

고지우의 난문현답

제 2 회

1. 2012년 3월 교육청
2. 2013년 9월 평가원
3. 2006년 6월 평가원
4. 2001년 경찰대
5. 2014년 7월 교육청
6. 2015년 9월 교육청
7. 2012년 4월 교육청
8. 2010년 경찰대
9. 2006년 10월 교육청
10. 2011년 9월 평가원

1. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$(나) \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 5b_n) = 3$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

2. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n < a_{n+1}, \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k)^2 = 2\left(1 - \frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하시오.

3. 실수전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) 임의의 실수 x, y 에 대하여 $f(x-y) = f(x) - f(y) + xy(x-y)$ (나) $f'(0) = 8$
--

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극댓값을 갖고 $x=b$ 에서 극솟값을 가질 때, $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오.

4. 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(x+2) = -f(x)$ (나) $\int_0^2 f(x) dx = 1$
--

이때, $\int_{-2}^4 f(x) dx$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

5. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

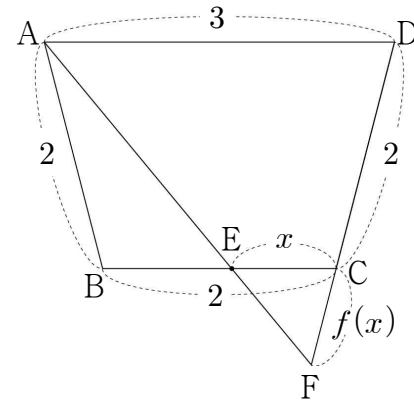
(가) $f(-x) = f(x)$

(나) $f(x+2) = f(x)$

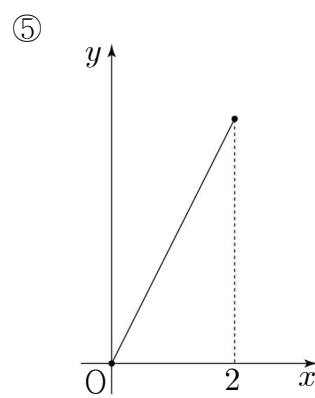
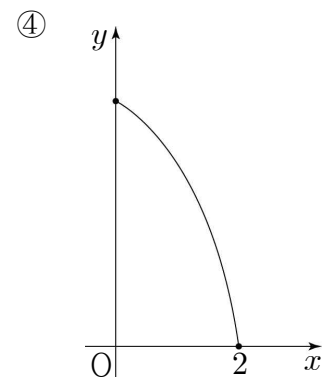
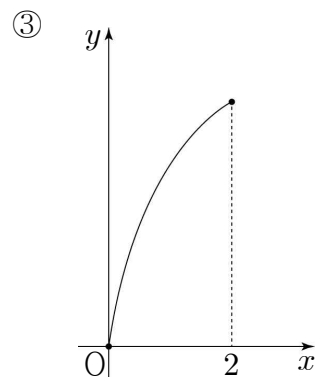
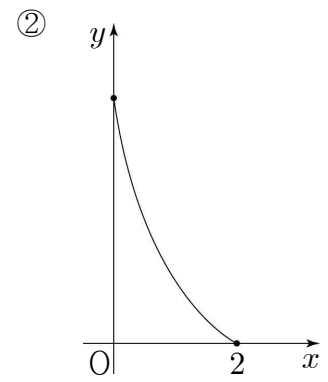
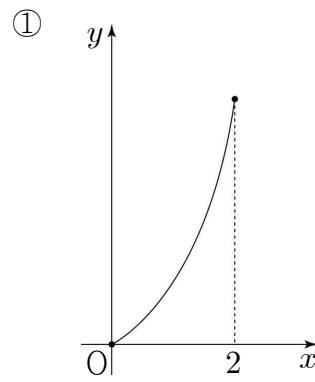
(다) $\int_{-1}^1 (x+2)^2 f(x) dx = 50, \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx = 2$

$\int_{-3}^3 x^2 f(x) dx$ 의 값을 구하시오.

6. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2, \overline{AD} = 3$ 인 등변사다리꼴 ABCD에서 선분 BC 위를 움직이는 점을 E, 직선 AE와 직선 CD의 교점을 F라 하자.



점 C와 점 E 사이의 거리를 $x(0 \leq x \leq 2)$, 점 C와 점 F 사이의 거리를 $f(x)$ 라 할 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 모양으로 알맞은 것은?



7. 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 부등식

$$|x - a_n| \geq |x - a_{n+1}| \quad (n \geq 1)$$

을 만족시키는 x 의 최솟값을 b_n 이라 할 때, 옳은 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $b_1 = \frac{a_1 + a_2}{2}$

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$ 은 공차가 $\frac{3}{2}$ 인 등차수열이다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{10} b_n = 160$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 어느 경찰관이 8월에 관할구역을 이틀 연이어 순찰하지 않으면서 5일 순찰하는 방법의 수는?

- ① ${}_{25}C_5$ ② ${}_{27}C_5$ ③ ${}_{28}C_5$
 ④ ${}_{29}C_5$ ⑤ ${}_{30}C_5$

$$9. \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^5 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^6$$

을 전개하는 식에서 x^2 항의 계수는?

- ① 16 ② 20 ③ 24
 ④ 28 ⑤ 32

10. 주머니 안에 스티커가 1개, 2개, 3개 붙어 있는 카드가 각각 1장씩 들어 있다. 주머니에서 임의로 카드 1장을 꺼내어 스티커 1개를 더 붙인 후 다시 주머니에 넣는 시행을 반복한다. 주머니 안의 각 카드에 붙어 있는 스티커의 개수를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아지는 사건을 A라 하자. 시행을 6번을 하였을 때, 1회부터 5회까지는 사건 A가 일어나지 않고 6회에서 사건 A가 일어날 확률을 $\frac{q}{p}$ 라 하자. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

추가 과제

1. 상수함수가 아닌 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - 2g(x)\}$ 가 존재할 때,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3f(x) + 2g(x) + 1}{f(x) + 2g(x) + 3}$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

2. 함수 $f(x) = \frac{|x(x+2)|}{x(x+1)}$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow -2+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow +0} f(x)$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

3. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + 2}{x - 1} = 3$$

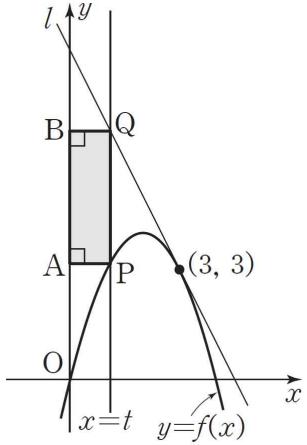
일 때, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\{f(-x)\}^2 - 4}{x^2 - 1}$ 의 값은?

- ① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

4. 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + k$ 는 임의의 두 양수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 일 때, $f(x_1) < f(x_2)$ 를 만족시킨다. 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린 구간 $(1, 2)$ 에서 하나의 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수를 구하시오.

추가 과제

5. 함수 $f(x) = -x^2 + 4x$ 의 그래프 위의 점 $(3, 3)$ 에서의 접선을 l 이라 하자. 직선 $x=t$ ($0 < t < 2$)를 그어 곡선 $y=f(x)$, 접선 l 과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고 두 점 P, Q에서 y 축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하자. 직사각형 APQB의 넓이의 최댓값은?



- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$
 ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

6. $-2 \leq t \leq 1$ 인 실수 t 에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $A(t+2, t-2)$, $B(2-t, 2t^2+t+2)$ 가 있다. 선분 AB의 중점을 M이라 할 때, \overline{OM}^2 의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

7. 지면으로부터 높이가 25m인 지점에서 20m/초의 속도로 지면과 수직으로 위로 던져 올린 물체의 시각 t ($t \geq 0$)에서의 높이 $h(t)$ (m)는

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 25$$

이다. 지면에 도달하는 순간 물체의 속도는?

- ① -20m/초 ② -25m/초 ③ -30m/초
 ④ -35m/초 ⑤ -40m/초

8. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 $f(t)$ 가

$$f(t) = t^3 - 2t^2 - 4t$$

이다. $t > 0$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 가속도는?

- ① 2 ② 4 ③ 6
 ④ 8 ⑤ 10

추가 과제

9. 삼차함수 $f(x) = x(x-2)(x-a)$ 에 대하여

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_a^2 f(x)dx$$

를 만족시키는 서로 다른 모든 상수 a 의 값의 합은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
- ④ 4 ⑤ 5

10. 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 와 도함수 $f'(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

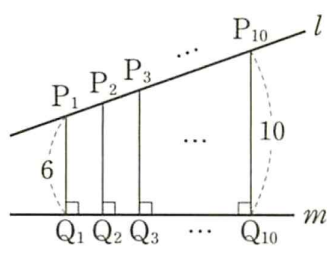
(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = f'(-x)$ 이다.
 (나) $\int_{-1}^1 f(x)dx = 6$

$f'(1) = 8$ 일 때, $f(1)$ 의 값은?

- ① 9 ② 10 ③ 11
- ④ 12 ⑤ 13

11. 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각 S_n, T_n 이라 할 때, $a_{10} + b_{10} = 42, S_{10} + T_{10} = 160$ 이다. 이때 $a_1 + b_1$ 의 값을 구하여라.

12. 오른쪽 그림과 같이 직선 l 위에 같은 간격으로 10개의 점 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{10}$ 을 잡고, 각 점에서 직선 m 에 내린 수선의 발을 차례로 $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{10}$ 이라 하자. $\overline{P_1Q_1} = 6, \overline{P_{10}Q_{10}} = 10$ 일 때, $\overline{P_2Q_2} + \overline{P_3Q_3} + \overline{P_4Q_4} + \dots + \overline{P_9Q_9}$ 의 값은?



- ① 60 ② 61 ③ 62
- ④ 63 ⑤ 64

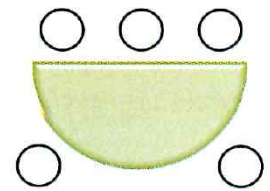
추가 과제

13. $3^x = 4^y = 12^z$ 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$ 의 값을 구하여라.
(단, $xyz \neq 0$)

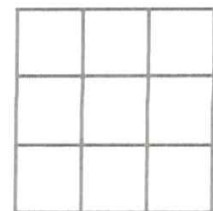
14. 양수 a, b 에 대하여 $a^m = b^n = 5$ 일 때, $\log_{ab} b^2$ 을 m, n 으로 나타내면? (단, $a \neq 1, b \neq 1, ab \neq 1$)

- ① $\frac{2m}{m+n}$ ② $\frac{2n}{m+n}$ ③ $\frac{mn}{m+n}$
 ④ $\frac{2mn}{m+n}$ ⑤ $\frac{m-n}{m+n}$

15. 오른쪽 그림과 같은 탁자에 5명이 둘러앉는 방법의 수를 구하여라.



16. 오른쪽 그림과 같이 정사각형을 9등분한 도형의 각 영역을 서로 다른 9가지 색을 모두 이용하여 칠하는 방법의 수는 $k \times 7!$ 이다. 이때 상수 k 의 값을 구하여라.



추가 과제

17. 어느 음료수 회사에서 이벤트로 음료수 10병중에서 1병의 비율로 병뚜껑에 '한 병 더'라는 글씨를 새겨, 이 뚜껑을 가져온 고객에게는 음료수 한 병을 경품으로 준다고 한다. 이 음료수를 3병 구입한 사람이 경품으로 1병의 음료수를 받을 확률이 $\frac{3^k}{10^4}$ 일 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

18. 어느 호텔을 예약한 사람 중에서 실제로 그 호텔에 투숙하는 사람은 80%라 한다. 방이 20개인 이 호텔에서 같은 날 22개의 예약을 받은 경우 실제로 방이 부족할 확률을 구하여라.
(단, $0.8^{21} = 0.009$, $0.8^{22} = 0.007$ 로 계산한다.)

19. 확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{45}C_x \cdot \frac{2^x}{3^{45}} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 45)$$

일 때, $E(X)$ 와 $V(X)$ 는?

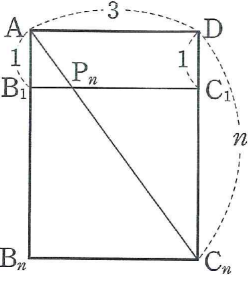
- ① $E(X)=10, V(X)=1$
- ② $E(X)=10, V(X)=5$
- ③ $E(X)=15, V(X)=10$
- ④ $E(X)=30, V(X)=5$
- ⑤ $E(X)=30, V(X)=10$

20. 한 번의 타석에서 안타칠 확률이 0.2인 야구 선수가 10번의 타석에서 안타를 친 횟수를 확률변수 X 라 할 때, $P(X \leq 9)$ 는?

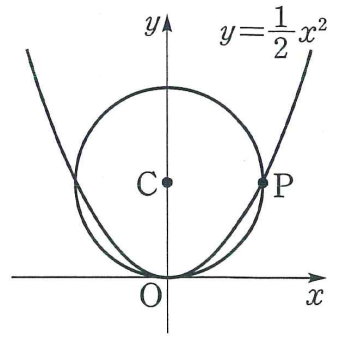
- ① $\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$
- ② $\left(\frac{4}{5}\right)^{11}$
- ③ $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^9$
- ④ $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$
- ⑤ $1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{11}$

추가 과제

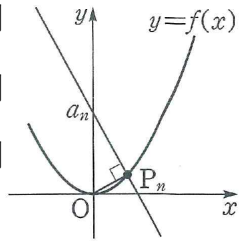
21. 오른쪽 그림과 같이 가로와 길이가 3, 세로의 길이가 n 인 직사각형 AB_nC_nD 에서 두 변 AB_n, DC_n 위에 $\overline{AB_1}=1, \overline{DC_1}=1$ 인 점을 각각 B_1, C_1 이라 하고, $\overline{B_1C_1}$ 과 $\overline{AC_n}$ 의 교점을 P_n 이라 하자. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{AP_n}$ 의 값을 구하여라. (단, n 은 $n \geq 2$ 인 자연수이다.)



23. 오른쪽 그림과 같이 일차함수 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프 위의 한 점 P 와 원점 O 를 지나며 중심이 y 축 위에 있는 원 C 가 있다. 점 P 가 $y = \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프를 따라 원점 O 에 한없이 가까워질 때, 원의 중심 C 가 한없이 가까워지는 점의 y 좌표를 구하여라.



22. 오른쪽 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 $f(x) = x^2$ 의 그래프 위의 점 $P_n\left(\frac{1}{n}, f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ 을 지나고 직선 OP_n 에 수직인 직선의 y 절편을 a_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.)



- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$
- ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{9}$

24. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = 3, \quad \int_{-1}^1 x^2f(x)dx = -2$$

가 성립할 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.²⁴⁾

추가 과제

25. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(-x) = f(x), \int_0^1 f(x)dx = 5$$

일 때, 정적분 $\int_{-1}^1 (2x^3 - x - 1)f(x)dx$ 의 값을 구하여라.

27. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_0^2 f(x)dx = A, \int_1^3 f(x)dx = B, \int_1^2 f(x)dx = C$$

일 때, $\int_0^3 f(x)dx$ 를 A, B, C 를 이용하여 나타내어라.

26. 다항함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = -f(-x)$ 이고

$$\int_{-2}^3 f(x)dx = 3k - 1, \int_0^2 f(x)dx = -5, \int_0^3 f(x)dx = k$$

이다. 이때, 상수 k 의 값을 구하여라.

28. $f(x) = 4x^3 - x^2 + 3x - 2$ 일 때, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_x^1 f(t)dt$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

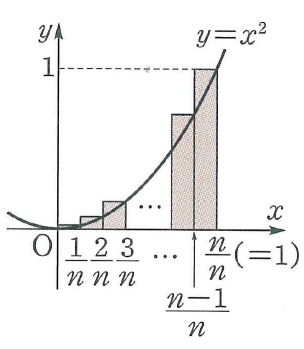
추가 과제

29. 다음은 곡선 $y=x^2$ 과 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법을 이용하여 구하는 과정이다.

구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하면 양 끝 점과 각 분점의 x 좌표는 앞에서부터 차례대로

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1$$

이므로 오른쪽 그림의 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면 구하는 넓이 S 는



$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{} = \frac{1}{3}$$

위의 과정에서 □ 안에 알맞은 식은?

- ① $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2}$ ② $\sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^2}$ ③ $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3}$
 ④ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^3}{n^3}$ ⑤ $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^4}$

30. 정적분을 이용하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{3k}{n}\right)^3 \cdot \frac{2}{n}$ 의 값을 구하여라.

31. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ 중 0, 1, 2의 값 중 어느 하나를 가진다.

$\sum_{i=1}^n x_i = 13, \sum_{i=1}^n x_i^2 = 23$ 일 때, $\sum_{i=1}^n x_i^5$ 의 값을 구하여라.

32. 첫째항부터 제 4항까지의 합이 24이고, 첫째항부터 제 10항까지의 합이 0인 등차수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제 p 항까지의 합이 최대이고, 그때의 수열의 합이 q 일 때, $p+q$ 의 값을 구하여라.

추가 과제

33. 연속하는 20 개의 자연수의 합이 530 일 때, 20 개의 자연수 중에서 가장 큰 수는?

- ① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

34. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$b_{2k-1} = a_1 - 2a_3 + 3a_5 - \dots + (-1)^{k+1} \cdot ka_{2k-1},$$

$$b_{2k} = -a_2 + 2a_4 - 3a_6 + \dots + (-1)^k \cdot ka_{2k}$$

로 정의되는 수열 $\{b_n\}$ 이

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 10$$

을 만족시킬 때, 수열 $\{a_n\}$ 의 공차는?

- ① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

35. 한 평면 위에 있는 6개의 직선 중에서 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않을 때, 6개의 직선으로 만들 수 있는 삼각형의 개수를 구하여라.

36. 지우와 헤리가 각각 오후 2시부터 오후 2시 30분 사이의 임의의 시간에 A 지점에 가서 10분 동안 기다리기로 하였다. 두 사람이 만나게 될 확률을 구하여라.

추가 과제

37. 두 사건 A, B 에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보기 |

- ㄱ. A, B 가 서로 배반사건이면 A, B 는 서로 독립이다.
- ㄴ. A, B 가 서로 독립이면 A, B^c 도 서로 독립이다.
- ㄷ. A^c, B^c 가 서로 독립이면 A, B 도 서로 독립이다.

38. 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 중에서 임의로 한 개의 문자를 뽑을 때, b 를 뽑는 사건을 $[b]$, b 또는 c 를 뽑는 사건을 $[b, c]$ 라 하자. 사건 $[a, b, c, d]$ 와 서로 독립인 사건인 것만을 보기에서 있는 대로 골라라.

| 보기 |

- ㄱ. $[d, f]$
- ㄴ. $[c, d, e]$
- ㄷ. $[c, d, e, f]$

39. 표준편차가 5인 정규분포를 따르는 모집단의 평균을 신뢰도 99%로 추정할 때, 모평균 m 과 표본평균 \bar{X} 의 값 \bar{x} 의 차이가 $\frac{1}{2}$ 이하가 되도록 하려면 적어도 몇 개의 표본을 조사해야 하는가? (단, $P(|Z| \leq 3) = 0.99$)

- ① 100개
- ② 225개
- ③ 400개
- ④ 625개
- ⑤ 900개

40. 어느 도시의 주민 525명을 임의추출하여 자전거 사용률을 조사했더니 16%이었다. 이 도시 주민의 자전거 사용률 p 의 신뢰도 95%의 신뢰구간은? (단, $P(|Z| \leq 2) = 0.95$)

- ① $0.128 \leq p \leq 0.192$
- ② $0.132 \leq p \leq 0.188$
- ③ $0.136 \leq p \leq 0.184$
- ④ $0.140 \leq p \leq 0.180$
- ⑤ $0.144 \leq p \leq 0.176$