 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=-3+(n-1)\times4=4n-7$

$a_k=85$에서

$4k-7=85,\ 4k=92$

$\therefore\ k=23$

33) [정답] 308

등차수열

$-2,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ 58 \quad \cdots\cdots ㉠$

의 첫째항이 -2, 항의 개수가 $n+2$이므로 등차수열 ㉠의 공차를 d라 하면

$58=-2+(n+1)d$

$(n+1)d=60$

d가 소수이므로

$d=2,\ n=29$ 또는 $d=3,\ n=19$ 또는 $d=5,\ n=11$

등차수열 ㉠의 합은

$$\frac{(n+2)(-2+58)}{2}=28(n+2)$$

이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$=(-2+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+58)-(-2+58)$

$=28(n+2)-56$

$=28n$

따라서 $n=11$일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$의 값은 최소이고,

최솟값은

$28\times11=308$

34) [정답] ②

다항식 $f(x)=x^2-2x+5$를 $x-n$으로 나눈 나머지는

$f(n)=n^2-2n+5$

이므로

$a_n=n^2-2n+5$

$a_{3n}=(3n)^2-2\times3n+5=9n^2-6n+5$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10}\left(9k^2-a_{3k}\right)&=\sum_{k=1}^{10}\left\{9k^2-\left(9k^2-6k+5\right)\right\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(6k-5)\\&=6\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}5\\&=6\times\frac{10\times11}{2}-5\times10\\&=280\end{aligned}$$

35) 답 ⑤

[해설]

함숫값의 곱이 4이므로 함숫값에 따라 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) 함숫값이 1, 1, 1, 1, 4인 경우

함수 f의 개수는

$\frac{5!}{4!1!}=5$

(ⅱ) 함숫값이 1, 1, 1, 2, 2인 경우

함수 f의 개수는

$\frac{5!}{3!2!}=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는 합의 법칙에 의해

$5+10=15$

36) [정답] ②

(ⅰ) $f(4)=1$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)=f(2)=f(3)=1$이고, 조건 (다)에 의하여 $f(5)$, $f(6)$의 값은 각각 2, 3, 4, 5, 6의 5가지 중 하나이므로 구하는 함수 f의 개수는 $1\times{}_5\Pi_2=5^2=25$

(ⅱ) $f(4)=3$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 1, 2, 3의 3가지 중 하나이고, 조건 (다)에 의하여 $f(5)$, $f(6)$의 값은 각각 4, 5, 6의 3가지 중 하나이므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_3\times{}_3\Pi_2=3^3\times3^2=243$

(ⅲ) $f(4)=5$일 때

조건 (나)에 의하여 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 각각 1, 2, 3, 4, 5의 5가지 중 하나이고, 조건 (다)에 의하여 $f(5)=(6)=6$이므로 구하는 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_3\times1=5^3=125$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수의 개수는

$25+243+125=393$

37) 답 ④

[해설]

$f(x-1)=1+x+x^2+\cdots+x^{10}$에서

$x-1=t$로 놓으면

$f(t)=1+(t+1)+(t+1)^2+\cdots+(t+1)^{10}$

이때 t^7이 나오는 식은

$(1+t)^7$, $(1+t)^8$, $(1+t)^9$, $(1+t)^{10}$ …… ㉠

㉠의 각 식에서 t^7의 계수를 각각 구하면

${}_7C_7$, ${}_8C_7$, ${}_9C_7$, ${}_{10}C_7$

따라서 $f(t)$에서 t^7의 계수 a_7의 값은

$a_7={}_7C_7+{}_8C_7+{}_9C_7+{}_{10}C_7$

이때

${}_7C_7=1$, ${}_8C_7={}_8C_1=8$,

${}_9C_7={}_9C_2=\frac{9\times8}{2\times1}=36$

${}_{10}C_7={}_{10}C_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$

이므로 $a_7=1+8+36+120=165$

38) 답 ④

[해설]

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$의 전개식에서 일반항은

${}_nC_r x^{n-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_nC_r(-1)^r x^{n-2r}$

$n-2r=3$ $(n=3,\ 4,\ 5)$에서

$n=4$일 때, x^3항은 존재하지 않는다.

$n=3$, 5일 때, $n-2r=3$을 만족시키는 r의 값은 각각 0, 1이므로 x^3의 계수는

${}_3C_0\times(-1)^0+{}_5C_1\times(-1)^1=1-5=-4$

39) 답 ①

[해설] 확률변수 X가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이때

$P(X=1)={}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $P(X=n)={}_nC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

이므로 $P(X=1)=12P(X=n)$에서

${}_nC_1\left(\frac{1}{2}\right)^n=12{}_nC_n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$n=12$

즉, 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=12\times\frac{1}{2}=6$

$V(X)=12\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=3$

따라서

$E(X)+V(X)=6+3=9$

40) 답 161

[해설] 확률변수 X가 취하는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고 수학적 확률과 여사건의 확률을 이용하여 각각의 확률을 구하면

$P(X=1)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$

$P(X=2)=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3}{36}$

$P(X=3)=\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{5}{36}$

$P(X=4)=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{7}{36}$

$P(X=5)=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}-\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{9}{36}$

$P(X=6)=1-\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$

이때 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

따라서

$$\begin{aligned}E(X)&=1\times\frac{1}{36}+2\times\frac{3}{36}+3\times\frac{5}{36}+4\times\frac{7}{36}+5\times\frac{9}{36}+6\times\frac{11}{36}\\&=\frac{161}{36}\end{aligned}$$

이므로

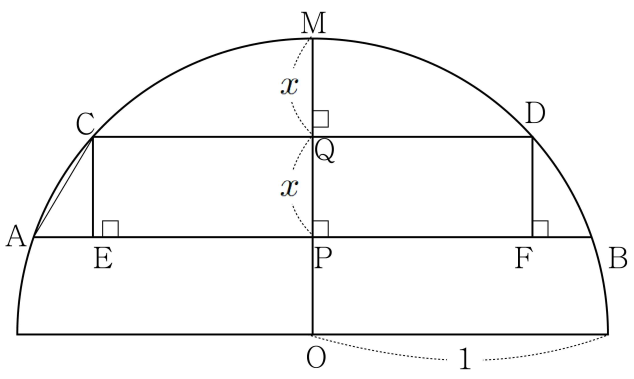
$E(36X)=36E(X)=36\times\frac{161}{36}=161$

제 9 회

1. 2007년 9월 평가원
2. 2013년 사관학교
3. 2015년 7월 교육청
4. 2010년 수능
5. 2013년 경찰대
6. 2002년 수능
7. 2013년 7월 교육청
8. 2012년 7월 교육청
9. 2006년 사관학교
10. 2007년 경찰대

1. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\frac{1}{4}$이고 $na_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}a_k\,(n=1, 2, 3, \cdots)$을 만족한다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_nS_{n+2}}$의 값을 구하시오.

2. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심이 O인 반원의 호를 이등분하는 점을 M이라 하고, 선분 OM 위의 점 P를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 또, 선분 PM의 중점 Q를 지나고 선분 OM에 수직인 직선과 반원이 만나는 점을 각각 C, D라 하고, 점 C, D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.
$\overline{PM}=2x$일 때, 사다리꼴 ABDC와 직사각형 EFDC의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라 하자. $\lim_{x\to0+}\frac{T(x)}{S(x)}$의 값은?



① $\sqrt{2}-1$　② $2-\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}-1$
④ $2(\sqrt{2}-1)$　⑤ $2(3-\sqrt{3})$

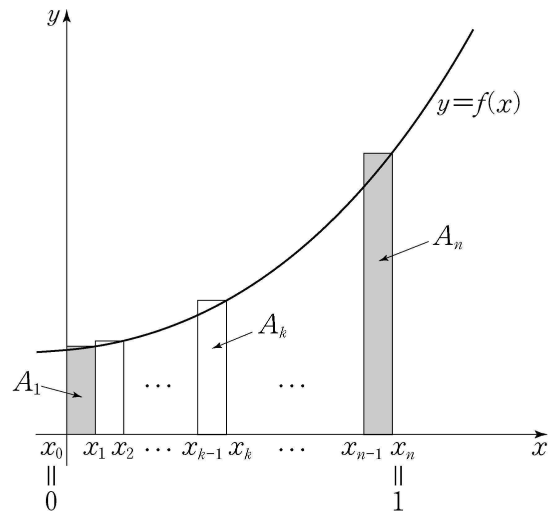
3. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 모든 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^3 f(x)dx$의 최솟값을 m이라 할 때, $4m$의 값을 구하시오.

(가) $f(0)=0$ (나) 모든 실수 x에 대하여 $f'(2-x)=f'(2+x)$이다. (다) 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq -3$이다.

4. 함수 $f(x)=x^2+ax+b\,(a \geq 0, b>0)$이 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌 구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$이라 하자.

닫힌 구간 $[x_{k-1}, x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1, 2, 3, \cdots, n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{9k}{n}\mathrm{A}_k$를 구하시오.

5. 곡선 $y=x^3$ 위에 있는 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$에서의 접선이 이 곡선과 점 B에서 만나고, 점 B에서의 접선은 이 곡선과 점 C에서 만난다고 하자. 선분 BC와 이 곡선 사이의 넓이를 선분 AB와 이 곡선 사이의 넓이로 나눈 값은? (단, $a \neq 0$이다.)

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

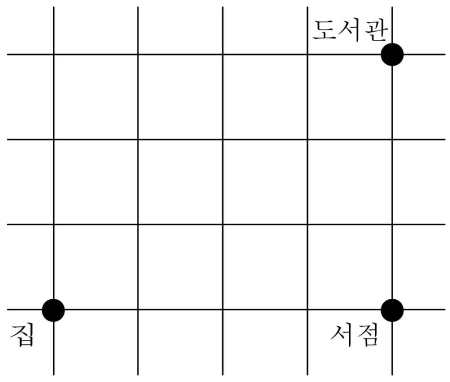
6. 함수 $f(x)=[x[x]]$에 대한 [보기]의 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

ㄱ. $f(x)=-1$이 되는 x는 존재하지 않는다.
ㄴ. 자연수 n에 대해서 집합 $\{f(x) \mid n \leq x < n+1\}$의 원소의 개수는 n개이다.
ㄷ. 자연수 n에 대해서 집합 $\{f(x) \mid -n \leq x < -n+1\}$의 원소의 개수는 $n+1$개이다.

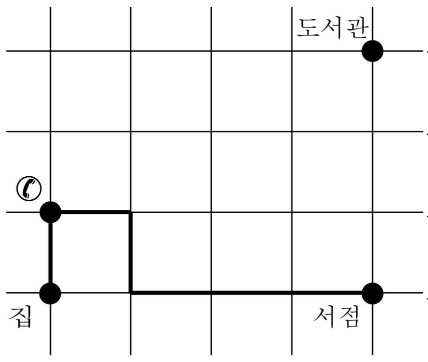
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

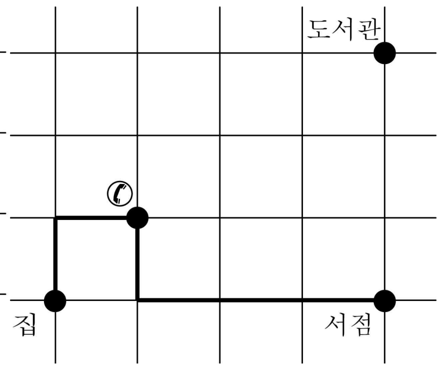
7. 0이 아닌 세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $x^{\frac{1}{\alpha}} = y^{-\frac{1}{\beta}} = z^{\frac{2}{\gamma}}$일 때, $16xz^2 + 9y^2$의 최솟값을 구하시오. (단, x, y, z는 1이 아닌 양수이다.)

8. 그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 같은 도로망이 있다.



철수가 집에서 도로를 따라 최단거리로 약속장소인 도서관으로 가다가 어떤 교차로에서 약속장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 받고 곧바로 도로를 따라 최단거리로 서점으로 갔다. 집에서 서점까지 지나 온 길이 같은 경우 하나의 경로로 간주한다. 예를 들어, [그림1]과 [그림2]는 연락받은 위치는 다르나, 같은 경로이다.





[그림 1] [그림2]

철수가 집에서 서점까지 갈 수 있는 모든 경로의 수를 구하시오. (단, 철수가 도서관에 도착한 후에 서점으로 가는 경우도 포함한다.)

9. 양궁대회에 참가한 어떤 선수가 활을 쏘아 과녁의 10점 부분을 명중시킨 다음 다시 활을 쏘아 10점 부분을 명중시킬 확률이 $\frac{8}{9}$이고, 10점 부분을 명중시키지 못한 다음 다시 10점 부분을 명중시키지 못할 확률이 $\frac{1}{5}$이다. 이 선수가 반복하여 계속 활을 쏜다고 할 때, n번째에 10점 부분을 명중시킬 확률을 p_n이라 하자. 이때, $\lim_{n\to\infty} p_n$의 값은?

① $\frac{14}{27}$ ② $\frac{17}{27}$ ③ $\frac{25}{41}$
④ $\frac{32}{41}$ ⑤ $\frac{36}{41}$

10. 여론 조사에서 찬성과 반대 의견이 거의 비슷한 어떤 안건을 투표로 결정하려고 한다. 전체 유권자 10000명 중 최소 a%가 찬성해야 통과되는 것으로 정했을 때, 이 안건이 통과될 확률이 0.0228이하이기 위한 a의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은?

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938

① 51 ② 52 ③ 53
④ 54 ⑤ 55

추가 과제

1. 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$\log_2 b_n = \log_{\frac{1}{2}} a_n + \log_{\frac{1}{2}} a_{n+1} \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$의 값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

2. 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{3}\right)^n$이 수렴하도록 하는 모두 정수 x의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

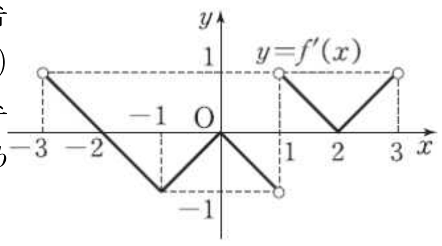
3. 함수 $f(x)=(x+3)(2x^2-x+4)$에 대하여 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-xf(1)}{x-1}$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

4. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식 $(x^2-x+1)f(x)=g(x)$를 만족시킨다. $g(1)=2$, $g'(1)=6$일 때, $f'(1)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

5. 열린 구간 $(-3,\ 3)$에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극대이고 $x=b$에서 극소일 때, $a+b$의 값은? (단, $-3<a<3$, $-3<b<3$)



① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

6. 점 $P(0,\ -3)$에서 곡선 $y=kx^4$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 양수 k의 값은?

① $\frac{1}{256}$ ② $\frac{1}{128}$ ③ $\frac{1}{64}$
④ $\frac{1}{32}$ ⑤ $\frac{1}{16}$

7. 정적분 $\int_{-1}^{1} x(x+1)^2 dx$의 값은?

① $-\frac{4}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ 0
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

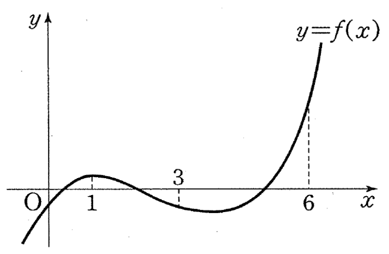
8. 두 곡선 $y=x^2$, $y=|x|+2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 6 ② $\frac{19}{3}$ ③ $\frac{20}{3}$
④ 7 ⑤ $\frac{22}{3}$

9. $f(x)=\int_1^x (t^2+t)dt$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+2h)}{h}$의 값은?

① 0　② 2　③ 4
④ 6　⑤ 8

10. 그림과 같은 삼차함수 $y=f(x)$가



$$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^3 f(x)dx=\int_3^6 f(x)dx=0$$

을 만족시킨다. 함수 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는?

① 0　② 1　③ 2
④ 3　⑤ 4

11. 수열$\{a_n\}$은 $a_1=5$이고

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-1}\ (n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킬 때, $\frac{a_{15}}{a_{10}}$의 값을 구하시오.

12. 수열$\{a_n\}$은 $a_1=1$이고

$$a_{n+1}=2a_n+k(n=1,2,3,\cdots)$$

을 만족시킨다. 세 수 $a_3, (a_2)^2, a_4$가 순서대로 등차수열을 이룰 때, 양수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$
④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

13. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(2x-1)=x^2+1$$

을 만족시킬 때, $f(5)$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14
④ 16 ⑤ 18

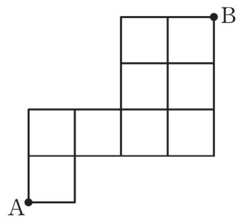
14. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이
$a_{n+1}=3a_n (n=1,2,3,\cdots)$을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $S_{10}-S_8=(a_5)^2$ 일 때, a_3의 값은?

① 9 ② 18 ③ 27
④ 36 ⑤ 45

15. 서로 다른 빵 5개와 같은 종류의 음료수 A가 2개, 같은 종류의 음료수 B가 3개 있다. 빵과 음료수를 5명에게 남김없이 나누어 주려고 할 때, 각 사람이 빵과 음료수를 각각 하나씩 받도록 나누어 주는 경우의 수는?

① 1100 ② 1200 ③ 1300
④ 1400 ⑤ 1500

16. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는?



① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

17. 7개의 문자 a, b, c, c, d, d, d를 일렬로 나열할 때, a와 b가 서로 이웃하지 않는 경우의 수는?

① 200 ② 250 ③ 300
④ 350 ⑤ 400

18. 1부터 9까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 택할 때, 두 수의 합이 짝수인 경우의 수는?

① 15 ② 16 ③ 17
④ 18 ⑤ 19

19. a, b, c, d, e의 문자를 중복사용하여 5개의 문자를 택해 일렬로 나열할 때, 사용된 문자의 종류가 3가지인 경우의 수는?

① 1100 ② 1200 ③ 1300
④ 1400 ⑤ 1500

20. 주머니 안에 $1, 2, 3, 4, 5$의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적힌 숫자를 확인하고 주머니에 공을 되돌려 넣는 시행을 4번 반복할 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 차례로 a, b, c, d라 하자. 네 수 a, b, c, d가 세 식 $b^2+c^2=20$, $a \le b$, $c \le d$를 모두 만족시킬 확률은?

① $\frac{2}{125}$ ② $\frac{4}{125}$ ③ $\frac{6}{125}$
④ $\frac{8}{125}$ ⑤ $\frac{2}{25}$

추가 과제

21. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = \frac{4n}{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1
④ 2　⑤ 4

22. 수열 $\{a_n\}$이 다음 등식을 만족시킨다.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2^{n+2}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴할 때, a_1의 값은?

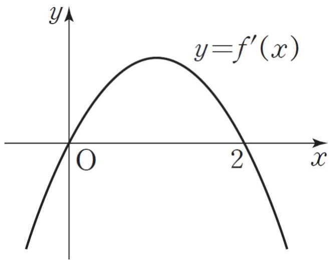
① $-\frac{5}{3}$　② $-\frac{4}{3}$　③ -1
④ $-\frac{2}{3}$　⑤ $-\frac{1}{3}$

23. 삼차함수 $f(x)=2x^3-3x^2+ax+5$가 구간 $(-\infty,\ k)$와 $(k+3,\ \infty)$에서 증가하고 열린 구간 $(k,\ k+3)$에서 감소할 때, $f(1)$의 값은? (단, a, k는 상수이다.)

① -4　② -6　③ -8
④ -10　⑤ -12

24. 함수 $f(x)=x^3-3ax+b$의 극댓값이 4이고 극솟값이 0일 때, $f(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)

25. 최고차항의 계수가 -1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 그림과 같이 두 점 $(0, 0)$, $(2, 0)$을 지난다. $f(1)=1$일 때, $f(x)$의 모든 극값의 합은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

26. 이차함수 $f(x)=ax^2-2ax\,(a>0)$에 대하여 $\int_1^k f(x)dx=0$이다. $\int_1^k |f(x)|dx=A$, $\int_0^1 |f(x)|dx=B$라 할 때, $\frac{A}{B}$의 값은? (단, a, k는 상수이고, $k>1$이다.)

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

27. 이차함수 $f(x)=k(x-1)(x-3)$에 대하여

$$\int_0^3 \{f(x)+|f(x)|\}dx=8$$

일 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

28. 함수 $f(x)=x^3$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n+3)+f(n+6)+f(n+9)+\cdots+f(n+3n)}{n^4}$$

의 값은? (단, n은 자연수이다.)[28)]

① $\frac{85}{4}$ ② $\frac{43}{2}$ ③ $\frac{87}{4}$
④ 22 ⑤ $\frac{89}{4}$

추가 과제

29. 자연수 m에 대하여

$$S(m)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(-1+\frac{2k}{n}\right)^{m}$$

이라 하자. $\displaystyle\sum_{m=1}^{10}S(2m-1)+\sum_{m=1}^{10}\frac{1}{S(2m)}$의 값은?

① 110 ② 115 ③ 120
④ 125 ⑤ 130

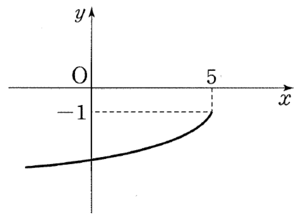
30. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2-3x+b$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\displaystyle\int_{-2}^{2}f(x)dx=4$

$\displaystyle\int_{-3}^{3}f(x)dx$의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

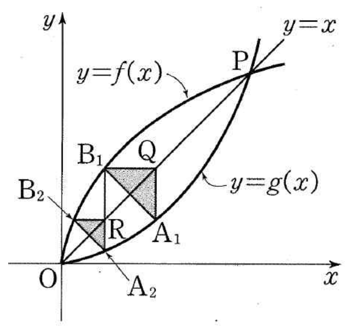
31. 무리함수



$y=-\sqrt{-x-2a+b}-a+b$의 그래프가 그림과 같고, 정의역이 $\{x|x\le 5\}$이고 치역이 $\{y|y\le -1\}$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① -15 ② -14 ③ -13
④ -12 ⑤ -11

32. 그림과 같이 함수



$f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점 중 원점 O가 아닌 점을 P라 하자. 선분 OP의 중점을 Q라 할 때, 점 Q를 지나면서 y축에 평행한 직선이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 A_1, 점 Q를 지나면서 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 B_1이라 하자. 점 B_1을 지나면서 y축에 평행한 직선이 선분 OP, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점을 각각 R, A_2라 하고 점 R를 지나면서 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점을 B_2라 하자. 삼각형 QB_1A_1과 삼각형 RB_2A_2의 넓이의 합은?

① $\frac{21}{128}$ ② $\frac{11}{64}$ ③ $\frac{23}{128}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{25}{128}$

33. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = \frac{1}{2}$이고

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

을 만족시킬 때, a_5의 값은?

① $\frac{11}{10}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{13}{10}$
④ $\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

34. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 1, b_1 = 49$
(나) $a_{n+1} = a_n + 5,\ b_{n+1} = b_n + 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$a_k = b_k$를 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

35. 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자를 중복을 허락하여 배열하여 만든 다섯 자리의 자연수 중에서 천의 자리에 오는 수는 홀수이고 일의 자리에 오는 수는 짝수인 자연수의 개수는?

① 625 ② 750 ③ 1000
④ 1125 ⑤ 1500

36. 두 집합

$$A = \{a,\ b,\ c,\ d\},\ B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : A \to B$의 개수를 구하시오.

(가) $f(a)$와 $f(b)$는 홀수이다.
(나) $f(c)$와 $f(d)$는 짝수이고 $f(c) < f(d)$이다.

추가 과제

37. $1, 2, 2, 3, 3, 3$의 여섯 개의 숫자를 모두 배열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 집합에서 하나의 원소를 임의로 택할 때, 223133, 312323과 같이 숫자 3과 3 사이에 숫자 1이 있을 확률은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

38. 1이 적혀 있는 공 4개, 2가 적혀 있는 공 4개, 3이 적혀 있는 공 2개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 한 개씩 2개의 공을 임의로 꺼낼 때, 나온 공에 적힌 수를 차례로 a, b라 하자. $5\times a\times b$가 홀수일 때, 이 수가 15 이상일 확률은?
(단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않는다.)

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{7}{15}$ ③ $\frac{8}{15}$
④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

39. 상자 A에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있고 상자 B에는 흰 공 2개, 검은 공 3개가 들어 있다. 상자 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고 꺼낸 2개의 공을 상자 B에 넣은 후 상자 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개가 나올 확률은?

① $\frac{17}{147}$ ② $\frac{6}{49}$ ③ $\frac{19}{147}$
④ $\frac{20}{147}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

40. 주머니 속에 자연수 $k\,(k=1, 2, 3, 4, 5)$가 적힌 공이 k개씩 들어 있다. 이 15개의 공 중에서 동시에 3개의 공을 임의로 꺼낼 때, 3개의 공에 적힌 수의 합이 12일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

정답 & 해설

[난문현답 기출 정답]

1. 12
2. ④
3. 27
4. 14
5. ③
6. ⑤
7. 24
8. 296
9. ⑤
10. ①

[추가 과제 정답]

1) 답 ②
수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이므로
$a_n = 3+2(n-1) = 2n+1$
$\log_2 b_n = \log_{\frac{1}{2}} a_n + \log_{\frac{1}{2}} a_{n+1}$ 에서
$$\log_2 b_n = \log_2 \frac{1}{a_n} + \log_2 \frac{1}{a_{n+1}} = \log_2 \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$
이므로
$$b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
따라서
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

2) 답 ②
급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-2}{3}\right)^n$ 이 수렴하려면
$-1 < \frac{x-2}{3} < 1$ 이어야 하므로 $-1 < x < 5$
따라서 모든 정수 x 는 0, 1, 2, 3, 4이고 그 개수는 5 이다.

3)답 ④
[해설] $f(x)=(x+3)(2x^2-x+4)$에서
$f'(x)=(2x^2-x+4)+(x+3)(4x-1)$이므로 $f(1)=20$, $f'(1)=17$
따라서
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-xf(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x^2)-f(1)\}-\{xf(1)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}-\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}$$
$=2f'(1)-f(1)$
$=2\times17-20=14$

4)답 ③
[해설] $(x^2-x+1)f(x)=g(x)$ $\cdots$㉠
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=g(1)=2$
두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에서 미분가능하므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$(2x-1)f(x)+(x^2-x+1)f'(x)=g'(x)$ $\cdots$㉡
㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$f(1)+f'(1)=g'(1)=6$
따라서 $f'(1)=6-f(1)=6-2=4$

5) 답 ②
[해설]
주어진 그래프를 이용하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-3)	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$		$+$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘		↘	극소	↗		↗	

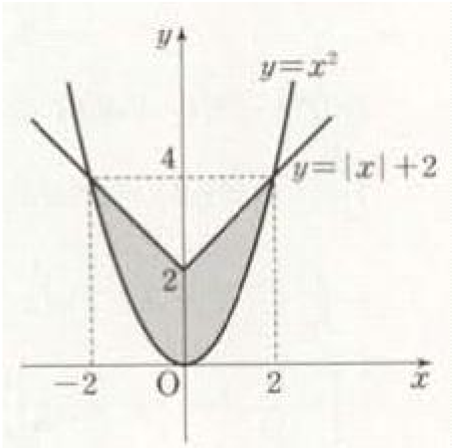
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대, $x=1$에서 극소이므로
$a=-2$, $b=1$이다.
따라서 $a+b=(-2)+1=-1$

6) 답 ①
[해설]
$y=kx^4$에서 $y'=4kx^3$
점 $P(0,\ -3)$에서 곡선 $y=kx^4$에 그은 접선의 접점을 $(t,\ kt^4)$이라 하면 접선의 기울기는 $4kt^3$이므로 접선의 방정식은
$y=4kt^3(x-t)+kt^4$
점 $P(0,\ -3)$은 이 직선 위의 점이므로
$-3=4kt^3(0-t)+kt^4$
$-3=-3kt^4$, $kt^4=1$, $t^4=\frac{1}{k}$
$k>0$이므로 $t^2=\frac{1}{\sqrt{k}}$
따라서 $t=-k^{-\frac{1}{4}}$ 또는 $t=k^{-\frac{1}{4}}$
$t=-k^{-\frac{1}{4}}$일 때, 접점 $(-k^{-\frac{1}{4}},\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$4k(-k^{-\frac{1}{4}})^3=4k\times(-k^{-\frac{3}{4}})=-4k^{1-\frac{3}{4}}=-4k^{\frac{1}{4}}$
$t=k^{-\frac{1}{4}}$일 때, 접점 $(k^{-\frac{1}{4}},\ 1)$에서의 접선의 기울기는
$4k(k^{-\frac{1}{4}})^3=4k\times(k^{-\frac{3}{4}})=4k^{1-\frac{3}{4}}=4k^{\frac{1}{4}}$
두 접선이 서로 수직이므로 $-4k^{\frac{1}{4}}\times4k^{\frac{1}{4}}=-16k^{\frac{1}{2}}=-1$
$k^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{16}$, $k=\left(\frac{1}{16}\right)^2=\frac{1}{256}$

7) 답 ⑤
[해설] $\int_{-1}^{1}x^3dx=0$, $\int_{-1}^{1}x^2dx=2\int_{0}^{1}x^2dx$, $\int_{-1}^{1}xdx=0$이므로
$$\int_{-1}^{1}x(x+1)^2dx=\int_{-1}^{1}x(x^2+2x+1)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+x)dx$$
$$=\int_{-1}^{1}x^3dx+2\int_{-1}^{1}x^2dx+\int_{-1}^{1}xdx$$
$$=0+2\times\left(2\int_{0}^{1}x^2dx\right)+0$$
$$=4\times\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

8) 답 ③
[해설]
$$y=|x|+2=\begin{cases}-x+2 & (x<0)\\ x+2 & (x\geq0)\end{cases}$$
$x^2=|x|+2$ 에서
(i) $x<0$ 인 경우
$x^2=-x+2$, $x^2+x-2=0$
$(x-1)(x+2)=0$
이때 $x<0$ 이므로 $x=-2$ $\cdots$ ㉠
(ii) $x\geq0$ 인 경우
$x^2=x+2$, $x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$
이때 $x\geq0$ 이므로 $x=2$ $\cdots$ ㉡
㉠,㉡에서 두 곡선 $y=x^2$, $y=|x|+2$의 교점의 x좌표는
$x=-2$, $x=2$이다.
이때 닫힌 구간 $[-2,\ 2]$에서 $x^2<|x|+2$이고,
두 함수 $y=x^2$, $y=|x|+2$ 의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-2}^{0}\{(-x+2)-x^2\}dx = \int_{0}^{2}\{(x+2)-x^2\}dx$$



따라서 구하는 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{2}\{(|x|+2)-x^2\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}(-x+2-x^2)dx = \int_{0}^{2}(x+2-x^2)dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(-x^2+x+2)dx$$

$$=2\times\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_0^2$$

$$=2\times\left(-\frac{8}{3}+2+4\right)=\frac{20}{3}$$

9) 답 ③

[해설] $f(x)=\int_{1}^{x}(t^2+t)dt$에서 $f(1)=\int_{1}^{1}(t^2+t)dt=0$

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_{1}^{x}(t^2+t)dt=x^2+x$$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$$

$$=f'(1)\times2=(1^2+1)\times2=4$$

10) 답 ⑤

[해설] 조건에서 $\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{3}^{6}f(x)dx=0$

이므로

$$g(0)=\int_{0}^{0}f(t)dt=0,\quad g(1)=\int_{0}^{1}f(t)dt=0$$

$$g(3)=\int_{0}^{3}f(t)dt=\int_{0}^{1}f(t)dt+\int_{1}^{3}f(t)dt=0+0=0$$

$$g(6)=\int_{0}^{6}f(t)dt=\int_{0}^{3}f(t)dt+\int_{3}^{6}f(t)dt=0+0=0$$

이때 $g(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$에서 $g(x)$는 사차함수이고,

방정식 $g(x)=0$의근이 $x=0,\ x=1,\ x=3,\ x=6$이므로

사차방정식 $g(x)=0$의서로 다른 실근의 개수는 4이다.

11) 답 9

[해설] $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_{n-1}}$ 에서 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{2a_1-1}=\frac{5}{2\times5-1}=\frac{5}{9}$$

$$a_3=\frac{a_2}{2a_2-1}=\frac{\frac{5}{9}}{2\times\frac{5}{9}-1}=5$$

$$a_4=\frac{a_3}{2a_3-1}=\frac{5}{2\times5-1}=\frac{5}{9}$$

⋮

이므로 모든 자연수 k에 대하여 $a_{2k-1}=5$, $a_{2k}=\dfrac{5}{9}$

따라서 $a_{15}=5,\ a_{10}=\dfrac{5}{9}$ 이므로 $\dfrac{a_{15}}{a_{10}}=\dfrac{5}{\frac{5}{9}}=9$

12) 답 ④

[해설] $a_{n+1}=2a_n+k$ 에서 n에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$a_2=2\times a_1+k=2+k$

$a_3=2\times a_2+k=2+(2+k)+k=4+3k$

$a_4=2\times a_3+k=2+(4+3k)+k=8+7k$

이때 세 수 a_3, $(a_2)^2$, a_4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2(a_2)^2=a_3+a_4$에서 $2(2+k)^2=(4+3k)+(8+7k)$

$k^2-k-2=0$, $(k+1)(k-2)=0$

$k=-1$또는 $k=2$ 이때 $k>0$이므로 $k=2$

13) 답 ①

[해설]

$2x-1=5$에서 $x=3$이므로

$f(2x-1)=x2+1$에 $x=3$을 대입하면

$f(2\times3-1)=3^2+1=10$

따라서 $f(5)=10$

[다른 풀이]

다음과 같이 함수 $f(x)$의 식을 직접 구할 수도 있다.

$2x-1=t$라 하면 $x=\dfrac{t+1}{2}$이므로

$f(2x-1)=x^2+1$에 $x=\dfrac{t+1}{2}$을 대입하면

$$f(t)=\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1=\frac{t^2+2t+5}{4}$$

따라서 $f(5)=\dfrac{5^2+2\times5+5}{4}=\dfrac{40}{4}=10$

14) 답 ④

[해설] $a_{n+1}=3a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.

$S_{10}-S_8=a_{10}+a_9$이므로 $S_{10}-S_8=(a_5)^2$에서 $a_{10}+a_9=(a_5)^2$

$a_1\times3^9+a_1\times3^8=(a_1\times3^4)^2$

$4a_1\times3^8=a_1\times(a_1\times3^8)$ 이때 $a_n>0$ (n은 자연수)이므로 $a_1=4$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4,\ a_n=4\times3^{n-1}(n=2,\ 3,\ 4,\cdots)$ 이므로

$a_3=4\times3^2=36$

15) 답 ②

[해설]

서로 다른 빵 5개를 5명에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 5개를 택하는 순열의 수이므로

${}_5P_5=5!=120$

이 각각에 대하여 음료수 A와 음료수 B를 나누어 주는 경우의 수는

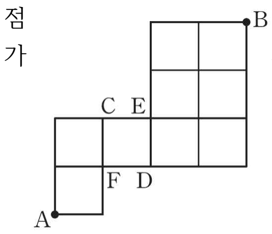
$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$120\times10=1200$

16) 답 ⑤

[해설]



그림과 같이 C, D, E, F지점을 정하면 A지점에서 B지점까지 최단거리로 가는 경우는 다음 두 가지로 나눌 수 있다.

(ⅰ) C지점을 거쳐 가는 경우

A지점에서 C지점까지 가는 경우의 수는

$\dfrac{3!}{2!}=3$

이 각각에 대하여 C지점을 지나면 반드시 E지점을 지나야 하므로E지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$3\times6=18$

(ⅱ) D지점을 거쳐 가는 경우

먼저 A지점에서 F지점으로 와야 하므로 이 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 D지점에서 B지점으로 가는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{3!2!}=10$

그러므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$2\times10=20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해

$18+20=38$

17) 답 ③

[해설]

$c,\ c,\ d,\ d,\ d$를 나열하는 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!3!}=10$

이 각각에 대하여 다음 그림과 같이 ∨ 표시된 곳 중 두 곳에 $a,\ b$를 넣으면 되므로 경우의 수는 서로 다른 6개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

${}_6\mathrm{P}_2 = 6\times5 = 30$

$$\vee\boxed{c}\vee\boxed{c}\vee\boxed{d}\vee\boxed{d}\vee\boxed{d}\vee$$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의해

$10\times30=300$

18) 답 ②

선택한 서로 다른 두 수의 합이 짝수가 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 짝수 2개를 택하는 경우

9개의 수 중 짝수는 2, 4, 6, 8이고 이 중에서 서로 다른 두 수를 택하면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 4개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_4\mathrm{C}_2=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

(ⅱ) 홀수 2개를 택하는 경우

9개의 수 중 홀수는 1, 3, 5, 7, 9이고 이 중에서 서로 다른 두 수를 택하면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의해 $6+10=16$

19) 답 ⑤

5개의 문자 중 사용된 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$ …… ㉠

이 각각에 대하여 세 문자가 나열된 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 한 문자가 3개, 나머지 두 문자는 1개씩 나열된 경우

세 문자 중 3번 사용되는 한 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 1개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 3개, 1개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\dfrac{5!}{3!\,1!\,1!}=20$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $3\times20=60$

(ⅱ) 두 문자가 2개씩, 한 문자는 1개가 나열된 경우

문자가 2개씩 사용된 두 문자를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 조합의 수이므로 ${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

이 각각에 대하여 5개의 문자를 배열하는 경우의 수는 같은 것이 각각 2개, 2개, 1개 있는 것을 일렬로 나열하는 경우의 수이므로

$\dfrac{5!}{2!\,2!\,1!}=30$

그러므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의해 $3\times30=90$

(ⅰ), (ⅱ)에서 합의 법칙에 의해 $60+90=150$ …… ㉡

따라서 구하는 경우의 수는 ㉠과 ㉡에서 곱의 법칙에 의해

$10\times150=1500$

20) 답 ②

[해설] 서로 다른 5개의 공 중에서 중복을 허락하여 차례로 4개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_5\Pi_4=5^4$

$b^2+c^2=20$에서

$b=2,\ c=4$ 또는 $b=4,\ c=2$

$b=2,\ c=4$이고 $a\le b,\ c\le d$인 사건을 A, $b=4,\ c=2$이고 $a\le b,\ c\le d$인 사건을 B라 하면 $b^2+c^2=20$이고 $a\le b,\ c\le d$인 사건은 $A\cup B$이다.

(ⅰ) $b=2,\ c=4$일 때,

$a\le b,\ c\le d$를 만족시키는 a의 값은 1, 2이고, d의 값은 4, 5이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 $2\times2=4$이므로

$P(A)=\dfrac{4}{5^4}$

(ⅱ) $b=4,\ c=2$일 때,

$a\le b,\ c\le d$를 만족시키는 a의 값은 1, 2, 3, 4이고, d의 값은 2, 3, 4, 5이다.

따라서 이 조건을 만족시키는 경우의 수는 $4\times4=16$이므로

$P(B)=\dfrac{16}{5^4}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{4}{5^4}+\dfrac{16}{5^4}=\dfrac{4}{125}$

21) [정답] ④

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4$$

또, $a_1=S_1=2$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1$$
$$=4-2=2$$

22) [정답] ②

$b_n=a_{n+1}-a_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이라 하면

$$b_n=\frac{2^{n+2}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}$$
$$=4\left(\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}\right)$$

이므로

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$
$$=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}4\left(\frac{1}{2^k+1}-\frac{1}{2^{k+1}+1}\right)$$
$$=a_1+4\left\{\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^2+1}\right)+\left(\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^3+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)\right\}$$
$$=a_1+4\left(\frac{1}{2+1}-\frac{1}{2^n+1}\right)(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

이때 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$에서

$a_1+\dfrac{4}{3}=0$

$\therefore\ a_1=-\dfrac{4}{3}$

23) [정답] ③

$f(x)=2x^3-3x^2+ax+5$에서

$f'(x)=6x^2-6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ k)$와 $(k+3,\ \infty)$에서 증가하고 열린 구간 $(k,\ k+3)$에서 감소하므로 부등식 $f'(x)=6x^2-6x+a<0$을 만족시키는 x의 값의 범위가 $k<x<k+3$이다.

$6(x-k)(x-k-3)<0$

$6x^2-6(2k+3)x+6k(k+3)<0$

$-6=-6(2k+3)$에서 $k=-1$이므로

$a=6k(k+3)=6\times(-1)\times2=-12$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$이므로

$f(1)=2-3-12+5=-8$

24) [정답] 20

$f(x)=x^3-3ax+b$에서

$f'(x)=3x^2-3a$

함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값이 존재하므로 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $3x^2-3a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=-4\times3\times(-3a)>0$에서 $a>0$

$f'(x)=3(x^2-a)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$f'(x)=0$에서 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b=4$ …… ㉠

$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+b=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1,\ b=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로

$f(a+b)=f(3)=27-9+2=20$

25) [정답] ②

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)로 놓으면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f'(x)=-3x(x-2)=-3x^2+6x$

$\therefore\ a=3,\ b=0$

또, $f(1)=1$이므로

$f(1)=-1+a+b+c=-1+3+0+c=2+c=1$에서

$c=-1$

$\therefore\ f(x)=-x^3+3x^2-1$

$x=0$ 의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 극솟값은 $f(0)$이고, $x=2$ 에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 극댓값은 $f(2)$이다.

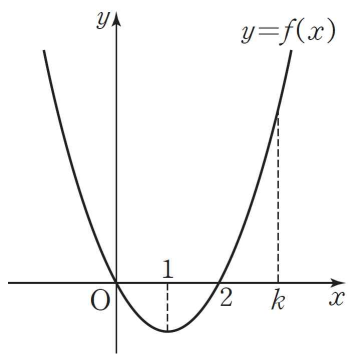
$f(0)=-1$, $f(2)=-8+12-1=3$

이므로 모든 극값의 합은

$f(0)+f(2)=-1+3=2$

26) [정답] ③

함수 $f(x)=ax^2-2ax\ (a>0)$의 그래프는 그림과 같이 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로



$\int_0^1 f(x)dx=\int_1^2 f(x)dx$ …… ㉠

한편 $\int_1^k f(x)dx=0$이므로

$k>2$이어야 하고,

$\int_1^2 f(x)dx+\int_2^k f(x)dx=0$

$-\int_1^2 f(x)dx=\int_2^k f(x)dx$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-\int_0^1 f(x)dx=\int_2^k f(x)dx$ …… ㉢

㉡에 대하여

$A=\int_1^k |f(x)|dx$

$=-\int_1^2 f(x)dx+\int_2^k f(x)dx$

$=2\int_2^k f(x)dx$

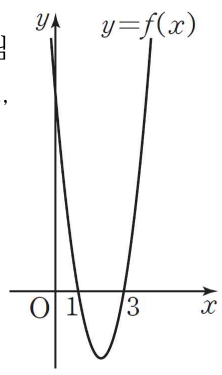
또, ㉢에 대하여

$B=\int_0^1 |f(x)dx|=-\int_0^1 f(x)dx=\int_2^k f(x)dx$

$\therefore\ \dfrac{A}{B}=\dfrac{2\int_2^k f(x)dx}{\int_2^k f(x)dx}=2$

27) [정답] ⑤

$k>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 x축과 만나는 점의 x의 좌표가 1, 3이고, $1<x<3$에서 $f(x)<0$이다.



따라서

$\int_0^3 \{f(x)+|f(x)|\}dx$

$=\int_0^1 \{f(x)+|f(x)|\}dx$

$\quad+\int_1^3 \{f(x)+|f(x)|\}dx$

$=\int_0^1 \{f(x)+f(x)\}dx+\int_1^3 \{f(x)-f(x)\}dx$

$=2\int_0^1 f(x)dx$

$=2\int_0^1 \{k(x-1)(x-3)dx\}$

$=2k\int_0^1 (x^2-4x+3)dx$

$=2k\left[\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]=\dfrac{8}{3}k=8$

$\therefore\ k=3$

28) [정답] ①

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n+3)+f(n+6)+f(n+9)+\cdots+f(n+3n)}{n^4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f(n+3k)}{n^4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (n+3k)^3}{n^4}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{3k}{n}\right)^3$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(1+\dfrac{4-1}{n}k\right)^3\times\dfrac{4-1}{n}\times\dfrac{1}{3}\right\}$

$=\dfrac{1}{3}\int_1^4 x^3\,dx$

$=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{4}x^4\right]_1^4$

$=\dfrac{1}{3}\times\left(64-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{85}{4}$

29) [정답] ③

$S(m)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(-1+\dfrac{2k}{n}\right)^m$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(-1+\dfrac{2k}{n}\right)^m\times\dfrac{2}{n}\times\dfrac{1}{2}\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m\,dx$

(ⅰ) 자연수 m이 홀수일 때

함수 $y=x^m$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m\,dx=0$

(ⅱ) 자연수 m이 짝수일 때

함수 $y=x^m$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^m\,dx=\dfrac{1}{2}\times 2\int_0^1 x^m\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{m+1}x^{m+1}\right]_0^1=\dfrac{1}{m+1}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$S(m)=\begin{cases}0 & (m\text{은 홀수})\\ \dfrac{1}{m+1} & (m\text{은 짝수})\end{cases}$

$\therefore\ \sum\limits_{m=1}^{10} S(2m-1)+\sum\limits_{m=1}^{10}\dfrac{1}{S(2m)}=0+\sum\limits_{m=1}^{10}(2m+1)$

$=2\times\dfrac{10\times 11}{2}+1\times 10=120$

30) [정답] ④

$f(x)=x^3+ax^2-3x+b$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-3$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$이다.

$3+2a-3=0 \qquad \therefore\ a=0$

$\therefore\ f(x)=x^3-3x+b$

조건 (나)에서 $\int_{-2}^{2} f(x)dx=4$이므로

$$\int_{-2}^{2}(x^3-3x+b)dx=\int_{-2}^{2}(x^3-3x)dx+\int_{-2}^{2}b\,dx$$
$$=0+\Big[bx\Big]_{-2}^{2}$$
$$=4b=4$$

$\therefore\ b=1$

따라서 $f(x)=x^3-3x+1$이므로

$$\int_{-3}^{3}f(x)dx=\int_{-3}^{3}(x^3-3x+1)dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(x^3-3x)dx+\int_{-3}^{3}1\,dx$$
$$=0+\Big[x\Big]_{-3}^{3}=6$$

31) 답 ③

[해설] 정의역이 $\{x|x\le 5\}$, 치역이 $\{y|y\le -1\}$이므로

주어진 함수는 $y=-\sqrt{-x-2a+b}-a+b$에서

$-x-2a+b\ge 0$이고 $y+a-b\le 0$

그러므로 $x\le -2a+b$이고 $y\le -(a-b)$

$-2a+b=5,\ a-b=1$

따라서 $a=-6,\ b=-7$이므로

$a+b=-6+(-7)=-13$

32) 답 ⑤

[해설] 함수 $f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점은 함수 $f(x)=\sqrt{2x}$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 점이므로

$\sqrt{2x}=x$에서 $x^2-2x=0$, 즉 $x(x-2)=0$

원점이 아닌 점 P의 좌표는 $x=2$에서 $\mathrm{P}(2,\ 2)$이고 $\mathrm{Q}(1,\ 1)$

$\sqrt{2x}=1$에서 $x=\dfrac{1}{2}$이므로 $\mathrm{B_1}\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$

그런데 점 $\mathrm{A_1}$과 점 $\mathrm{B_1}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{A_1}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

삼각형 $\mathrm{QB_1A_1}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{B_1Q}}\times\overline{\mathrm{A_1Q}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$

한편 $\mathrm{B_1}\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$이므로 $\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$이고

$\sqrt{2x}=\dfrac{1}{2}$에서 $x=\dfrac{1}{8}$이므로 $\mathrm{B_2}\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{2}\right)$

마찬가지로 $\mathrm{A_2}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$

$\overline{\mathrm{B_2R}}=\overline{\mathrm{A_2R}}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$이므로 삼각형 $\mathrm{RB_2A_2}$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{B_2R}}\times\overline{\mathrm{A_2R}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{8}\times\dfrac{3}{8}=\dfrac{9}{128}$

따라서 삼각형 $\mathrm{QB_1A_1}$과 삼각형 $\mathrm{RB_2A_2}$의 넓이의 합은

$\dfrac{1}{8}+\dfrac{9}{129}=\dfrac{25}{128}$

33) 답 ③

[해설] $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n(n+1)}$ 에서 n에 1,2,3,4을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+\dfrac{1}{1\times2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

$a_3=a_2+\dfrac{1}{2\times3}=1+\dfrac{1}{6}=\dfrac{7}{6}$

$a_4=a_3+\dfrac{1}{3\times4}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{4}$

$a_5=a_4+\dfrac{1}{4\times5}=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{20}=\dfrac{13}{10}$

34) 답 ⑤

[해설] $a_{n+1}=a_n+5$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 5인 등차수열이다.

이때 $a_1=1$이므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=1+(n-1)\times5=5n-4$ 또, $b_{n+1}=b_n+2$에서

수열 $\{a_n\}$은 공차가 2인 등차수열이다. 이때 $b_1=49$이므로 수열 $\{b_n\}$의 일반항은 $b_n=49+(n-1)\times2=2n+47$

$a_k=b_k$에서 $5k-4=2k+47$, $3k=51$ 따라서 $k=17$

35) [정답] ②

천의 자리에 오는 수는 홀수이어야 하므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3개, 일의 자리에 오는 수는 짝수이어야 하므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2개이다. 따라서 만의 자리, 백의 자리 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 다섯 개의 숫자에서 중복을 허락하여 3개를 뽑는 순열의 수와 같으므로 구하는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$3\times2\times{}_5\Pi_3=3\times2\times5^3=750$

36) [정답] 48

(ⅰ) $f(a)$와 $f(b)$가 홀수이므로 순서쌍 $(f(a),\ f(b))$의 개수는 1, 3, 5, 7의 4개의 숫자에서 2개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2$

(ⅱ) $f(c)$와 $f(d)$는 짝수이고 $f(c)<f(d)$이므로 순서쌍 $(f(c),\ f(d))$의 개수는 2, 4, 6의 3개의 숫자에서 2개를 뽑는 조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{C}_2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_2\times{}_3\mathrm{C}_2=4^2\times3=16\times3=48$

37) [정답] ③

$1,2,2,3,3,3$의 여섯 개의 숫자를 모두 배열하여 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$\dfrac{6!}{2!3!}=60$

숫자 $3,1,3,3$을 같은 문자 a,a,a,a로 생각하여 배열한 후 두 번째 a 또는 세 번째 a에 1을 대입하고 나머지 a에 3을 대입하면 된다.

따라서 $a,a,a,a,2,2$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!4!}=15$

두 번째 a 또는 세 번째 a에 1을 대입하는 경우가 2가지 있으므로 구하는 확률은

$\dfrac{15\times2}{60}=\dfrac{1}{2}$

38) [정답] ④

$5\times a\times b$가 홀수일 사건을 A, $5\times a\times b$가 15 이상인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B\,|\,A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$5\times a\times b$가 홀수이면 a와 b가 모두 홀수이므로 1 또는 3이 적혀 있는 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$$

$5\times a\times b$가 홀수이면서 15 이상인 경우는 $(a,\ b)$의 순서쌍이 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$, $(3,\ 3)$ 중의 하나이어야 하므로 1 또는 3이 적혀 있는 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수에서 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우의 수를 빼면 된다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2-{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}-\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}$$
$$=\frac{15-6}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{5}$$

39) [정답] ④

(ⅰ) 상자 A에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률은

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

이때 상자 B에는 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있으므로 상자 B에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개일 확률은

$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}\times\frac{6}{21}=\frac{6}{147}$

(ⅱ) 상자 A 에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공일 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}$

이때 상자 B 에는 흰 공 2개, 검은 공 5개가 들어 있으므로
상자 B 에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개일 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}\times\frac{1}{21}=\frac{2}{147}$

(ⅲ) 상자 A 에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 1개,
검은 공 1개일 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}$

이때 상자 B 에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있으므로
상자 B 에서 임의로 꺼낸 2개의 공이 흰 공 2개일 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}$

따라서 구하는 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}\times\frac{3}{21}=\frac{12}{147}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{6}{147}+\frac{2}{147}+\frac{12}{147}=\frac{20}{147}$

40) [정답] 77

3개의 공에 적힌 수의 합이 12가 되는 경우는 3개의 공에 적혀 있는 수가 $(4,4,4),(2,5,5),(3,4,5)$인 경우이다.

(ⅰ) $4,4,4$가 나올 확률

$\frac{{}_4C_3}{{}_{15}C_3}=\frac{4}{455}$

(ⅱ) $2,5,5$가 나올 확률

$\frac{{}_2C_1\times{}_5C_2}{{}_{15}C_3}=\frac{2\times10}{455}=\frac{20}{455}$

(ⅲ) $3,4,5$가 나올 확률

$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_{15}C_3}=\frac{3\times4\times5}{455}=\frac{60}{455}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은

$\frac{4}{455}+\frac{20}{455}+\frac{60}{455}=\frac{84}{455}=\frac{12}{65}$

따라서 $p=65,q=12$

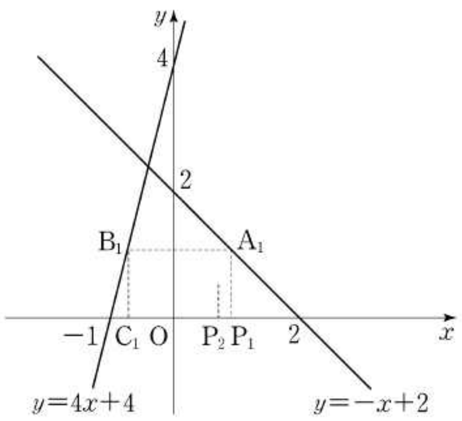
$p+q=65+12=77$

제 10 회

1. 2011년 6월 평가원
2. 2016년 4월 교육청
3. 2012년 7월 교육청
4. 2015년 경찰대
5. 2011년 수능
6. 2015년 6월 교육청
7. 2003년 수능
8. 1997년 수능
9. 2009년 3월 교육청
10. 2016년 사관학교

1. 자연수 n에 대하여 점 P_n이 x축 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 점 P_1의 좌표는 $(a_1, 0)(0 < a_1 < 2)$이다.
(나) (1) 점 P_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x+2$와 만나는 점을 A_n이라 한다.
(2) 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 직선 $y=4x+4$와 만나는 점을 B_n이라 한다.
(3) 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 x축과 만나는 점을 C_n이라 한다,
(4) 점 C_n을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_{n+1}이라 한다,



점 P_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{2}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{4}{9}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

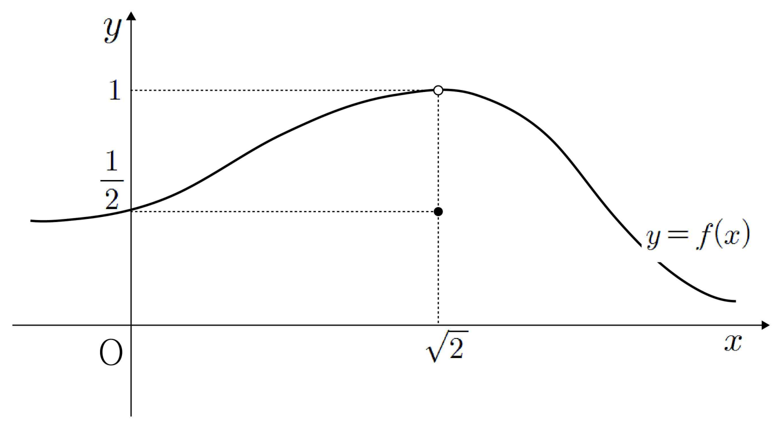
2. 함수 $f(x)=x^2-8x+a$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 2x+5a & (x \ge a) \\ f(x+4) & (x < a) \end{cases}$$

라 할 때, 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 곱을 구하시오.

(가) 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(0, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

3. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)



ㄱ. $\lim_{x \to \sqrt{2}} [xf(x)] = 1$

ㄴ. 함수 $[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $(x-\sqrt{2})[xf(x)]$는 $x=\sqrt{2}$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

4. 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 점 P는 B를 출발하여 매초 1의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 B→C→D→A의 방향으로 움직이고, 점 Q는 C를 출발하여 매초 $\frac{2}{3}$의 속력으로 정사각형 ABCD의 변을 따라 C→D→A→B의 방향으로 움직인다.
두 점 P, Q가 각각 B, C에서 동시에 출발한 후 시각 t초일 때, 삼각형 APQ의 넓이를 $f(t)$라 하자. [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? $\left(\text{단}, 0 \le t \le \frac{3}{2}\right)$

ㄱ. $f(t)$는 구간 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$에서 미분가능하다.

ㄴ. $f(t)$는 $t=\frac{3}{4}$에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(t)$는 $t=1$에서 극댓값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(0 \le t \le 5)$에서 속도 $v(t)$가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \le t < 1) \\ -2t+6 & (1 \le t < 3) \\ t-3 & (3 \le t \le 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$인 실수 x에 대하여 점 P가

시각 $t=0$에서 $t=x$까지 움직인 거리,

시각 $t=x$에서 $t=x+2$까지 움직인 거리,

시각 $t=x+2$에서 $t=5$까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_1^2 v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

6. 두 집합 $\mathrm{A}=\{2l \mid l$은 자연수$\}$, $\mathrm{B}=\{2^m \mid m$은 자연수$\}$가 있다. 집합 A의 원소 a에 대하여 집합 B의 원소 중 a의 약수의 최댓값을 $\mathrm{M}(a)$라 하자. 예를 들어 $\mathrm{M}(2)=2$, $\mathrm{M}(12)=4$이다.

수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\mathrm{M}(2k)\,(n=1, 2, 3, \cdots)$라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{150a_n}{(3n+1)\times 2^n}$의 값을 구하시오.

7. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$$

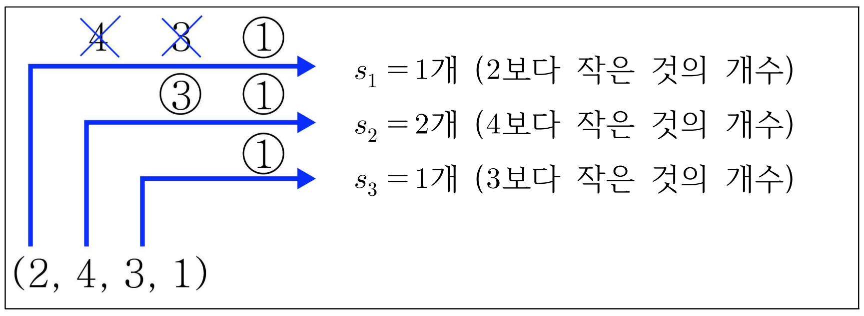
다음 [보기] 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다.
ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일 대응이면 $y=h(x)$도 일대일 대응이다.

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

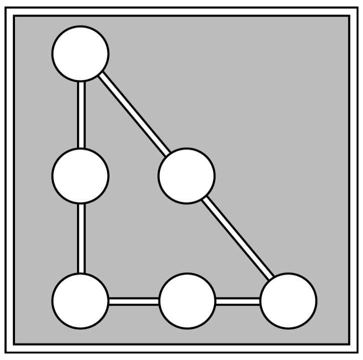
8. 집합 $A=\{1,2,3,4\}$의 네 원소를 배열하여 만든 수열 (a_1,a_2,a_3,a_4)에 대하여 각 숫자 a_k의 오른쪽에 있는 수 중에서 a_k보다 작은 것들의 개수를 $s_k(k=1,2,3)$이라고 하고, 이들의 합 $s_1+s_2+s_3$을 $|(a_1,a_2,a_3,a_4)|$로 나타내자.

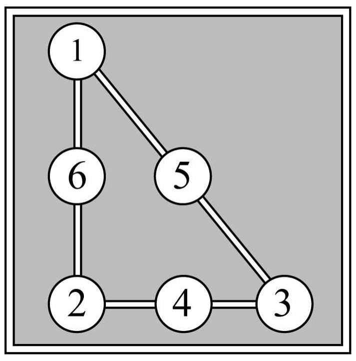
예를 들면, $|(2,4,3,1)|=s_1+s_2+s_3=1+2+1=4$이다.



집합 A에 대한 24개의 모든 수열 (i_1,i_2,i_3,i_4)마다 각각 정해지는 $|(i_1,i_2,i_3,i_4)|$의 총합을 구하시오.

9. [그림1]과 같은 사각형 모양의 판에 6개의 원이 삼각형 모양으로 그려져 있다. 각 원 안에 1부터 6까지의 자연수를 각각 하나씩 적어 삼각형의 각 변에 있는 세 원 안에 적힌 수의 합이 모두 같게 하려고 한다. 예를 들어 [그림2]와 같이 적으면 삼각형의 각 변에 있는 수의 합이 모두 같다.

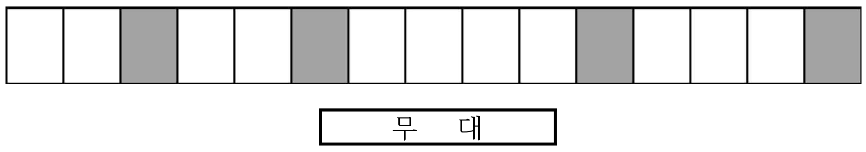

[그림1]



[그림2]

이와 같이 [그림1]의 원 안에 수를 적는 방법의 수를 구하시오.

10. 어느 공연장에 15개의 좌석이 일렬로 배치되어 있다. 이 좌석 중에서 서로 이웃하지 않도록 4개의 좌석을 선택하려고 한다. 예를 들면, 아래 그림의 색칠한 부분과 같이 좌석을 선택한다.



이와 같이 좌석을 선택하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 좌석을 선택하는 순서는 고려하지 않는다.)

추가 과제

1. 수렴하는 수열

$$2,\ 2+\frac{1}{2},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}},\ 2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}},\ \cdots$$

의 극한값은?[1]

① $3-\sqrt{2}$　② $4-\sqrt{2}$　③ $1+\sqrt{2}$
④ 3　⑤ $2+\sqrt{2}$

2. 두 그릇 A,B에 물이 각각 1L씩 들어 있다. A그릇의 물의 $\frac{1}{3}$을 B그릇으로 옮긴 다음 B그릇의 물의 $\frac{1}{3}$을 A그릇으로 옮기는 시행을 한없이 계속할 때, A그릇의 물의 양은 몇 L에 한없이 가까워지는지 구하여라. [2]

3. $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[3]

<보 기>

ㄱ. $f(x)=x-1$　ㄴ.
$g(x)=|x-1|$
ㄷ. $k(x)=|x^2-1|$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

4. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다. $x=0$에서 미분가능한 함수인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[4]

<보 기>

ㄱ. $y=xf(x)$　ㄴ　.
$y=(x^2+1)f(x)$
ㄷ. $y=\dfrac{1}{1-x^3f(x)}$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 사차함수 $f(x)=x^4-6x^2+2ax$가 극댓값을 갖도록 하는 정수 a의 개수를 구하여라.[5)]

6. 두 함수

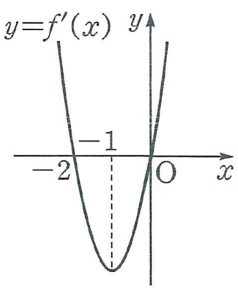
$$f(x)=x^4+2x^3-x^2-9x,\ g(x)=2x^3+5x^2-x-a$$

에 대하여 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있을 때, 실수 a값의 범위는?[6)]

① $a<-12$　② $a<-2$　③ $a>4$
④ $a>12$　⑤ $a>24$

7. 두 점 A$(0,\ -3)$, B$(10,\ -3)$에 대하여 점 P가 곡선 $y=x^2-2$위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$의 최솟값을 구하여라.[7)]

8. 오른쪽 그림은 함수 $f(x)=x^3+ax^2-bx+c$의 도함수 $y=f'(x)$의 그래프이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 3일 때, 구간 $[-3,\ 2]$에서 최댓값은? (단, a, b, c는 상수이다.)[8)]



① 3　② 8　③ 12
④ 15　⑤ 19

9. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+ax$가 구간 $(-2,\ 0)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 갖도록 하는 모든 정수 a의 값의 합은?9)

① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

10. 함수 $f(x)=x^4+2x^3+ax^2$이 극댓값을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위가 $a<\alpha$또는 $\beta<a<\gamma$일 때, $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?10)

① -1 ② $-\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ 1 ⑤ $\frac{9}{8}$

11. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $1,\ \log_2 5$일 때, 실수 a, b에 대하여 $\frac{b}{a}$의 값은?11)

① $-\log_5 2$ ② $-\log_{10} 2$ ③ $-\log_{10} 5$
④ $\log_{10} 2$ ⑤ $\log_{10} 5$

12. 세 수
$A=5^{\log_5 9-\log_5 6}$, $B=\log_4 2+\log_9 3$, $C=\log_8\left(\log_{\sqrt{2}} 4\right)$
의 대소를 비교하여라. 12)

13. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}=\frac{31}{16},\ \frac{1}{a_2}\cdot\frac{1}{a_4}=\frac{1}{4}$$

일 때, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$의 값은? 13)

① $\frac{8}{31}$ ② $\frac{16}{31}$ ③ $\frac{31}{8}$
④ $\frac{31}{4}$ ⑤ $\frac{31}{2}$

14. 빛이 어떤 유리를 한 장 통과할 때마다 빛의 양이 20% 씩 줄어든다고 한다. 이 유리를 두 장 통과한 후의 빛의 양은 처음 빛의 양의 몇 % 인지 구하여라.14)

15. $\log_2({}_{11}\mathrm{C}_0+{}_{11}\mathrm{C}_1+{}_{11}\mathrm{C}_2+{}_{11}\mathrm{C}_3+{}_{11}\mathrm{C}_4+{}_{11}\mathrm{C}_5)$의 값은?15)

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

16. ${}_6\mathrm{C}_0+7\times{}_6\mathrm{C}_1+7^2\times{}_6\mathrm{C}_2+\cdots+7^6\times{}_6\mathrm{C}_6$의 값은?16)

① 2^{12} ② 2^{14} ③ 2^{16}
④ 2^{18} ⑤ 2^{20}

17. 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x)=x^2-5x+6$에 대하여 $f(a)f(b)=0$이 성립할 확률은?17)

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

18. 집합 $X=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에 대하여 두 집합 A, B를

$A=\{x\,|\,x=2n,\ n\in X\}$, $B=\{x\,|\,x=2^n,\ n\in X\}$

라 하자. 집합 A의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 a, 집합 B의 원소 중에서 임의로 택한 원소를 b라 할 때, $a+b$가 3의 배수일 확률은?18)

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{3}{20}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{7}{20}$ ⑤ $\frac{9}{20}$

19. 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 뒷면이 나온 횟수보다 클 확률은?19)

① $\frac{7}{16}$ ② $\frac{15}{32}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{17}{32}$ ⑤ $\frac{9}{16}$

20. 한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n번 나올 확률이 $\frac{7}{32}$이다. 모든 자연수 n의 값의 곱을 구하시오.20)

추가 과제

21. 등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 $0.\dot{6}$이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.\dot{1}2\dot{6}$일 때, a_1의 값은?21)

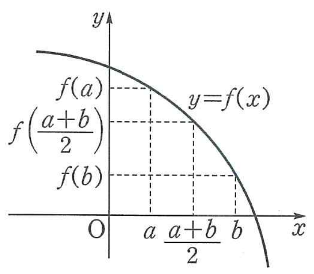
① $0.\dot{0}3\dot{8}$ ② $0.\dot{0}4\dot{0}$ ③ $0.\dot{0}4\dot{2}$
④ $0.\dot{0}4\dot{4}$ ⑤ $0.\dot{0}4\dot{6}$

22. 첫째항이 $0.\dot{x}$, 공비가 $0.\dot{0}\dot{x}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.1$일 때, 한 자리 자연수 x의 값을 구하여라.22)

23. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 $2x^2 + ax \le f(x) \le 3x^2 + ax$를 만족시키고 $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)}{2x} = 3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오.23)

24. 함수 $y = |x^2 - 1|$의 그래프가 직선 $y = t$(t는 실수)와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. $\lim_{t \to 0+} f(t) = \alpha$, $\lim_{t \to 1+} f(t) = \beta$라 할 때, 실수 α, β에 대하여 $\frac{\alpha}{\beta}$의 값을 구하여라.24)

25. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. $0<a<b$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?[25)]



<보 기>

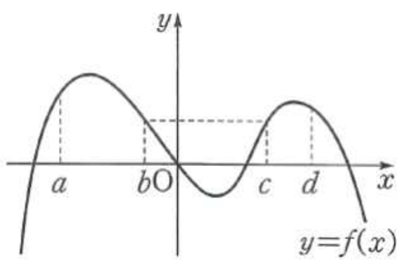
ㄱ. $f'(a)>f'(b)$ ㄴ.

$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

ㄷ. $f'(a)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

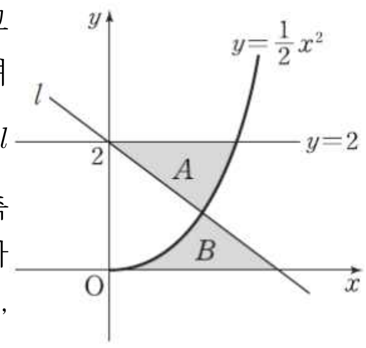
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

26. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같다. x의 값이 a에서 b까지, b에서 c까지, c에서 d까지 변할 때의 함수 $f(x)$의 평균변화율을 각각 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 대소 관계는?
(단, $a<b<c<d$, $f(b)=f(c)$)[26)]



① $\alpha<\beta<\gamma$ ② $\alpha<\beta=\gamma$ ③ $\beta<\alpha<\gamma$
④ $\beta<\alpha=\gamma$ ⑤ $\gamma<\beta<\alpha$

27. 그림과 같이 점 $(0, 2)$를 지나고 기울기가 음수인 직선 l 에 대하여 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (x\geq 0)$과 두 직선 $y=2$, l로 둘러싸인 부분을 A, 이 곡선과 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분을 B라 하자. 두 부분 A, B의 넓이가 같을 때, 직선 l의 기울기는?[27)]



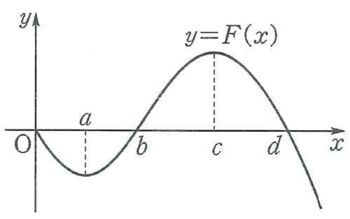
① $-\dfrac{11}{12}$ ② $-\dfrac{5}{6}$ ③ $-\dfrac{3}{4}$
④ $-\dfrac{2}{3}$ ⑤ $-\dfrac{7}{12}$

28. 함수 $y=x|2x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.[28)]

29. $\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2+x+a)dx=(a+1)^2$ 을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 합은?29)

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

30. 연속함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)dt$ 일 때, $x\geq 0$인 구간에서 $y=F(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?30)



<보 기>

ㄱ. $f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 a, c이다.
ㄴ. $f(0)f(b)=0$
ㄷ. $x>c$일 때, $f(x)<0$이다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

31. 함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 역함수가 $y=x^2+ax+b(x\geq c)$일 때 상수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값은?31)

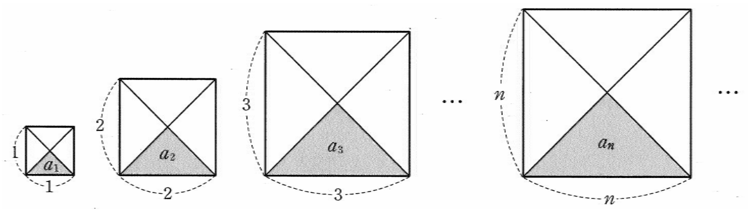
① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

32. 함수 $y=\frac{ax+3}{x+b}$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=4, y=-1$일 때, 함수 $y=\sqrt{bx+a}$의 정의역에 속하는 정수의 최댓값을 구하여라. (단 a, b는 상수이다.)32)

33. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공차가 2일 때, $\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right)$의 값은?33)

① $\frac{32}{19}$ ② $\frac{34}{19}$ ③ $\frac{36}{19}$
④ 2 ⑤ $\frac{40}{19}$

34. 자연수 n에 대하여 한 변의 길이가 n인 정사각형의 두 대각선을 긋고 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자.



$\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값을 구하시오.34)

35. $2\,{}_{10}\mathrm{C}_1+2\cdot 2^2\,{}_{10}\mathrm{C}_2+3\cdot 2^3\,{}_{10}\mathrm{C}_3+\cdots+10\cdot 2^{10}\,{}_{10}\mathrm{C}_{10}$의 값은?35)

① 10×3^9 ② 20×3^9 ③ 10×3^{10}
④ 20×3^{10} ⑤ 10×3^{11}

36. 다항식 $1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{20}$의 전개식에서 x^k의 계수를 a_k라 할 때, $\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값은?36)

① $2^{20}-22$ ② $2^{20}-21$ ③ $2^{21}-22$
④ $2^{21}-21$ ⑤ 2^{21}

37. 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 20회 반복할 때 동전 2개가 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자. $\mathrm{V}(2X+1)$의 값은?37)

① 12　② 13　③ 14
④ 15　⑤ 16

38. 이산확률변수 X가 값 r를 가질 확률이

$$\mathrm{P}(X=r)={}_{64}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{64-r}\quad(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 64)$$

일 때, $\displaystyle\sum_{r=0}^{64} r^2\,{}_{64}\mathrm{C}_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{64-r}$의 값을 구하시오.38)

39. 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 5^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 하자.
$\mathrm{P}(|\overline{X}-m|>3)<0.0456$을 만족시키는 n의 최솟값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$로 계산한다.)39)

① 8　② 10　③ 12
④ 14　⑤ 16

40. 어느 나라를 방문한 관광객 1명이 체류기간 동안 지출한 금액은 평균이 500, 표준편차가 10인 정규분포를 따른다고 한다. 이 나라를 방문한 관광객 중 임의로 택한 4명이 체류기간 동안 지출한 금액의 합을 확률변수 X라 할 때, $P(X\ge 1940)$의값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 금액의 단위는 달러이다.)40)

<표준정규분포표>

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.5	0.4332
2.0	0.4772
2.5	0.4938
3.0	0.4987

① 0.9332　② 0.9544　③ 0.9772
④ 0.9938　⑤ 0.9987

추가 과제

[난문현답 기출 정답]

1. ⑤
2. 56
3. ③
4. ④
5. ①
6. 25
7. ②
8. 72
9. 24
10. 495

[추가 과제 정답]

1) **정답** ③

[전략]

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha\ (\alpha \neq 0)$로 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$도 수렴함을 이용한다.

[풀이]

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면 $a_{n+1}=2+\frac{1}{a_n}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{a_n}\right)$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$이므로

$\alpha = 2+\frac{1}{\alpha}$, $\alpha^2-2\alpha-1=0$

$\therefore\ \alpha = 1+\sqrt{2}\ \ (\because\ \alpha>0)$

2) **정답** $\frac{6}{5}$

n회의 시행 후에 A,B 두 그릇에 남아 있는 물의 양을 각각 a_n, b_n이라 하면

$a_n+b_n=2 \qquad \therefore b_n = 2-a_n$

$$a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}a_n+b_n\right)=\frac{7}{9}a_n+\frac{1}{3}b_n$$
$$=\frac{7}{9}a_n+\frac{1}{3}(2-a_n)=\frac{4}{9}a_n+\frac{2}{3}$$
$$\therefore a_{n+1}-\frac{6}{5}=\frac{4}{9}\left(a_n-\frac{6}{5}\right)$$

따라서 수열 $\left\{a_n-\frac{6}{5}\right\}$은 첫째항이

$$a_1-\frac{6}{5}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)-\frac{6}{5}=-\frac{4}{45}$$

이고 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$a_n-\frac{6}{5}=-\frac{4}{45}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$
$$\therefore a_n=-\frac{4}{45}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\frac{6}{5}$$
$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{4}{45}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}+\frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5}$$

따라서 A그릇의 물의 양은 $\frac{6}{5}$L에 가까워진다.

3) **정답** ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(1+h-1)-0}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=1$$

이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄴ. $\lim_{x\to1}g(x)=g(1)=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h}{h}=1$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h}{h}=-1$$

이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x\to1}k(x)=k(1)=0$이므로 $k(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to0+}\frac{h^2+2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h+2)=2$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{k(1+h)-k(1)}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{|h^2+2h|}{h}=\lim_{h\to0-}\frac{-h^2-2h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-h-2)=-2$$

이므로 $k(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는 ㄴ, ㄷ 이다.

4) **정답** ④

[전략] $x=0$에서의 미분계수가 존재하는지 확인한다.

ㄱ. $g(x)=xf(x)$라 하면

$$g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h(f(h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}f(h)=f(0)\ \ (\because f(x)\text{는 } x=0\text{에서 연속})$$

따라서 $y=xf(x)$는 $x=0$에서 미분계수가 존재하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} x & (x\geq 0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$이면 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$$\lim_{h\to0+}\frac{(h^2+1)f(h)-(0+1)f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}\frac{(h^2+1)h}{h}$$
$$=\lim_{h\to0+}(h^2+1)=1$$
$$\lim_{h\to0-}\frac{(h^2+1)f(h)-(0+1)f(0)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}\frac{(h^2+1)(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0-}(-h^2-1)=-1$$

따라서 $y=(x^2+1)f(x)$는 $x=0$에서 미분계수가 존재하지 않으므로 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $g(x)=\frac{1}{1-x^3f(x)}$이라 하면

$$g'(0)=\lim_{h\to0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{1}{1-h^3f(h)}-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^3f(h)}{h\{1-h^3f(h)\}}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{h^2f(h)}{1-h^3f(h)}=0$$

따라서 $y=\frac{1}{1-x^3f(x)}$은 $x=0$에서 미분계수가 존재하므로 $x=0$에서 미분가능하다.

이상에서 $x=0$에서 미분가능한 함수는 ㄱ, ㄷ이다.

[참고] $f(x)$가 $x=a$에서 연속이지만 미분가능하지 않을 때, $h(x)=f(x)g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하려면 $g(a)=0$이고 $x=a$에서 미분가능해야 한다.

5) **정답** 7

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f'(x)=4x^3-12x+2a$이므로 $g(x)=4x^3-12x+2a$로 놓으면

$g'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(-1)g(1)<0$이어야 하므로

$(8+2a)(-8+2a)<0$, $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore -4<a<4$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 정수 a는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$의 7개이다.

6) **정답** ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓으면

$$h(x)=x^4+2x^3-x^2-9x-(2x^3+5x^2-x-a)$$
$$=x^4-6x^2-8x+a$$
$$h'(x)=4x^3-12x-8=4(x+1)^2(x-2)$$

$h'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘		↘	$-24+a$	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $-24+a$이다.

모든 실수 x에 대하여 $h(x)>0$이려면 $h(2)>0$이어야 하므로

$h(2)=-24+a>0$

$\therefore\ a>24$

7) **정답** 90

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2-2)$으로 놓으면

$$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=t^2+(t+1)^2+(t-10)^2+(t^2+1)^2$$
$$=2t^4+6t^2-20t+102$$

$f(t)=2t^4+6t^2-20t+102$로 놓으면

$$f'(t)=8t^3+12t-20=4(t-1)(2t^2+2t+5)$$

$f'(t)=0$에서 $t=1\ (\because 2t^2+2t+5>0)$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=1$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 최솟값은

$f(1)=90$

t	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	극소	↗

8) **정답** ⑤

$y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 $-2,\ 0$이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=x^3+ax^2-bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-b$

$f'(-2)=0,\ f'(0)=0$이므로

$f'(-2)=12-4a-b=0,\ f'(0)=-b=0$

$\therefore a=3, b=0$

즉 $f(x)=x^3+3x^2+c$이고, $f(x)$의 극댓값이 3이므로

$f(-2)=3,\ \ 4+c=3\quad \therefore c=-1$

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-1$이고 $f(-3)=f(0)=-1,\ f(2)=19$이므로 구간 $[-3,\ 2]$에서 최댓값은 19이다.

9) **정답** ④

$f(x)=x^3+3x^2+ax$에서

$f'(x)=3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-2,\ 0)$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $-2<x<0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

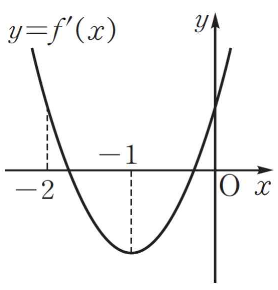
(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=9-3a>0\qquad \therefore a<3$

(ii) $f'(-2)=a>0$

(iii) $f'(0)=a>0$

(iv) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이다.



이상에서 a의 값의 범위는 $0<a<3$이므로 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$1+2=3$

10) **정답** ⑤

$f(x)=x^4+2x^3+ax^2$에서

$$f'(x)=4x^3+6x^2+2ax=2x(2x^2+3x+a)$$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 방정식 $2x^2+3x+a=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $2x^2+3x+a=0$의 판별식을 D라 하면 $a\neq 0$, $D=9-8a>0$에서

$$a<0 \text{ 또는 } 0<a<\frac{9}{8}$$

따라서 $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=\dfrac{9}{8}$이므로 $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{9}{8}$

11) [정답] ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+\log_2 5=-a,\ \ 1\cdot\log_2 5=b$

$\therefore\ a=-\log_2 10,\ \ b=\log_2 5$

$\therefore\ \dfrac{b}{a}=-\dfrac{\log_2 5}{\log_2 10}=-\log_{10}5$

12) [정답] $C<B<A$

(i) $\log_5 9-\log_5 6=\log_5\dfrac{9}{6}=\log_5\dfrac{3}{2}$이므로

$$A=5^{\log_5\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}log_5 5=\frac{3}{2}$$

(ii) $B=\log_4 2+\log_9 3=\log_{2^2}2+\log_{3^2}3=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

(iii) $C=\log_8(\log_{\sqrt{2}}4)=\log_8\left(\log_{2^{\frac{1}{2}}}2^2\right)=\log_8 4$

$$=\log_{2^3}2^2=\frac{2}{3}$$

이상에서 $C<B<A$

13) [정답] ④

[전략] 주어진 식을 등비수열의 첫째항과 공비를 이용하여 변형한다.

[풀이] 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}$$
$$=\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\frac{1}{ar^3}+\frac{1}{ar^4}$$
$$=\frac{r^4+r^3+r^2+r+1}{ar^4}$$
$$=\frac{a(r^4+r^3+r^2+r+1)}{a^2r^4}$$
$$=\frac{31}{16}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

또 $\dfrac{1}{a_2}\cdot\dfrac{1}{a_4}=\dfrac{1}{4}$에서 $\dfrac{1}{ar}\cdot\dfrac{1}{ar^3}=\dfrac{1}{a^2r^4}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ a^2r^4=4\qquad\cdots\cdots\ ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a(r^4+r^3+r^2+r+1)=\dfrac{31}{4}$

$\therefore\ a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a+ar+ar^2+ar^3+ar^4$

$=a(1+r+r^2+r^3+r^4)$

$=\dfrac{31}{4}$

14) [정답] 64

처음 빛의 양을 A라 하면 n장의 유리를 통과한 후의 빛의 양은

$A\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$이므로 두 장의 유리를 통과한 후의 빛의 양은

$$A\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=A\cdot\frac{16}{25}=A\cdot\frac{64}{100}$$

따라서 두 장의 유리를 통과한 후의 빛의 양은 처음 빛의 양의 64 % 이다.

15) **답** ②

[해설]

${}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{11}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$에서

${}_{11}C_0={}_{11}C_{11}$

${}_{11}C_1={}_{11}C_{10}$

${}_{11}C_2={}_{11}C_9$

${}_{11}C_3={}_{11}C_8$

${}_{11}C_4={}_{11}C_7$

${}_{11}C_5 = {}_{11}C_6$
이므로 ㉠
$2({}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5) = 2^{11}$
${}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5 = 2^{10}$
$\log_2({}_{11}C_0 + {}_{11}C_1 + {}_{11}C_2 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_4 + {}_{11}C_5) = \log_2 2^{10} = 10$

16) 답 ④
[해설]
이항정리에 의하여
$(1+x)^6 = {}_6C_0 + {}_6C_1x + {}_6C_2x^2 + \cdots + {}_6C_6x^6$ …… ㉠
㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면
${}_6C_0 + 7\times{}_6C_1 + 7^2\times{}_6C_2 + \cdots + 7^6\times{}_6C_6$
$=(1+7)^6 = (2^3)^6 = 2^{18}$

17) 답 ④
[해설] 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 일어날 수 있는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
$f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 A라 하면 사건 A의 여사건 A^C은
$f(a)f(b)\neq0$, 즉 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$
이때
$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)\neq0$
$f(b)=b^2-5b+6=(b-2)(b-3)\neq0$
이므로 a, b의 값은 각각 1, 4, 5, 6 중 하나이어야 한다.
따라서 $f(a)\neq0$이고 $f(b)\neq0$을 만족시키는
순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 $4\times4=16$이므로
$P(A^C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

[다른 풀이]
$f(a)=0$인 사건을 A, $f(b)=0$인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A\cup B)$이다.
$f(a)=a^2-5a+6=(a-2)(a-3)=0$에서
$a=2$ 또는 $a=3$
따라서 $f(a)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$2\times6=12$이므로
$P(A)=\frac{12}{6^2}=\frac{1}{3}$
같은 방법으로 $P(B)=\frac{1}{3}$이다.
한편, $f(a)=f(b)=0$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$2\times2=4$
따라서 $P(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$이므로
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$

18) 답 ④
[해설] 두 원소 $a, b(a\in A, b\in B)$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$10\times10=100$
집합 A의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 0, 1, 2인 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면
$A_0=\{6, 12, 18\}$
$A_1=\{4, 10, 16\}$
$A_2=\{2, 8, 14, 20\}$
집합 B의 원소를 3으로 나누었을 때의 나머지가 1, 2인 집합을 각각 B_1, B_2라 하면
$B_1=\{2^2, 2^4, 2^6, 2^8, 2^{10}\}$
$B_2=\{2, 2^3, 2^5, 2^7, 2^9\}$
따라서 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우는 다음과 같다.
(ⅰ) $a\in A_1$, $b\in B_2$일 때,
순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$3\times5=15$
(ⅱ) $a\in A_2$, $b\in B_1$일 때,
순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는
$4\times5=20$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a+b$가 3의 배수가 되는 경우의 수는
$15+20=35$
따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{100}=\frac{7}{20}$

19) 답 ③
[해설] 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나온 횟수를 a라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $5-a$이므로
$a>5-a$
$a>\frac{5}{2}$
a는 횟수이므로 $a=3,\ 4,\ 5$
(ⅰ) $a=3$, 즉 앞면이 나온 횟수가 3일 확률은
${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{10}{32}$
(ⅱ) $a=4$, 즉 앞면이 나온 횟수가 4일 확률은
${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$
(ⅲ) $a=5$, 즉 앞면이 나온 횟수가 5일 확률은
${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 확률은
$\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

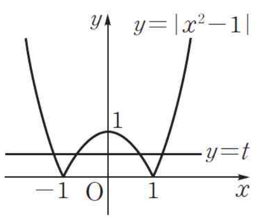
20) 답 15
[해설] 한 개의 동전을 8번 던질 때, 앞면이 n번 나올 확률은
${}_8C_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{8-n}={}_8C_n\left(\frac{1}{2}\right)^8$
${}_8C_n\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{7}{32}$에서 ${}_8C_n=56$
이때 $56=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}={}_8C_3$이므로
${}_8C_n={}_8C_3$ 또는 ${}_8C_n={}_8C_5$
따라서 $n=3$ 또는 $n=5$이므로 모든 자연수 n의 값의 곱은 $3\times5=15$

21) 정답 ③
$0.\dot{6}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$, $0.\dot{1}2\dot{6}=\frac{126}{999}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{126}{999}$
$\therefore a_1=\frac{126}{999}\cdot\frac{1}{3}=\frac{42}{999}=0.\dot{0}4\dot{2}$

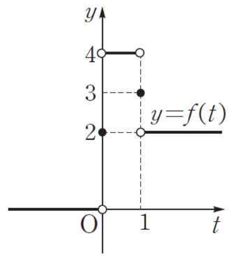
22) 정답 9
등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $0.\dot{x}=\frac{x}{9}$, 공비가 $0.\dot{0}\dot{x}=\frac{x}{99}$이므로
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{x}{9}}{1-\frac{x}{99}}=\frac{11x}{99-x}$
따라서 $\frac{11x}{99-x}=1.1=\frac{11}{10}$이므로
$10x=99-x,\quad 11x=99\quad \therefore x=9$

23) 답 6
[해설]
$2x^2+ax\le f(x)\le 3x^2+ax$에서 $x>0$이므로
$\frac{2x^2+ax}{2x}\le\frac{f(x)}{2x}\le\frac{3x^2+ax}{2x}$
$\lim_{x\to0+}\frac{2x^2+ax}{2x}\le\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{2x}\le\lim_{x\to0+}\frac{3x^2+ax}{2x}$
$\lim_{x\to0+}\frac{2x+a}{2}\le\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{2x}\le\lim_{x\to0+}\frac{3x+a}{2}$
$\frac{a}{2}\le\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{2x}\le\frac{a}{2}$
이므로 $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{2x}=\frac{a}{2}$
따라서 $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)}{2x}=3$에서 $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

24) 정답 2
직선 $y=t$와 $y=|x^2-1|$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로
함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 1]



[그림 2]

따라서 $\lim_{t\to0+} f(t)=4,\ \lim_{t\to1+} f(t)=2$이므로 $\alpha=4,\ \beta=2$

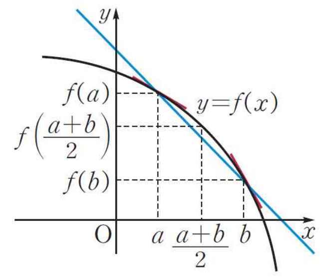
$\therefore\ \dfrac{\alpha}{\beta}=2$

25) **정답** ③

ㄱ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 $x=b$인 점에서의 접선의 기울기보다 크 므로 $f'(a)>f'(b)$

ㄴ. $a\le x\le b$에서 함수 $f(x)$는 위로 볼 록 하므로 $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

ㄷ. $x=a$인 점에서의 접선의 기울기는 두 점 $(a,\ f(a))$, $(b,\ f(b))$를 지나는 직선 의 기 울기보다 크므로 $f'(a)>\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

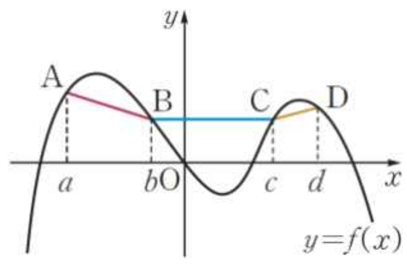
26) **정답** ①

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$의 값은 각각 직선 AB, 직선 BC, 직선 CD의 기울기와 같으므로

$\alpha<0,\ \beta=0,\ \gamma>0$

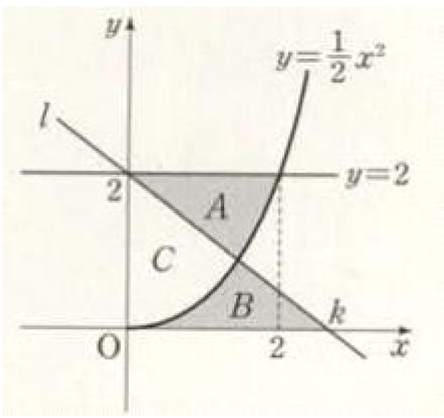
$\therefore\ \alpha<\beta<\gamma$



27) 답 ③

[해설]

곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2\ (x\ge0)$과 y축 및 직선 l로 둘러싸인 부분을 C라 하자.



두 부분 A, B의 넓이가 같으므로 A와 C를 합한 부분과 B와 C를 합한 부분도 넓이가 같다.

A와 C를 합한 부분의 넓이는 곡선 $y=\dfrac{1}{2}x^2$과 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이이고, B와 C를 합한 부분의 넓이는 직선 l의 x절편을 밑변의 길이로 하고 2를 넓이로 하는 직각삼각형의 넓이이다.

A와 C를 합한 부분의 넓이를 S_1, B와 C를 합한 부분의 넓이를 S_2, 직선 l의 x절편을 $k\ (k>0)$라 하면

$$S_1=2\times2-\int_0^2\frac{1}{2}x^2dx$$

$$=4-\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2$$

$$=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\times k\times2=k$$

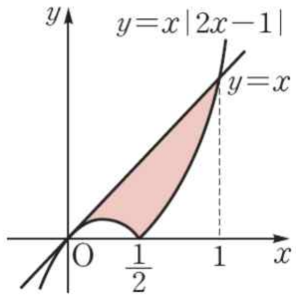
$S_1=S_2$이므로 $k=\dfrac{8}{3}$

따라서 직선 l의 기울기는 $-\dfrac{2}{\frac{8}{3}}=-\dfrac{3}{4}$ 이다.

28) **정답** $\dfrac{1}{4}$

$$y=x|2x-1|=\begin{cases}2x^2-x & \left(x\ge\dfrac{1}{2}\right)\\ -2x^2+x & \left(x<\dfrac{1}{2}\right)\end{cases}$$

$y=x|2x-1|$의 그래프와 직선 $y=x$의 그래프의 교점의 x좌표는



(i) $x\ge\dfrac{1}{2}$일 때,

$2x^2-x=x$에서 $2x^2-2x=0$

$2x(x-1)=0$

$\therefore\ x=1\ \left(\because x\ge\dfrac{1}{2}\right)$

(ii) $x<\dfrac{1}{2}$일 때,

$-2x^2+x=x$에서 $-2x^2=0$

$\therefore\ x=0$

(i), (ii)에서 구하는 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\{x-(-2x^2+x)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\{x-(2x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}2x^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(-2x^2+2x)dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_{\frac{1}{2}}^1$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$$

29) **정답** ②

$$\int_{-a}^{a}(x^3+3x^2+x+a)dx$$

$$=2\int_0^a(3x^2+a)dx$$

$$=2\Big[x^3+ax\Big]_0^a=2a^3+2a^2$$

이므로 $2a^3+2a^2=(a+1)^2$

$2a^3+a^2-2a-1=0$,

$(a+1)(2a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=-\dfrac{1}{2}$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$$-1+\left(-\frac{1}{2}\right)+1=-\frac{1}{2}$$

30) **정답** ③

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$이므로 $f(x)$는 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 도함수이다.

그런데 $y=F(x)$의 그래프가

$0\le x\le a$에서 감소하므로 $f(x)\le0$

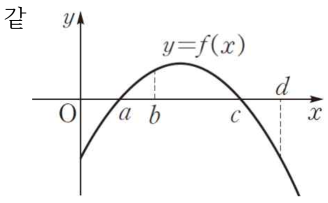
$a\le x\le c$에서 증가하므로 $f(x)\ge0$

$x\ge c$에서 감소하므로 $f(x)\le0$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 오른쪽과 같으므로

$f(0)<0,\ f(a)=0,\ f(b)>0,$

$f(c)=0,\ f(d)<0$



ㄴ. $f(0)f(b)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

31) [정답]④

함수 $y=\sqrt{x-1}+1$의 치역은 $\{y|y\ge1\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x|x\ge1\}$ 이다.

$y=\sqrt{x-1}+1$에서 $\quad y-1=\sqrt{x-1}$

양변을 제곱하면

$(y-1)^2=x-1 \qquad \therefore x=(y-1)^2+1$

x와 y를 서로 바꾸면 역함수는

$y=(x-1)^2+1=x^2-2x+2\,(x\ge1)$

따라서 $a=-2,\ b=2,\ c=1$이므로 $a+b+c=1$

32) [정답] -1

$y=\dfrac{ax+3}{x+b}=\dfrac{a(x+b)+3-ab}{x+b}=\dfrac{3-ab}{x+b}+a$이고, 점근선의 방정식이

$x=4,\ y=-1$이므로

$a=-1,\ b=-4$

$\therefore y=\sqrt{-4x-1}=\sqrt{-4\left(x+\frac{1}{4}\right)}$

따라서 함수 $y=\sqrt{-4x-1}$의 정의역은 $\left\{x \mid x \le -\frac{1}{4}\right\}$이므로 구하는 최댓값은 -1이다.

33) 답 ③

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이고 공차가 2이므로

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

따라서

$\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{a_{k+1}}{a_k}-\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\right)$

$=\sum_{k=1}^{9}\frac{a_{k+1}}{a_k}-\sum_{k=1}^{9}\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}$

$=\left(\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{10}}{a_9}\right)-\left(\frac{a_3}{a_2}+\frac{a_4}{a_3}+\cdots+\frac{a_{10}}{a_9}+\frac{a_{11}}{a_{10}}\right)$

$=\frac{a_2}{a_1}-\frac{a_{11}}{a_{10}}$

$=\frac{3}{1}-\frac{21}{19}=\frac{36}{19}$

34) 답 51

[해설]

각 정사각형의 색칠한 부분의 넓이는

$a_1=\frac{1}{4}\times 1^2,\ a_2=\frac{1}{4}\times 2^2,\ a_3=\frac{1}{4}\times 3^2,\ \cdots,\ a_n=\frac{1}{4}\times n^2$에서

$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{4}k^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{8}k^2$

$=\frac{1}{4}\times\frac{8\times 9\times 17}{6}=51$

35) [정답] ②

$(2x+1)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1(2x)+{}_{10}C_2(2x)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}(2x)^{10}$

$=1+2{}_{10}C_1x+2^2{}_{10}C_2x^2+2^3{}_{10}C_3x^3+\cdots+2^{10}{}_{10}C_{10}x^{10}$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$10(2x+1)^9\cdot 2$

$=2\cdot{}_{10}C_1+2\cdot 2^2{}_{10}C_2x+3\cdot 2^3{}_{10}C_3x^2+\cdots+10\cdot 2^{10}{}_{10}C_{10}x^9$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$20\times 3^9=2{}_{10}C_1+2\cdot 2^2{}_{10}C_2+3\cdot 2^3{}_{10}C_3+\cdots+10\cdot 2^{10}{}_{10}C_{10}$

이므로 구하는 값은 20×3^9이다.

36) [정답] ③

$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{20}$

$=\frac{(x+1)^{21}-1}{(x+1)-1}=\frac{(x+1)^{21}-1}{x}$

따라서 $1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{20}$의 전개식에서 x^k의 계수는 $(x+1)^{21}$의 전개식에서 x^{k+1}의 계수와 같으므로

$a_k={}_{21}C_{k+1}$이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}{}_{21}C_{k+1}$

$={}_{21}C_2+{}_{21}C_3+{}_{21}C_4+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21}$

$=({}_{21}C_0+{}_{21}C_1+{}_{21}C_2+{}_{21}C_3+{}_{21}C_4+{}_{21}C_5+\cdots+{}_{21}C_{21})-{}_{21}C_0-{}_{21}C_1$

$=2^{21}-1-21$

$=2^{21}-22$

37) [정답] ④

동전 2개가 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다.

이때 $\mathrm{V}(X)=20\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$이므로

$\mathrm{V}(2X+1)=4\mathrm{V}(X)$

$=4\times\frac{15}{4}=15$

38) [정답] 268

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{4}=16$

$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\sum_{r=0}^{64}r^2{}_{64}C_r\left(\frac{1}{4}\right)^r\left(\frac{3}{4}\right)^{64-r}=\mathrm{E}(X^2)$

$=12+16^2$

$=268$

참고

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르고 $q=1-p$일 때

(1) $\mathrm{E}(X)=np=\sum_{r=0}^{n}r\,{}_nC_rp^rq^{n-r}$

(2) $\mathrm{V}(X)=npq=\sum_{r=0}^{n}r^2{}_nC_rp^rq^{n-r}-(np)^2$

39) [정답] ③

크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 평균과 표준편차가 각각

$\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{n}}$이므로 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{5}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(|\overline{X}-m|>3)=\mathrm{P}\left(\left|\frac{\overline{X}-m}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right|>\frac{3}{\frac{5}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(|Z|>\frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$

$=1-\mathrm{P}\left(|Z|\le\frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$

$=1-2\times\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{5}\right)$

<0.0456

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{3\sqrt{n}}{5}\right)\ge 0.4772$이므로 $\frac{3\sqrt{n}}{5}>2$에서 $n>\frac{100}{9}$

따라서 n의 최솟값은 12이다.

40) 답 ⑤

[해설] 관광객 1명이 체류기간 동안 지출한 금액을 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(500,\ 10^2)$을 따른다.

관광객 중 임의로 택한 4명이 체류기간 동안 지출한 금액의 평균을 확률변수 $\overline{Y}$라 하면

$E(\overline{Y})=E(Y)=500,\ \ V(\overline{Y})=\frac{V(Y)}{4}=\frac{100}{4}=25=5^2$

이므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(500, 5^2)$을 따르고,

$Z=\frac{\overline{Y}-500}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$\overline{Y}=\frac{X}{4}$이므로

$P(X\ge 1940)=P(4\overline{Y}\ge 1940)=P(\overline{Y}\ge 485)$

$=P\left(\frac{\overline{Y}-500}{5}\ge\frac{485-500}{5}\right)$

$=P(Z\ge -3)$

$=P(-3\le Z\le 0)+0.5$

$=P(0\le Z\le 3)+0.5$

$=0.4987+0.5=0.9987$