미적분과 통계 기본 정복하기 (상)

함수의 극한, 미분, 적분을 어떻게 공부해야하는지 막막해하시는 분들이 많은 것 같습니다. 자세한 기출분석을 통해 미통기의 해석학 부분을 어떻게 정복할 것인가에 대해 알아보도록 하겠습니다.

(상)을 올리긴 올리는데 (하)는 보장 못합니다 안올릴지도 ㅋㅋ

1. 함수의 극한

함수의 극한에서는

(1) lim 계산 문항 정복

(2) 그래프 보고 극한값 찾기 및 연속성 판단

(3) 도형 및 함수를 보고, 식을 세워 구하기

세 가지 능력을 수능시험장까지 반드시 배양하셔야 합니다. 수능시험은 반드시 그렇게 나올 것입니다.

(1) lim 계산 문항 정복

EBS나 교과서 및 각종 기출문제집에서 흔히 볼 수 있습니다.

lim 계산 문항인데, 이는 수능에서 반드시 출제되는 소재중 하나입니다.

극한값을 빠르게 계산하는 능력이 필요합니다. 정석이나 교과서를 통해 유리화, 인수분해 등 여러 방법을 익혀보시고 최적의 방법을 사용하시면 됩니다.

ex)

22. $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+ax+1} = \frac{1}{9}$ 일 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [3점] [201106평]

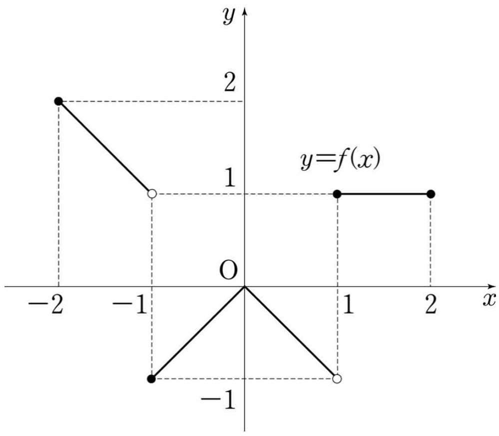
(2) 그래프 보고 극한값 찾기 및 연속성 판단

그래프를 보고, 극한값을 찾거나 혹은 연속하는지를 판단하는 문항이 반드시 나옵니다.

부수적으로 합성함수를 그릴 줄 아느냐, 절댓값을 풀어낼 줄 아느냐를 추가적으로 물어보는 경우가 많습니다.

따라서 기출문제를 면밀하게 풀어보시면서 합성함수의 극한값 구하기, $f(x)+|f(x)|$와 같이 독특하게 주어진 함수를 평가원에서는 어떻게 해석하고 있는가에 주목해서 바라보시면 완벽하게 정복하실 수 있습니다.

7. 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$ 인 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x)+\lim\limits_{x\to1+0} f(x)$ 의 값은? [3점][201106평]

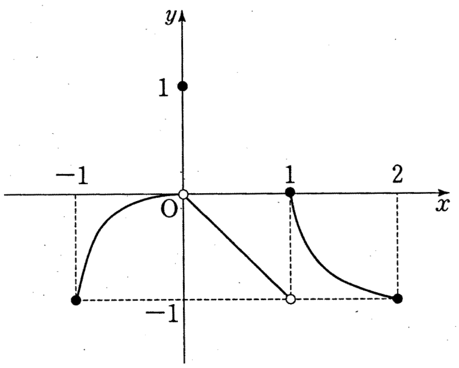


① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

이렇게 1 + 1 = 2냐? 이렇게 물어보는 문항도 있는 반면,

(매우 드문 케이스입니다 수능 때는 절대로 이렇게 쉽게 나오지는 않을 것입니다)

10. 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



폐구간 $[-1,\ 2]$에서 두 함수 $g(x)$, $h(x)$를

$g(x)=\dfrac{f(x)+|f(x)|}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-|f(x)|}{2}$

으로 정의할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점][201006평]

〈 보기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to 1} h(x)$는 존재한다.

ㄴ. 함수 $(h \circ g)(x)$는 폐구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0}(g \circ h)(x)=(g \circ h)(0)$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

이렇게 어려운 문항도 언제든지 나올 수 있다는 점을 반드시 참작하시기 바랍니다.

꼼꼼한 기출문제 분석이 답이라는 사실을 절대로 잊지 마십시오!

(3) 도형 및 함수를 보고 식을 세워 구하기

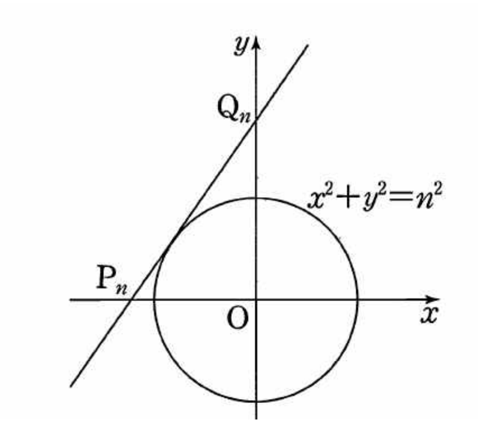
기존의 가형에서는 잘 나오지 않았지만, 이번에 미통기로 넘어오면서 미적분의 비중이 이전보다 커지면서 EBS 등지에서도 꾸준히 강조되고 있습니다. 9평을 봐야 알 수 있겠지만 수능에 나올 가능성이 더 커보입니다.

18. 실수 t 에 대하여 직선 $y=t$ 가 함수 $y=|x^2-1|$ 의 그래프와 만나는 점의 개수를 $f(t)$ 라 할 때, $\lim_{t \to 1-0} f(t)$ 의 값은? [4점][201106평]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

이런 문항입니다. 이 문항을 대비하는 방법은 우리가 기존에 이 문항과 크게 다르지 않습니다.

9. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 기울기가 n이고 y절편이 양수인 직선이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접할 때, 이 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. $l_n=\overline{P_nQ_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{2n^2}$의 값은? [4점][201009평]



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

이 문항을 풀 때 여러분들이 진심 수열의 극한을 몰라서 이걸 못푼다? 말이 안됩니다.

식을 세울 줄 몰라서겠죠. 이러한 문항을 대비하기 위해선 철저히 중학교 기하의 지식들을 익히셔야 합니다. 최소한 공식쯤은 알아야한다는 것이죠.

중학교 3학년 2학기 교과서, 고등학교 1학년 2학기 교과서에 에 원, 함수에 대한 이야기들이 나와 있습니다. 이를 활용하면 좀 더 확실하게 대비할 수 있겠죠?

2. 미분

미분에서는,

(1) 교과서 개념을 활용한 연산문제(미분계수 구하기, 접선의 방정식, 극값 구하기 등등) 정복

(2) f(x)를 보고 미분해서 f(x)의 특성 밝혀내는 것

(3) 개형을 추론하는 것

이 세 가지 능력을 배양하는 것이 가장 중요합니다.

(1) 교과서 개념을 활용한 연산문제(미분계수 구하기, 접선의 방정식, 극값 구하기 등등) 정복

정복하는 방법은 간단합니다. 교과서나 정석의 유제를 많이 푸시면 됩니다.

보통 난이도 조절을 위해 쉽게 내는 도구로 많이 활용되곤 합니다만, 간혹 당황스러운 문제들이 나올 때도 많습니다.

11. 다항함수 $f(x)$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x^2-1} = 3$ 일 때, $\frac{f'(1)}{f(1)}$ 의 값은? [3점][201106평]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

27. 곡선 $y = x^3 - x^2 + a$ 위의 점 $(1,\ a)$ 에서의 접선이 점 $(0,\ 12)$ 를 지날 때, 상수 a 의 값을 구하시오. [4점][201106평]

둘 다 올해 6월 평가원 문제입니다. 요정도만 하시면 됩니다.
교과서만 가지고 충분히 대비할 수 있습니다.

(2) f(x)를 보고 미분해서 f(x)의 특성을 밝혀내는 것

미분해서 극값 찾아서 그래프 잘 그리느냐 정도의 출제의도를 갖고 문제가 나옵니다.

요정도 할 줄 아시면 됩니다.

15. 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+2ax$ 가 구간 $(-\infty,\ \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M 이라 하고, 최솟값을 m 이라 할 때, $M-m$ 의 값은? [4점][201106평]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

미분을 하면 전 구간 증가라는 게 미분 값이 전부 0 이상이다 라는 걸 이용하면 됩니다.

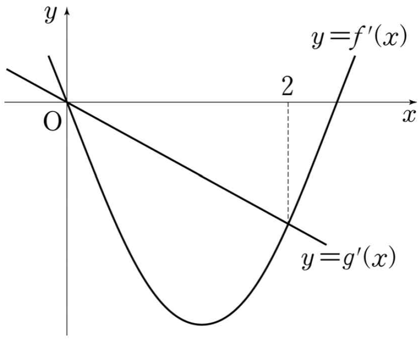
수학(하)의 내용입니다.

이러한 방식으로, 미분을 해서 f(x)의 특성을 알아내는 형태의 문제가 반드시 나옵니다.

(3) 개형을 추론하는 것

이번 6평에도 나왔습니다. 개형을 추론하는 것이죠.

19. 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수의 그래프와 이차함수 $g(x)$ 의 도함수의 그래프가 그림과 같다. 함수 $h(x)$ 를 $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하자. $f(0)=g(0)$ 일 때, 옳은 것만을 <보기> 에서 있는 대로 고른 것은?[4점][201106평]



[보 기]

ㄱ. $0<x<2$ 에서 $h(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $h(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

이 문제는 친절하기도 미분이 되어져 나왔군요. 답을 찾는데에 그리 어려움이 없습니다.

머리가 잘 굴러가시면 f(x) 그래프가 머릿속에 자동적으로 그려질 것이고,
그렇지 않더라도 f'(x)를 통해 알 수 있는 특징들을 이해하고 있다면 푸는데 어렵지 않을겁니다.

개형을 추론하는 문제인데, f'(x)의 특징을 주거나 혹은
개형의 독특한 성질을 주는 경우가 많습니다.

즉, 개형을 추론하면 개형에 대한 특징이 딱 눈에 보이게 되어 있습니다.

쉬운형태로든, 사차함수처럼 어려운 형태로든 어떠한 방식으로든 나올수밖에 없습니다.

3. 적분

적분에서는,

(1) 구분구적법(정적분과 무한급수) 정복

(2) 미분된 형태를 보고 적분의 형태를 추론하는 것

이 두 가지 능력이 매우 중요합니다.

(1) 구분구적법(정적분과 무한급수) 정복

구분구적법으로부터 정적분의 기본정리까지, 그 전개과정을 이해하시면 이쪽 부분의 문항을 푸시는 데에 큰 어려움이 없을 겁니다. 구분구적법으로도 적분을 해석할 수 있다! 이것이 컥포인트 입니다.

정석 및 교과서를 보시면 꼼꼼하게 설명되어 있을 겁니다.

11. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 있다. 2 이상인 자연수 n에 대하여 폐구간 $[0,1]$을 n등분한 각 분점 (양 끝점도 포함)을 차례대로 $0=x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n=1$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점][201009평]

[보 기]

ㄱ. $n=2m$(m은 자연수)이면 $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{f(x_{2k})}{m} \leqq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n}$이다.

ㄴ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left\{\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}\right\}=\int_0^1 f(x)dx$

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)}{n} \leqq \int_0^1 f(x)dx \leqq \sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

(2) 미분의 형태를 보고 적분의 형태를 추론하는 것

사실상 적분의 가장 어려운 주제입니다.

f'(x)의 그래프의 넓이가 f(x)의 함숫값이 된다는 성질을 활용하여 어렵게 내는 걸 평가원에서 즐겨할 것입니다.

17. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(0 \leqq t \leqq 5)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가 다음과 같다.

$$v(t)=\begin{cases} 4t & (0 \leqq t < 1) \\ -2t+6 & (1 \leqq t < 3) \\ t-3 & (3 \leqq t \leqq 5) \end{cases}$$

$0 < x < 3$ 인 실수 x 에 대하여 점 P 가

시각 $t=0$ 에서 $t=x$ 까지 움직인 거리,

시각 $t=x$ 에서 $t=x+2$ 까지 움직인 거리,

시각 $t=x+2$ 에서 $t=5$ 까지 움직인 거리

중에서 최소인 값을 $f(x)$ 라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?[4점][201011수능]

[보 기]

ㄱ. $f(1)=2$

ㄴ. $f(2)-f(1)=\int_{1}^{2} v(t)dt$

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄴ, ㄷ

작년 수능 정답률 20%대의 고난도 문제입니다.

v(t)는 미분된 형태 -> 적분된 형태 추론. 보이시나요?

10. 함수 $f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 1) \\ -x+2 & (x \geq 1) \end{cases}$

에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \int_{-1}^{x} (t-1) f(t)\, dt$$

라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점] [200909평]

<보 기>

ㄱ. $g(x)$는 구간 $(1,\ 2)$에서 증가한다.

ㄴ. $g(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

ㄷ. 방정식 $g(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k가 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

2009학년도 9평 문제입니다. 지금으로부터 3년 전 문제.

이것도 대략 정답률이 30~40%정도였던걸로 기억합니다. 상당히 어렵습니다.

이정도까지 해야하나? 싶긴 하지만 최소한 수능시험 준비자로서 기출문제조차 풀줄 모르는건

수험생의 자세가 아니지 않나 싶습니다.

어떠신가요? 체계를 잡고 공부하면 분명히 쉽게 정복할 수 있습니다.

8개의 주제를 다뤄봤는데,

이번 수능에서도 함수의 극한 및 미적분에서 8문제정도가 나올 것으로 예상되며
이 틀에서 크게 벗어나지 않을 것입니다.

from 포카칩 in orbi